

## 第六章 數學式推導和矩陣計算演算法

領域知識(Domain knowledge)是工程師、科學家必備的基本知識，而電腦程式語言是一種處理數值計算的基本工具，如何利用工具也是必須下的基本功夫。早期的數學家們僅能憑空想像，無法以電腦程式語言實作，複數的計算是一個難題，譬如程式語言以  $i$  或  $j$  表示虛數合理嗎？C#程式語言中，虛數無法輸入 C#程式語言中。在動態系統中，複數的計算是不可避免的，也是令人感到困惑，譬如希爾伯特空間(Hilbert Space)是複數向量的內積(Inner Product)，量子力學的 Hermitian 矩陣等的處理。而 SMS(Sharp Matrix Solver)精銳矩陣計算器求解器，能有效處理複數矩陣和微分方程式的計算問題。

在真實的世界裡，輸入系統的數值或系統的響應值，都應該是實數(Real Number)，數值的模擬計算中，可能暫時須要使用複數作計算，譬如計算不對稱矩陣的特徵值與特徵向量、或是求取多項式的根等都是複數，這些都是中間過程，但最後系統的響應值都應該是實數。

### 6.1 由微分方程式求得系統矩陣 A

矩陣常微分方程式(Ordinary Differential Equations)ODE( $m, r, t$ )，以  $m$ 、 $r$  和  $t$  三個參數表示， $m$  表示空間維度(Space Dimension)共有  $m$  個節點或稱自由度， $r$  表示狀態維度(States Dimension)共有  $r$  個自由度或稱階度(Order)，兩者都是時間  $t$  的函數，時間永遠是存在，並且一直不斷的在進行中，此三個軸是獨立且互相垂直，空間維度和狀態維度都是離散(Discrete)的型式，時間是連續(Continue)的型式，若要畫成圖形，若以空間維度是水平軸(Space DOF = 1, 2,  $\dots$ ,  $m$ )，狀態維度是垂直軸(State DOF = 0, 1,  $\dots$ ,  $r$ )，共計有  $m * (r + 1)$  個離散數值，時間  $t$  是垂直於此平面的連續數值。

作者將 ODE( $m, r, t$ )微分方程式分成兩類表示方式：

Type I ODE( $m, r, t$ )：依照微分階的高低順序排列微分方程式

$$M * \ddot{y} + C * \dot{y} + K * y = \{f\}$$

Type II ODE(m, r, t) : 依照最高階微分排在等號的左邊，且其係數為 1，表示 Identity 矩陣。

$$\ddot{y} = B * \dot{y} + C * y + \{g\}$$

Type II ODE(m, r, t) 的表示方式，是為了要從 ODE(m, r, t)，容易建構系統矩陣 **A**，ODE(m, r, t) 若包含大掛號  $\{ \}$ ，表示可有可無的外力，依實際狀況而定的特別解。

SMS 精銳矩陣計算求解器中，只有矩陣運算元 (Matrix Operand) 和矩陣運算子 (Matrix Operator)，並無所謂於線性代數或是矩陣計算中的轉換矩陣 (Transorm Matrix)，故 **Ay** 僅表示是一個矩陣變數名稱 (Matrix Variable Name)，而不是 **A** 乘 **y**，若 **A** 乘 **y**，以一般程式語言的寫法，應寫成 **A \* y**。

( 0 ) ODE(m, r=0, t)

是 0 階方程式不是微分方程式，常常在線性代數中使用  $Ay = b$  的方式求解向量變數 **y**，稱 **A** 為 **y** 向量的轉換矩陣。但在 SMS 精銳矩陣求解器中，以 **A \* y = b** 的方式表示，即 **A** 是系統矩陣，**y** 是向量，**b** 是已知向量，無論是矩陣或是向量都是二維的陣列。故可求得  $y = A_i * b$ 。**A<sub>i</sub>** 是矩陣變數的名稱，**A<sub>i</sub>** 變數表示是 **A** 矩陣的逆矩陣，實際的程式碼是， $y = \sim A * b$ ;

若系統矩陣非正方形時，則  $(A_t * A) * y = A_t * b$ ，則

$$y = \left( A_t * A \right)_i * A_t * b$$

**A<sub>t</sub>** 是矩陣變數的名稱，表示 **A** 矩陣的轉置，在精銳矩陣求解器中，提供矩陣計算的不同的運算子，和多個矩陣的類別 (Class)。使用最小二乘法 (Lease-Square Method)，SMS 程式碼如下：

$$\text{ReMatrix } y = \sim (!A * A) * !A * b;$$

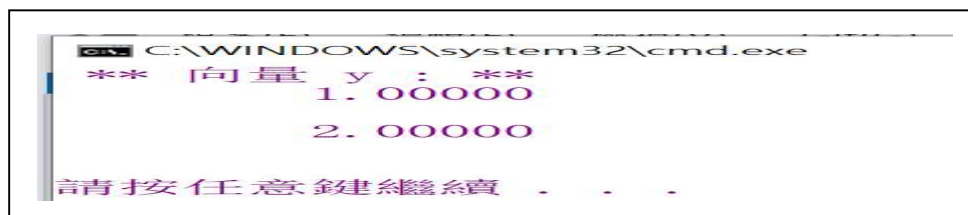
其條件是矩陣 **A** 已知，且列 (Row) 大於或是等於行 (Column)，上式中，“ $\sim$ ” 和

“!” 是矩陣運算子，“逆算”和“轉置”，而且運算子的優先順序 (Operator Precedence) 為 “!” 大於 “\*” ，故上式中  $* ! A$  相連在一起是可以的，即表示矩陣 A 先轉置後再相乘。此部分作者已測試過是 OK，可能較複雜，初學者可以忽視。SMS 程式碼如下：

```

1  using System;
2  using Matrix_0;
3  namespace ConsoleApp5
4  {
5      0 個參考
6      internal class Program
7      {
8          0 個參考
9          static void Main(string[] args)
10         {
11             double[,] A0 = { { 1, 3 }, { 2, 4 } };
12             double[,] b = { { 7 }, { 10 } };
13             // 將C#陣列A0轉為SMS-2029實數資料類別ReMatrix。
14             ReMatrix A = new ReMatrix(A0);
15             // y = (At * A)i * At * b
16             ReMatrix y = ~(!A * A) * ! A * b;
17             // 輸出向量 y :
18             Console.WriteLine(" ** 向量 y : **\n{0}", new PR(y));
19         }
20     }
21 }

```



```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
** 向量 y : **
1.00000
2.00000
請按任意鍵繼續 . . .

```

SMS 精銳矩陣計算器，亦提供奇異值 **SVD** (Singular Value Decomposition ) 的求解，奇異值和兩個奇異向量都是實數值，程式碼如下：

```

SVD svd = new SVD( A );
ReMatrix D = svd.MatrixD;
ReMatrix Q = svd.MatrixQ;
ReMatrix P = svd.MatrixP;
ReMatrix Qi = ~Q;
A * Q = P * D ==> A = P * D * Qi

```

讀者可以自行測試計算結果，是否  $A = P * D * Q^T$  成立？

( 1 ) ODE(m, r=1, t)

r = 1 表示一階常微分方程式，與上式相同，微分方程式共計有兩種表示方式。

Type I ODE(m, r=1, t) 的微分方程式寫成：

$$B * \dot{y} + C * y = \{f\}$$

式中 B 和 C 是實數 mxm 的矩陣， $\dot{y}$ , y, 和 f 是 mx1 的向量。

Type II ODE(m, r=1, t) 的微分方程式寫成：

$$\dot{y} = A * y + \{g\}$$

式中 A 是實數 mxm 的矩陣， $\dot{y}$ , y, 和 g 是 mx1 的向量。

一般 ODE(t, m, n=1) 的常微分方程式，作者從 Wikipedia 或是相關的書籍，都稱為狀態空間方程式(State Space Equation)。

( 2 ) ODE(m, r=2, t)

r = 2 表示二階矩陣常微分方程式，與上式相同，微分方程式共計有兩種表示方式。

Type I ODE(m, r=2, t) 的微分方程式可寫成：

$$M * \ddot{y} + C * \dot{y} + K * y = \{f\}$$

式中 M, C, 和 K 是實數 mxm 的矩陣， $\ddot{y}$ ,  $\dot{y}$ , y 和 f 是 mx1 的向量。

Type II ODE(t, m, n=2) 的微分方程式寫成：

$$\ddot{y} = -M_i * C * \dot{y} - M_i * K * y + \{M_i * f\}$$

另外再加入平衡方程式：

$$\dot{y} = I * \dot{y} + 0 * y + \{0\}$$

使用友矩陣(Companion Matrix)的表示方式，可將兩式合併寫成：

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_i * C & -M_i * K \\ I & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

設系統矩陣 **A** 為：

$$A = \begin{pmatrix} -M_i * C & -M_i * K \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

則

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

M, C, K 和  $M_i$ , I, 0 分別是實數 mxm 的質量、阻尼、和勁度矩陣， $M_i$  是 M 的逆矩陣，I 是 Iden 矩陣，0 是 Zero 矩陣，而  $\ddot{y}$ ,  $\dot{y}$ ,  $y$  是 mx1 的向量。

系統矩陣 **A** 是 (mxn) x (mxn) 的矩陣， $\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$  是 (mxn) x 1 的向量。

ODE(m, r=2, t) 微分方程式，m 表示是空間節點數，r=2 二階矩陣常微分方程式。

建構 I 和 0 矩陣，在空間點 m 已知的條件下，程式碼如下：

```
Iden iden = new Iden(m);
ReMatrix I = iden.Matrix;
```

```
Zero zero = new Zero(m);
ReMatrix 0 = zero.Matrix;
```

( 3 ) ODE(m, r=3, t)

$r = 3$  表示三階矩陣常微分方程式，與上式相同，微分方程式也是共計有兩種表示方式。

Type II ODE(m, r=3, t) 的微分方程式寫成：

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 **A** 是系統矩陣，是 (mx3) x (mx3) 的矩陣，其餘是 (mx3) x1 的向量。

故我們知道 ODE(m, r, t)，包含空間節點、階數、和時間，任何微分方程式，都是相同的 ODE(m, r, t) 的矩陣微分方式來表示，可從 Type II 的微分方程式，求得系統矩陣 **A**。

一般實際的求解，都是齊次解和特別解分開求解，兩者相加即通解 (General Solution)。

## 6.2 由系統矩陣 **A** 求得特徵值 **D** 和特徵向量 **Q**

ODF(m, r=0, t) 是零階矩陣方程式，表示的方式如下：

$$A * y = b$$

求 **y** 向量，可由系統矩陣 **A** 的分解，或是矩陣 **A** 的逆矩陣。

$$A = L * U, \quad A = Q * R$$

所謂 QR 是指 Givens Rotator, Householder Reflector, 和 Gram-Schmidt Process 等分解方法。精銳矩陣求解器亦提供各種不同的求解類別(class)，包含直接求逆矩陣。

ODE(m, r, t)，階數參數 r 可以是 0、1、2、...，系統矩陣 A 是 (mxr)X(mxr) 的正方形實數矩陣，將系統矩陣 A 對角線化，亦即求系統矩陣 A 的特徵值矩陣 D，和特徵向量矩陣 Q，其關係如下：

$$A * Q = Q * D$$

系統特徵向量應符合條件如下：

$$DET(Q) \neq 0$$

則系統矩陣符合以下條件如下：

$$A = Q * D * Q_i$$

系統矩陣 **A** 是 (mxr)X(mxr) 的正方形實數矩陣，**Qi** 是 **Q** 的逆矩陣，\* 是矩陣相乘的運算子 (Matrix Operator)，矩陣本身是運算元 (Matrix Operand)。在精銳矩陣求解器類別 (EIG class)，輸入系統矩陣變數 **A**，可求得系統特徵值 **D** 和系統特徵向量 **Q**，和逆系統特徵向量 **Qi**，SMS 的程式碼如下：

```
EIG eig = new EIG( A );
CxMatrix D = eig.CxMatrixD;
CxMatrix Q = eig.CxMatrixQ;
CxMatrix Qi = eig.CxMatrixQi;
```

由多階矩陣微分方程式，求得系統矩陣 A，若 A 是實數不對稱的矩陣，其特徵值矩陣 **D**、特徵向量矩陣 **Q**、和逆系統特徵向量 **Qi**，其預設值 (Default Value) 都是複數矩陣 (CxMatrix) 的資料型態。但若 A 是實數對稱矩陣，則 **D**、**Q**、和 **Qi** 矩陣一定是實數，系統響應就沒有動態的特性了。

### 6.3 由特徵值 **D** 和特徵向量 **Q** 求取狀態和空間響應。

從 Wikipedia 查看“State Space Representation”，似乎無法解惑，其中“state space”指的是狀態維度和空間維度有多個自由度，即系統矩陣微分方程式  $\text{ODE}(m \geq 1, r \geq 0, t = -\infty, \dots, +\infty)$ ，若系統矩陣  $A = A(t)$  是  $(m \times r) \times (m \times r)$  的矩陣個，即特徵值矩陣  $D = D(t)$ 、特徵向量  $Q = Q(t)$ ，使用 SMS 求解器亦能求解啁啾系統響應(Chirp System Response)。

在數學的書籍裡，常常提到特徵與特徵向量，但如何利用特徵值與特徵向量，似乎並未談及，兩者是共軛的關係，不可單獨存在，也就是俗稱“Self-Adjoint”。而且兩者的預設值是複數，但是我們明明知道現實的世界是實數可量測，這些可能是使我們感到困惑的地方？利用 C# 程式語言，對於特徵值與特徵向量，利用複數矩陣的計算，最後可以求得實數的響應資料(Data)，這是一種新穎的演算法。

以下是數學的推導和精銳矩陣程式的實作。

$\text{ODE}(m, r, t)$  矩陣常微分程式， $m$  是空間節點數， $r$  是最高階，參數  $t$  是時間。即  $m \geq 1, r \geq 0, t = -\infty$  至  $+\infty$  都是相同的推導方法，但一般僅至二階，很少見到三階及三階以上的矩陣微分方程式。

( 0 ) 當  $\text{ODE}(m, r = 2, t)$  矩陣常微分程式響應公式：

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Q * D * Q^T * \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

可能稍繁複，但簡化可得下式：

$$\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = H_{exp}(D, Q, t) * d + \begin{pmatrix} \dot{y}_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

或是

$$(\dot{y}(t) \mid y(t)) = H_{exp}(D, Q, t) * d + (\dot{y}_p(t) \mid y_p(t))$$



"|"是矩陣或是向量的垂直合併運算子，上式數學式是響應公式，其特別解是：

$$H_{exp}(D, Q, t) * d$$

$d$  是向量係數和以下數學式都是  $(m \times 2) \times 1$  的向量。

$$(\dot{y} | y), (\dot{y}_p | y_p), d$$

( 1 ) 當 ODE(m, r=1, t)矩陣常微分程式的響應公式：

$$(y(t)) = H_{exp}(D, Q, t) * d + (y_p(t))$$

( 2 ) 當 ODE(m, r=3, t)矩陣常微分程式的響應公式：

$$(\ddot{y}(t) | \dot{y}(t) | y(t)) = H_{exp}(D, Q, t) * d + (\ddot{y}_p(t) | \dot{y}_p(t) | y_p(t))$$

無論  $r$  是 1、2、3 階以上，輸出矩陣  $H_{exp}(D, Q, t)$  乘係數向量  $d$  都是固定的。其中  $D$  是系統特徵值矩陣， $Q$  是系統特徵向量矩陣，兩者的預設值都是複數矩陣(Complex Matrix)，其資料型態是 **CxMatrix** 的類別，其中  $H_{exp}(D, Q, t)$  也是  $(m \times r) \times (m \times r)$  的複數矩陣。至於  $r \geq 4$  階有相同的表示方式，故不再贅述了。

## 6.4 空間相依狀態參數為 $D$ 、 $Q$ 、和 $d$

由系統矩陣  $A$ ，求得輸出矩陣  $H_{exp}(D, Q, t)$  乘向量係數  $d$ ，得到齊次解，故稱系統特徵值  $D$ ，系統特徵向量  $Q$ ，和向量係數  $d$  為狀態與空間參數(Parameter)，只要知道  $D$ ， $Q$ ，和  $d$ ，即可求得系統響應。

如果初始條件已知，就可求得向量係數  $d$ ，此為較普遍性的求解法。若以 ODE(m, r=2, t) 為例加以說明。

設

$$B(ta) = \left( \dot{y}(ta) \mid y(ta) \right) - \left( \dot{y}_p(ta) \mid y_p(ta) \right)$$

則向量係數  $d$ ：

$$d = [ H_{exp}(D, Q, ta) ]_i * B(ta)$$

或是

$$d = \sim [ H_{exp}(D, Q, ta) ] * B(ta)$$

但如果是邊界條件已知，求向量係數  $d$  的方法稍複雜，即將輸出矩陣  $H_{exp}(D, Q, t)$  分割與再合併。SMS 求解器提供 RowSplice 類別，將輸出矩陣，依階數  $r$  分割，每個分割共計有  $m$  列數據，最後再合併成新的輸出矩陣，由已知的邊界條件求得向量係數  $d$ ，此為新穎的求解法尚屬首見。如果是相同的系統，無論已知條件是初始值，或是邊界值，最後得到相同向量係數  $d$ ，亦即相同的狀態與空間參數，則有相同的狀態與空間響應，雖然使用文字說明較難，請參考第七章的程式碼和輸出計算資料。