

Prob. 11 根据 example 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \quad |p_0 - p| = 0.5$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|^3} = \alpha$$

$$|p_n| = \alpha \cdot |p_{n-1}|^3 = \alpha^{\frac{3^n-1}{2}} \cdot |p_0|^{3^n}$$

$$\text{而用二阶收敛时, 有 } |p_n| \approx 0.5^{2^n-1} |p_0|^{2^n}$$

$$\because 0 < \alpha < 1 \text{ 且 } \frac{3^n-1}{2} > 2^n-1$$

$\therefore$  立方收敛快于二阶收敛

Prob. #8

首先使用高斯消元法, 使增广矩阵转变为一上三角矩阵  
不直接反代求解, 而是自底向上从  $a_{in} (i=1, 2, \dots, n)$  开始消除.

即从第  $n$  开始, 取  $a_{nn}$ , 消除第  $1 \sim n-1$  行的最后一项, 继续向上  
取  $a_{n-1, n-1}$ , 消除第  $1 \sim n-2$  行的第  $n-1$  项, 以此类推, 将矩阵  
转化为反对角矩阵, 从而可直接分行解出  $x_1 \sim x_n$ .

Prob. #11.

先寻找行主元, 将其移动到主对角线 (不进行列变换) 同一行  
内除以主元大小, 使主元化为 1. 自上而下化简为目标矩阵.  
让主元素为对映  $a_{jk} (k \text{ 固定})$  系数值, 使该行内除主元以外元素均  
化为 0. 由  $1 \sim n$  行循环操作, 直至矩阵被化简为对角矩阵  
若化简过程导致  $a_{ii}^{(1)} = 0$  成立则矩阵不存在相映的唯  
一解集合.

∴ 共有  $\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}$  次乘/除法

$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$  次加/减法

b 根据高斯消元法, 它需要

$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$  Multiplications / divisions

$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$  Additions / subtractions.

	A/s	m/D	A/s	m/D
∴ n=3	17	11	21	12
10	430	375	595	495
50	46150	42875	64975	62475
100	343300	338250	509950	499950

因此, 高斯消元法需要更少的计算。