卒業論文
Strategy-Proofness 制約下での最大マッチング *

松下 旦

January 10, 2018

Abstract

School choice problem においては, 伝統的に stability や Pareto efficiency がメカニズムの評価基準として用いられてきた. しかし進学選択制度をはじめとした現実の応用例においては, 効率性や公平性よりもアンマッチとなる学生の数が問題になる場面が多く存在する. そこで本論文では新たにメカニズムが出力するマッチングのサイズに焦点を当て, strategy-proof メカニズムの中でマッチできる学生数が最も大きくなるようなメカニズムの探索を試みた. その結果, 学生があらゆる preference profile を取りうる環境においては, (i) 他の strategy-proof メカニズムよりも常に大きなマッチングを達成する strategy-proof メカニズムが存在しないこと, (ii) 現実の学校選択において最もよく使われているメカニズムである Deferred Acceptance (DA) アルゴリズムは, それ以上のサイズのマッチングを常に達成するメカニズムが存在しないという意味で最も望ましいメカニズムの 1 つであることが明らかになった.

1 はじめに

アンマッチを減らすことはマッチング問題における重要な目的関数の 1 つである. 特に学校選択においては, どの学校ともマッチングできなかった学生は浪人・留年をするか, (可能な場合には) 規定のメカニズムの外で空席のある学校と交渉をする必要があり, いずれの場合も学生やメカニズムの運営者に大きな負担を強いることになる. したがって運営者がアンマッチをできるだけ少なくするようなメカニズムを求めることは自然である. ここでアンマッチの多さが問題となった例として, 東京大学において 2017 年に実施された進学選択制度改革を取り上げる.

東京大学の学部教育は大きく前半 2 年間の前期教養課程と後半 2 年間の後期専門課程に分かれている. 前期教養課程には文科一類, 二類, 三類および理科一類, 二類, 三類の 6 科類が存在し, 後期専門課程には法学部, 経済学部, 文学部など 10 学部 44 学科が存在する. 学生はまず前期教養課程のいずれかの科類に入学し, 第 2 学年の夏に後期課程で進学する専攻[*1]を決定する. 進学先の設定に際しては, 各学生が進学したい後期課程の専攻の希望を提出し, これと成績等をもとに中央集権的なメカニズムによって学生と専攻のマッチングが行われ

---

* 本研究に関して終始ご指導頂きました尾山大輔准教授, ゼミでの発表機会並びに有用なコメントを頂きました市村英彦教授に心より感謝いたします. また尾山ゼミ・市村ゼミの皆様, 並びにコメントをくださった友人の皆様にお礼を申し上げます.

[*1] 学生の募集主体となる専攻と学部学科とは厳密には同じではない. 複数の学科が 1 専攻として学生を募集する場合もあれば, 1 つの学科が複数の専攻に分かれていることもある. 2017 年の場合, 学科数は 44 であるのに対し, 専攻数は 78 である

る．この制度は進学選択 (旧名: 進学振り分け) と呼ばれており, 大学入学後に専攻を再選択できるという東京大学の教育制度における目玉の 1 つである．各専攻の定員は指定科類枠と全科類枠という 2 種類の枠に分割されており, 指定科類枠では特定の科類の学生だけがマッチできる一方, 全科類枠ではどの科類の学生でもマッチすることができる．例年総定数の 15% 程が全科類枠になっているが, 比率は専攻によって異なる．たとえば 2017 年には, 法学部の 415 人の定員のうち 382 人 (92.0%) が文科一類の指定科類枠, 残りの 43 人 (8.0%) が全科類枠である．他方経済学部では 340 人の定員のうち 266 人 (78.2%) が文科二類の, 10 人 (2.9%) が理科各類の指定科類枠であり, 残りの 64 人 (18.8%) が全科類枠である．

2017 年度にこの進学選択制度の改革が行われた (資料 2)．変更前/変更後の制度の詳細は図 1 の通りであるが, 最大の変更点は進学選択の一部に Gale and Shapley (1962) が提案した Deferred Acceptance (DA) アルゴリズムが導入された点にある．DA アルゴリズム導入によって学生の提出できる志望専攻の数が増え, アンマッチが減少することが期待されていたが, 実際には文科二類, 三類の学生を中心に例年の 3 倍の未内定者を出し大きな問題となった (表 2, 資料 4)．

メカニズム実施前のプロセス（共通）

各専攻は選考基準（何の科目の成績を用いるか , 必修科目を設けるか , 面接を実施するかなど）を決定し , 第 1 段階 , 第 2 段階に定数を分割する（およそ 7 対 3）. 大学は各学生に第 1 段階 , 第 2 段階で志望する予定の専攻をアンケートし , その結果に基づいて各段階 , 各専攻の最低内定点（ただし面接等は考慮されないため参考）を算出し , 公表する .

2016 年の制度

第 1 段階　各学生は希望する専攻を 1 つ選択する . 各専攻は成績等に基づき学生を第 1 段階の定員まで受け入れる . ここでマッチしなかった学生は第 2 段階に進む . 各専攻の埋まらなかった枠は第 2 段階に回される .

第 2 段階　第 1 段階と同様 , 各学生は希望する学部学科を 1 つ選択し [1], 各専攻は学生を定員まで受け入れる . マッチしなかった学生は第 3 段階に進む . 空き定員があり , かつ第 3 段階への参加を希望する専攻は第 3 段階へ進む .

第 3 段階　各学生と各専攻は , 個別の交渉によってマッチングを行う . ここでもマッチしなかった学生は降年 (留年) となる .

1. ただし , 同学科内で 3 つまで専攻を指定できる場合もある

2017 年の制度

第 1 段階　2016 年以前の制度と同様 .

第 2 段階　各学生は希望する専攻のリストを提出する . このリストには長さの制限はなく , 全ての専攻を含めることができる . 各専攻は学生の優先順位を成績や面接の結果等によって決定する . これらをもとに Deferred Acceptance アルゴリズムでマッチングを行う . マッチしなかった学生と , 空き定員がありかつ第 3 段階への参加を希望する専攻は第 3 段階へ進む .

第 3 段階　各学生と各専攻は , 個別の交渉によってマッチングを行う . ここでもマッチしなかった学生は降年 (留年) となる .

図 1　2016 年以前の制度 (左) と 2017 年の制度 (右) の概要

2017 年の制度改革では DA アルゴリズムの導入以外にも進学選択への参加要件, 各専攻の成績評価方法・定員などが変更になっているため, 2016 年以前の結果との単純比較は難しいが, 未内定者がこれだけ多く出たことは前例がない．これを受けて大学は「今年限りの特別措置」として, 第三段階終了からおよそ 1 ヶ月後, 文科二類・三類の一部学生に対し文学部への追加内定を認める措置をとった (資料 3)．これによって事態は収束したものの, 追加内定が出た時点では秋学期が始まっており, 各専攻の持ち出し科目[*2]の講義も既に行われてい

[*2] 3 年次に進学する予定の各専攻が 2 年次に前倒しして実施する科目．2 年秋学期にはほぼ全ての専攻で持ち出し科目の講義が行われている

	文1	文2	文3	理1	理2	理3	計
第一段階志望表提出者数(≒進学選択参加者数)	423	382	512	1168	568	97	3150
第二段階までの内定者数	422	356	496	1122	548	98	3042
第二段階までの未内定者数	1	26	16	46	20	−1	108
第二段階までの未内定率	0.236%	6.806%	3.125%	3.938%	3.521%	−1.031%	3.429%
第三段階で内定可能な総枠数	12	7	7	61	37	37	68
内全科類枠	7	7	7	7	7	7	7

表 1　2017 年の第 2 段階終了後の未内定者数 (出典: 資料 1). 第 2 段階終了時の文科二類・三類の未内定者数 42 に対し, 第 3 段階で内定可能な枠は最大で 7 しかないため, 最終的に少なくとも 35 人のアンマッチが出る. 理科一類・二類でも多くの未内定者が出ているが, 第 3 段階で内定可能な枠数も多い. なお未内定者数は (第 1 段階志望票提出者数)-(第 2 段階までの内定者数) で算出しており, 第 1 段階で志望を出さず第 2 段階だけで志望を出す者も僅かながらいるため, 値がマイナスになっている箇所がある

たため, 内定した学生と文学部の負担は大きかった. それだけにとどまらず, このような後出しでの制度変更は将来の進学選択において学生が決められたメカニズムを信用せずに戦略的行動をとる原因にもなり, 結果として本来メカニズムが持っているはずの望ましい性質が実現できなくなる可能性がある. そのような観点からも, 進学選択においてアンマッチをできるだけ少なくすることは重要である.

このようにアンマッチが問題になった例は他にも存在する. 資料 5 には, DA アルゴリズムを使って行われているニューヨーク市の高校選択マッチングにおいて, 2011 年にマーケットに参加した 78747 人の学生のうち約 10% がアンマッチとなり, 選好リスト以外の学校から高校を探さなければならなくなった窮状が語られている. Afacany et al. (2017) は, サンパウロ市 (ブラジル) が 2013 年, 市の保育園マッチングシステムによってアンマッチとなり一時的に子どもを私立保育園に入園させた 943 の家庭に対し, その費用を賠償するよう州立裁判所に命じられたことを伝えている.

また一般論として, アンマッチをできるだけ出さないことが何よりも重要である場面は存在する. Corollary 1 で示すように, non-wasteful なマッチング (DA アルゴリズムが出力するマッチングを含む) よりも大きなサイズのマッチングを実現するためには, 少なくとも増やした人数分のマッチ相手を悪化させる必要がある. しかしたとえば子どもと保育所のマッチングにおいては, priority の高い家庭が最も望ましい (たとえば家から近い) 保育園に入園できることよりも, できるだけ多くの親が保育園に子どもを預けて働けるようにすることが大切であろう.

それにもかかわらず, マッチ数の観点からメカニズムを分析している論文は驚くほど少ない. 経済学における数少ない例は Sasaki and Ura (2016) と Afacany et al. (2017) である. Sasaki and Ura (2016) は学校側の生徒に対する priority が共通の場合に (i) 最大マッチング (ii) Pareto efficient (iii) Serial Dictatorship メカニズムのもとでマッチした学生は必ずどこかの学校にマッチする ようなメカニズムの存在を示している. Afacany et al. (2017) は一般の school choice problem において (i) 最大マッチング (ii) Pareto efficient を満たす Efficient Assignment Maximizing (EAM) メカニズムを提案している. しかしいずれのメカニズムも strategy-proofness を持たないため, 真の preference の下で実現できる最大マッチングと同じ数のマッチングが実現できる保証はない. 特に無制約の assignment maximization を行うメカニズムは一般に学生の選好リストを減らす戦略的操作に極めて脆弱であるため, 問題はいっそう深刻である. このことを次の例で見てみ

よう．

Example 1. ϕ を最大マッチングを達成するメカニズムとする．学生 i_1, i_2 と学校 s_1, s_2 が存在するマーケットを考える．各学校の定員は全て 1 とする．学生 i_1, i_2 はともに s_1 とマッチする, s_2 とマッチする, アンマッチとなる, の順に望ましいと考えているとする．いま全員が真の preference を提出している時に ϕ が出力するマッチングが $(i_1, s_1), (i_2, s_2)$ だったとする．ここでもし学生 i_2 が s_1 だけがアンマッチよりも望ましい学校だと嘘の preference を報告したとすると, ϕ は最大マッチングを達成するメカニズムなので, マッチング $(i_1, s_2), (i_2, s_1)$ を出力する．したがって学生 i_2 は選好リストを減らす戦略的操作を行うことで, マッチングを改善することができる．真の preference の下で ϕ が出力するマッチングが $(i_1, s_2), (i_2, s_1)$ の場合, 同様のインセンティブが i_1 に存在する．

このような選好順の低い学校を選好リストから削るインセンティブはより多くの学生・学校が参加するマーケットでも一般に存在する．仮に各プレイヤーが必要以上に選好リストを削ってしまった場合, 均衡では最大マッチングを達成するメカニズムが strategy-proof メカニズムよりも少ないマッチ数を実現する可能性もある．ここで Example 1 を拡張してゲームとして定式化し, このことを確かめよう．

Example 1 (Continued)**.** 真の選好リストを提出する戦略を F, 短い選好リストを提出する戦略を S とする．各プレイヤーはリスク中立的で, s_1 とマッチした時に 3, s_2 とマッチした時に 1, アンマッチの時に 0 の利得を得るものとする．両者が同じ戦略を取った場合は等確率で配分を決定する．この時ゲームの利得表は以下のようになる (括弧内左側が i_1 の, 右側が i_2 の利得).

		i_2: S	i_2: F
i_1	S	$(1.5, 1.5)$	$(3, 1)$
i_1	F	$(1, 3)$	$(2, 2)$

このとき唯一のナッシュ均衡は (S, S) となり, マッチ数 1 が実現する．一方で DA アルゴリズムを使えば, 学校側の priority にかかわらずマッチ数 2 が実現する．

この例の非効率性は配分を確率的に決定していることに依存している．もし (S, S) が提出された際に i_1, i_2 のどちらに s_1 を配分するかを事前に決定しておけば $(S, F), (F, S)$ のいずれかが唯一のナッシュ均衡になり, DA アルゴリズムを使用した場合と同じサイズのマッチが実現できる．しかし決定論的メカニズムを用いた場合においても, 選好表明ゲームに不完備情報を導入し他のプレイヤーが表明する選好リストが完全にはわからない場合を扱うことで, 同様の非効率性が発生することを示すことができる．これについては 3.1 節で扱う．

以上のように, 表明された preference profile に基いて単純にマッチングを最大にしたとしても, 真の preference の下で最大マッチングが達成されていることは保証されず, strategy-proof メカニズムが実現するマッチ数よりも少なくなってしまうことさえある．また Proposition 1 で示すように, 最大マッチングを達成する strategy-proof メカニズムは存在しない．そこで本論文ではセカンド・ベストな解決策として,

strategy-proof メカニズムの中で最大のマッチングを与えるメカニズムに焦点をあてる.

以降の本論文の構成は次の通りである. 第 2 章では数学的にモデルを定義し, いくつかのメカニズムを導入する. 第 3 章では以降の章のベースラインとなる既存の結果をまとめるとともに, 各学生がマッチする学校の望ましさとマッチングのサイズの間にトレードオフが存在することを見る. 第 4 章では preference profile 全体の集合での不可能性定理を示す. 第 5 章では結論と今後の課題を述べる.

2 モデル

2.1 モデル定義

School choice problem は次の 5 つ組 $(I, S, q, R, \succeq)$ で構成される:

1. 有限の学生の集合 I
2. 有限の学校の集合 S
3. 各学校の定員のベクトル $q \equiv (q_s)_{s\in S}$. $q_s \in \mathbb{N}$ は学校 $s \in S$ の定員を表し, $1 \leq q_s < \infty$ を満たす
4. 各生徒の preference profile $R \equiv (R_i)_{i\in I}$. R_i は学生 $i \in I$ にとっての $S \cup \{i\}$ 上の rational かつ strict な選好関係[*3]で, $s_1, s_2 \in S \cup \{i\}$ に対し, $s_1 R_i s_2 \overset{\text{def}}{\iff} [s_1$ を s_2 と同程度以上に好む$]$, と定義する. $\{i\}$ は学生 i にとっての outside option を表す
5. 各学校の priority profile $\succeq \equiv (\succeq_s)_{s\in S}$. $\succeq_s$ は学校 $s \in S$ にとっての I 上の線形順序[*4]で, $i_1, i_2 \in I$ に対し, $i_1 \succeq i_2 \overset{\text{def}}{\iff} [i_1$ の優先度が i_2 と同程度以上に高い$]$, と定義する

ここで学生にとっての outside option とは, 学校とペアを組まずに 1 人でいるオプションである. 学生 $i \in I$ にとって $s \in S \cup \{i\}$ が **acceptable** であるとは, $sR_i i$ であることをいう.

$\mathcal{R}_i$ を学生 $i \in I$ が取りうる全ての preference の集合とし, $\mathcal{R}^I \equiv \times_{i\in I} R_i$ をあり得る preference profile 全体の集合とする. $I_0 \subseteq I$ に対し, I_0 の範囲に限定した preference profile を R_{I_0} と書く. 同様に $I \setminus I_0$ に限定した profile を R_{-I_0} と書く. I_0 が 1 人の集合の場合には $i \in I_0$ を用いて R_{-i} と略記する. 厳密な選好関係 P_i を, $s_1, s_2 \in S \cup \{i\}$ に対し $s_1 P_i s_2 \overset{\text{def}}{\iff} s_1 R_i s_2 \wedge \neg(s_2 R_i s_1)$ で定義する. 同様に厳密な順序関係 $\succ_s$ を, $i_1, i_2 \in I$ に対し $i_1 \succ_s i_2 \overset{\text{def}}{\iff} i_1 \succeq_s i_2 \wedge \neg(i_2 \succeq_s i_1)$ で定義する.

Gale and Shapley (1962) で導入された two-sided matching market の場合とは異なり, school choice では学生だけを戦略的な行動を取る主体と考え, 学校の戦略的行動は考慮に入れない. このことから以降では特に断りのない限り $I, S, q, \succeq$ を任意に固定して考え, $R = (R_i)_{i\in I}$ だけを用いて問題を表現する.

School choice problem (R) における**マッチング**とは, 関数 $\mu : I \to S \cup I$ で, 以下の 2 つの性質を満たすものである.

[*3] 集合 X 上の選好関係 R が rational であるとは, (1) completeness: $\forall x, y \in X, xRy \vee yRx$, (2) transitivity: $\forall x, y, z \in X, (xRy \wedge yRz) \implies xRz$ を満たすことである. 同様に R が strict であるとは, (3) antisymmetry: $\forall x, y \in X, (xRy \wedge yRx) \implies x = y$ を満たすことである

[*4] 集合 X 上の二項関係 R が線形順序 (全順序) であるとは, R が completeness, transitivity, antisymmetry を満たすことである. したがって R_i と $\succeq_s$ はともに線形順序である

1. $\forall i \in I, \mu(i) \notin S \implies \mu(i) = i$
2. $\forall s \in S, \left|\mu^{-1}(s)\right| \leq q_s$

ここで $I_0(\subseteq I)$ に対し, $|I_0|$ は部分集合 I_0 に含まれる学生の数を表す．同様に $S_0(\subseteq S)$ に対し, $|S_0|$ を部分集合 S_0 に含まれる学校の数とする．$\mathcal{M}$ をあり得るマッチング全体の集合とする．マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ に対し, $|\mu| \equiv \sum_{s\in S} \left|\mu^{-1}(s)\right|$ をそのマッチングに含まれる学生と学校のペアの総数とする．

決定論的メカニズム (以降単にメカニズムという) とは, 各問題 (R) に対してマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ を割り当てる仕組みで, 次の 2 つ組 $(\mathcal{D}, \phi)$ で構成される:

1. 提出されうる preference profile の集合 $\mathcal{D} \equiv \times_{i\in I}\mathcal{D}_i$ $(\forall i \in I, \mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{R}_i)$
2. 提出された preference profile に対してマッチングを割り当てる関数 $\phi : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$

以降特に断りのない限り $\mathcal{D} = \mathcal{R}^I$ とする．また $\mathcal{D}$ が文脈上明らかな場合は単に決定関数 ϕ だけを用いてメカニズムを表現する．

2.2 マッチング, メカニズムの性質

まず一般的なマッチングの性質を定義する．**学生 $i \in I$ がマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ をブロックする**とは, $iP_i\mu(i)$ を満たすことをいう．マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ が **individually rational** であるとは, どの学生/学校も μ をブロックしないこと, すなわち $\forall i \in I, \mu(i)R_i i$ を満たすことである．マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ が **non-wasteful** であるとは,

$$\forall s \in S, \forall i \in I,\ sP_i\mu(i) \implies \left|\mu^{-1}(s)\right| = q_s$$

が成り立つことである．これが成り立たないとき, μ は **wasteful** であるという．学生 $i \in I$ が学校 $s \in S$ にマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ の下で **justified-envy** を持つとは,

$$sP_i\mu(i)\ \wedge\ [\exists j \in \mu^{-1}(s) \text{ s.t. } i \succ_s j]$$

が成り立つことである．全ての学生がどの学校に対しても justified-envy を持たないとき, マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ は **fair** であるという．**学生と学校のペア $(i, s) \in I \times S$ がマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ をブロックする**とは,

$$sP_i\mu(i)\ \wedge\ \left[\left|\mu^{-1}(s)\right| < q_s \vee [\exists j \in \mu^{-1}(s) \text{ s.t. } i \succ_s j]\right]$$

を満たすことである．マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ が **pairwise stable** (以降単に stable という) であるとは,

1. どの学生 $i \in I$ も μ をブロックしない, かつ
2. どの学生と学校のペア $(i, s) \in I \times S$ も μ をブロックしない

ことである．定義より, $\mu \in \mathcal{M}$ が stable であることは, μ が individually rational かつ non-wasteful かつ fair であることに等しい．

あるマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ が別のマッチング $\mu' \in \mathcal{M}$ を **Pareto dominate** するとは,

1. $\forall i \in I, \mu(i)R_i\mu'(i)$

2. $\exists i \in I, \mu(i) P_i \mu'(i)$

を満たすことである．$\mu \in \mathcal{M}$ が $\mu' \in \mathcal{M}$ を **weakly Pareto dominate** するとは, $\forall i \in I, \mu(i) R_i \mu'(i)$ であることをいう．$\mu \in \mathcal{M}$ が **Pareto efficient** であるとは, μ を Pareto domiante するような $\mu' \in \mathcal{M}$ が存在しないことをいう．定義より, $\mu \in \mathcal{M}$ が Pareto efficient であるならば individually rational かつ non-wasteful である．

次に一般的なメカニズムの性質を定義する．$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^I$ を任意に固定する．メカニズム ϕ が individually rational / non-wasteful / fair / stable / Pareto efficient であるとは, 任意の preference profile $R \in \mathcal{D}$ に対して, メカニズムが出力するマッチング $\phi(R)$ が individually rational / non-wasteful / fair / stable / Pareto efficient であることをいう．メカニズム ϕ が別のメカニズム ψ を weakly Pareto dominate するとは, 任意の preference profile $R \in \mathcal{D}$ に対して, $\phi(R)$ が $\psi(R)$ を weakly Pareto dominate することをいう．メカニズム ϕ が別のメカニズム ψ を Pareto dominate するとは,

1. $\phi(R)$ が $\psi(R)$ を Pareto dominate するような $R \in \mathcal{D}$ が存在する
2. $\psi(R)$ が $\phi(R)$ を Pareto dominate するような $R \in \mathcal{D}$ が存在しない

ことをいう．

メカニズム ϕ が **strategy-proof** であるとは,

$$\forall R \in \mathcal{D}, \forall i \in I, \forall R'_i \in \mathcal{D}_i,\ \phi(R)(i)\ R_i\ \phi(R'_i, R_{-i})(i)$$

を満たすこと, すなわち選好表明ゲームにおいて正直申告が弱支配戦略になっていることをいう．

最後に Afacany et al. (2017) に従い, size-wise domination, size-wise maximality を定義する．**以降の本論文では, $\mathcal{M}$ を individually rational なマッチング全体の集合とし, メカニズム $(\mathcal{D}, \phi)$ も individually rational なものに限定する**[*5].

Definition 1. メカニズム ϕ が別のメカニズム ψ を **size-wise dominate** するとは,

1. $\forall R \in \mathcal{D}, |\phi(R)| \geq |\psi(R)|$
2. $\exists R \in \mathcal{D}, |\phi(R)| > |\psi(R)|$

を満たすことをいう．メカニズム ϕ が **size-wise maximal** であるとは, ϕ を size-wise dominate するような別のメカニズム ψ が存在しないことをいう

以降メカニズム ϕ が preference profile $R \in \mathcal{D}$ に対して出力する $i \in I$ のマッチ相手を $\phi_i(R)$ と略記する．また誤解のない時に限り, マッチングを関数ではなく, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ に対するマッチ相手を並べたタプル $\mu = (\mu(i_1), \mu(i_2), \ldots, \mu(i_n))$ で表記する．

[*5] Outside option のある環境で size-wise maximality を意味のある定義にするため

2.3 具体的なメカニズム

本節では School choice の文脈において有名なメカニズムである, Boston メカニズム (BM), Deferred Acceptance (DA) アルゴリズム, Serial Dictatorship (SD) メカニズム, Top Trading Cycles (TTC) アルゴリズム, 並びに Afacany et al. (2017) で導入された Pareto efficient かつ最大マッチングを達成する Efficient Assignment Maximizing (EAM) メカニズムを導入する. 具体的なメカニズムの定義については Appendix に回し, ここでは各メカニズムの性質のみを列挙する.

Boston メカニズムは,

1. Not strategy-proof
2. Pareto efficient

である.

DA アルゴリズムは,

1. Strategy-proof (Roth (1982))
2. Stable (Gale and Shapley (1962))
3. 他の stable マッチングを Pareto dominate する (Gale and Shapley (1962))

といった性質をもつ.

SD メカニズムは,

1. Strategy-proof (Hylland and Zeckhauser (1979))
2. Pareto efficient (Hylland and Zeckhauser (1979))

である.

TTC アルゴリズムは,

1. Strategy-proof (Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003))
2. Pareto efficient (Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003))

である.

EAM メカニズムは,

1. Not strategy-proof
2. Pareto efficient
3. 選好表明ゲームにおいてナッシュ均衡となる戦略の組が出力するマッチングが唯一に定まり, それは同じ $\succeq_I$ を用いた Serial Dictatorship メカニズムの結果と一致する
4. ナッシュ均衡でのマッチングのサイズが, EAM メカニズムよりも常に大きくなるようなメカニズムは

存在しない[*6]

といった性質を持つことが Afacany et al. (2017) で示されている．特に 4 は Afacany et al. (2017) において EAM メカニズムが望ましいことの根拠とされている．しかしながら 3 のナッシュ均衡の構成法は, 各学生が「最終的にナッシュ均衡でマッチする学校 1 つだけを残しそれ以外の学校を unacceptable にするような選好」か, それと本質的に異ならないような (EAM メカニズムの step 1 に影響を与えないような) 選好を取るものである．しかし各学生がこのような均衡戦略を取るためには, $\succeq_I$ において自分よりも順序が高い学生の選好が完全にわかっている必要があるので, 実際の問題においてこのような均衡が実現する可能性はほぼなく, したがって 4 を根拠に EAM メカニズムの優位性を主張するのは適当ではない．実際, 選好表明ゲームに不完備情報を導入すれば, strategy-proof メカニズムよりも小さなマッチサイズが実現する可能性もありうる．これについては 3.1 節で議論する．

3　準備

本章では 4 章以降の分析のベースラインとなる結果を導出する．まず 3.1 節では無制約のマッチ数最大化を行うメカニズムが strategy-proof にならず, 均衡においても strategy-proof メカニズムと比較して必ずしもマッチサイズを大きくするとは限らないことを見る．次に 3.2 節では不可能性定理を導出するのに必要な命題を示すとともに, その直接の系として, 個々の学生がマッチする学校の望ましさと全体のマッチングのサイズとの間にはトレードオフが存在することを見る．最後に 3.3 節では有名な strategy-proof メカニズムである DA アルゴリズム, TTC アルゴリズム, SD メカニズムの間には size-wise domination の関係が無いことを見た後, 単純な方法でマッチングのサイズを大きくするメカニズムは strategy-proof にならないことを見る．なお既に証明されている定理であっても, 本論文に関係する重要な結果は証明を記す．本章では $\mathcal{D} = \mathcal{R}^I$ に固定する．

3.1　最大マッチングを実現するメカニズム

Afacany et al. (2017) は, 常に最大マッチングを達成するようなメカニズムは, 学生に preference を短くするインセンティブを与えてしまうために, strategy-proof にならないことを示した．

Proposition 1 (Proposition 1 in Afacany et al. (2017))**.** Size-wise maximal な strategy-proof メカニズムは存在しない

Proof. 背理法の仮定として, ϕ を strategy-proof かつ size-wise maximal なメカニズムとする． $I =$

[*6] 厳密には次のような主張である．任意の $R \in \mathcal{R}$ において (純粋戦略の) ナッシュ均衡が存在するようなメカニズムの集合を Ω とする．このとき次のようなメカニズム $\phi \in \Omega$ は存在しない: 全ての $R \in \mathcal{R}^I$ において (i) ϕ のナッシュ均衡での任意のマッチングが, EAM メカニズムのナッシュ均衡でのマッチングのサイズ以上である (ii) ϕ のナッシュ均衡でのマッチングの 1 つは, EAM メカニズムナッシュ均衡でのマッチングよりも厳密に大きい

$\{i_1, i_2\}, S = \{s_1, s_2\}$ とする．次のような preference profile, priority profile および capacity を考える．

$$\begin{array}{lll} R_{i_1} : s_1\ s_2\ i_1 & \qquad & \succeq_{s_1} (1) : i_1\ i_2 \\ R_{i_2} : s_1\ i_2 & \qquad & \succeq_{s_2} (1) : i_1\ i_2 \end{array}$$

ここで R_i は $S \cup \{i\}$ を学生 $i \in I$ にとって好ましい順に並べたものである (R_i は線形順序なので 1 列に並べることができる)．Outside option よりも選好順の低い学校の並び順は結果に影響しないため表記しない．同様に $\succeq_s$ は I を学校 $s \in S$ にとって優先度の高い順に並べたものである．括弧内の数字は各学校の定員を表す．いま ϕ は size-wise maximal なので, $\phi(R) = (s_2, s_1)$ となる．

次に $R'_{i_1} : s_1\ i_1$ を考える．ϕ の strategy-proofness より，$\phi_{i_1}(R'_{i_1}, R_{i_2}) = i_1$ となる．また ϕ は size-wise maximal なので, 結局 $\phi(R'_{i_1}, R_{i_2}) = (i_1, s_1)$ となる．

最後に $R'_{i_2} : s_1\ s_2\ i_2$ を考える．ϕ の strategy-proofness より，$\phi_{i_2}(R') = s_1$ となり，したがって $\phi(R') = (i_1, s_1)$ となる．しかし R' のもとでの最大マッチングは $\mu = (s_1, s_2)$ であるので，これは ϕ が size-wise maximal であることに矛盾する． □

また Afacany et al. (2017) は EAM メカニズムの望ましさの根拠として, ナッシュ均衡でのマッチングのサイズが EAM メカニズムよりも常に大きくなるようなメカニズムが存在しないことを挙げているが, 以下のように選好表明ゲームに不完備情報を導入することで, EAM メカニズムが strategy-proof メカニズムよりも小さなマッチングを実現してしまうことが十分あり得ることがわかる．

Example 2. 次のような preference profile, priority profile および capacity を考える．

$$\begin{array}{lll} R_{i_1} : s_1\ i_1 & \qquad & \\ R'_{i_1} : s_2\ i_1 & \qquad & \succeq_{s_1} (1) : i_1\ i_2\ i_3 \\ R_{i_2} : s_1\ s_3\ i_2 & \qquad & \succeq_{s_2} (1) : i_1\ i_2\ i_3 \\ R_{i_3} : s_1\ s_2\ i_3 & \qquad & \succeq_{s_3} (1) : i_1\ i_2\ i_3 \end{array}$$

ここで i_1 の真の preference は等確率で R_{i_1} または R'_{i_1} であり, i_1 はどちらが真の preference かを観測できるが, 他のプレイヤーは観測できないとしよう．

単純化のため, いま i_1 の戦略は R_{i_1}, R'_{i_1} のいずれかであり, i_2, i_3 の戦略は真の preference R_{i_2}, R_{i_3} を出すか, 短い preference $R'_{i_2} : s_1\ i_2$, $R'_{i_3} : s_1\ i_3$ を出すかのいずれかであるとする．各プレイヤーはリスク中立的で, 選好順 1 位の学校とマッチした場合は利得 3, 2 位の場合は 1, アンマッチの場合は 0, 選好リストに無い学校とマッチした場合は $-\infty$ を得るとする．

$\succeq_I$: $i_1\ i_2\ i_3$ に対して定義される EAM メカニズムを ϕ^{EAM} とおく．このとき i_1 は真の preference を正直申告するのが常に最適である．i_1 が R_{i_1}, R'_{i_1} を提出した場合のそれぞれで, i_2, i_3 の戦略によって, 各学生にどの学校が割り当てられるかを表 2 で示す．括弧内左から i_1, i_2, i_3 の割り当てである．

したがって i_2, i_3 の戦略の組み合わせによる平均利得は表 3 のようになる．この時のベイジアンナッシュ均衡は $((R_{i_1}, R'_{i_1}), R'_{i_2}, R_{i_3})$ で, i_1 の真の preference がどちらかにかかわらずマッチ数 2 が実現する．

一方で DA アルゴリズム, TTC アルゴリズム, $\succeq_I$ で与えられる SD メカニズムを用いれば, 真の preference が R_{i_1} の時はマッチ数 3, R'_{i_1} の時はマッチ数 2 が実現する．このように選好表明ゲームに不完備情報を導入

		R'_{i_3}	R_{i_3}
i_2	R'_{i_2}	(s_1, i_2, i_3)	(s_1, i_2, s_2)
	R_{i_2}	(s_1, s_3, i_3)	(s_1, s_3, s_2)

		R'_{i_3}	R_{i_3}
i_2	R'_{i_2}	(s_2, s_1, i_3)	(s_2, s_1, i_3)
	R_{i_2}	(s_2, s_3, s_1)	(s_2, s_3, s_1)

表 2　左: R_{i_1} が実現した場合, 右: R'_{i_1} が実現した場合

		R'_{i_3}	R_{i_3}
i_2	R'_{i_2}	$(3, 1.5, 0)$	$(3, 1.5, 0.5)$
	R_{i_2}	$(3, 1, 1.5)$	$(3, 1, 2)$

表 3　各プレイヤーの平均利得

すれば, 最大マッチングを実現するメカニズムが一般的な strategy-proof メカニズムよりも悪いパフォーマンスをもたらす可能性があることが見て取れる.

3.2　個人の効用とマッチングのサイズのトレード・オフ

まず有名な Rural Hospital Theorem (の一部*[7]) を導入する.

Proposition 2 (Theorem 9 in Roth (1984))**.** $\mu, \mu' \in \mathcal{M}$ を任意の stable マッチングとする. この時, μ と μ' の下でマッチしている学生, および埋まっている学校の席数は全く同じになる. すなわち

1. $\{i \in I \mid \mu(i) \in S\} = \{i \in I \mid \mu'(i) \in S\}$
2. $\forall s \in S, \left|\mu^{-1}(s)\right| = \left|\mu'^{-1}(s)\right|$

が成り立つ

Rural Hospital Theorem より, DA アルゴリズムよりも大きいマッチサイズを実現するためには stable でないマッチングにする必要があることがわかる. いま individually rational なマッチングだけを考えているので, $\mu \in \mathcal{M}$ が stable でないことは blocking pair が存在することを意味している.

それだけでなく, 次の Proposition 3 (の Corollary 1) によって, 少なくとも増加した人数分のマッチ相手が DA に比べて悪化することが明らかになる. これは Abdulkadiroğlu et al. (2009), claim in Theorem 1 の拡張である.

*7 一般に「全ての stable マッチングにおいて, 定員を満たしていない学校とマッチしている学生は全く同じになる (Roth (1986))」ことと合わせて, Rural Hospital Theorem と呼ばれる

Proposition 3. $R \in \mathcal{R}^I$ を固定する．$\mu \in \mathcal{M}$ を non-wasteful なマッチングとする．この時 $\mu' \in \mathcal{M}$ が μ を weakly Pareto dominate していれば, μ と μ' のそれぞれでマッチしている学生, および埋まっている学校の席数は全く同じになる．すなわち

$$\forall i \in I, \mu'(i) R_i \mu(i) \implies \begin{cases} \{i \in I \mid \mu(i) \in S\} = \{i \in I \mid \mu'(i) \in S\} & (1) \\ \forall s \in S, \left|\mu^{-1}(s)\right| = \left|\mu'^{-1}(s)\right| & (2) \end{cases}$$

が成り立つ

Proof. $\mu' \in \mathcal{M}$ s.t. $\forall i \in I, \mu'(i) R_i \mu(i)$ を固定する．

まず (1) を示す．$M(\mu) \equiv \{i \in I \mid \mu(i) \in S\}$, $M(\mu') \equiv \{i \in I \mid \mu'(i) \in S\}$ と定義する．μ の individually rationality から, 任意の $i \in I$ に対し $\mu(i) \in S \implies \mu'(i) R_i \mu(i) P_i i$ が成り立つ．よって $M(\mu) \subseteq M(\mu')$ であるので, 後は $M(\mu) \supseteq M(\mu')$ であることを示せばよい．背理法の仮定として, $M(\mu) \subsetneq M(\mu')$ であるとする．

$I_0 \equiv \{i \in I \mid \mu'(i) P_i \mu(i)\}$ と定義する．$M(\mu) \subsetneq M(\mu')$ であるので, $\mu(i) = i$ かつ $\mu'(i) \in S$ を満たす $i \in I$ が存在する．μ' は individually rational なので, これは $\mu'(i) P_i \mu(i) = i$ を意味する．したがって $|I_0| > 0$.

いま μ' は μ を weakly Pareto dominate するので, $\forall i \in I, \mu'(i) \neq \mu(i) \implies i \in I_0$ となる．そこで次のような手続きで $i \in I_0$ のマッチ相手を 1 人ずつ, $\mu(i)$ から $\mu'(i)$ に組み替えることを考える:

- $\mu^1 \equiv \mu$ とおく．$\mu'(i_1) P_{i_1} \mu^1(i_1) = i_1$ である $i_1 \in I$ をとる．$I_1 \equiv I_0 \setminus \{i_1\}$ と定義する
- **Step** 1　$s_1 \equiv \mu'(i_1)$ とおく．μ^1 は non-wasteful なので, $s_1 P_{i_1} \mu^1(i_1) = i_1$ より $\left|(\mu^1)^{-1}(s_1)\right| = q_{s_1}$ が成り立つ．したがって $\mu^1(j_1) = s_1$ だが $\mu'(j_1) \neq s_1$ となるような別の学生 $j_1 \in I$ が存在する．いま μ' は μ^1 を weakly Pareto dominate しているので, これは $j_1 \in I_1$ を意味する．
  - もしそのような $j_1 \in I_1$ がとれなければ, これは矛盾である
  - そうでなければ,

$$\mu^2(i) \equiv \begin{cases} s_1 & \text{if } i = i_1 \\ i & \text{if } i = j_1 \\ \mu(i) & \text{otherwise} \end{cases}$$

    と定義する．ここで μ^2 は, non-wasteful なマッチング μ の内 i_1, j_1 のマッチ相手を組み替えただけなので, やはり non-wasteful である．$i_2 \equiv j_1$, $I_2 \equiv I_1 \setminus \{i_2\}$ とし, step 2 に進む

  一般に,

- **Step** k　$s_k \equiv \mu'(i_k)$ とおく．μ^k は non-wasteful なので, $s_k P_{i_k} \mu^k(i_k) = i_k$ より $\left|(\mu^k)^{-1}(s_k)\right| = q_{s_k}$ が成り立つ．したがって $\mu^k(j_k) = s_k$ だが $\mu'(j_k) \neq s_k$ となるような別の学生 $j_k \in I_k$ が存在する．
  - もしそのような $j_k \in I_k$ がとれなければ, これは矛盾である
  - そうでなければ,

$$\mu^{k+1}(i) \equiv \begin{cases} s_k & \text{if } i = i_k \\ i & \text{if } i = j_k \\ \mu^k(i) & \text{otherwise} \end{cases}$$

    と定義する．ここで μ^{k+1} は, non-wasteful なマッチング μ^k の内 i_k, j_k のマッチ相手を組み替えただけなので, やはり non-wasteful である．$i_{k+1} \equiv j_k$, $I_{k+1} \equiv I_k \setminus \{i_{k+1}\}$ とし, step $k+1$ に進む

$|I_0| \leq |I| < \infty$ なので, この操作を繰り返すと有限の k で $I_k = \emptyset$ となって矛盾が発生する. よって背理法により $M(\mu) \supseteq M(\mu')$ が示されたので, 結局 $M(\mu) = M(\mu')$ となって (1) は示された.

次に (2) を示す. (1) より $|\mu| = |\mu'|$ であるので,

$$\exists s \in S \text{ s.t. } \left|\mu^{-1}(s)\right| > \left|\mu'^{-1}(s)\right| \implies \exists s' \in S \text{ s.t. } \left|\mu^{-1}(s')\right| < \left|\mu'^{-1}(s')\right|$$

が成り立つ. よって $\left|\mu^{-1}(s)\right| < \left|\mu'^{-1}(s)\right|$ を満たす $s \in S$ が無いことだけを示せばよい. 背理法の仮定としてそのような学校 s が存在するとし, 1 つ固定する.

$\left|\mu^{-1}(s)\right| < \left|\mu'^{-1}(s)\right|$ より $\mu'(i) = s \wedge \mu(i) \neq s$ を満たす学生 $i \in I$ を取ることができる. μ' は μ を weakly Pareto dominate しているので, $sP_i\mu(i)$ が成り立つ. しかしいま $q_s \geq \left|\mu'^{-1}(s)\right| > \left|\mu^{-1}(s)\right|$ なので, これは μ の non-wastefulness に矛盾する. よって (2) も示された. □

次の Corollary 1 は個人の効用とマッチングのサイズのトレードオフを明確な形で示すとともに, 不可能性定理の証明における重要な鍵となっている.

Corollary 1. $R \in \mathcal{R}^I$ を固定する. $\mu \in \mathcal{M}$ を non-wasteful なマッチングとする. $\mu' \in \mathcal{M}$ を $|\mu'| > |\mu|$ を満たすマッチングとする. $k \equiv |\mu'| - |\mu|$ とおく. このとき, 少なくとも k 人の学生の集合 $I_0 \subseteq I$ が存在し, $\forall i \in I_0, \mu(i)P_i\mu'(i)P_i i$ を満たす

Proof. $|\mu'| > |\mu|$ を満たす $\mu' \in \mathcal{M}$ を固定する. $k \equiv |\mu'| - |\mu|$ とおく. $M \equiv \{i \in I \mid \mu(i) \in S\}$, $U_M \equiv \{i \in I \mid \mu'(i)P_i\mu(i) = i\}$ とおく.

μ の下で定員が埋まっている学校の集合を $F \equiv \{s \in S \mid \left|\mu^{-1}(s)\right| = q_s\}$, 定員が埋まっていない学校および outside option の集合を $V \equiv (S \cup I) \setminus F$ とおく. F に属する学校の定員は元々埋まっているので,

$$|\{i \in I \mid \mu(i) \in F\}| \geq |\{i \in I \mid \mu'(i) \in F\}|$$

である. よって $\mu \to \mu'$ でマッチサイズが k 人増加するためには,

$$|\{i \in M \mid \mu(i) \in V\}| \leq |\{i \in I \mid \mu'(i) \in V \cap S\}| + k \tag{3}$$

が必要である.

いま μ は non-wasteful なので, $\forall i \in U_M, \mu'(i) \in F$ である. したがって (3) は

$$|\{i \in M \mid \mu(i) \in V\}| \leq |\{i \in M \mid \mu'(i) \in V \cap S\}| + k \tag{4}$$

と変形できる. もともと V に属する学校にマッチしていた学生のマッチ数が増えることはなく, $|\{i \in M \mid \mu(i) \in V\}| \geq |\{i \in M \mid \mu(i) \in V \wedge \mu'(i) \in V \cap S\}|$ であるから, (4) は結局マッチ相手を F から V に変えた学生の内少なくとも k 人が学校とマッチする必要があることを意味する. よって $I_0 \equiv \{i \in M \mid \mu(i) \in F \wedge \mu'(i) \in V \cap S\}$ とおくと, $|I_0| \geq k$ である.

あとは任意の $i \in I_0$ が $\mu(i)P_i\mu'(i)$ を満たすことを示せばよい. 仮に $s \equiv \mu'(i)R_i\mu(i)$ だと仮定する. $F \cap V = \emptyset$ なので, preference が strict であることから $sP_i\mu(i)$ が成り立つ. いま $s \in V$ なので, $\left|\mu^{-1}(s)\right| < q_s$ を満たす. これは μ の non-wastefulness に反する. したがって $\mu(i)P_i\mu'(i)$ である. □

Corollary 1 より, DA アルゴリズムや TTC アルゴリズムを含む non-wasteful なメカニズムが出力するマッチングよりも大きなサイズのマッチングを実現するためには, 少なくともその人数分の学生のマッチ相手を悪化させる必要があることがわかる[*8]. したがって個人の効用と全体のマッチングのサイズとの間にはトレード・オフが存在する. このことを次の例で具体的に見てみよう.

Example 3. 次の preference profile, priority profile, capacity を考える:

$$
\begin{array}{ll}
R_{i_1} : s_1 \ i_1 & \\
R_{i_2} : s_2 \ i_2 & \succ_{s_1} (1) : i_5 \ i_4 \ i_3 \ i_2 \ i_1 \\
R_{i_3} : s_1 \ s_2 \ i_3 & \succ_{s_2} (2) : i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_1 \ i_2 \\
R_{i_4} : s_1 \ s_2 \ s_3 \ i_4 & \succ_{s_3} (2) : i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \\
R_{i_5} : s_2 \ s_1 \ s_3 \ i_5 &
\end{array}
$$

いま non-wasteful である DA と TTC の出力するマッチングは $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (i_1, i_2, s_2, s_1, s_2)$, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R) = (i_1, i_2, s_1, s_2, s_2)$ である. このとき DA および TTC よりもサイズの大きなマッチングには, それらよりも悪い割り当てになっている学生が, 増加したサイズの人数分以上いることを確認する. DA よりも悪い割り当てを下線, TTC よりも悪い割り当てを上線で記す.

まずサイズ 5 のマッチングは $(s_1, s_2, s_2, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{s_3}})$ のみである. 次にサイズ 4 のマッチングは, 以下の 14 通りである. いずれの場合も 1 人以上のマッチ相手が DA/TTC に比べて悪化していることがわかる.

$$
\begin{array}{lll}
(i_1, s_2, s_1, \underline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}) & (s_1, i_2, \overline{s_2}, \underline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}) & \\
(i_1, s_2, s_1, \underline{\overline{s_3}}, s_2) & (s_1, i_2, \overline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}, s_2) & \\
(i_1, s_2, s_1, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{s_3}}) & (s_1, i_2, \overline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{s_3}}) & (s_1, s_2, \overline{s_2}, \underline{\overline{i_4}}, \underline{\overline{s_3}}) \\
(i_1, s_2, \overline{s_2}, s_1, \underline{\overline{s_3}}) & (s_1, s_2, \underline{\overline{i_2}}, \underline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}) & (s_1, s_2, \overline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{i_5}}) \\
(i_1, s_2, \overline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{s_1}}) & (s_1, s_2, \underline{\overline{i_2}}, \underline{\overline{s_3}}, s_2) & \\
(i_1, s_2, \overline{s_2}, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{s_3}}) & (s_1, s_2, \underline{\overline{i_2}}, \underline{\overline{s_3}}, \underline{\overline{s_3}}) &
\end{array}
$$

なお次の Lemma 1 より, stable マッチング全体の集合には, 全ての stable マッチングに weakly Pareto dominate されるような最小元が存在することがわかる. したがって Proposition 3 は Proposition 2 の一般化であると言える.

Lemma 1 (Result by John Conway, from Knuth (1976))**.** $R \in \mathcal{R}^I$ を固定する. $\mathcal{M}^S$ を stable なマッチングの集合とする. $\mathcal{M}^S$ 上の半順序関係[*9] $\geq_I$ を, $\forall \mu, \mu' \in \mathcal{M}^S$,

$$\mu \geq_I \mu' \overset{\mathrm{def}}{\iff} \forall i \in I, \mu(i) R_i \mu'(i) \iff \mu \text{ が } \mu' \text{ を weakly Pareto dominate する}$$

で定義する. この時 $(\mathcal{M}^S, \geq_I)$ は束[*10] をなす.

[*8] このことから non-wasteful なマッチングは, 最悪でも最大マッチングの半数以上のマッチサイズを実現することもわかる.

[*9] 集合 X 上の二項関係 R が半順序であるとは, R が (1) reflexivity: $\forall x \in X, xRx$, (2) transitivity: $\forall x, y, z \in X, (xRy \wedge yRz) \implies xRz$, (3) antisymmetry: $\forall x, y \in X, (xRy \wedge yRx) \implies x = y$ を満たすことである. $\geq_I$ が (1) と (2) を満たすことは定義から, (3) を満たすことは定義と R_i の antisymmetry からわかる.

[*10] 半順序集合 (X, R) が束をなすとは, X の任意の 2 要素 $x_1, x_2 \in X$ が最小上界と最大下界を持つことをいう. 一般に任意の有界束には最大元/最小元が存在する.

3.3 既存の strategy-proof メカニズム

Afacany et al. (2017) は DA アルゴリズム, TTC アルゴリズム, SD メカニズム (と strategy-proof メカニズムではないが, Boston メカニズム) の間に size-wise domination の関係がないことを示している.

Proposition 4 (Proposition 2 in Afacany et al. (2017))**.** Deferred Acceptance アルゴリズム, Top Trading Cycles アルゴリズム, Boston メカニズム, Serial Dictatorship メカニズムの内, どのメカニズムも別のメカニズムを size-wise dominate しない

Proof. DA と TTC の間に size-wise domination の関係が無いことだけを示しておく. $I = \{i_1, i_2, i_3\}, S = \{s_1, s_2, s_3\}$ とする.

Case 1 (DA が TTC を size-wise dominate しないこと): 次のような preference profile, priority profile および capacity を考える

$$\begin{array}{ll} R_{i_1} : s_1 \ i_1 & \qquad \succeq_{s_1} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \\ R_{i_2} : s_1 \ s_2 \ s_3 \ i_2 & \qquad \succeq_{s_2} (1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \\ R_{i_3} : s_2 \ s_1 \ s_3 \ i_3 & \qquad \succeq_{s_3} (1) : i_2 \ i_1 \ i_3 \end{array}$$

この時 $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (i_1, s_1, s_2)$ である一方, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R) = (s_1, s_3, s_2)$ である. よって DA は TTC を size-wise dominate しない.

Case 2 (TTC が DA を size-wise dominate しないこと): 次のような preference profile, priority profile および capacity を考える

$$\begin{array}{ll} R_{i_1} : s_1 \ s_2 \ i_1 & \qquad \succeq_{s_1} (1) : i_3 \ i_2 \ i_1 \\ R_{i_2} : s_1 \ i_2 & \qquad \succeq_{s_2} (1) : i_1 \ i_2 \ i_3 \\ R_{i_3} : s_2 \ s_3 \ i_3 & \qquad \succeq_{s_3} (1) : i_2 \ i_1 \ i_3 \end{array}$$

この時 $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (s_2, s_1, s_3)$ である一方, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R) = (s_1, i_2, s_2)$ である. よって TTC は DA を size-wise dominate しない. □

Proposition 4 の証明から, 単純に DA, TTC という 2 つの strategy-proof メカニズムを実行し, サイズの大きい方をとるようなメカニズムは, strategy-proof にならないことがわかる.

Corollary 2. メカニズム ϕ^1, ϕ^2 を次のように定義する

$$\phi^1(R) = \begin{cases} \phi^{\mathrm{DA}}(R) & \text{if } \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right| \geq \left|\phi^{\mathrm{TTC}}(R)\right| \\ \phi^{\mathrm{TTC}}(R) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi^2(R) = \begin{cases} \phi^{\mathrm{DA}}(R) & \text{if } \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right| > \left|\phi^{\mathrm{TTC}}(R)\right| \\ \phi^{\mathrm{TTC}}(R) & \text{otherwise} \end{cases}$$

この時, ϕ^1, ϕ^2 は strategy-proof ではない

Proof. $I = \{i_1, i_2, i_3\}, S = \{s_1, s_2, s_3\}$ とする.

Case 1 (ϕ^1 が strategy-proof でないこと): Proposition 4 の証明の case 1 と同じ preference, priority, capacity を考える．この時 $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (i_1, s_1, s_2)$, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R) = (s_1, s_3, s_2)$ であるので, $\phi^1(R) = (s_1, s_3, s_2)$ である．いま $R'_{i_2} : s_1 \ i_2$ を考えると, $\phi^{\mathrm{DA}}(R_{i_1}, R'_{i_2}, R_{i_3}) = (i_1, s_1, s_2)$, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R_{i_1}, R'_{i_2}, R_{i_3}) = (s_1, i_2, s_2)$ なので, $\phi^1(R_{i_1}, R'_{i_2}, R_{i_3}) = (i_1, s_1, s_2)$ となる．ここで i_2 の真の preference が R_{i_2} であるとすると, i_2 は嘘の preference R'_{i_2} を報告することで, s_3 から s_1 にマッチを改善できる．よって ϕ^1 は strategy-proof でない．

Case 2 (ϕ^2 が strategy-proof でないこと): Proposition 4 の証明の case 2 と同じ preference, priority, capacity を考える．この時 $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (s_2, s_1, s_3)$, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R) = (s_1, i_2, s_2)$ であるので, $\phi^2(R) = (s_2, s_1, s_3)$ である．いま $R'_{i_1} : s_1 \ i_1$ を考えると, $\phi^{\mathrm{DA}}(R'_{i_1}, R_{i_2}, R_{i_3}) = (i_1, s_1, s_2)$, $\phi^{\mathrm{TTC}}(R'_{i_1}, R_{i_2}, R_{i_3}) = (s_1, i_2, s_2)$ なので, $\phi^2(R'_{i_1}, R_{i_2}, R_{i_3}) = (s_1, i_2, s_2)$ となる．ここで i_1 の真の preference が R_{i_1} であるとすると, i_1 は嘘の preference R'_{i_1} を報告することで, s_2 から s_1 にマッチを改善できる．よって ϕ^2 は strategy-proof でない．

□

また次のように 1 点でのみ DA よりもマッチサイズが大きく, 他は DA が出力するマッチングと等しいようなメカニズムも, strategy-proof にはならない．

Proposition 5. 次のようなメカニズム ϕ を考える．

$$\phi(R) = \begin{cases} \mu \in \mathcal{M} \quad \text{s.t. } |\mu| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right| & \text{if } R = \bar{R} \in \mathcal{R}^I \\ \phi^{\mathrm{DA}}(R) & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき ϕ は strategy-proof ではない

Proof. $\bar{R} \in \mathcal{R}^I$ s.t. $\left|\phi(\bar{R})\right| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(\bar{R})\right|$ を固定する．$\phi^{\mathrm{DA}}(\bar{R})$ は non-wasteful なので, Corollary 1 より学生 $i \in I$ s.t. $\phi_i^{\mathrm{DA}}(\bar{R})\bar{P}_i\phi_i(\bar{R})\bar{P}_i i$ がとれる．いま学生 i の短い preference

$$R'_i : [\bar{R}_i \text{ において } \phi_i^{\mathrm{DA}}(\bar{R}) \text{ よりも順位の高い学校 (同順序)}] \ \ \phi_i^{\mathrm{DA}}(\bar{R}) \ \ i$$

を考えると, DA アルゴリズムの構成から $\phi_i(R'_i, \bar{R}_{-i}) = \phi_i^{\mathrm{DA}}(R'_i, \bar{R}_{-i}) = \phi_i^{\mathrm{DA}}(\bar{R})$ となる．いま学生 i の真の preference が $\bar{R}_i$ だとすると, 嘘の preference R'_i を申告することで, i はマッチ相手を $\phi_i(\bar{R})$ から $\phi_i^{\mathrm{DA}}(\bar{R})$ に改善できる．よって ϕ は strategy-proof ではない． □

このメカニズムは $\mathcal{D} = \mathcal{R}^I$ の状況下では strategy-proof でないものの, 学生がいくつかの preference profile を取る可能性を排除することで strategy-proof にすることができる．そのため DA を size-wise dominate するような strategy-proof メカニズムが存在する $\mathcal{D}$ を考える際には重要になる．

4 不可能性定理

以降 $|I| \leq \sum_{s \in S} q_s$ を仮定する．これは「選り好みをしなければ, 全ての学生が学校とマッチできる」ことを意味する．また本章では $\mathcal{D} = \mathcal{R}^I$ に固定する．次が本論文の主要な結果である．

Theorem 1. 他の全ての strategy-proof メカニズムを size-wise dominate するような strategy-proof メカニズムは存在しない

したがって学生が任意の preference profile を取りうる $\mathcal{D} = \mathcal{R}^I$ の状況では, マッチングのサイズの観点から常に望ましいメカニズムは存在しないことになる. この定理は DA が TTC を size-wise dominate しないこと (Proposition 4) と, 次の Theorem 2 の直接の結果である.

Theorem 2. DA は strategy-proof メカニズムの中で size-wise maximal である. すなわち DA を size-wise dominate する strategy-proof メカニズムは存在しない

定理を一般に証明する前に, 次の例で証明の方針を具体的に確認しておく.

Example 4. 次の preference profile, priority profile, capacity を考える:

$$\begin{array}{ll} R_{i_1}: s_1\ i_1\ s_2\ s_3 & \quad \succ_{s_1} (1): i_3\ i_2\ i_1 \\ R_{i_2}: s_2\ s_1\ s_3\ i_2 & \quad \succ_{s_2} (1): i_1\ i_2\ i_3 \\ R_{i_3}: s_2\ s_1\ s_3\ i_3 & \quad \succ_{s_3} (1): i_2\ i_1\ i_3 \end{array}$$

ここで $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (i_1, s_2, s_1)$ となる.

いま DA を size-wise dominate するメカニズム $\phi : \mathcal{R}^I \to \mathcal{M}$ が, この R に対して $|\phi(R)| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right|$ を満たすと仮定する. この時 ϕ は strategy-proof ではないことを示す.

Proof. 背理法の仮定として ϕ が strategy-proof であるとする. $|\phi(R)| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right|$ であるので, $\phi(R) = (s_1, s_2, s_3)$ または (s_1, s_3, s_2) が成り立つ.

Case 1 ($\phi(R) = (s_1, s_2, s_3)$ の場合): まず $R'_{i_3} : s_2\ s_1\ i_3$ を考える. この時 DA のマッチングは変わらず $\phi^{\mathrm{DA}}(R_{i_1}, R_{i_2}, R'_{i_3}) = (i_1, s_2, s_1)$ となる. 一方で ϕ の strategy-proofness と size-wise domination の関係から, $\phi(R_{i_1}, R_{i_2}, R'_{i_3}) = (s_1, s_2, i_3)$ となる.

次に $R'_{i_1} : s_1\ s_3\ i_1$ を考える. この時 DA のマッチングは $\phi^{\mathrm{DA}}(R'_{i_1}, R_{i_2}, R'_{i_3}) = (s_3, s_2, s_1)$ となる. 一方で ϕ の strategy-proofness と size-wise domination の関係から, $\phi(R_{i_1}, R'_{i_2}, R'_{i_3}) = (s_1, s_3, s_2)$ となる.

最後に $R'_{i_2} : s_2\ i_2$ を考える. この時 DA のマッチングは変わらず $\phi^{\mathrm{DA}}(R') = (s_3, s_2, s_1)$ となる. 一方で ϕ の strategy-proofness から, $\phi_{i_2}(R') = i_2$ となる. これは ϕ が DA を size-wise dominate することに矛盾する.

Case 2 ($\phi(R) = (s_1, s_3, s_2)$ の場合): まず $R'_{i_2} : s_2\ i_2$ を考える. この時 DA のマッチングは変わらず $\phi^{\mathrm{DA}}(R_{i_1}, R'_{i_2}, R_{i_3}) = (i_1, s_2, s_1)$ となる. 一方で ϕ の strategy-proofness と size-wise domination の関係から, $\phi(R_{i_1}, R_{i_2}, R'_{i_3}) = (s_1, i_2, s_2)$ または (s_1, i_2, s_3) となる.

いずれの場合も, $R'_{i_1} : s_1\ s_3\ i_1$ を考える. この時 DA のマッチングは $\phi^{\mathrm{DA}}(R'_{i_1}, R'_{i_2}, R_{i_3}) = (s_3, s_2, s_1)$ となる. 一方で ϕ の strategy-proofness と size-wise domination の関係から, $\phi(R'_{i_1}, R'_{i_2}, R_{i_3}) = (s_1, s_2, s_3)$ となる.

最後に $R'_{i_3} : s_2\ s_1\ i_3$ を考える. このとき DA のマッチングは変わらず $\phi^{\mathrm{DA}}(R') = (s_3, s_2, s_1)$ となる一方, ϕ の strategy-proofness から $\phi_{i_3}(R') = i_3$ となるので, ϕ が DA を size-wise dominate することに矛盾する.

以上より, (i), (ii) のいずれのケースについても strategy-proofness が成り立たないので, この特定の R において DA よりも厳密に大きいサイズのマッチングを実現するメカニズムは strategy-proof でないことがわかった. □

Example 4 は単純だが, 本質的な例になっている. 一般のケースの証明では, $|\phi(R)| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right|$ を満たす R が任意に与えられた時に, 同様の preference manipulation によって矛盾が導出できることを示せばよい.

Proof of Theorem 2. 背理法の仮定として, ϕ が DA を size-wise dominate する strategy-proof メカニズムであるとする. $R \in \mathcal{R}^I$ s.t. $|\phi(R)| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R)\right|$ を任意に固定する. 次のような preference profile を操作する手続きを考える:

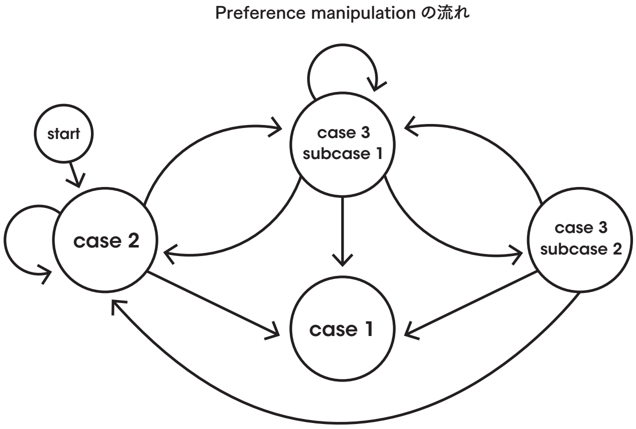

図 2　遷移図. Case 1 に入ると矛盾が発生する

- $R^0 = R$ とおく. マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ においてマッチしている学生の集合を $M(\mu) \equiv \{i \in I \mid \mu(i) \in S\}$ とおく.
- **Step** $k(\geq 1)$　次の case 1-3 のいずれかを実行する. 仮定より step 1 は case 2 である.

  Case 1 ($\left|\phi(R^{k-1})\right| < \left|\phi^{\mathbf{DA}}(R^{k-1})\right|$ の場合): これは ϕ が DA を size-wise dominate することに矛盾する

  Case 2 ($\left|\phi(R^{k-1})\right| > \left|\phi^{\mathbf{DA}}(R^{k-1})\right|$ の場合): DA は non-wasteful なので, Corollary 1 より $i \in I$ s.t. $\phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) P_i^{k-1} \phi_i(R^{k-1}) R_i^{k-1} i$ がとれる. R_i^{k-1} を $\phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})$ まで削った preference を R_i^k とする. すなわち

  $$R_i^k : [R_i^{k-1} \text{ において } \phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) \text{ よりも順位の高い学校 (同順序)}] \quad \phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) \quad i$$

  とし, $R^k = (R_i^k, R_{-i}^{k-1})$ とする. この時, $\phi^{\mathrm{DA}}(R^k) = \phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})$ である. 一方で ϕ の strategy-proofness より $\phi_i(R^k) = i$ である. したがって $M(\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)) \neq M(\phi(R^k))$ が成り立つ.

  Case 3 ($\left|\phi(R^{k-1})\right| = \left|\phi^{\mathbf{DA}}(R^{k-1})\right|$ の場合): 次の subcase 1, 2 のいずれかを実行する. なお step $k-1$ が case 2 の場合, 必ず subcase 1 が実行される. また $\left|\phi(R^{k-1})\right| = \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})\right| = |I|$ の場合, 必ず subcase 2 が実行される.

  Subcase 1 ($M(\phi^{\mathbf{DA}}(R^{k-1})) \neq M(\phi(R^{k-1}))$ の場合): このとき ϕ の下で学校とマッチしている一方, DA の下ではアンマッチとなっているような学生 $i \in I$ s.t. $\phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) = i \wedge \phi_i(R^{k-1}) \in S$ がとれる. また $\sum_{s \in S} q_s \geq |I| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})\right|$ であるので, $\phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})$ の下で定員が埋まってい

ない学校 $s \in S$ をとることができる．DA の non-wastefulness から, s の定員が埋まっていないことは $i = \phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) P_i^{k-1} s$ であることを意味する．R_i^{k-1} の outside option の直前に s を付け加えた preference を R_i^k とする．すなわち

$$R_i^k : [R_i^{k-1} \text{ において } i \text{ よりも順位の高い学校 (同順序)}]\ s\ i$$

とし, $R^k = (R_i^k, R_{-i}^{k-1})$ とする．このとき $\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)$ は,

$$\phi_j^{\mathrm{DA}}(R^k) = \begin{cases} s & \text{if } j = i \\ \phi_j^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

となり, DA のマッチサイズは 1 つ増える．一方 ϕ の strategy-proofness から, $\phi_i(R^k) = \phi_i(R^{k-1})$ となる．ここで $\phi_i(R^k) P_i^k \phi_i^{\mathrm{DA}}(R^k) = s$ であるから, $\phi(R^k)$ は問題 (R_{k-1}) の下でもマッチングの要件を満たす.

いま仮に $\left|\phi(R^k)\right| \geq \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)\right|$ であるとすると, $\left|\phi(R^k)\right| \geq \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)\right| > \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})\right|$ であるので, Corollary 1 より, DA よりも ϕ の下でのマッチ相手の方が悪い学生 $i' \in I$ s.t. $\phi_{i'}^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) P_{i'}^{k-1} \phi_{i'}(R^k) P_{i'}^{k-1} i'$ が存在する． $i' \neq i$ であるので, $R_{i'}^{k-1} = R_{i'}^k$ および $\phi_{i'}^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) = \phi_{i'}^{\mathrm{DA}}(R^k)$ が成り立つ．したがって

$$\phi_{i'}^{\mathrm{DA}}(R^k) P_{i'}^k \phi_{i'}(R^k) P_{i'}^k i'$$

が成り立つ.

Subcase 2 ($M(\phi^{\mathbf{DA}}(R^{k-1})) = M(\phi(R^{k-1}))$ の場合): Step $k-1$ は必ず case 3 subcase 1 である．なぜならば

- Step $k-1$ が case 1 の場合はその時点で操作が終了する
- Step $k-1$ が case 2 の場合, case 3 では subcase 1 が実行される
- 以下で示す通り, step $k-1$ が case 3 subcase 2 の場合 $M(\phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})) \neq M(\phi(R^{k-1}))$ となる

ためである．このとき Subcase 1 での議論より, DA よりも ϕ の下でのマッチ相手の方が悪い学生 $i \in I$ s.t. $\phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) P_i^{k-1} \phi_i(R^{k-1}) P_i^{k-1} i$ がとれる．R_i^{k-1} を $\phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})$ まで削った preference を R_i^k とする．すなわち

$$R_i^k : [R_i^{k-1} \text{ において } \phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1}) \text{ よりも順位の高い学校 (同順序)}]\ \ \phi_i^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})\ \ i$$

とし, $R^k = (R_i^k, R_{-i}^{k-1})$ とする．この時, $\phi^{\mathrm{DA}}(R^k) = \phi^{\mathrm{DA}}(R^{k-1})$ である．一方で ϕ の strategy-proofness より $\phi_i(R^k) = i$ である．したがって $M(\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)) \neq M(\phi(R^k))$ が成り立つ.

上記の操作を繰り返すと, 有限の step k で case 1 が実行され矛盾が発生することを示す．R^0 において DA でマッチしていた学生の集合を $M^0 \equiv M(\phi^{\mathrm{DA}}(R^0))$, マッチしていなかった学生の集合を $U^0 \equiv I \setminus M^0$ とおく．このとき

- Case 2 および case 3 subcase 2 は, 学生 $i \in M^0$ の preference を DA のマッチングの直後まで削る操作
- Case 3 subcase 1 は, 学生 $i \in U^0$ の preference の outside option の直前に学校を 1 つ増やし, その学校と学生を DA の下でマッチさせる操作

であり, 各学生に対して最大 1 回しか preference の操作が行われないので, step $|I|$ までには必ず, DA のもとで全学生がマッチしており, かつ preference が DA のマッチングの直後まで削られているような状況が生まれる．いま step k ではじめて $\left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)\right| = |I|$ になったと仮定する．DA のマッチングを増やす操作は case 2 のみなので, step k では必ず case 2 が実行されたことになる．いま $\left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^k)\right| = |I|$ より, step $k+1$ では case 3 subcase 2 が実行されるが, ここでは DA のマッチングが変化しない一方, $\phi(R^k)$ でマッチしていた学生の内 1 人はアンマッチになるので, 必ず $|I| = \left|\phi^{\mathrm{DA}}(R^{k+1})\right| > \left|\phi(R^{k+1})\right|$ となる．よって step $k+2$ では case 1 が実行され, 矛盾が生じる． □

5 まとめ

本論文では, 学生があらゆる preference profile を取りうる環境において (i) 他の全ての strategy-proof メカニズムを size-wise dominate する strategy-proof メカニズムは存在しないこと (ii) DA アルゴリズムが strategy-proof メカニズムの中で size-wise maximal であること を示した．特に (ii) の結果は Abdulkadiroğlu et al. (2009) 並びに Kesten and Kurino (2017) で示された「DA アルゴリズムを Pareto dominate するような strategy-proof メカニズムは存在しない」という結果に類似するものであり, サイズの観点から見ても, DA アルゴリズムは最も望ましいメカニズムの 1 つであることが示されたことになる．

しかしながらこのような否定的結果は, 進学選択制度をはじめとした DA アルゴリズムが用いられている現実の学校選択において, アンマッチの多さががもたらす問題を何ら解決しない．そこで今後の発展としては

- DA を十分広い範囲で size-wise dominate する
- strategy-proof になる preference profile の部分集合 $\mathcal{D}$ が現実的である

ような新たなメカニズムを開発することが重要になる．ここで単純な例として, ある 1 点でのみマッチングが DA と異なるようなメカニズムを考える．

Example 5. 次の preference profile, priority profile, capacity を考える:

$$\begin{array}{ll} R_{i_1} : s_1\ i_1\ s_2\ s_3 & \succ_{s_1} (1) : i_3\ i_2\ i_1 \\ R_{i_2} : s_2\ s_1\ s_3\ i_2 & \succ_{s_2} (1) : i_1\ i_2\ i_3 \\ R_{i_3} : s_2\ s_1\ s_3\ i_3 & \succ_{s_3} (1) : i_2\ i_1\ i_3 \end{array}$$

この時 $\phi^{\mathrm{DA}}(R) = (i_1, s_2, s_1)$ となる．いま次のようなメカニズムを考える．

$$\phi(R') = \begin{cases} (s_1, s_2, s_3) & \text{if } R' = R \\ \phi^{\mathrm{DA}}(R') & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで $\mathcal{D}_{i_2} = \mathcal{R}_{i_2}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{i_1} &= \mathcal{R}_{i_1} \setminus \{(s_1\ i_1\ s_3\ s_2), (s_1\ s_2\ i_1\ s_3), (s_1\ s_3\ i_1\ s_2), (s_1\ s_2\ s_3\ i_1), (s_1\ s_3\ s_2\ i_1)\} \\
\mathcal{D}_{i_3} &= \mathcal{R}_{i_3} \setminus \{(s_2\ s_1\ i_3\ s_3), (s_1\ s_2\ s_3\ i_3), (s_1\ s_3\ s_2\ i_3), (s_1\ s_2\ i_3\ s_3), \\
&\qquad (s_1\ s_3\ i_3\ s_2), (s_1\ i_3\ s_3\ s_2), (s_1\ i_3\ s_2\ s_3)\}
\end{aligned}$$

とすると, ϕ は strategy-proof になる.

上記の例では (i) $\phi_i(R) P_i \phi_i^{\mathrm{DA}}(R)$ となる学生 (i_1) の真の preference が $R_i' \neq R_i$ の時に, R_i だと嘘をついて得をしないこと (ii) $\phi_i^{\mathrm{DA}}(R) P_i \phi_i(R)$ となる学生 (i_3) の真の preference が R_i の時に, $R_i' \neq R_i$ だと嘘をついて得をしないこと が保証されている. しかしメカニズムが strategy-proof になる $\mathcal{D}$ の構成法は $\phi(R)$ における学校の席の充足状況に依存しているため, 上例のような 1 点のみで DA と異なるメカニズムにおいてさえ, 自明ではない.

6 参考文献

Abdulkadiroğlu, Atila and Tayfun Sönmez, "School choice: A mechanism design approach," *American Economic Review*, 2003, *93* (3), 729–747.

_ **, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth**, "Strategy-Proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match," *American Economic Review*, 2009, *99* (5), 1954–1978.

Afacany, Mustafa Oğuz, Inácio Bó, and Bertan Turhan, "Assignment Maximization," *NBER Working Paper*, 2017.

Gale, David and Lloyd S. Shapley, "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, 1962, *69*, 9–15.

Hylland, Aanund and Richard Zeckhauser, "The Efficient Allocation of Individuals to Positions," *Journal of Political Economy*, 1979, *87*, 293–314.

Kesten, Onur and Morimitsu Kurino, "Strategy-proof improvements upon deferred acceptance: A maximal domain for possibility," *Working Paper*, 2017.

Knuth, Donald E., *Marriage Stables*, Montreal University Press, 1976.

Roth, Alvin E., "Incentive Compatibility in a Market with Indivisibilities," *Economics Letters*, 1982, *9*, 127–132.

_ , "The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory," *Journal of Political Economy*, 1984, *92*, 991–1016.

_ , "On the allocation of residents to rural hospitals: a general property of two-sided matching markets," *Econometrica*, 1986, *54*, 425–427.

Sasaki, Yasuo and Masahiro Ura, "Serial dictatorship and unmatch reduction: A problem of Japan' s nursery school choice," *Economic Letters*, 2016, *147*, 38–41.

Shapley, Lloyd and Herbert Scarf, "On cores and indivisibility," *Journal of Mathematical Economics*, 1974, *1*, 23–37.

資料 1, "平成 30 年度 第三段階進学定数," `http://www.c.u-tokyo.ac.jp/zenki/news/kyoumu/daisan-teisu20170911.pdf`.

資料 2, "東大進学選択注意点　自分の意志重視の志望へ　第 2 段階で変更大 - 東大新聞オンライン," `http://www.todaishimbun.org/shingakusentaku20170527/`.

資料 3, "進学選択　文学部で追加内定　「本年度限りの措置」 - 東大新聞オンライン," `http://www.todaishimbun.org/news20171025/`.

資料 4, "【東大の 2017 年】2 年目の進学選択　再び変更相次ぐ - 東大新聞オンライン," `http://www.todaishimbun.org/summary20171228/`.

資料 5, "Lost in the School Choice Maze - The New York Times," `http://www.nytimes.com/2011/05/08/nyregion/in-applying-for-high-school-some-8th-graders-find-a-maze.html`.

Appendix

まず Boston メカニズム (BM), Deferred Acceptance (DA) アルゴリズム, Serial Dictatorship (SD) メカニズム, Top Trading Cycles (TTC) アルゴリズムを定義する.

Definition 2 (Boston (Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003)))**.** Boston メカニズム $\phi^{\mathrm{BM}} : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ は, 以下のように定義される:

- $R \in \mathcal{D}$ を提出された preference profile とする. N_k を step k で propose を行う学生の集合とする. $N_1 = I$ とする
- **Step** 1　各 $i \in N_1$ に対し, 選好順が最も高い学校を s_i とする.
  - $s_i = i$ の場合, その学生をアンマッチとして確定する
  - それ以外の場合, i は s_i に propose する

  各学校 $s \in S$ は, propose してきた学生を priority の高い順に並び替え, 定員 q_s 人が満たされるまでマッチする. この時マッチした学生と学校のペアは確定する. マッチしなかった学生を reject し, 全ての $s \in S$ について合わせて N_2 とする. $|N_2| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し, 現在のマッチ (+ アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{BM}}(P)$ とする. それ以外の場合は step 2 に進む

  一般に,
- **Step** k　各 $i \in N_k$ に対し, 選好順が k 番目に高い学校を s_i とする.
  - $s_i = i$ の場合, その学生をアンマッチとして確定する
  - それ以外の場合, i は s_i に propose する

  各学校 $s \in S$ は, step k で propose してきた学生を priority の高い順に並び替え, 既にマッチしている人と合わせて定員 q_s 人が満たされるまでマッチする. この時マッチした学生と学校のペアは確定する. マッチしなかった学生を reject し, 全ての $s \in S$ について合わせて N_{k+1} とする. $|N_{k+1}| = 0$ の場合ア

ルゴリズムを終了し, 現在のマッチ (+ アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{BM}}(P)$ とする. それ以外の場合は step $k+1$ に進む

アルゴリズムは最大 $|S|$ ステップで終了する.

Definition 3 (Deferred Acceptance (Gale and Shapley (1962)))**.** Deferred Acceptance アルゴリズム $\phi^{\mathrm{DA}} : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ は, 以下のように定義される:

- $R \in \mathcal{D}$ を提出された preference profile とする. N_k を step k で学校に propose をする学生の集合とする. $N_1 \equiv I$ とする
- **Step** 1　各 $i \in N_1$ に対し, 選好順が最も高い学校を s_i とする.
  - $s_i = i$ の場合, その学生をアンマッチとして確定する
  - それ以外の場合, i は s_i に propose する

  各学校 $s \in S$ は, propose してきた学生を priority の高い順に並び替え, 定員 q_s 人に達するまで学生と仮マッチする. マッチしなかった学生を reject し, 全ての $s \in S$ について合わせて N_2 とする.
  - $|N_2| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し, 現在のマッチ (+ アンマッチ) を用いて $\phi^{\mathrm{DA}}(R)$ を構成する
  - それ以外の場合は step 2 に進む.

  一般に,
- **Step** k　各 $i \in N_k$ に対し, まだ propose をしていない学校の中で, 選好順が最も高い学校を s_i とする.
  - $s_i = i$ の場合, その学生をアンマッチとして確定する
  - それ以外の場合, i は s_i に propose する

  各学校 $s \in S$ は, step k で propose してきた学生と step k-1 で仮マッチしていた学生を priority の高い順に並び替え, 定員 q_s 人までと仮マッチする. それ以外の学生を reject し, 全ての $s \in S$ について合わせて N_{k+1} とする.
  - $|N_{k+1}| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し, 現在のマッチ (+ アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{DA}}(R)$ とする
  - それ以外の場合は step $k+1$ に進む.

アルゴリズムは最大 $|S|$ ステップで終了する.

Definition 4 (Serial Dictatorship (Hylland and Zeckhauser (1979)))**.** 与えられた I 上の線形順序 $\succeq_I$ に対し[*11] , Serial Dictatorship メカニズム $\phi^{\mathrm{SD}}_{\succeq_I} : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ は以下のように定義される:

- **Step** 1　$\succeq_I$ の順序の最も高い学生を i とする. まだ定員に空きがある学校のうち, i の選好順が最も高い学校を s_i とする. $s_i \in S$ ならば i と s_i をマッチさせ, 確定する. $s_i = i$ ならアンマッチとして確定する. $|I| = 1$ であればアルゴリズムを終了し, その時点のマッチングを $\phi^{\mathrm{SD}}_{\succeq_I}(P)$ とする. そうでなければ step 2 に進む

[*11] $\succeq_I$ は提出された学生の preference profile に依存させずに決める必要がある. 依存させた場合は strategy-proofness が満たされない.

一般に,

- **Step** k 　$\succeq_I$ の順序の高い順に上から k 番目の学生を i とする. まだ定員に空きがある学校のうち,i の選好順が最も高い学校を s_i とする. $s_i \in S$ ならば i と s_i をマッチさせ, 確定する. $s_i = i$ ならアンマッチとして確定する. $k = |I|$ であればアルゴリズムを終了し, その時点のマッチングを $\phi^{\mathrm{SD}}_{\succeq_I}(P)$ とする. そうでなければ step $k+1$ に進む

アルゴリズムはちょうど $|I|$ ステップで終了する.

Definition 5 (Top Trading Cycles (Shapley and Scarf (1974), Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003)))**.** Top Trading Cycles アルゴリズム $\phi^{\mathrm{TTC}} : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ は, 以下のように定義される:

- $R \in \mathcal{D}$ を提出された preference profile とする. N_k, L_k を step k で残っている学生, 学校の集合とする. $N_1 = I, L_1 = S$ とする
- **Step** 1 　次のようにして有向グラフを作る: すべての $i \in N_1$ と $s \in L_1$ をグラフのノードとみなす. 各 $i \in N_1$ は $L_1 \cup \{i\}$ の中で最も選好順の高いノードに有向エッジを引く. 同様に各 $s \in L_1$ は N_1 の中で最も priority の高いノードに有向エッジを引く. こうして出来た有向グラフには少なくとも 1 つの cycle(閉路) が存在する. 各 cycle に対し, その中の学生と, その学生が指している学校 (ないし outside option) をマッチさせる. N_1 から cycle を構成した学生を取り除き, N_2 とする. L_1 から定員が満たされた学校を取り除き, L_2 とする.
  - $|N_2| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し, 現在のマッチ (+ アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{TTC}}(R)$ とする
  - それ以外の場合は step 2 に進む

  一般に,
- **Step** k 　次のようにして有向グラフを作る: すべての $i \in N_k$ と $s \in L_k$ をグラフのノードとみなす. 各 $L_k \cup \{i\}$ の中で最も選好順の高いノードに有向エッジを引く. 同様に各 $s \in L_k$ は N_k の中で最も priority の高いノードに有向エッジを引く. 各 cycle に対し, その中の学生と, その学生が指している学校 (ないし outside option) をマッチさせる. N_k から cycle を構成した学生を取り除き, N_{k+1} とする. L_k から定員が満たされた学校を取り除き, L_{k+1} とする.
  - $|N_{k+1}| = 0$ の場合アルゴリズムを終了し, 現在のマッチ (+ アンマッチ) を $\phi^{\mathrm{TTC}}(R)$ とする
  - それ以外の場合は step $k+1$ に進む

アルゴリズムは最大 $|I|$ ステップで終了する.

次に Afacany et al. (2017) で導入された Efficient Assignment Maximizing (EAM) メカニズムを定義する. まず準備として Pareto improvement chain と Pareto improvement cycle を定義する.

Definition 6. $R \in \mathcal{D}$ を固定する. 学生と学校の列挙 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}\}$ がマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ に対する Pareto improvement chain をなすとは,

1. $|\mu(s_{k+1})| < q_{s_{k+1}}$
2. $\mu(i_j) = s_j$

3. $s_{j+1} P_j s_j$

を満たすことをいう

Definition 7. $R \in \mathcal{D}$ を固定する．学生と学校の列挙 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}\}$ がマッチング $\mu \in \mathcal{M}$ に対する Pareto improvement cycle をなすとは,

1. $s_{k+1} = s_1$
2. $\mu(i_j) = s_j$
3. $s_{j+1} P_j s_j$

を満たすことをいう

続いて EAM メカニズムを定義する．メカニズムは

1. 最大マッチングを 1 つ選ぶパート
2. 1 で選んだ最大マッチングを各学生の初期保有とし, Pareto 改善を行うパート

の 2 段階に分かれている．

Definition 8 (Efficient Assignment Maximizing (Afacany et al. (2017)))**.** 与えられた I 上の線形順序 $\succeq_I$ に対し, Efficient Assignment Maximizing メカニズム $\phi^{\mathrm{EAM}} : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ は以下のように定義される:

- $R \in \mathcal{D}$ を提出された preference profile とする．$\xi^0 \equiv \mathcal{M}$ とおく．
- **Step** 1
  - **Substep** 1.1　$\succeq_I$ の順序の最も高い学生を i とする．$\xi^1 \subseteq \xi^0$ を次のように定義する

$$\xi^1 \equiv \begin{cases} \{\mu \in \xi^0 \mid \mu(i) \neq \emptyset\} & \text{if } \exists \mu \in \xi^0 \text{ s.t. } \mu(i) \neq \emptyset \\ \xi_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

    一般に,
  - **Substep** 1.k　$\succeq_I$ の順序の k 番目に高い学生を i とする．$\xi^k \subseteq \xi^{k-1}$ を次のように定義する

$$\xi^k \equiv \begin{cases} \{\mu \in \xi^{k-1} \mid \mu(i) \neq \emptyset\} & \text{if } \exists \mu \in \xi^{k-1} \text{ s.t. } \mu(i) \neq \emptyset \\ \xi_{k-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

  Substep はちょうど $|I|$ 回で終了する．$\mu^0 \in \xi^{|I|}$ を任意に 1 つ選ぶ．
- **Step** 2
  - **Substep** 2.1　μ^0 に Pareto improvement cycle または chain が存在すれば, それに従って μ^0 におけるマッチングを組み換え, μ^1 とする．存在しなければ $\phi^{\mathrm{EAM}}(R) = \mu^0$ として終了する
    一般に,
  - **Substep** 2.k　μ^{k-1} に Pareto improvement cycle または chain が存在すれば, それに従って μ^{k-1} におけるマッチングを組み換え, μ^k とする．存在しなければ $\phi^{\mathrm{EAM}}(R) = \mu^{k-1}$ として終了する

各 substep で 1 人以上が Pareto 改善するため, 学生と学校の数が共に有限であることから, この操作は有限回で終了する.