卒論経過報告

市村ゼミ

Akira Matsushita

December 5, 2017

- I uploaded this slide on my github page: https://github.com/myuuuuun/faculty_matching

Sections

Introduction

Subject

- テーマ: 「**School Choice Problem** において, **Strategy-Proof** な範囲内で **Assignment Maximization** を達成するメカニズムの開発」
- **School Choice Problem** は Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) によって定式化された問題で, 複数の学生と複数の学校を中央集権的なメカニズムを用いて上手くマッチさせる方法を考える
  - 各学生は 1 つの学校だけに入学できる一方, 各学校は定員の範囲内で複数の学生を入学させることができる
  - 学生だけを戦略的に行動する主体と考え, 学校側の戦略的行動は考慮に入れない. これにより Two-sided matching market のアルゴリズム (e.g. DA, Boston) と Object allocation(one-sided matching market) のアルゴリズム (e.g. SD, TTC) の両方が利用可能になる
- いずれかの学校に入学できる学生をできるだけ増やしたい (アンマッチになる学生の数をできるだけ減らしたい)

Motivation for Assignment Maximization

- 従来, 進学振り分けには Boston メカニズム (を第三段階までで止め, 余った学生は交渉で決めるアルゴリズム) が使用されていた
- 今年度から進学選択に制度が改められ, 第二段階で Deferred Acceptance アルゴリズムを使用することとなった
- DA アルゴリズムは Boston アルゴリズムに比べ, 良いアルゴリズムだと考えられている (DA has strategy-proofness and stability while BM does not have both of them, 後述)
- しかし今年の進学選択では例年に比べ多くの未内定者を出した. 特に文科二類/文科三類の学生が多く未内定になった

Motivation for Assignment Maximization

- 各学科の第三段階の定員は，基本的に第二段階までに充足できなかった人数と同じ
- ただし法学部は 27 人の不足に対して第三段階では 5 枠のみの募集となっている (文一の指定科類枠)
- 医学部医学科，医学部看護学科，薬学部は第二段階終了時点で定員から 2-3 人不足しているが，第三段階での募集は行っていない

	文1	文2	文3	理1	理2	理3	計
第一段階志望表提出者数(≒進学選択参加者数)	423	382	512	1168	568	97	3150
第二段階までの内定者数	422	356	496	1122	548	98	3042
第二段階までの未内定者数	1	26	16	46	20	−1	108
第二段階までの未内定率	0.236%	6.806%	3.125%	3.938%	3.521%	−1.031%	3.429%
第三段階で内定可能な総枠数	12	7	7	61	37	37	68
内全科類枠	7	7	7	7	7	7	7

Figure 1: 第二段階までの内定者数/第三段階で内定可能な総枠数 (資料 1)

Motivation for Assignment Maximization

理事・副学長（教育担当）

文学部における追加内定の選考について

平成30年度進学選択において、第二段階における受入保留アルゴリズムの導入等、従来の方式から様々な変更を行いました。その結果、アルゴリズムは順調に機能しましたが、第三段階で文科二類及び文科三類の学生が志望できる進学先がきわめて限定されていたことから、例年より多数の未内定者が出ています。

そこで今年度限りの特別措置として、文学部Ａ群及びＧ群で追加受入が可能な専修についてのみ、内定を追加することとしました。

対象となるのは、進学選択で内定しなかった文科二類及び文科三類の学生の内、第二段階において文学部Ａ群またはＧ群に志望登録していた者で、貴君はその対象者であるため、このメールをお送りしています。

Figure 2: 第三段階実施後, 追加採用の措置が取られた

Motivation for Assignment Maximization

- どうして文科二類/三類の学生に未内定者が多く出たのか？ 進学選択参加者の真の preference を知ることはできないので, 実際の所はわからない
- 予想:
  - 昨年までのシステムの場合, 第二段階において内定が出ないリスクを嫌った学生は, 自分の最も行きたい学科よりも必ず内定が出るより志望順の低い学科を選ぶインセンティブがあった
  - 今年からのシステムの場合, DA は Strategy-proofness を満たすので, そのようなインセンティブはない. この結果, 指定科類枠が豊富にある文科一類/理科各類の学生がどこかしらに内定する一方で, そのような枠の無い文科二類/三類の学生は正直申告をした文一/理科の学生に弾き出される形でアンマッチとなった

Motivation for Assignment Maximization

- 実はマッチ数の観点で言えば, DA は優れたアルゴリズムとは言えない (後述)
- DA は stability がある点で優れているが, メカニズムによって決まった割り当てが強制できる (例えば進学選択のような) 場面では必ずしも stability は必要ではない
- アンマッチを出来るだけ出さないことが何よりも重要な場面は, 進学選択以外にもある $\Rightarrow$ worth considering
  - 子どもと保育所のマッチング. (例えば皆が最寄りの保育園に入れることよりも) できるだけ多くの人がどこかしらの保育園に入れることが重要 (この文脈の先行研究: Sasaki and Ura (2016))
  - 研修医のマッチング (おそらく研修先がない状況はまずい)

Why under Strategy-proofness?

- 無制約の Assignment Maximization ではだめか? $\rightarrow$ その問題は単純な組み合わせ最適化として扱える．OR や CS に大量の先行研究が存在
  - 単純に提出された preference の下で最大マッチングを達成するだけなら，Dictator が学生/学校の好みを一切無視して適当に割り当てれば良い
  - 上の問題の解は一般に複数あるが，特に

$$\begin{cases}(\text{Maximum Assignment} \wedge \text{Pareto Efficient}) \text{ を達成するメカニズム} \\ (\text{Maximum Assignment} \wedge \text{Weakly Fair}) \text{ を達成するメカニズム}\end{cases}$$

は最近の研究で見つかった！ (Afacany et al., 2017)

- 他の制約は不要か? $\rightarrow$ 例えば Stability の制約のもとでは，全てのマッチングで (a) アンマッチとなる学生, (b) 学校の定員充足状況 は同じになる (Rural Hospital Theorem, 後述)．したがって意味のある議論はできない

Why under Strategy-proofness?

- Strategy-proofness が無い場合, 学生は「読み合い」をする必要がある (例: Boston メカニズムにおいて, 未内定のリスクが有るが優先度の高い進学先を志望するか, 確実に内定できる優先度の低い進学先を志望するか). これは学生にとってコストになる. Strategy-proofness があれば, そのような読み合いは不要 (一般的な Strategy-proofness のメリット)

- また Strategy-proofness が無い場合, 単純に提出された preference に基いてマッチ数を最大化しても, 真の preference の下での最大マッチ数が達成できるわけではない (学生の戦略的行動の結果). 特に, 制約のない Assignment Maximization を実現するメカニズムは学生の preference reduction に脆弱で, 極めて非効率なマッチングが実現する可能性がある (次スライド)

Why under Strategy-proofness?

- Strategy-proofness の制約の無い Assignment Maximization を考える
  - 常に最大マッチングを達成するメカニズムは Strategy-proof ではない．特に特定の状況下では極めて簡単な戦略的操作で自分のマッチ相手を改善できる．例えば，学生数=学校数=N，各学校の定員は 1 とし，全学生がアンマッチよりもいずれかの学校に入ることが望ましいと考えているとする．全員が正直に自分の選好を申告する時，最大マッチングのサイズは N である．いまプレイヤー 1 以外は正直申告をしているという仮定のもとで，プレイヤー 1 が自分の選好の第 1 位だけを残し，それ以外は unacceptable であると嘘の申告をしたとする．この時最大マッチングのサイズは依然 N であるが，それを達成するメカニズムは必ずプレイヤー 1 とプレイヤー 1 にとって順位第 1 位の学校をマッチさせるので，プレイヤー 1 は嘘の申告によって (弱い意味で) 自分の効用を改善することができる．formal proof は後述
  - Preference revelation game の均衡 (NE) ではアンマッチにならない程度に選好リストを削ることが最適となり，チキンレースのような状態になってしまう．そういった戦略的行動の結果として，SP な範囲内で Assignment Maximization を行うメカニズムよりも unmatch が増えてしまう可能性がある

Model and Properties

Model Settings of School Choice Problem

Definition (School Choice Problem)

School Choice Problem $(I, S, q, \succ, P)$ consists of: [1]

- a finite set of students: $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$
- a finite set of schools: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$
- a capacity vector: $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, where q_s denotes the capacity of the school $s \in S$
- a list of strict priorities of schools over students: $\succ = (\succ_s)_{s \in S}$, where $\succ_s$ is a linear order [2] over $I \cup \{s\}$ [3]. Here s denotes the outside option for $s \in S$
- a list of strict preferences of students over schools: $P = (P_i)_{i \in I}$, where P_i denotes student i's preference relation [4] over $S \cup \{i\}$. Here i denotes the outside option for $i \in I$

---

[1] We mostly follow the notation in Abdulkadiroğlu et al. (2017)

[2] A binary relation R on a set X is a linear order(total order) if R satisfies (1) completeness: $\forall x, y \in X, xRy \vee yRx$, (2) transitivity: $\forall x, y, z \in X, (xRy \wedge yRz) \implies xRz$, and (3) antisymmetry: $\forall x, y \in X, (xRy \wedge yRx) \implies x = y$

[3] In general the school choice problem assumes all students are acceptable to each school

[4] Here we assume preferences are rational and strict, which implies they are linear order(s)

Model Settings of School Choice Problem

Definition (Matching)

A matching (or assignment or allocation) is a function $\mu : I \to S \cup I$ that satisfies following properties:

1. $\forall i \in I, \mu(i) \notin S \implies \mu(i) = i$
2. $\forall s \in S, \left|\mu^{-1}(s)\right| \leq q_s$, where $|I_1|$ denotes the size of $I_1 \subseteq I$

- $\mathcal{P}_i$ をプレイヤー $i \in I$ のあり得る P_i 全体の集合とし, $\mathcal{P}^I = \times_{i \in I} \mathcal{P}_i$ とおく
- $\mathcal{M}$ をあり得るマッチング μ 全体の集合とする
- $|\mu|$ を学生と学校のペアの総数, i.e., $|\mu| \equiv \sum_{s \in S} \left|\mu^{-1}(s)\right|$ と定義する
- 各学生 $i \in I$ に対し, R_i を, $s_1 P_i s_2 \iff [s_1 R_i s_2] \wedge \neg[s_2 R_i s_1]$ で定義する
- 同様に各学校 $s \in S$ に対し, $\succsim_s$ を, $i_1 \succ_s i_2 \iff [i_1 \succsim_i i_2] \wedge \neg[i_2 \succsim_i i_1]$ で定義する

Model Settings of School Choice Problem

Definition (Mechanism)

A (deterministic) mechanism $(\mathcal{P}^I, \phi)$ consists of:

1. a set of possible reported preference profiles $\mathcal{R}^I$
2. a function $\phi : \mathcal{P}^I \to \mathcal{M}$, which selects a matching $\mu \in \mathcal{M}$ based on a reported preference profile $P \in \mathcal{P}^I$ (and exogenously given $\succ$)

- Probabilistic mechanism(e.g. weak priority の仮定の下での probabilistic tie-breaking や probabilistic serial dictatorship) を考えることも出来るが，ここでは deterministic mechanism だけを考える
- 以降単に Choice function ϕ を用いて mechanism を表現する

Individual Rationality

Definition (Blocking by a student)

A student $i \in I$ **blocks a matching** $\mu \in \mathcal{M}$ if $iP_i\mu(i)$

Definition (Blocking by a school)

A school $s \in S$ **blocks a matching** $\mu \in \mathcal{M}$ if $\exists i \in \mu^{-1}(s)$ s.t. $s \succ_s i$

Definition (Individual Rationality)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is **individually rational** if no students and no schools block μ. i.e.,

- $\forall i \in I, \mu(i) R_i i$, and
- $\forall s \in S, \forall i \in \mu^{-1}(s), i \succsim_s s$

- Assignment Maximization の文脈では, 断りのない限り, マッチングとは individually rational なマッチングを指すものとする

Non-Wastefulness, Fairness

Definition (Non-Wastefulness)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is **non-wasteful** if

$$\forall s \in S, \forall i \in I,\ sP_i\mu(i) \implies \left[\left|\mu^{-1}(s)\right| = q_s \vee s \succ_s i\right]$$

Definition (Justified Envy)

A student $i \in I$ has **justified envy** for school $s \in S$ under a matching $\mu \in \mathcal{M}$ if

$$[sP_i\mu(i)] \ \wedge\ [\exists j \in \mu^{-1}(s) \text{ s.t. } i \succ_s j]$$

Definition (Fairness)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is **fair** if no student has justfied envy for any school, i.e.,

$$\nexists (i, s) \in I \times S,\ [sP_i\mu(i)] \wedge [\exists j \in \mu^{-1}(s) \text{ s.t. } i \succ_s j]$$

Stability

Definition (Blocking by a pair)

A pair $(i, s) \in I \times S$ **blocks a matching** $\mu \in \mathcal{M}$ if

$$\left[sP_i\mu(i)\right] \;\wedge\; \left[\left[\left|\mu^{-1}(s)\right| < q_s \wedge i \succ_s s\right] \vee \left[\exists j \in \mu^{-1}(s) \text{ s.t. } i \succ_s j\right]\right]$$

Definition (Stability)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is **pairwise stable** (or simply **stable**) if

- no student $i \in I$ and no school $s \in S$ block μ, and
- no pair $(i, s) \in I \times S$ blocks μ

Proposition (Stability as Fairness)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is stable if and only if μ is individually rational, non-wasteful and fair

Pareto Efficiency

Definition (Pareto Domination)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ **Pareto dominates** another matching $\mu' \in \mathcal{M}$ if

- $\forall i \in I, \mu(i) R_i \mu'(i)$
- $\exists i \in I, \mu(i) P_i \mu'(i)$

Definition (Pareto Efficiency)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is **Pareto efficient** if $\nexists \mu' \in \mathcal{M}$ that Pareto dominates μ

- Pareto efficiency implies individual rationality and non-wastefulness

Properties of Mechanism

Definition (Extension of Matching Properties to Mechanism 1)

A mechanism ϕ is individually rational / non-wasteful / fair / stable / Pareto efficient if $\forall P \in \mathcal{P}^I$, $\phi(P)$ is individually rational / non-wasteful / fair / stable / Pareto efficient

Definition (Extension of Matching Properties to Mechanism 2)

A mechanism ϕ Pareto dominates another mechanism ψ if

- $\exists P \in \mathcal{P}^I$, $\phi(P)$ Pareto dominates $\psi(P)$
- $\nexists P \in \mathcal{P}^I$, $\psi(P)$ Pareto dominates $\phi(P)$

- ある mechanism が [性質 X] だということは, 提出された preference list に基いて matching が X だというだけで, 真の preference で X だとは限らない. 実現した matching が本当に X であることを保証するためには, 次に述べる Strategy-proofness が重要

Strategy-Proofness

Definition (Strategy-Proofness)

A mechanism ϕ is (individually) **strategy-proof** if $\forall P \in \mathcal{P}^I, \forall i \in I, \forall P'_i \in \mathcal{P}_i$,

$$\phi(P)(i) \ R_i \ \phi(P'_i, P_{-i})(i)$$

- $\phi_i(P) \equiv \phi(P)(i)$ と定義する
- この時, $\phi(P)(i) \ R_i \ \phi(P'_i, P_{-i})(i) \iff \phi_i(P) \ R_i \ \phi_i(P'_i, P_{-i})$
- Preference revelation game において, 正直申告が弱支配戦略である, ということ
- Strategy-proofness があれば, 全ての学生が真の preference を報告することが期待できる

Size-wise Domination

- ここでは $\mathcal{M}$ を **individually rational** な **matching** の集合とする

Definition (Size-wise Domination of Matching)

A matching $\mu \in \mathcal{M}$ **size-wise dominates** another matching $\mu' \in \mathcal{M}$ if $|\mu| > |\mu'|$. A matching $\mu \in \mathcal{M}$ is **size-wise maximal** if $\nexists \mu' \in \mathcal{M}$ s.t. $|\mu'| > |\mu|$

Definition (Size-wise Domination of Mechanism)

A mechanism ϕ **size-wise dominates** another mechanism ψ if

- $\forall P \in \mathcal{P}^I, |\phi(P)| \geq |\psi(P)|$
- $\exists P \in \mathcal{P}^I, |\phi(P)| > |\psi(P)|$

A mechanism ϕ is **size-wise maximal** if ϕ is not dominated by any mechanism

Research Goals

- 以上の概念を用いて具体的な研究目標を定義する

1. 「任意の preference の下で, strategy-proof メカニズムによって実現できる最大マッチ数と同じマッチ数を実現する」ような strategy-proof メカニズムは存在するか? i.e.,

$$\overset{?}{\exists}\phi : \mathrm{SP} \text{ s.t. } \forall P \in \mathcal{P}^I, \forall \psi : \mathrm{SP}, |\phi(P)| \geq |\psi(P)|$$

2. 他の strategy-proof メカニズムを size-wise dominate する strategy-proof メカニズムは存在するか? 特に Deferred Acceptance アルゴリズムを size-wise dominate する strategy-proof メカニズムは存在するか?

3. 2 のようなメカニズムが存在しない場合, そのようなメカニズムが存在するような preference の最大部分集合 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ はなにか?

4. Preference revelation game に不完備情報を導入した場合, 既存の strategy-proof メカニズムと無制約に Assignment Maximization を達成するメカニズムとで, 均衡 (BNE) の下ではどちらのマッチ数が多くなるか?

Major Algorithms

Boston Mechanism

Definition (Boston Mechanism (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003))

Boston Mechanism(BM) $\phi^{\mathrm{BM}} : \mathcal{P}^I \to \mathcal{M}$ is defined as follows:

- N_k を step k で propose を行う学生の集合とする．$N_1 = I$ とする
- **Step** k　各 $i \in N_k$ に対し，選好順が k 番目に高い学校を s_i とする．
  - $s_i = i$ の場合，その学生をアンマッチとして確定する
  - それ以外の場合，i は s_i に propose する

  各学校 $s \in S$ は，step k で propose してきた acceptable な学生を priority の高い順に並び替え，定員 q_s 人が満たされるまでマッチする．マッチしなかった学生を reject し，全ての $s \in S$ について合わせて N_{k+1} とする．$|N_{k+1}| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し，現在の仮マッチ (+アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{BM}}(P)$ とする．それ以外の場合は step $k+1$ に進む

Boston Mechanism

- Properties of Boston Mechanism:
  - not strategy-proof
  - individually rational and non-wasteful, but not fair
  - Pareto efficient
- Example: suppose the true preferences and the priorities are as follows

$$
\begin{array}{ll}
P_{i_1} : s_2 \ s_1 \ \underline{s_3} \ i_1 & \qquad \succ_{s_1} (1) : i_1 \ i_2 \ s_1 \\
P_{i_2} : \underline{s_1} \ s_2 \ s_3 \ i_2 & \qquad \succ_{s_2} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \ s_2 \\
P_{i_3} : \underline{s_2} \ s_3 \ i_3 & \qquad \succ_{s_3} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \ s_3
\end{array}
$$

where numbers in () are capacities. The underlined schools are BM matchings. If i_1 posts a false preference $P'_{i_1} : s_1 \ s_3 \ i_1$, then i_1 will be better off (from s_3 to s_1). Thus Boston mechanism is not strategy-proof

Deferred Acceptance Algorithm

Definition (Deferred Acceptance Algorithm (Gale and Shapley, 1962))

Deferred Acceptance Algorithm(DA) $\phi^{\mathrm{DA}} : \mathcal{P}^I \to \mathcal{M}$ is defined as follows:

- N_k を step k で propose を行う学生の集合とする．$N_1 = I$ とする
- **Step** k　各 $i \in N_k$ に対し，まだ propose をしていない学校の中で，選好順が最も高い学校を s_i とする．
  - $s_i = i$ の場合，その学生をアンマッチとして確定する
  - それ以外の場合，i は s_i に propose する

  各学校 $s \in S$ は，step k で propose してきた acceptable な学生と step k-1 で仮マッチしていた学生を priority の高い順に並び替え，定員 q_s 人までと仮マッチする．それ以外の学生を reject し，全ての $s \in S$ について合わせて N_{k+1} とする．$|N_{k+1}| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し，現在のマッチ (+アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{DA}}(P)$ とする．それ以外の場合は step $k + 1$ に進む

Deferred Acceptance Algorithm

procedure $\textsc{Deferred Acceptance}(P)$
  $S_i \leftarrow [P_i$ に従って $S \cup \{i\}$ を降順 (好ましい順) に並べたもの$], \forall i \in I$
  $M \leftarrow \emptyset, N \leftarrow I$; ▷ $M(\subseteq I \times (S \cup I))$ は仮マッチの集合, N は学生の queue
  while $N \neq \emptyset$ **do**
    $i \leftarrow N$.pop(); ▷ N から先頭の 1 人を取り出す
    $s \leftarrow S_i$.pop(); ▷ S_i から先頭の (最も選好順位の高い)1 校を取り出す
    if $s = i$ **then**
      M.push$((i, i))$; ▷ 選好表最上位が i なら, unmatch として確定
    else if $s \succ_s i$ **then**
      N.push(i); ▷ i が s にとって unacceptable なら, i を queue に戻す
    else if $|\{j | (j, s) \in M\}| < q_s$ **then**
      M.push$((i, s))$; ▷ s の枠が空いていれば, i と s をマッチ
    else
      $w \leftarrow \min\{j \mid (j, s) \in M\}$; ▷ s がマッチしている学生の内, 最も priority の低い人
      if $i \succ_s w$ **then**
        M.push$((i, s))$; ▷ s が自分より priority の低い人とマッチしていれば
        M.remove$((w, s))$; ▷ その人とのマッチを解消し, s と i をマッチ
        N.push(w); ▷ その後, w は学生の queue に戻す
      end if
    end if
  end while
  Define $\phi^{\mathrm{DA}}(i) = \{s \mid (i, s) \in M\}$; **return** ϕ^{DA}; ▷ M を関数 ϕ^{DA} に変換して返す
end procedure

Deferred Acceptance Algorithm

- Properties of Deferred Acceptance Algorithm:
  - strategy-proof (Dubins and Freedman (1981), Roth (1982a))
  - stable
  - Pareto dominates any other stable matching
  - not Pareto efficient

- Example: suppose true preferences and priorities are given by

$$
\begin{aligned}
P_{i_1} &: s_2\ \underline{s_1}\ i_1 \\
P_{i_2} &: s_1\ \underline{i_2} \\
P_{i_3} &: s_1\ \underline{s_2}\ i_3
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\succ_{s_1} (1) &: i_1\ i_2\ i_3\ s_1 \\
\succ_{s_2} (1) &: i_3\ i_1\ s_2
\end{aligned}
$$

The underlined schools are DA matchings. Here swapping i_1 and i_3's allocation Pareto improves both students. Thus DA is not Pareto efficient

Deferred Acceptance Algorithm

- Major results:

Theorem (Rural Hospital Theorem (Roth, 1986))

For any preference $P \in \mathcal{P}^I$, the set of unmatched students and that of vacant seats of schools are exactly the same under all stable matchings

Theorem (Abdulkadiroğlu et al. (2009), Kesten and Kurino (2017))

No strategy-proof mechanism Pareto dominates DA

Serial Dictatorship

Definition (Serial Dictatorship (Hylland and Zeckhauser, 1979))

Given a linear order over I, $\succ$, Serial Dictatorship(SD) $\phi^{SD}_{\succ} : \mathcal{P}^I \to \mathcal{M}$ is defined as follows:

- **Step** k $\succ$ の高い順に上から k 番目の学生を i とする．まだ定員に空きがあり，かつ i が acceptable な学校のうち，i の選好順が最も高い学校と i をマッチさせる．そのような学校がない場合はアンマッチとして確定する．$k = |I|$ であればアルゴリズムを終了し，その時点のマッチングを $\phi^{SD}_{\succ}(P)$ とする．そうでなければ step $k+1$ に進む

- $\succ$ は preference list を見る前に決めておく必要があることに注意．P に依存して $\succ$ を決めた場合，strategy-proof ではなくなる可能性がある (後述)

- $\succ_s$ が全ての $s \in S$ で等しい場合には，$\succ$ を決定するのは容易 (e.g. 点数の高い順，年収の低い順)．ただしその場合 $\phi^{DA}(P) = \phi^{SD}_{\succ}(P) = \phi^{TTC}(P)$ になる．そうでない場合には common priority を決める何らかのルールが必要

Serial Dictatorship

- Properties of Serial Dictatorship:
  - strategy-proof (Roth, 1982b)
  - not stable(individually rational and non-wasteful, but not fair)
  - Pareto efficient
- 学校側の priority が特にない (誰でも良い) 場合, common priority をランダムに決める Randomized Serial Dictatorship(RSD) を用いて, 事前の意味での公平性を担保することが多い

Top Trading Cycles

Definition (Top Trading Cycles (Shapley and Scarf (1974), Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003)))

Top Trading Cycles(TTC) $\phi^{\mathrm{TTC}} : \mathcal{P}^I \to \mathcal{M}$ is defined as follows:

- N_k, L_k を step k で残っている学生, 学校の集合とする．$N_1 = I, L_1 = S$ とする
- **Step** k　次のようにして有向グラフを作る：すべての $i \in N_k$ と $s \in L_k$ をグラフのノードとみなす．各 $i \in N_k$ は $L_k \cup \{i\}$ の中で最も選好順の高い学校に有向エッジを引く．同様に各 $s \in L_k$ は $N_k \cup \{s\}$ の中で最も priority の高い学生に有向エッジを引く．こうして出来た有向グラフには少なくとも 1 つの cycle(閉路) が存在する．各 cycle に対し，その中の学生と，その学生が指している学校をマッチさせる．N_k から cycle を構成した学生を取り除き，N_{k+1} とする．L_k から定員が満たされた学校を取り除き，L_{k+1} とする．$|N_{k+1}| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し，現在のマッチ (+アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{TTC}}(P)$ とする．それ以外の場合は step $k+1$ に進む

Top Trading Cycles

- Properties of Top Trading Cycles:
  - strategy-proof
  - not stable(individually rational and non-wasteful, but not fair)
  - Pareto efficient

- Example: suppose true preferences and priorities are given by

$$
\begin{array}{ll}
P_{i_1} : \underline{s_1} \; i_1 & \succ_{s_1} (1) : i_3 \; i_2 \; i_1 \; s_1 \\
P_{i_2} : s_1 \; s_2 \; \underline{s_3} \; i_2 & \succ_{s_2} (1) : i_1 \; i_2 \; i_3 \; s_2 \\
P_{i_3} : \underline{s_2} \; s_1 \; s_3 \; i_3 & \succ_{s_3} (1) : i_2 \; i_1 \; i_3 \; s_3
\end{array}
$$

The underlined schools are TTC matchings. Here (i_2, s_1) blocks $\phi^{\text{TTC}}(P)$ since $s_1 P_{i_2} s_3 \wedge i_2 \succ_{s_1} i_1$. Thus TTC is not stable

Results

Notes

- 以降, $\mathcal{M}$ は individually rational な matching 全体の集合を指すものとする
- 以降誤解のない場合は, ある mechanism ϕ と preference $P \in \mathcal{P}^I$ に対する各 $i \in I$ のマッチ相手 $\phi_{i_1}(P), \ldots, \phi_{i_n}(P)$ を並べて

$$\phi(P) = (\phi_{i_1}(P), \ldots, \phi_{i_n}(P))$$

とかく

- 以降 $|I| < \sum_{s \in S} q_s$ であるケースだけを扱う

Results from Afacany et al. (2017)

- 同じく Assignment maximization を扱っている Afacany et al. (2017) から, baseline になる結果をいくつか紹介する

Proposition (Proposition 1 in Afacany et al. (2017))

No strategy-proof mechanism is size-wise maximal(among all mechanisms)

Proposition (Proposition 2 in Afacany et al. (2017))

There is no size-wise domination between any pair of mechanisms among the DA, TTC, BM, and SD

Proposition (Proposition 6 in Afacany et al. (2017))

No mechanism is maximal in any Nash equlibrium of the preference revelation game

Results from Afacany et al. (2017)

Proof of Proposition 1 in Afacany et al. (2017).

Suppose for a contradiction that ϕ is a strategy-proof maximal mechanism. Consider the following preferences and priorities:

$$P_{i_1} : s_1 \; s_2 \; i_1 \qquad \succ_{s_1} (1) : i_1 \; i_2 \; s_1$$

$$P_{i_2} : s_1 \; i_2 \qquad \succ_{s_2} (1) : i_1 \; i_2 \; s_2$$

Since ϕ is maximal, $\phi(P) = (s_2, s_1)$.

Next consider $P'_{i_1} : s_1 \; i_1$. To hold SP and maximality, the matching should be $\phi(P'_{i_1}, P_2) = (i_1, s_1)$.

Finally consider $P'_{i_2} : s_1 \; s_2 \; i_1$. To keep SP, the matching should be $\phi(P'_{i_1}, P'_{i_2}) = (i_1, s_1)$, which contradicts the maximality $\square$

Results from Afacany et al. (2017)

(A part of) proof for the Proposition 2 in Afacany et al. (2017).

We only show that (1) DA does not size-wise dominate TTC, and (2) TTC does not size-wise dominate DA

(1) consider the following preferences and priorities

$$
\begin{array}{ll}
P_{i_1} : s_1 \ i_1 & \succ_{s_1} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \ s_1 \\
P_{i_2} : s_1 \ s_2 \ s_3 \ i_2 & \succ_{s_2} (1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ s_2 \\
P_{i_3} : s_2 \ s_1 \ s_3 \ i_3 & \succ_{s_3} (1) : i_2 \ i_1 \ i_3 \ s_3
\end{array}
$$

Then $\phi^{\mathrm{DA}}(P) = (i_1, s_1, s_2)$ while $\phi^{\mathrm{TTC}}(P) = (s_1, s_3, s_2)$. Therefore DA does not size-wise dominate TTC

Results from Afacany et al. (2017)

(A part of) proof for the Proposition 2 in Afacany et al. (2017) (cont.)

(2) consider the following preferences and priorities

$$
\begin{array}{ll}
P_{i_1}: s_1\ s_2\ i_1 & \succ_{s_1}(1): i_3\ i_2\ i_1\ s_1 \\
P_{i_2}: s_1\ i_2 & \succ_{s_2}(1): i_1\ i_2\ i_3\ s_2 \\
P_{i_3}: s_2\ s_3\ i_3 & \succ_{s_3}(1): i_2\ i_1\ i_3\ s_3
\end{array}
$$

Then $\phi^{DA}(P) = (s_2, s_1, s_3)$ while $\phi^{TTC}(P) = (s_1, i_2, s_2)$. Therefore TTC does not size-wise dominate DA □

Original Results

- 自分で出した (失敗を含めた) 結果を紹介する

Proposition (Proposition 1)

Consider the following mechanism ϕ: for a submitted $P \in \mathcal{P}^I$, choose the common priority $\succ(P)$ so that the serial dictatorship induced by $\succ(P)$ will obtain the maximal matching and do $\phi^{SD}_{\succ(P)}$. Then ϕ is not strategy-proof

Proof.

Consider the following preferences and priorities:

$$
\begin{aligned}
&P_{i_1} : s_1 \ s_2 \ s_3 \ i_1 && \succ_{s_1}(1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ s_1 \\
&P_{i_2} : s_1 \ s_2 \ i_2 && \succ_{s_2}(1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ s_2 \\
&P_{i_3} : s_1 \ s_2 \ i_3 && \succ_{s_3}(1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ s_3
\end{aligned}
$$

Given P, $\succ(P)$ should be $\succ_1$: i_2, i_3, i_1 or $\succ_2$: i_3, i_2, i_1. If $\succ_1$ is the case, consider i_3's preference manipulation $P'_{i_3} : s_1 \ i_3$. Then $\succ(P_{i_1}, P_{i_2}, P'_{i_3}) : i_3 \ i_2 \ i_1$. So i_3 will be better off from $s_2 \to s_1$. If $\succ_2$ is the case, i_2 has an incentive to conduct the same manipulation. So this mechanism is not strategy-proof. □

Original Results

Proposition (Proposition 2-1)

Consider the following mechanism ϕ: for a submitted $P \in \mathcal{P}^I$, conduct both DA and TTC. If $|\phi^{\text{DA}}(P)| \geq |\phi^{\text{TTC}}(P)|$, set $\phi(P) = \phi^{\text{DA}}(P)$. Otherwise set $\phi(P) = \phi^{\text{TTC}}(P)$. Then ϕ is not strategy-proof

Proof.

Consider the following preferences and priorities:

$$
\begin{array}{ll}
P_{i_1} : s_1 \ i_1 & \succ_{s_1} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \ s_1 \\
P_{i_2} : s_1 \ s_2 \ s_3 \ i_2 & \succ_{s_2} (1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ s_2 \\
P_{i_3} : s_2 \ s_1 \ s_3 \ i_3 & \succ_{s_3} (1) : i_2 \ i_1 \ i_3 \ s_3
\end{array}
$$

Then $\phi^{\text{DA}}(P) = (i_1, s_1, s_2)$ and $\phi^{\text{TTC}}(P) = (s_1, s_3, s_2)$. So $\phi(P) = (s_1, s_3, s_2)$

Original Results

Proof (Cont.)

Consider i_2's manipulation $P'_{i_2} : s_1 \;\; i_2$. Then $\phi^{\text{DA}}(P_1, P'_{i_2}, P_3) = (i_1, s_1, s_2)$ and $\phi^{\text{TTC}}(P_1, P'_{i_2}, P_3) = (s_1, i_2, s_2)$. So $\phi(P_1, P'_{i_2}, P_3) = (i_1, s_1, s_2)$

Suppose i_2's true preference is P_2. Since i_2 can improve their matching $s_3 \to s_1$ by misreporting P'_{i_2}, ϕ is not strategy-proof. $\square$

Proposition (Proposition 2-2)

Consider the following mechanism ϕ: for a submitted $P \in \mathcal{P}^I$, conduct both DA and TTC. If $|\phi^{\text{DA}}(P)| > |\phi^{\text{TTC}}(P)|$, set $\phi(P) = \phi^{\text{DA}}(P)$. Otherwise set $\phi(P) = \phi^{\text{TTC}}(P)$. Then ϕ is not strategy-proof

Original Results

Proof.

Consider the following preferences and priorities:

$$\begin{array}{ll} P_{i_1} : s_1 \; s_2 \; i_1 & \succ_{s_1} (1) : i_3 \; i_2 \; i_1 \; s_1 \\ P_{i_2} : s_1 \; i_2 & \succ_{s_2} (1) : i_1 \; i_2 \; i_3 \; s_2 \\ P_{i_3} : s_2 \; s_3 \; i_3 & \succ_{s_3} (1) : i_2 \; i_1 \; i_3 \; s_3 \end{array}$$

Then $\phi^{DA}(P) = (s_2, s_1, s_3)$ while $\phi^{TTC}(P) = (s_1, i_2, s_2)$. So $\phi(P) = (s_2, s_1, s_3)$

Consider i_1's manipulation $P'_{i_1} : s_1 \; i_1$. Then $\phi^{DA}(P'_1, P_{i_2}, P_3) = (i_1, s_1, s_2)$ and $\phi^{TTC}(P'_1, P_{i_2}, P_3) = (s_1, i_2, s_2)$. So $\phi(P'_1, P_{i_2}, P_3) = (s_1, i_2, s_2)$

Suppose i_1's true preference is P_1. Since i_1 can improve their matching $s_2 \to s_1$ by misreporting P'_{i_1}, ϕ is not strategy-proof. □

Original Results

Proposition (Proposition 3)

No strategy-proof mechanism always gives a maximal matching among the matchings induced by any other strategy-proof mechanism, i.e.,

$$\nexists \phi : \text{SP s.t. } \forall P \in \mathcal{P}^I, \forall \psi : \text{SP}, |\phi(P)| \geq |\psi(P)|$$

Proof.

Suppose for a contradiction that ϕ is such a mechanism. Consider the same preferences and priorities as used in the proof of the proposition 1 of Afacany et al. (2017):

$$\begin{array}{ll} P_{i_1} : s_1 \ s_2 \ i_1 & \succ_{s_1}(1) : i_1 \ i_2 \ s_1 \\ P_{i_2} : s_1 \ i_2 & \succ_{s_2}(1) : i_1 \ i_2 \ s_2 \end{array}$$

Given a common priority $\succ_1$: i_1 i_2, $\phi^{SD}_{\succ_1}(P) = (s_1, s_2)$. Therefore, to keep the maximality of ϕ, $\phi(P) = (s_1, s_2)$ must hold

Original Results

Proof (Cont.)

Next consider $P'_{i_1} : s_1 \ i_1$. Then $\phi^{SD}_{\succ_1}(P) = (s_1, i_2)$. To hold SP and maximality, the matching should be $\phi(P'_{i_1}, P_2) = (i_1, s_1)$.

Finally consider $P'_{i_2} : s_1 \ s_2 \ i_1$. To keep SP, the matching should be $\phi(P'_{i_1}, P'_{i_2}) = (i_1, s_1)$, which contradicts the maximality since $\phi(P'_{i_1}, P_2) = (s_1, s_2)$ $\square$

- This is obvious from the propositon 1 of Afacany et al. (2017)

Original Results

Claim (Claim 1)

Assume all students are acceptable for each school. No strategy-proof mechanism is size-wise maximal among all strategy-proof mechanisms

- Since we already know that DA does not size-wise dominate TTC, it is enough to show that **no strategy-proof mechanism size-wise dominates DA**
- Motivating example: assume a mechanism ϕ size-wise dominates DA. Consider the following preferences and priorities

$$
\begin{array}{ll}
P_{i_1} : s_1 \ i_1 & \succ_{s_1} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \ s_1 \\
P_{i_2} : s_2 \ s_1 \ s_3 \ i_2 & \succ_{s_2} (1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ s_2 \\
P_{i_3} : s_2 \ s_1 \ s_3 \ i_2 & \succ_{s_3} (1) : i_2 \ i_1 \ i_3 \ s_3
\end{array}
$$

Here $\phi^{DA}(P) = (i_1, s_2, s_1)$. Assume at this P, $|\phi(P)| > \left|\phi^{DA}(P)\right|$ holds. That implies $\phi(P) = (s_1, s_2, s_3)$ or (s_1, s_3, s_2)

Original Results

- Suppose $\phi(P) = (s_1, s_2, s_3)$ is the case. Consider P'_{i_3} : s_2 s_1 i_3. Then DA matching does not change: $\phi^{\text{DA}}(P_{i_1}, P_{i_2}, P'_{i_3}) = (i_1, s_2, s_1)$. By SP and maximality, $\phi(P_{i_1}, P_{i_2}, P'_{i_3}) = (s_1, s_2, i_3)$
  Next consider P'_{i_2} : s_2 i_2. Then DA matching does not change: $\phi^{\text{DA}}(P_{i_1}, P'_{i_2}, P'_{i_3}) = (i_1, s_2, s_1)$. By SP and maximality, $\phi(P_{i_1}, P'_{i_2}, P'_{i_3}) = (i_1, s_2, s_1)$ or (s_1, s_2, i_3).
  Next consider P'_{i_1} : s_1 s_3 i_1. Then $\phi^{\text{DA}}(P'_{i_1}, P'_{i_2}, P'_{i_3}) = (s_3, s_2, s_1)$. By SP, $\left|\phi(P'_{i_1}, P'_{i_2}, P'_{i_3})\right|$ is at most 2, which contradicts the maximality
- Similarly we can derive a contradiction for $\phi(P) = (s_1, s_3, s_2)$ case

Original Results

- In general...
  - Fix $P \in \mathcal{P}^I$ s.t. $|\phi(P)| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(P)\right|$
  - $\phi^{\mathrm{DA}}(P)$ でマッチしている人の preference を順に, DA のマッチングの直後が outside option になるように削る. これによって DA のマッチングは変わらない
  - 上の操作で, 最終的に $|\phi(P')|$ は $\left|\phi^{\mathrm{DA}}(P)\right|$ と等しくなる
  - DA でマッチしていなかった人 1 人に対して, $\phi(P')$ のもとで定員の空いている学校が outside option の直前に来るような preference を考えて, 矛盾を出す

From now on......

- claim 1 を (weaker assumption のもとで) 示す
- (claim 1 が示されたとして) そのようなメカニズムが存在するような preference の最大部分集合 $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ はなにかを調べる
- Preference revelation game に不完備情報を導入した場合, 既存の strategy-proof メカニズムと無制約に Assignment Maximization を達成するメカニズムとで, 均衡 (BNE) の下ではどちらのマッチ数が多くなるかを調べる. 特に次の EAM メカニズムについて検証する

EAM mechanisim from Afacany et al. (2017)

Theorem (Theorem 1 in Afacany et al. (2017))

There is a (non strategy-proof) size-wise maximal and Pareto efficient mechanism, called Efficient Assignment Maximizing mechanisim (EAM)

Proposition (Proposition 5 in Afacany et al. (2017))

EAM mechanism has a unique Nash equilibrium (in the preference revelation game) outcome that is equivalent to the outcome of SD given some common priority

Theorem (Theorem 2 in Afacany et al. (2017))

EAM mechanism is not size-wise dominated in equilibrium

References I

Atila Abdulkadiroğlu and Tayfun Sönmez. School choice: A mechanism design approach. *American Economic Review*, 93(3):729–747, 2003.

Atila Abdulkadiroğlu, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth. Strategy-Proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match. *American Economic Review*, 99(5):1954–1978, 2009.

Atila Abdulkadiroğlu, Yeon-Koo Che, Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, and Olivier Tercieuxy. Minimizing Justified Envy in School Choice: The Design of New Orleans' OneApp. *NBER Working Paper*, 2017.

Mustafa Oğuz Afacany, Inácio Bó, and Bertan Turhan. Assignment Maximization. *NBER Working Paper*, 2017.

Lester E. Dubins and David A. Freedman. Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. *American Mathematical Monthly*, 88:485–494, 1981.

References II

David Gale and Lloyd S. Shapley. College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly*, 69:9–15, 1962.

Aanund Hylland and Richard Zeckhauser. The Efficient Allocation of Individuals to Positions. *Journal of Political Economy*, 87:293–314, 1979.

Onur Kesten and Morimitsu Kurino. Strategy-proof improvements upon deferred acceptance: A maximal domain for possibility. *Working Paper*, 2017.

Alvin E. Roth. The Economics of Matching: Stability and Incentives. *Mathematics of Operations Research*, 7:617–628, 1982a.

Alvin E. Roth. Incentive Compatibility in a Market with Indivisibilities. *Economics Letters*, 9:127–132, 1982b.

Alvin E. Roth. On the allocation of residents to rural hospitals: a general property of two-sided matching markets. *Econometrica*, 54:425–427, 1986.

References III

Yasuo Sasaki and Masahiro Ura. Serial dictatorship and unmatch reduction: A problem of Japan’s nursery school choice. *Economic Letters*, 147:38–41, 2016.

Lloyd Shapley and Herbert Scarf. On cores and indivisibility. *Journal of Mathematical Economics*, 1:23–37, 1974.

資料 1. 平成 30 年度 第三段階進学定数. URL `http://www.c.u-tokyo.ac.jp/zenki/news/kyoumu/daisan-teisu20170911.pdf`.