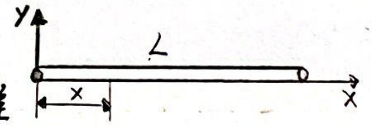
【实验目的】

1. 熟悉动态法测量杨氏模量的基本原理.
2. 掌握动态测量杨氏模量的基本测量方法
3. 学习用外延法测定试样节点处共振频率.

【实验原理】（电学、光学画出原理图）

1. 动态杨氏模量.



一根长远远大于直径的细长棒. 作微小弯曲振动时满足方程

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

（E为杨氏模量(Pa) ρ为材料密度. S为截面积. J为截面惯性矩 y为棒上距左端x处截面的y方向位移).

一般而言 $J = S(\frac{d}{4})^2$. 横振动方程的边界条件：棒的两端为自由端，端点不受正应力也不受切向力.
若令 $y(x,t) = X(x)T(t)$. 有: $\frac{1}{X}\frac{d^4X}{dx^4} = -\frac{\rho S}{EJ}\cdot\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$. 设两边均等于同一常数 K^4. 则有:

$$\begin{cases} \frac{d^4X}{dx^4} - K^4X = 0 \\ \frac{d^2T}{dt^2} + \frac{K^4EJ}{\rho S}T = 0 \end{cases}$$

如果棒中每点都作简谐振动. 则上述方程通解为

$$\begin{cases} X(x) = a_1 chKx + a_2 shKx + a_3\cos Kx + a_4\sin Kx \\ T(x) = b\cos(\omega t+\varphi) \end{cases} \quad 其中\ \omega = \left[\frac{K^4EJ}{\rho S}\right]^{1/2}$$

此式适用于不同边界条件任意形状截面的试样. 若试样悬挂点在试样节点处，则可以得到:

$\cos KL\cdot chKL = 1$ 可用数值解法得出 $K_nL = 0.\ 4.730.\ 7.853\cdots$ 关系.

其中 $K_0L=0$ 所对应是试样静止状态, $K_1L=4.730$ 所对应的试样振动频率称为基频. $K_2L=7.853$ 所对应的振动状态为谐频. 将基频对应K值代入频率公式. 可得.

$$E = 1.9978\times10^{-3}\cdot\frac{\rho L^4 S}{J}\omega^2 = 7.8870\times10^{-2}\cdot\frac{L^3 m}{J}f^2$$

（若试样为圆棒. $J=\frac{\pi d^4}{64}$）

则 $E = 1.6067\times\frac{L^3 m}{d^4}f^2$ （L为被测件长度. m为被测件质量. f为基频共振频率. d为圆杆直径）

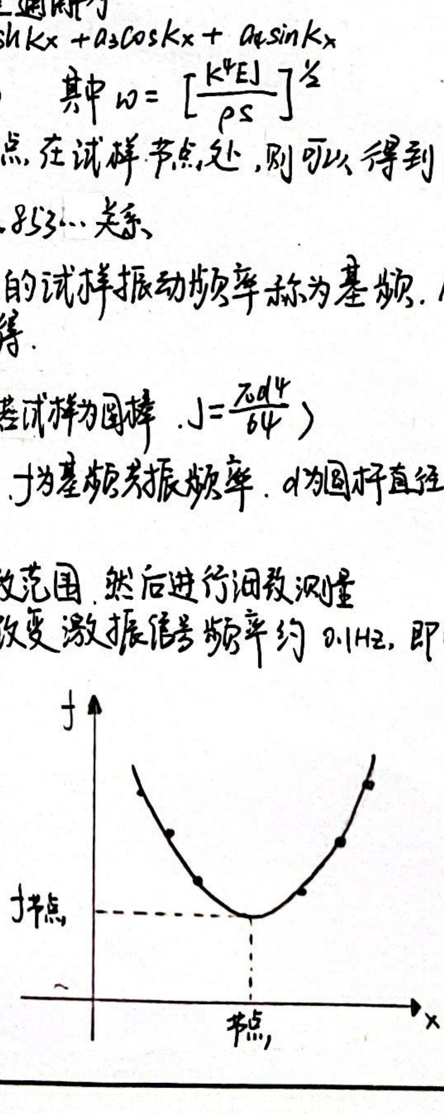
2. 动态杨氏模量测量方法

① 共振频率预估法. 先用理论公式估算共振频率的大致范围. 然后进行细致测量

② 峰宽判别法: 真正的共振峰峰宽十分尖锐，只要改变激振信号频率约 0.1Hz, 即可判断出试样是否处于最佳共振状态,

3. 外延法测量共振频率

(1) 悬挂点位置作横坐标. (2) 对应共振频率作纵坐标, 求得曲线最低点, 所对应的共振频率即为试样的基频共振频率f.



【实验内容】（重点说明）

1. 对 d 圆杆直径. L. 被测件长度. m 被测件质量. 进行测量.

2. 共振频率测量

①连接装置：将悬丝分别连接在测试棒的 0.1L 与 0.9L 处。

②因为室温下铜的杨氏模量为 $1.2\times10^{10}\,N/m^2$，所以由式可估算共振频率 f。由小到大调节信号发生器频率，并观察示波器上信号变化。当拾振信号（交流信号）在某一频率处达到极大，则可认为信号发生器的激振频率与测试棒共振，记下该频率 f_1.

③将悬丝以等间隔向里靠拢，分别记下频率 f_2、f_3……

④用外延法作图，获取测试棒的固有频率 f.

⑤ f 代入，计算该棒的杨氏模量，并计算 ΔE.

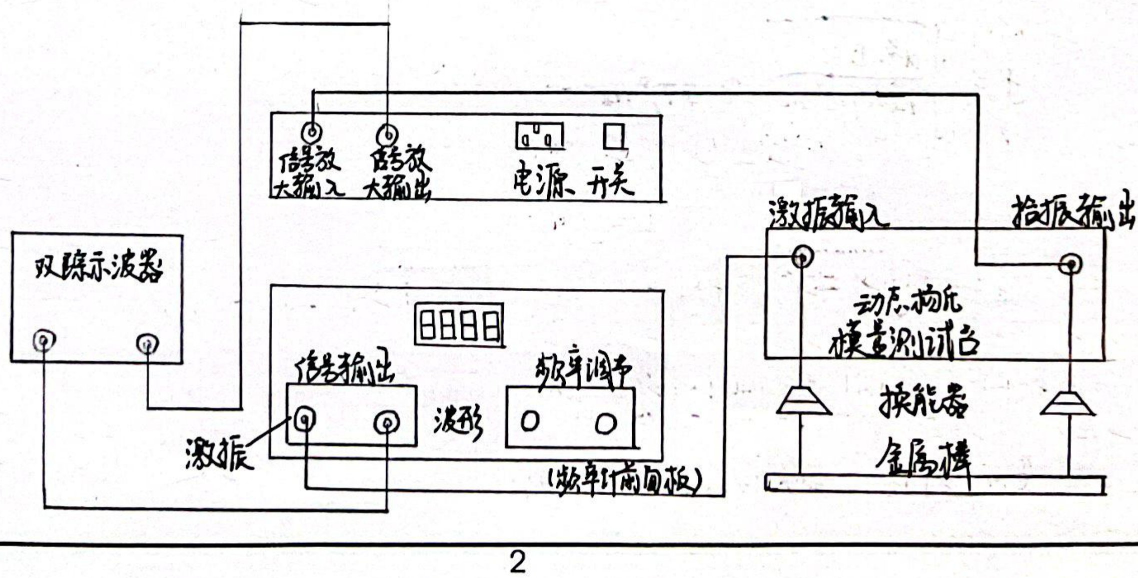
$$\Delta E = E\sqrt{\left(3\frac{\Delta L}{L}\right)^2+\left(4\frac{\Delta d}{d}\right)^2+\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2+\left(2\frac{\Delta f}{f}\right)^2}$$

【实验器材及注意事项】

实验器材：动态法杨氏模量测试台．激振器．拾振器．示波器（系统连接见下图）

注意事项：①注意绑线时绑至相应位置刻度凹槽上，且保持悬线垂直。

②激振器频率不能过高或过低．



【数据处理与结果】

1. 金属棒长度、直径测量表.

n	1	2	3	4	5	6
d/mm	5.939	5.932	5.938	5.934	5.930	5.938
l/mm	159.5	159.7	159.5	159.4	159.5	159.6

2. 共振频率测量表（因为 35mm 接近于 0.224L，共振频率的测量误差较大，因而舍弃该组数据）

悬丝点距端点位置/mm	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
x/L	0.031	0.063	0.094	0.125	0.157	0.188	0.219	0.251	0.282	0.313
共振频率 f/Hz	745.3	744.7	743.7	742.1	741.7	741.5	/	741.5	741.6	741.9

$\bar{d}=\sum_{i=1}^{6} d_i/6 = 5.935\text{mm}$ $\quad u_{dA}=\sqrt{\frac{1}{6\times5}\cdot\sum_{i=1}^{6}(d_i-\bar{d})^2}=0.002\text{ mm}$ $\quad u_{dB}=3\times10^{-3}=0.003\text{mm}$

$\bar{l}=\sum_{i=1}^{6} l_i/6 = 159.5\text{ mm}$ $\quad u_{lA}=\sqrt{\frac{1}{6\times5}\cdot\sum_{i=1}^{6}(l_i-\bar{l})^2}=0.05\text{mm}$ $\quad u_{lB}=0.2/\sqrt{3}\approx0.12\text{mm}$.

经电子天平称量，$m=37.655\text{g}$ $\quad u_{mB}=1/\sqrt{3}\approx0.6\text{mg}$

$\therefore\ u_d=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=0.004\text{mm}$ $\Rightarrow$ $d=(5.935\pm0.004)\text{ mm}$

$u_l=\sqrt{u_{lA}^2+u_{lB}^2}=0.13\text{mm}$ $\Rightarrow$ $l=(159.5\pm0.13)\text{ mm}$

$u_m=0.6\text{mg}$ $\Rightarrow$ $m=(37.655\pm0.0006)\text{g}$

$u_f=u_{fB}=0.1/\sqrt{3}=0.06\text{Hz}$

由拟合函数图像可知. $y(f)=0.0042x^2-0.3108x+746.97$

$\therefore\ y'(f)=0 \Rightarrow x=37\text{mm}$ 时，对应 $f=741.2\text{HZ}$

代入公式 $\quad E=1.6067\cdot\frac{L^3\cdot m}{d^4}f^2=1.084\times10^{11}\,N/m^2$

$$\Delta E=\bar{E}\cdot\sqrt{\left(3\frac{\Delta L}{L}\right)^2+\left(4\frac{\Delta d}{d}\right)^2+\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2+\left(2\frac{\Delta f}{f}\right)^2}=4\times10^{8}\,N/m^2$$

$\therefore\ E=(1.084\pm0.004)\times10^{11}\ N/m^2$

查阅资料得，室温下杨模量的值约为90Gpa ~ 123.5Gpa，实验结果恰好落于该范围内(108GPa)。

【误差分析】

1. 首先，各项仪器均存在最小精度表示，因而必然带入精确度限制的误差。

2. 在寻求共振频率时，难以精确使细长棒完全垂直于悬线且完全平行于地面，在测量过程，因为只精确频率至一位小数，会造成难以判断正弦图像已达最高峰值的问题，从而对共振频率的选择产生误差。

3. 在螺旋测微器使用过程，因松紧旋度难以控制一致，因而会对测量产生误差。在先前的学习过程中，可知精密仪器需进行零点修正，若不及时修正而直接应用测量，将代入较大的误差。

4. 对于动态法测杨氏模量测试台的调节，易使得拾振器与激振器不仅水平移动甚而发生绕轴旋转，对细长棒共振频率的测量带来较大影响。

5. 在图像拟合函数过程中，因采取二阶多项式拟合，精度较低，会引入较大误差。

【实验心得及思考题】

思考题 1：

可采用下述方法尝试判别。

(1) 共振频率预估法：做实验前先用理论公式估算出共振频率的大致范围，然后再进行细致的测量。

(2) 峰宽判别法：真正的共振峰的峰宽十分尖锐，特别是在室温时，只要改变激振信号频率约 0.1Hz，即可判断出试样是否处于最佳共振状态，而虚假共振峰的峰宽较宽。

另外，声音听取可能也有助于判别真假共振峰，达到共振峰时，金属棒往往发出刺耳尖锐的振动声波。

思考题 2：

查阅相关资料后，得到以下辅助信息。

若不满足 $d \ll L$ 时，须在式 (2-7-8) 即

$E = 1.6067 \frac{L^3 m}{d^4} f^2$ 后乘以一修正系数 T。

修正系数 T 与泊松比 μ，回转半径与长度比值 $\bar{r}/L$ 间存在关系（往往可查表得到），具体运算表达式如下：

$$T = 1 + 1.6 \cdot \left\{ \frac{(k_nL)^2 [\sin(k_nL) + \sinh(k_nL)]}{\sinh(k_nL) - \sin(k_nL)} \cdot \frac{10 + 15\mu + 4\mu^2}{48(1+\mu)} \pm \frac{(k_nL)\sin(k_nL) \cdot \sinh(k_nL)}{\sin(k_nL) - \sinh(k_nL)} \cdot \frac{2 - 3\mu - 4\mu^2}{24(1+\mu)} \right\} \cdot \left(\frac{\bar{r}}{L}\right)^2$$

其中 k_nL 由边界条件和振动级次 n 所决定的常量，$\bar{r}$ 为回转半径。（对于圆柱而言，$\bar{r} = d/4$）

根据资料显示，铜的泊松比约为 0.3～0.4，取 $\mu = 0.35$ 时，$\bar{r}/L$（回转半径与长度比）与 T（修正系数）的对应简表如下：

$\bar{r}/L$	0.000	0.005	0.020	0.050
T	1.000	1.0021	1.034	1.213

查表可得，$\bar{r}/L = 0.0093 \approx 0.010$　$\therefore T = 1.0085$

$E = 1.6067 \frac{L^3 m}{d^4} f^2 T = 1.093 \times 10^{11}\ N/m^2$

因而 $E = (1.093 \pm 0.004) \times 10^{11}\ N/m^2$

（参考《中华人民共和国国家标准》GB/T 2105-91《金属材料杨氏模量、切变模量及泊松比测量方法（动力学法）》）

实验心得：

第一次一个人一个教室做实验，明明很有趣，为什么没人来选呢。朱老师一对一教授真堪称保姆级教程，甚至教导我数据处理部分的图像拟合函数方法，太细致了！

另外，书本 P86 的标准杨氏模量数据的数量级有点小问题，应该为 $1.2 \times 10^{11}\ N/m^2$，不然共振频率的预估值要及 7000+Hz 了，应该有点过大了。希望可以更正一下哦！