



中華民國力學學會STAM

Society of Theoretical and Applied Mechanics of the Republic of China

中華民國力學學會第156期會訊

- 一、【專題報導】導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（上）
國立臺灣大學機械工程學系 王建凱 副教授
- 二、【專題報導】導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（下）
國立臺灣大學機械工程學系 王建凱 副教授
- 三、力學推廣活動系列報導焦點：
力學大師訪談計畫 ~ 力學人物口述歷史訪談影音記錄 ~
幕後製作紀錄
國立臺灣大學機械工程學系 黃育熙 教授
- 四、機械工程學術新篇章：臺灣大學與首爾大學共譜新紀元
國立臺灣大學機械工程學系 詹魁元 教授

【近期訊息】

- ★2024亞太地區大專生力學競賽：
報名時間：即日起至報至2024/8/5截止
- ★力學學會獎項申請：2024會士遴選、虞兆中力學獎章、
孫方鐸教授力學獎章、博士學位論文獎、服務獎、年
輕力學學者獎：
2024年8月31日截止
- ★2024中華民國力學學會年會暨第48屆全國力學會議/
第3屆國際力學會議將於11月29-30日在國立清華大學
舉辦

導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（上）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

西元2021年是有限元素法（Finite Element Method，簡記為FEM）誕生的八十週年。綜觀而論，凡是可以利用偏微分方程組描述的問題，幾乎都能應用FEM來求解。FEM於本質上建立進行科學建模和工程設計的方式，力學學術知識的增進與FEM技術的發展相輔相成並快速突破，相應計算力學、工程與尖端科學應用的研究領域應運而生且持續蓬勃發展。本文為美國西北大學、加州大學柏克萊分校與波士頓大學著名學者Wing Kam Liu、Shaofan Li與Harold S. Park在西元2022年於國際期刊 Archives of Computational Methods in Engineering 發表「Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future」學術研究論文之導讀文章。

此篇研究論文詳細介紹自1941年有限元素法的發展歷史，深入地探究FEM的形成起源、理論發展以及關鍵演進，FEM至今已成為許多力學研究課題之首選數值求解方法，藉以打造出各類工程分析設計和物理科學建模的核心計算工具，應用範圍包括材料和結構力學、流體流動與相應熱傳導、精密製造、電磁科學分析、生物醫學操作與過程與半導體晶片設計等。於研究論文中，作者從有限元素法於固體力學的發展及相關應用出發，進而回顧此方法在流體力學與熱傳導等其他研究領域的發展歷史與重要影響，以下為全文劃分的第一和第二個時期：「有限元素法的誕生（1941–1965）」與「有限元素法的黃金演進時代（1966–1991）」。

一、有限元素法的誕生（1941–1965）

有限元方法的起源可以追溯到20世紀40年代初期，A. Hrennikoff於1941年在英屬哥倫比亞大學（the University of British Columbia）發表論文「Solution of problems of elasticity by the framework method」，該論文亦發表於美國機械工程師學會（American Society of Mechanical Engineers，簡記為ASME）Journal of Applied Mechanics期刊，論文中以格子式框架建立板與膜構造模型，模擬平面應力系統，並成功得出數值解，被普遍認為是最早發展之解空間離散化網格形式。美國數學學會（American Mathematical Society，簡記為AMS）同年於美國華盛頓特區舉行會議，

紐約大學（New York University）R. Courant教授於特邀演講與在1943年發表的論文中，說明如何利用變分法之相應數值求解技術，進行著名Saint-Venant圓柱扭轉問題之二階偏微分方程組的研究，特殊的是，R. Courant教授使用Rayleigh-Ritz離散化方法，在有限數量的三角形型式的子空間上，首先定義出能彰顯出有限元方法初步形式的試驗函數。

在20世紀50年代初期，倫敦帝國學院（Imperial College London）J. H. Argyris教授與美國波音公司M. J. Turner資深工程師、美國加州大學柏克萊分校R. W. Clough教授與美國華盛頓大學的H. C. Martin教授，分別在當代航太與土木工程的重點計算領域內進行研究，於1954年提出系統矩陣剛度法，被認為是最早具有矩陣形式的有限元素法求解方式，J. H. Argyris教授並憑藉其對R. Courant教授提出的變分法求解方式的深入見解，進一步開發適用於工程系統結構的能量法，被視為FEM應用於固體力學研究發展的基礎。而後M. J. Turner、R. W. Clough、H. C. Martin和時任美國波音公司工程師L. J. Topp成功地為三角形元素開發求解插值方式，於1956年發表「Stiffness and deflection analysis of complex structures」論文，有限元素模型首度可適用於任意形狀的系統元件，故對於工程領域的應用而言，此篇論文廣泛被視為FEM誕生的里程碑。在1960年，R. W. Clough教授於美國土木工程師學會舉辦電子計算研討會議中，發表論文「The finite element method in plane stress analysis」首次對此數值求解方法的名稱提出「有限元素法」一詞，既簡明又直述地揭示方法的內容本質。

來到20世紀60年代，於1965年，有限元素法成為一個高度活躍的學術領域，此一時期在彈性力學於混合變分原理（Mixed Variational Principles）研究上有重大突破，對有限元素法接續的發展產生至關重要的影響。E. Reissner首先應用E. Hellinger提出的混合變分原理，能夠將彈性力學理論中的位移和應力場，同時做為主要且相互獨立的求解未知數，即後人稱「Hellinger-Reissner變分原理」；而後H. C. Hu和K. Washizu提出具有應力與應變關係約束條件之融合位移、應力與應變場三混合變分原理，即後人稱



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（上）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

「Hu-Washizu變分原理」。T. H. Pian與J. Simo發現變分原理在基於Galerkin弱形式有限元素法公式中應用的極大潛力，分別提出假設應力有限元素法與假設應變有限元素法；K. Feng並提出基於變分理論基礎的離散化數值方法，應用於橢圓偏微分方程式求解，是最早提出的FEM收斂性研究分析之一，使用變分原理來制定Galerkin有限元素法的時代從此開啟。

以下是此時期中，多位致力於發展FEM偉大學者研究貢獻的大事紀：於1958年，E. L. Wilson是首位開發有限元素法開放程式的學者，提供專業工程師可以直接使用程式計算，用於連續介質力學問題中，評估具有不同幾何形狀、材料特性和載荷形式的平面結構系統的位移和應力分布；於1961年，I. C. Taig首先在航空結構分析問題中，使用基於有限元素法理論基礎之矩陣位移法；於1963年，J. T. Oden與G. C. Best發展一系列固體和結構元素理論，含有四面體、六面體、薄板、厚板、加強板、複合板元素，並開發相應Fortran語言程式，進行三角形與四面體等各元素的數值積分，還包括特徵值模態分析，成為當代最有效率的平面與三維系統靜態線性彈性力學分析求解器；於1968年，由I. Ergatoudis、B. M. Irons與當代將有限差分法與有限元素法應用於連續介質力學問題的權威O. C. Zienkiewicz首先引入元素內部質點位置與位移計算使用相同插值函數之等參元素（Isoparametric Element），被認為除具有高效率、穩定與收斂的計算特性，由於元素幾何與位移場描述的一致性，故等參元素可以精確地描述複雜的幾何形狀，因此適合使用於非線性力學問題分析。鑑於以上有限元素法創建與研究發展的決定性貢獻，R. W. Clough在1994年由時任美國副總統Al Gore 授予國家科學獎章，且O. C. Zienkiewicz被授予大英帝國司令勳章；更有甚者，於1965年，全球發表有限元素法的研究論文總數已超過1000篇。

二、有限元素法的黃金演進時代（1966–1991）

1960年代中期，有限元素法的研究和應用迅速發展，支持FEM的近似理論開始發展，體現在FEM收斂特性的證明工作上，而與其他傳統數學問題不同，FEM收斂性質探討始於工程導向研究。當時世界上傑出的數學家發現，工程師在應用實踐上，有時使用不符合FEM插值原理、違反變分原則或是Hilbert空間中標準雙線性形式的數值積分方法，數學家G. Strang稱這些數值技術為變分罪行（Variational Crimes），顯著的成果包括有Cea（Cea lemma）和Bramble-Hubert引理（Bramble-Hubert Lemma），而後J. Nitsche於1970年，對於廣義線性橢圓問題在巴拿赫空間（Banach Space）中，包含所有的有界函數且擁有函數間算術操作亦始終保持有界的完全範數空間，其嚴謹的研究工作被認為是當代有限元素法於數學理論基礎的重要貢獻之一。另最早期的有限元素檢驗測試（Patch Test）是由B. Iron和R. Melosh所發明，可避免複雜的收斂證明程序，即能完整說明且確保有限元素數值解可收斂至正確的答案。在收斂性質研究的良好基礎之上，有限元素法數值求解的穩定特性受到關注，暨T. H. Pian與J. Simo發明假設應力與應變元素後，L. R. Hermann於1965年首先提出適用於不可壓縮固體的混合變分原理研究，然而當時大多數的混合變分原理並不是基於極值變分理論發展，因此存在數值不穩定性，在1970年代初期，I. Babuska和F. Brezzi發展出現今被稱為「Babuska-Brezzi條件」或是「LBB條件」的革命性成果，此致敬於數學家O. Ladyzhenskaya，其提出的集合極值行為（Inf-Sup）條件，為數學鞍點（Saddle Point）提供一個充分的擁有下確界和上確界條件，可使求解問題具有唯一解，做為基於混合變分原理的元素形狀函數（Shape Function）之發展基礎。

導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（上）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

工業革命自19世紀起，對科學發展及社會變遷產生極為重要的影響，隨著基於牛頓力學原理發展的科學知識日益成熟且工業發展壯大，蒸汽機、火車、輪船等以機器動力驅動文明發展，且各式工具機的發明，得以使得鐘錶、齒輪、紡織機等精密機械大量生產，為生產出更加精良的工業產品，工程師與科學家之間的界線逐漸模糊，許多工程師如科學家般地投入基礎研究。進入1970年代，此時有限元素法的發展開始專注於準確模擬結構的動態行為，主要課題之一是汽車碰撞安全性的評估，故各種時間積分方法成功開發出來，包括 Newmark-Beta 方法、Wilson-Theta 方法、Hilbert-Hughes-Taylor Alpha方法、Houbolt積分算法以及顯式時間積分算法，當中於1970年代末，T. Belytschko、K. C. Park及T. J. R. Hughes於顯式、隱式與顯式混合與結合阻尼控制之隱式時間積分求解非線性結構系統動力學問題，具有顯著的貢獻，而後A. Combescure與A. Gravouil成功推廣有限元素顯式時間積分方法，自此之後，顯式時間積分算法廣用於各式工程應用問題，如動態接觸問題、固體動力學問題與流體動力學問題，當時美國勞倫斯Livermore國家實驗室投入大規模動力分析程式開發，而後逐步發展為著名有限元素動力分析軟體-DYNA。以上重要研究貢獻確立顯式時間積分式有限元素分析技術為車體載具設計和碰撞安全分析的最主要工具，時至1980年代，美國三大汽車製造商-通用汽車（General Motors）、克萊斯勒（Chrysler Corporation）與福特（Ford Motor Company）即已建立達數千台規模之電腦工作站，以運程式進行動力分析與安全評估，有限元素法於汽車工業發展的影響力，可見一斑。

於此期間中，有限元素法主要的研究課題之一為Navier-Stokes方程式求解，做為有限差分法和有限體積法於流場問題之可行替代解法。J. T. Oden自1970年代已開始致力應用有限元素法於流體動力學問題之研究，點出主要挑戰在於Navier-Stokes方程式並非橢圓偏微分方程式，基於能量最小化或是變分法原理的Petrov-Galerkin求解方式，可能會遇到穩定性和收斂性問題。

為解決上述問題，T. J. R. Hughes、A. N. Brooks與T. E. Tezduyar，開發Streamline Upwind / Petrov Galerkin方法以及Stabilized Galerkin 有限元素法，成功解出符合初始和邊界條件設定下Navier-Stokes方程式控制之流體場域，T. J. R. Hughes並發展融合空間、時間與基於變分法之多尺度有限元素分析方法，並與L. P. Franca提出一種具有基於格林（Green）函數建立子網格之元素模型，為一具有高度穩定性的有限元素求解方法。時至1980年代中期，先進的元素網格生成技術已發展至一定規模，使用交互式計算圖學原理發展出具有適應性之網格生成器，其中J. A. Bennett和M. E. Botkin以改良式四叉樹演算法（Quadtree Approach），為具複雜幾何形狀之物體模型生成元素網格，現今當代有限元素計算套裝軟體多可結合各種實體建模的技術，並普遍具備自動化節點插入和局部網格細化的功能，使得網格生成已成為工程分析與設計必備的固有操作程序。自1970年代中期，有限元素法開啟流體與固體結構相互作用求解的發展之路。於1974年，C. W. Hirt、A. A. Amsden與J. L. Cook發明任意拉格朗治-歐拉（Arbitrary Lagrangian-Eulerian，簡記為ALE）計算方法，J. Donea、A. Huerta、T. J. R. Hughes、W. K. Liu與T. K. Zimmermann陸續應用ALE於移動有限元素模型計算網格以優化流體與固體材料元素形狀，且流體與固體域邊界網格亦隨材料格點一起移動，以精確追蹤流固耦合系統材料界面傳遞與互制機制。於1994年，C. Farhat更首度實作出大規模平行計算之融合ALE有限元素求解器，可見有限元素法對於流體與結構互制力學之許多實際應用研究，產生重大的影響。

在1980年代前期，有限元素法於非線性問題求解技術研究有顯著的進展，鑑於線性化在固體與結構力學理論推導與數值分析均扮演關鍵的角色，T. J. R. Hughes與K. S. Pister於1978年首先分別對於材料與幾何非線性力學提出一致線性化定義與程序理論，並成功以具巨量運動與非線性材料變形之彈性板做演示，而後在1985年，J. C. Simo和R. L. Taylor進而開發出非速率相關彈塑性材料之切線剛度標準運算子，對基於牛頓法之增量算法與可達二次方收斂效率之迭代求解至關重要。於1980年代期間，另一有限元素法發展里程碑是非線性機率或稱隨機FEM的發明，此一方法由W.K. Liu和T. Belytschko首先提出。



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（上）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

透過考慮載荷條件、材料行為、幾何配置和邊界條件等不均勻隨機場的不確定性，除對位移場的離散化，隨機場域亦被離散化處理，透過線性化推導，得以將隨機FEM進一步擴展到非線性連續體，其瞬態分析結果與計算效率成功由一維彈塑性波傳播問題和二維平面應力梁彎曲問題的應用得到驗證，可應用於系統可靠性分析，爾後更成功地拓展至與流場高度耦合之固體材料連續元素，對於和航太與結構工程等具不確定性量化研究領域更顯重要。於此時期中，另一個新興的研究領域是由D. N. Arnold於1984年提出的有限元素外微積分（Finite Element Exterior Calculus）是一種將有限元素法與微分幾何、代數與拓樸結合的新式數學離散化框架，適用但不僅限於彈性力學問題，主要用於數值方法對偏微分方程式穩定的離散化求解。

在1980年代，美國密西根大學與通用汽車實驗室致力應用有限元素法於汽車工業的結構設計研究，N. Kikuchi、M. E. Botkin、M. H. Imam與M. P. Bendsøe開發用於汽車工業的結構形狀優化有限元方法，提出以均勻化方法尋找出給定載荷條件下的汽車結構最佳形狀，奠定由G. Cheng、M. P. Bendsøe與O. Sigmund進一步發展拓樸最佳化研究領域之基礎。自1980年代以來，開發準確的接觸演算法亦成為有限元素法研究焦點之一，T. J. R. Hughes、R. L. Taylor、J. L. Sackman、A. Curnier和W. Kanoknukulchai在1976年即發表處理接觸衝擊問題之有限元素方法論文，是計算接觸力學最早發展的有限元素分析，同時也是首度精確估計動態接觸和衝擊的有限元素研究，實例有鈹金成形、衝擊、穿透以及路面與輪胎之間的相互作用等，直至1990年代，相應各式有限元素接觸演算法仍是一個活躍的研究主題，主要貢獻者包括N. Kikuchi、J. T. Oden、J. Simo、P. Wriggers、R. L. Taylor、P. Papadopoulos和T. A. Laursen。

在1980年代，美國密西根大學與通用汽車實驗室致力應用有限元素法於汽車工業的結構設計研究，N. Kikuchi、M. E. Botkin、M. H. Imam與M. P. Bendsøe開發用於汽車工業的結構形狀優化有限元方法，提出以均勻化方法尋找出給定載荷條件下的汽車結構最佳形狀，奠定由G. Cheng、M. P. Bendsøe與O. Sigmund進一步發展拓樸最佳化研究領域之基礎。自1980年代以來，開發準確的接觸演算法亦成為有限元素法研究焦點之一，T. J. R. Hughes、R. L. Taylor、J. L. Sackman、A. Curnier和W. Kanoknukulchai在1976年即發表處理接觸衝擊問題之有限元素方法論文，是計算接觸力學最早發展的有限元素分析，同時也是首度精確估計動態接觸和衝擊的有限元素研究，實例有鈹金成形、衝擊、穿透以及路面與輪胎之間的相互作用等，直至1990年代，相應各式有限元素接觸演算法仍是一個活躍的研究主題，主要貢獻者包括N. Kikuchi、J. T. Oden、J. Simo、P. Wriggers、R. L. Taylor、P. Papadopoulos和T. A. Laursen。



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（下）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

西元2021年是有限元素法（Finite Element Method，簡記為FEM）誕生的八十週年。綜觀而論，凡是可以利用偏微分方程組描述的問題，幾乎都能應用FEM來求解。FEM於本質上建立進行科學建模和工程設計的方式，力學學術知識的增進與FEM技術的發展相輔相成並快速突破，相應計算力學、工程與尖端科學應用的研究領域應運而生且持續蓬勃發展。本文為美國西北大學、加州大學柏克萊分校與波士頓大學著名學者Wing Kam Liu、Shaofan Li與Harold S. Park在西元2022年於國際期刊 Archives of Computational Methods in Engineering 發表「Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future」學術研究論文之導讀文章。

此篇研究論文詳細介紹自1941年有限元素法的發展歷史，深入地探究FEM的形成起源、理論發展至關鍵演進，FEM至今已成為許多力學研究課題之首選數值求解方法，藉以打造出各類工程分析設計和物理科學建模的核心計算工具，應用範圍包括材料和結構力學、流體流動與相應熱傳導、精密製造、電磁科學分析、生物醫學操作與過程與半導體晶片設計等。於研究論文中，作者從有限元素法於固體力學的發展及相關應用出發，進而回顧此方法在流體力學與熱傳導等其他研究領域的發展歷史與重要影響，以下為全文劃分的第三與第四個時期：「大規模工業應用和材料建模發展（1992–2017）」與「當代與未來」。

三、大規模工業應用和材料建模發展（1992–2017）

自1970年代末以來，B. A. Szabo和I. Babuska即基於分段式多項式成功開發出高速收斂有限元素法，發現當使用合適的網格大小尺寸和相應近似多項式階數的元素建模，FEM收斂速度可達指數級的水準，遠高於一般有限元素法的收斂速度。

而後在1990年代初期，O. C. Zienkiewicz與J. Z. Zhu提出有限元素模型誤差估計器演算法，這項發明對FEM數學近似理論做出重大貢獻，為有限元素法發展歷程最重要的事件之一，此誤差估計器進而透過自適應方式細化網格，以控制FEM求解的質量，因而可最佳化地利用計算資源，此一技術主題與科學研究和工業應用之驗證和確認程序密切相關。

在工程材料強度和系統結構失效主題方面，1990年代大多研究工作集中於基於變分原理的離散化方法上，以解決破壞力學或應變局部化的問題。S. T. Pietruszczak和Z. Mroz早於1981年時，首度開發出土壤剪切破壞的黏聚FEM模型，X. P. Xu和A. Needleman在1994年開發出FEM內聚區模型（Cohesive Zone Model，簡記為CZM），得以不重新製作網格來模擬裂紋擴展過程，後來由G. T. Camacho、A. Pandolfi和M. Ortiz進一步使用具CZM之FEM成功解決工程材料破壞和疲勞問題，Z. P. Bažant隨後於2001年開發各種FEM微平面界面模型，以研究混凝土與脆性複合材料特有的尺寸效應，此模型成為模擬導彈衝擊和爆炸的標準工具，以及應用於美國克萊斯勒和福特汽車公司的研發工作，以比較各式汽車撞擊緩衝區的設計。

考量於材料破壞問題中，常發生建模網格差異造成的結果偏差問題，T. Belytschko和W.K. Liu於1995年分別基於移動最小二乘法和小波多重解析建立無網格粒子式求解方式，開發出無網格Galerkin與再生核粒子方法（Element-Free Galerkin與Reproducing Kernel Particle Method，簡記為EFG與RKPM），相比於廣泛使用的光滑粒子流體動力（Smoothed Particle Hydrodynamics）方法，RKPM提供更好的收斂與一致性，而在EFG與RKPM方法中，由於無網格插值函數常為不規則，故難以保證變分維持一致，因此進行弱形式積分成為當時最具挑戰性的問題之一。於2001年，J. S. Chen提出簡單、穩定且符合節點條件的積分方式，不僅可應用於上述方法，還能經由變分理論推導出與Galerkin弱形式一致的結果。



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（下）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

在無網格方法發展之後不久後，I. Babuska 開發出有限元素單位分解法（Partition of Unity Finite Element Method，簡記為PUFEM），後來被稱為廣義有限元素法（Generalized Finite Element Method，簡記為GFEM），與其他有限元素法原理不同的是其提供解析解嵌入FEM離散化過程中的能力，並可用於構建任何給定具規則性的有限元素空間，而不是依賴於通用的多項式插值方式，大幅提升FEM對於材料破壞現象與過程的模擬能力。在1990年代末，計算破壞力學的FEM技術有重大突破，更加精準捕捉材料裂紋形成形態與過程。T. Belytschko、T. Black、N. Moës與J. Dolbow成功開發擴展式有限元素法（Extended Finite Element Method，簡記為X-FEM），其巧妙地基於PUFEM的概念，並使用增強且間斷式形狀函數，而無需重新建立網格。由於X-FEM能準確評估裂紋尖端材料能量釋放率，因而能控制裂紋形成的材料自適應過程，故為線性彈性斷裂力學理論（Linear Elastic Fracture Mechanics）提供堅實的數值驗證結果。而後B. Bourdin、G. A. Francfort、J. J. Marigo與A. Karma於2000年初發展出融合相場法（Phase-Field Model）來模擬材料斷裂，主要優勢在於透過使用Galerkin FEM同時涵蓋連體運動方程與相場方程，於相場法中，裂紋被視為的解存在的界面極限，故除不會有材料應力值奇異（Singularity）問題，也無需重新劃分網格，即能解出裂紋生長和擴展問題，以準確預測脆性材料的斷裂與損傷。

如前所述，FEM具科學建模和預測的厚實理論基礎，並具工程分析和設計的廣泛應用特性，在工業發展過程中，大多數的機械工程產品與工具是使用計算機輔助技術設計完成的，為將FEM更加直接地融合至實體建模設計中，T. J. R. Hughes、J. A. Cottrell與Y. Bazilevs於2005年開發出等幾何分析（Isogeometric Analysis，簡記為IGA）有限元素法，此方法在控制網格中仍建立Galerkin變分弱形式，特殊的是使用非均勻有理雲規（Non-uniform Rational Basis Spline，簡記為NURBS）函數做為FEM的形狀函數，成功地將FEM無縫地整合至廣為基於NURBS發展的CAD設計工具中，在開發設計階段過程中，無需在CAD設計和FEA分析模型之間轉換數據型態。

由於精密元件製造技術日新月異，微小尺度乃至奈米等級物質單元的操作亦發展成熟，多尺度有限元素法研究領域因而興起，致力於連接分子動力學與密度泛函理論等原子尺度計算方法至連續體觀點有限元素分析技術，主要包括：E. B. Tadmor、M. Ortiz與R. Phillips於1996年即發明出準連續法（Quasi-Continuum）、F. F. Abraham、J. Q. Broughton、N. Bernstein與E. Kaxiras於1998年開發的握手法（Hand-Shake Method）以及G. J. Wagner與W. K. Liu於2003年提出的跨尺度方法（Bridging Scale Method）。於2007年，V. Gavini、K. Bhattacharya和M. Ortiz並開發準連續無軌跡（Orbital-Free）密度泛函理論（DFT）有限元素分析，並成功與高達百萬數量等級原子DFT計算結果進行結果驗證。為獲得小尺度微結構之連續體性質，自1990年代以來，計算均質化（Homogenization）方法發展迅速，主要分為兩大類：一是N. Kikuchi、T. Y. Hou、S. Ghosh、J. Fish與M. S. Shephard貢獻之多尺度漸近均質化方法，可使用於具有週期性微結構的複合材料；二是P. Suquet、G. J. Dvorak、J. Fish與C. Miehe提出的微觀力學計算方法，主要研究對象為具有隨機性微結構的複合材料建模與分析。

綜觀塑性力學的發展，於T. J. R. Hughes與J. Winget於1980年提出增量客觀評估（Incremental Objectivity）的計算觀點，是首度將連體力學理論實際應用於有限元素計算公式推導和計算實作，促進此時期非線性連體力學的發展，隨後J. C. Simo與T. J. R. Hughes致力將增量客觀計算原理擴展到考慮有限變形材料之計算塑性力學，隨後J. C. Nagtegaal、J. C. Simo、M. Ortiz與R. L. Taylor在材料有限變形增量問題之切線剛度矩陣計算與超彈性框架之變形梯度乘法分解上，成功開發相應的塑性力學理論與公式。



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（下）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

基於A. L. Gurson 於1977年提出之塑性材料力學組成律理論，Tvergaard和Needleman更於1984年開發基於有限元素法架構的Gurson-Tvergaard-Needleman 模型，成為最為廣泛使用有限元素法於計算塑性力學之材料本構模型。有限元素法於塑性材料計算力學另一個重要里程碑是晶體塑性（Crystal Plasticity）FEM的發展，首度由D. Peirce、R. J. Asaro與A. Needleman提出，而後A. Arsenlis、D. M. Parks、R. Quey、P. R. Dawson、F. Barbe與K. K. Mathur等許多研究人員在該領域做出重要貢獻，使得晶體塑性有限元素法基於晶體滑移機制，可以準確計算出晶體位錯與材料晶面之異向性資訊，並已高度被應用於模擬晶體塑性變形、表面粗糙度與斷裂形成等過程。

翻閱歷史，早於1957年，R. Clough教授在美國加州大學柏克萊分校首度開設第一門有限元素法研究所課程，G. Strang和G. J. Fix於1973年所著「有限元素法分析」（An analysis of the finite element method）一書是最早出版的FEM書籍，而後J. T. Oden、G. F. Carey與J. N. Reddy亦在1980年代撰寫FEM專書，致力於將課堂上的應用數學、連體力學、線性彈性力學、非線性材料力學等教學經驗與看法出版成冊，逐步將力學理論轉變為現代科學計算和工程產出。著名的有限元素法參考書籍有O. C. Zienkiewicz和Y. K. Cheung 於1967年所著「The finite element method in structural and continuum mechanics」、T. J. R. Hughes 於1987年所著「The finite element method. linear static and dynamic finite element analysis」、R. D. Cook等人於1989年所著「Concepts and applications of finite element analysis」、O. C. Zienkiewicz和R. L. Taylor於2005年所著「The finite element method for solid and structural mechanics」、O. C. Zienkiewicz、R. L. Taylor與J. Z. Zhu於同年所著「The finite element method: its basis and fundamentals」、K. J. Bathe於2006年所著「Finite element procedures」、R. D. Cook於2007年所著「Concepts and applications of finite element analysis」

、R. De Borst等人於2012年合著「Nonlinear finite element analysis of solids and structures」以及T. Belytschko等人於2013年所著的非線性FEM專書「Nonlinear finite elements for continua and structures」。以上書籍對FEM的學術教育、科學研究與工程應用皆具重大影響，直至2015年底，已有數百本關於有限元素法的專書與教科書出版，並以多種語言發行。

由於FEM計算理論與技術在學術領域和工業應用日益普及，有限元素分析軟體市場油然而生且極具規模。有限元素法分析軟體的發展始於1960年代初，追溯自1963年，E. L. Wilson和R. Clough開發一個名為符號矩陣說明系統（Symbolic Matrix Interpretive System，簡記為SMIS）的結構力學計算程式，當以矩陣型式求解系統之有限元素方程組，SMIS程式的功能為填補傳統手動計算可達規模之不足，以及促使FEM軟體的誕生。在此基礎之上，E. L. Wilson成功開發出通用靜態與動態結構分析程式（Structural Analysis Program，簡記為SAP），此為歷史上第一個線性FEM結構分析程式，隨後於1960年代末和1970年代初，K. J. Bathe基於SAP開發出首個非線性FEM結構分析程式—ADINA（Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis），直至今日，擁有線性與非線性分析功能之「SAP 2000」軟體，已成為最為廣用的當代先進結構分析和設計程式代名詞。且於ADINA發展時期，美國太空總署R. H. MacNeal與R. Schwendler亦投入有限元素分析程式開發，名為NASTRAN（NASA Structural Analysis），於1969年推出首個版本，模擬將人類送上月球表面的測試過程，成功提供所需力學物理基礎與相應機械元件設計之準確估計，而後於1971年，由R. H. MacNeal與R. Schwendler成立的軟體公司MSC成功研發出NASTRAN的商用版本軟體且首度問世。



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（下）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

約與NASTRAN發展同時期，服務於美國匹茲堡Westinghouse Astronuclear實驗室的J. A. Swanson負責核反應堆引擎推進元件的應力分析研究工作，建立與開發出三維FEM模型和計算程式，成功求得元件材料單元之瞬間應力和位移，此即為現今全球主要FEM商用軟體ANSYS (Analysis System) 的發展雛型。數年後，J. O. Hallquist在美國Lawrence Livermore國家實驗室發展出三維非線性FEM程式，名為DYNA3D (Dynamic Nonlinear Analysis)，廣泛用於結構材料的衝擊、動態接觸和斷裂失效分析，後來擴充版本為LS-DYNA (Livermore Software-Dynamic Nonlinear Analysis)，成為汽車設計和耐撞安全度分析廣為使用的主流FEM軟體，時至2018年，LS-DYNA軟體技術被ANSYS所屬企業收購且成為軟體其中的一部分，名為ANSYS LS-DYNA。回到1970年代初期，美國布朗大學P. V. Marcal教授與其指導學生D. Hibbitt，首度開發出非線性FEM通用分析程式，該程式至今不僅仍被廣泛應用於尖端學術領域，亦包括工業開發研究，例如複雜材料分析、汽車耐撞性能評估與先進製造技術等，而後D. Hibbitt、B. Karlsson與P. Sorenson於1978年成立軟體公司HKS，並成功研發出大型非線性FEM軟體-ABAQUS，其一大特點是允許研究人員能夠靈活地根據不同的問題與研究需求而自行開發與定義子程式 (User Subroutine)，故得以始終使用標準FEM求解器來探索創新的力學理論和計算技術，能兼具可靠性和運算效率。有限元素分析軟體發展進程來到1990至2000年初，除眾多開放FEM程式與軟體如：FreeFEM、OpenSees、Elmer、FEBio、FEniCS Project與DUNE等外，FEM軟體產業已發展達價值數十億美元之可觀規模，知名FEM商用軟體包括：ANSYS、ABAQUS、ADINA、LS-DYNA、NASTRAN、COMSOL Multiphysics與CSI等，時至今日，ANSYS與ABAQUS為有限元素分析軟體市場佔有比率最大的兩商用軟體。以上課程、教科書與軟體發展之各里程碑一一彰顯有限元素法在理論和應用方面的重大進步，每一貢獻都在工程和科學計算中產生長足深遠的影響。

四、當代與未來 (Present and Future)

有限元素法發展至當代，足以解決許多大型且複雜的工程與科學問題，於產品研發方面，不僅有助於對設計原理的基本理解，並且使得進行預測分析成為可能；於科學原理發現和工程技術創新方面，通常將問題分為三類：一是數據豐富但科學原理未發展或不可用的問題、二是數據有限且科學知識有限的問題與三是已知科學原理但參數不確定且計算量可能很大的問題，由於從複雜系統實驗蒐集得到的大量資料，本質上跨越數個空間尺度、寬廣的時間範圍和不確定的設計參數，多屬不易得以直接從數據一窺試驗系統運行的科學原理，有鑑於此，由於機器學習和深度學習方法涵蓋最廣泛的插值類別與演算方式，因此研究者正致力於融合通用近似定理 (Universal Approximation Theorem) 於新式有限元素法開發，設計與訓練出合適的神經網路 (Neural Network)，具所需精度來逼近隱式連續函數，此稱為機制數據科學 (Mechanistic Data Science，簡記為MDS) 式有限元素法。

機制數據科學式有限元素法早期的研究主題為構建淺層神經網路，以增進有限元素法於邊界值問題之求解能力，如J. Takeuchi與Y. Kosugi於1994年提出基於有限元素法架構的神經網路求解器，以及G. Yagawa與O. Aoki於1995年發表經適當訓練的神經網路可取代傳統有限元素插值函數功能，成功地應用於求解熱傳導問題，但仍有電腦硬體效能侷限與淺層神經網路演算法收斂速度較慢之固有發展限制。時至今日，隨著電腦硬體計算效能提升，以及機器學習和深度學習演算法理論的高度發展，透過構建深度神經網路來突顯原有限元素求解問題已成為當代甚為興盛的研究主題。綜觀較複雜的神經網路結構，如：卷積神經網路 (Convolutional Neural Networks，簡記為CNN)、生成對抗網路 (Generative Adversarial Networks，簡記為GAN)、殘差神經網路 (Residual Neural Networks，簡記為ResNet)、物理資訊神經網路 (Physics-Informed Neural Networks，簡記為PINN) 等，隨著相應深度學習技術的迅速發展和更複雜的神經網路結構的出現，由於其高維回歸能力，應用神經網路在解決計算力學問題方面變得越來越流行。



導讀有限元素法的八十年：誕生、演進與未來（下）

王建凱副教授 國立臺灣大學機械工程學系

於2018年，E. Weinan與B. Yu提出使用深度學習於Ritz方法求解變分問題，稱做深度Ritz方法（Deep Ritz Method）。J. Sirignano與K. Spiliopoulos亦應用深度學習於Galerkin方法求解高維偏微分方程組，稱做深度Galerkin方法（Deep Galerkin Method）。於2020年，F. He、B. Wang和D. Tao研究出以特定激活函數建構元素形狀函數；K. Lee接續於2021年發展專用神經網路，廣泛研究加速FEM訓練和求解的收斂過程訓練，以及適當的網格初始化策略；W. K. Liu 與L. Zhang於2021年發表基於深度神經網路層次結構構建出高效率元素形狀函數的研究工作，稱為層次深度學習神經網路（Hierarchical Deep Learning Neural Network），廣用地展示於再生核粒子法、非均勻有理雲規和等幾何分析的有限元素近似技術，爾後再將HiDeNN推廣成一個統一的人工智慧計算框架—HiDeNN-AI，可以適當地融合許多數據驅動工具，提供通用的方法來處理具有極少或毫無可用物理模型且計算成本極大的科學和工程問題。

神經網路具有非凡的插值能力，適用於逼近與求解常微分和偏微分方程式，快速且準確的求解能力滿足工業製造中對於接近實時模擬工程問題的迫切需求，諸如：線上動態系統、結構健康監測、車輛健康檢測、先進製造回饋、自動控制決策等。再者，降低有限元素模型的計算成本一直是開發模型降階方法的研究動力之一，模型降階技術通常分為特徵行為和數據分析兩大類，當中基於機器學習的數據分析同時促進隱藏於大量資料中的物理機制更加外顯，從而克服傳統純粹由數據驅動模型降階技術的發展瓶頸。綜上所述，機制數據科學研究是基於機器學習方法，包括以深度學習方式和分層神經網路演算法處理數據，透過降維、迴歸與分類的程序，提取大量輸入資料的機理特徵與學習其中隱藏關係，分析結果的降階與簡化形式不僅有利於工程系統的設計和優化，亦能推動科學原理的新發現，結合已知的科學原理和新收集的數據，可提供知識數據庫，以促進與創新發明至關重要的研究，並可回饋未來計算離散技術的發展，因此基於機器學習的有限元素法與相關降階模型的理論開發成為現今當代有限元素法的新興研究方向。



力學大師訪談計畫

~力學人物口述歷史訪談影音記錄~

幕後製作紀錄

黃育熙 教授 國立臺灣大學機械工程學系

過往力學學會的推廣活動皆以短期實體活動辦理為主，因應臺大機械系的機械舊館列為歷史建築並規劃轉型為「臺大工學博物館」，現今時代也來到了數位媒體發達的年代，過往少有工程學科的老師進行完整的影音史料記錄，因此本次活動規劃針對力學界著名人士製作訪談記錄，留存珍貴難得的歷史資料，除了作為工學博物館籌備處的蒐藏研究資料，同時提供未來做為機械與力學領域展示教育推廣的素材。

身為活動辦理人，雖本人曾接受平面媒體訪問也參與過宣傳影片拍攝，但未曾有訪談他人的經驗，且聽聞一隻影片需六位數的製作經費，故本次力學學會補助推廣案的經費申請外，也預備了其他機構的配合款，所幸欲及相當有才幹的臺大生傳系的周鈺傑同學，畫面配置、影像品質、導播經驗、以及剪輯字幕等，皆以相當高的價性比完成本次影片的製作。雖說錄影與剪輯的技術層面問題解決，但考量申請本次推廣活動的宗旨，希望以專業領域進行訪談內容的設計，方得使訪談者描述的談話內容，在機械與力學領域的專家與學子具有深入的參考價值與意義，因此前期的準備工作也花了不少心力進行規劃。

推廣活動計畫申請之初，規劃由臺大機械近期退休與即將退休的教師與資深系友等，首先表列多位力學領域資深代表性人物，於本期計畫選定1-2名最具豐富力學發展歷史知識且具有故事性的訪談人物，作為初期訪問影片製作模版，日後亦期望以相同模式，不限臺大與臺灣力學界重量人士，增添累積訪談人物與影片記載數量。

由於缺乏訪談經驗，規劃的第一次進行影片製作需訪問較容易溝通協調的對象，邀請較熟悉的馬劍清教授與吳文方教授，而訪問的形式也本於申請計畫時想像由訪問人與受訪者對談的一對一形式，或者加入與談者的一對二訪談等各種形式，訪問的主題直接於現場問答，或者先擬訪綱讓受訪者先做準備等，以上種種前置規劃，才得知製作想要有專業訪問內容的影片並不簡單。所幸最終兩位熟悉且溫柔的老師，在我們規劃時間的安排及受訪內容與方式都相當好配合，也在工學博物館前後期任職的規劃師周怡樺與黎芮伶兩位小姐，分別協助訪綱初擬與活動辦理，以及總規劃師黃凱蘭小姐的策劃協調與最終確認之下，工作順利在規劃半年後的2024年1月3日進行錄影，並於近期剪輯以將近一年的期間完成。

訪談過程的影音蒐集記載訪談個人求學以來至現今約50年間，受訪者於機械與力學領域的迭聞軼事，以及力學研究的發展歷程。經由歷史專業問題的引導訪談，以及力學大師對於力學研究教育發展提出獨到的見解，記載珍貴難得的訪談紀錄與大師風範。除了原始資料留存歸檔，可提供訪談文字資訊作為力學推廣刊物使用，也透過專業影像剪輯作為工程發展研究的檔案蒐藏，以及工學博物館未來展出的素材，亦規劃放置於影音平台網站，使力學相關領域人士具有珍貴的影像紀錄記載推廣。以下分享對於馬劍清教授與吳文方教授預先提供的訪綱，供未來若具有相同規劃的同好欲進行珍貴的人物訪談史料保存，可進行的相關訪談主題規劃。本次活動鎖定以約3小時訪問時間，搭架攝影棚燈效拍攝高質感影音資料的紀錄，但由於口述歷史未必是針對準備好的訪綱主題使受訪者預先準備，而是可能在訪對當下再深入挖掘更值得深究的內容，未來也將由陽明交通大學科技與社會研究所洪紹洋教授學習專業訪談的技巧，期盼未來再獲力學學會推廣支援獲取更多珍貴資料與記錄。



圖一：馬劍清教授訪問影片擷圖



圖二：吳文方教授訪問影片擷圖



圖三：準備訪談一幕



圖四：馬劍清教授與吳文方教授受訪側拍

表一：力學大師訪談計畫口述歷史訪綱

個人學思歷程

1. 請老師分享從高中以來的求學歷程。如何確立志向？大學科系選擇、出國留學的選擇等等。
2. 求學時代印象最深的課程是什麼？為什麼？
3. 求學歷程中最辛苦的時段是什麼時候？遇到什麼困難？
4. 在老師的學術生涯中，對老師影響最深的人是誰（師長、同事、親友？）？為什麼呢？
5. 兩位老師的背景，分別都具有機械之外「跨領域」知識的關連性，兩位老師必定仰賴的是深厚的力學基礎背景。想要請老師們談談這樣最後為何選擇走上機械這樣的專業領域？
6. 剛返國任教的心情為何？任教數十年以來，最喜歡教哪一門課？為什麼？
7. 老師自己覺得最有成就感的研究領域是哪個部分？有沒有這輩子很想進行的研究但因為機緣不足而無法完成的部分？
8. 從學術養成到返國任教，遇到最難忘、最大的挑戰是什麼？後來是怎麼克服解決的？
9. 任教數十年以來，臺灣的教育制度和環境也發生很多變化。請老師談談面對不同年代的學生心境上有什麼轉折？

機械與力學發展相關

1. 機械系目前五個組別的架構是從什麼時候開始的？從當代的需要來看，您覺得這樣的分類需不需要再調整？如果是，是應該更細分還是打破組別的藩籬？
2. 就老師的觀察，臺大機械系的發展歷程（包含研究方向或課程規劃），與國家社會發展變遷有什麼樣的關聯？您認為未來十年可能會加速往哪方面發展？
3. 請老師談一談，從微機電、奈米科技、3D列印製造技術，到後來自動化相關的工業4.0、智慧製造、智慧工廠與機器人，到自駕車與近期流行的AI，知識轉移流行的速度非常快速，您建議學生應該培養什麼樣的核心關鍵能力？
4. 同樣地，在快速轉動的時代裡，年輕一輩的學術研究者與大學教師，應該具有的關鍵態度與是什麼？
5. 就老師對國內機械系的認識，請談一談臺大機械系與其他學校不同的特色以及特別卓越之處在哪裡？

服務單位文化

1. 可以談談您印象中機械系的空間轉換與配置是如何？對舊機館、志鴻館、工綜館的印象如何？
2. 很多人都說臺大機械系很平和。就老師的觀察，這種照顧提攜後進的文化，是一開始就自然而然這樣，還是透過制度或共識才漸漸養成的？
3. 您任教以來最懷念的時光，大約是幾歲的時代？為什麼？
4. 女性教師與學生的比例逐年增加，您覺得對本系最大的影響是什麼？
5. 最近的學生在實驗室或者工廠都流行在實驗機台上面擺乖乖，祈禱儀器運作不要出問題。老師有沒有印象何時開始這樣的習慣？像一般公司行號可能會有中元普渡的祭祀活動，在機械系有沒有有一些特殊儀式或禁忌，或是一定要祭拜什麼？
6. 舊機館保留建築並規劃成為校內跨領域展示的工學博物館。請老師分享您的建議，以及對工學博物館期望。

本次推廣活動製作的訪談影音資料，日後作為宣傳影片使用致謝定當列舉補助單位中華民國力學學會，除表達對於支持機構的謝意之外，同時也達到力學宣傳推廣的目的。也特別感謝錄影訪問當天，由於重感冒不停咳嗽的我無法加入錄影，而由臺大機械劉建豪教授臨時代打協助訪談的進行。受訪力學大師-臺大機械馬劍清教授及與談者吳文方教授的受訪內容，層面廣及個人經歷發展與知識養成過程，社會變遷與教育理念，乃至憶及前人並給予後輩的建言，將另文摘要整理描述，並提供剪輯影音資料在受訪人確認後，以網路傳播的形式盼能對大眾有深遠的影響。

臺灣大學與首爾大學 共譜新紀元

詹魁元 教授 國立臺灣大學機械工程學系

國立臺灣大學機械工程學系與首爾國立大學機械工程學系於2024年1月4日聯合舉辦了一場跨國學術論壇，這次活動具有重大的學術交流意義。



首爾國立大學機械系主任Dr. Ho-Young Kim親自帶領20位教授來訪，展現了對這次交流的高度重視和期盼。Dr. Ho-Young Kim主任提到，首爾大學機械系每年都會拜訪全球頂尖的機械工程學系，過往已參訪日本東京大學，今天的訪問旨在促進學術交流與共同提升兩校在國際上的知名度和影響力，首爾大學選定的訪問對象通常是具優秀世界排名的學校與系所，並提供資金支持尋找國際知名的合作夥伴。此次來訪臺大機械系，對於許多首次來臺灣的教授來說，意義尤其重大，大家都充滿了期待。

這次會議除了兩校的機械系主任和教授之外，還特別邀請了南韓政府駐臺北韓國代表部代表李殷鎬博士（Dr. Eun-Ho Lee）和臺大工學院院長江茂雄教授出席並給予致詞。李殷鎬博士在致詞中表示，自2023年初擔任駐臺北代表以來，一直致力於加強韓國和臺灣在工程科技方面的合作。由於他本身擁有機械工程背景，是首爾大學的校友，並在美國喬治亞理工學院攻得機械工程博士學位，這次首爾大學機械系的來訪臺北對他而言更具特別意義，因此他特地出席了這次會議，並首次造訪臺大機械系，感覺非常溫馨。江茂雄院長在致詞中除了歡迎來自首爾大學的貴賓之外，也特別提到臺大機械系即將遷入新的宗倬章機械系館，並邀請來賓今後常來新館參觀交流。

臺大機械系主任莊嘉揚在會議中表示，這次論壇的籌備過程中，與Ho-Young Kim主任的溝通非常順利，雙方終於見面，宛如老友重逢，特別令人高興。Ho-Young Kim主任也對臺大機械系中女性教授、工程師和職員的比例表示羨慕，認為這是首爾大學需要努力的方向之一。論壇的核心環節是兩校代表介紹各自教授的研究工作。臺大機械系現有54位專任教授，每位教授的研究領域都緊跟時代潮流，這次論壇提供了一個難得的機會，讓兩校教授們能夠與來自首爾大學的學者以及自己的同事分享和交流研究成果。在介紹過程中，令人印象深刻的是首爾大學機械系每位教授每年的研究經費平均超過100萬美元，這直接反映在他們研究成果的完整性和質量上，這樣的研究能量是臺大需要努力追趕的方向。

此次論壇的成功舉辦，不僅加深了兩校之間的學術交流，也為未來的合作奠定了堅實的基礎，一起寫下機械學術新的篇章。雙方都表示期待未來能有更多機會進行深入交流和合作，共同推動機械工程領域的發展。雙方都期盼下一次的相會，希望能有更多的合作與交流機會，共同促進兩校在學術研究上的進步，共譜機械工程新紀元。



圖一：國立臺灣大學機械系主任莊嘉揚教授接待首爾國立大學機械系訪問團一行



圖二：國立臺灣大學機械系主任莊嘉揚教授（右）與首爾國立大學機械系主任Dr. Ho-Young Kim共同主持兩系學術交流論壇



圖三：國立臺灣大學工學院院長江茂雄教授（左）南韓政府駐臺北韓國代表部代表李殷鎬博士（右）給予致詞指導



圖四：臺大機械系與首爾大學機械系學術交流論壇會場



圖五：臺大機械系與首爾大學機械系共進晚餐，兩方暢談交流、分享與合作規劃，賓主盡歡

誌謝

本期刊物由出版委員會主委編輯邀稿與潤飾文字，誠摯感謝國立臺灣大學機械工程學系 王建凱副教授、黃育熙教授與詹魁元教授允諾撰稿，及學會秘書處彙編與排版。



秘書處地址：300新竹市東區光復路二段101號
國立清華大學動力機械工程學系
網 址：<http://www.stam.org.tw>
電 話：(03)5715131 #33785
E - m a i l：society.stam@gmail.com