

Финансовая математика — 2
(«Модели стохастической волатильности»)

Курс лекций

Лектор: Михаил Житлухин

Версия 07.09.2025

Оглавление

Лекция 1. Почему волатильность стохастическая?	2
Лекция 2. Фундаментальные результаты теории арбитража	14
Лекция 3. Стохастические дифференциальные уравнения	26
Лекция 4. Модель локальной волатильности	37
Лекция 5. Модель Хестона: цены европейских опционов	48
Дополнение 1. К модели локальной волатильности	62
Дополнение 2. Стохастическая экспонента и условие Новикова	68
Список литературы	70

Лекция 1

Почему волатильность стохастическая?

1. Напоминание: модель Блэка—Шоулза (2)

2. Почему модель Блэка—Шоулза не согласуется с рыночными данными (3)

Свойства вероятностных распределений рыночных цен (3). Подразумеваемая волатильность (5). К каким ошибкам приводит модель Блэка—Шоулза? (6).

3. Краткая история моделей стохастической волатильности (8)

Резюме лекции (13)

В этой лекции мы перечислим эмпирические факты, показывающие, что модель Блэка—Шоулза не может адекватно описывать рыночные цены, и обсудим почему возникает необходимость в более продвинутых моделях, в которых волатильность задается случайным процессом.

1. Напоминание: модель Блэка—Шоулза

В модели Блэка—Шоулза цены безрискового и рискованного активов задаются уравнениями

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Для простоты будем считать, что рискованный актив не платит дивиденды, а безрисковая процентная ставка постоянна. Решение уравнения для S_t (геометрическое броуновское движение) представляется в виде

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}.$$

Для вычисления цен производных инструментов (платежных обязательств) нужно перейти к эквивалентной мартингальной мере Q , относительно которой

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q,$$

где W^Q — броуновское движение относительно Q . Тогда цена европейского платежного обязательства в момент времени 0 с выплатой X , производимой в момент T , вычисляется по формуле

$$V = e^{-rT} E^Q X.$$

Для европейских опционов колл и пут математическое ожидание можно вычис-

лечь явно, что дает формулу Блэка—Шоулза (см. курс «Введение в финансовую математику»).

2. Почему модель Блэка—Шоулза не согласуется с рыночными данными

2.1. Свойства вероятностных распределений рыночных цен

Отсутствие нормальности

Для временного ряда рыночных цен с шагом Δt , т. е. $S_0, S_{\Delta t}, S_{2\Delta t}, \dots$, построим последовательность

$$L_t = \ln S_t - \ln S_{t-\Delta t}, \quad t \in \{\Delta t, 2\Delta t, \dots\}.$$

Если бы цены следовали модели Блэка—Шоулза, то последовательность L_t представляла бы реализацию последовательности независимых и одинаково распределенных нормальных случайных величин со средним $(\mu - \sigma^2/2)\Delta t$ и дисперсией $\sigma^2\Delta t$.

Из примера на рис. 1 видно, что это не так. Левый график на этом рисунке изображает последовательность L_t для индекса SnP 500 за 2015–2024 гг. с Δt равным 1 дню, а правый график — симулированную последовательность нормальных величин с такими же средним и дисперсией. Характер графиков качественно отличается, что говорит о том, что распределение приращений значения индекса не является нормальным. Аналогичная картина наблюдается и для других активов.

Ненормальность распределения подтверждается и гистограммой на рис. 2. Если бы данные были нормальными, то гистограмма была бы близка к графику плотности нормального распределения, но видно, что их формы отличаются.

Ассимметрия и тяжелые хвосты

Различие между эмпирическим распределением L_t и нормальным распределением можно также увидеть из простых численных характеристик. Например, вычислим выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad \kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

где μ_3, μ_4 — выборочные 3-й и 4-й центральные моменты, а σ — выборочное стандартное отклонение. Для выборки, полученной из нормального распределения, γ и κ будут близки к нулю (соответствующие теоретические коэффициенты для нормального распределения в точности равны 0), но в рассматриваемом примере с индексом SnP 500 получаются значения -0.81 и 15.7 .

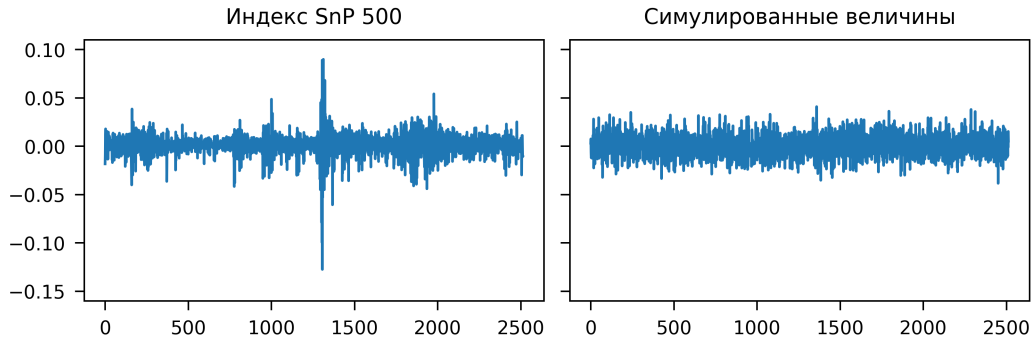


Рис. 1: Приращения логарифмов значений индекса SnP 500 и симулированные нормальные случайные величины с такими же средним и дисперсией.

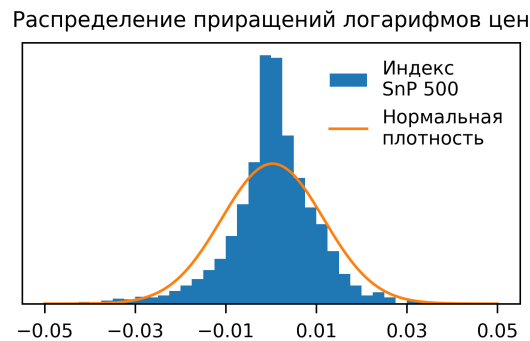


Рис. 2: Сравнение эмпирического распределения приращений логарифмов индекса SnP 500 с нормальным распределением.

Отрицательность коэффициента асимметрии говорит о том, что распределение скошено влево, а положительность коэффициента эксцесса — о том, что распределение имеет более «тяжелые» хвосты по сравнению с нормальным распределением.

Автокорреляция

Для геометрического броуновского движения величины L_{t+s} и L_t независимыми при $s \geq \Delta t$ в силу независимости приращений броуновского движения. Из независимости следует некоррелированность, поэтому можно вычислить эмпирические коэффициенты корреляции (т. е. автокорреляционную функцию) и посмотреть, близки ли они к нулю. Оказывается, что для рыночных данных корреляции $\rho(L_{t+s}, L_t)$ близки к нулю, но корреляции квадратов приращений логарифмов $\rho(L_{t+s}^2, L_t^2)$ отличается от нуля (см. рис. 3). Это говорит о том, что величины L_{t+s} и L_t зависимы, хотя и слабо коррелированы.

Другие эмпирические факты

Обзор статистических свойств рыночных цен приведен в статье [4]. Эти свойства также называются *стилизованными фактами*. Кратко перечислим неко-

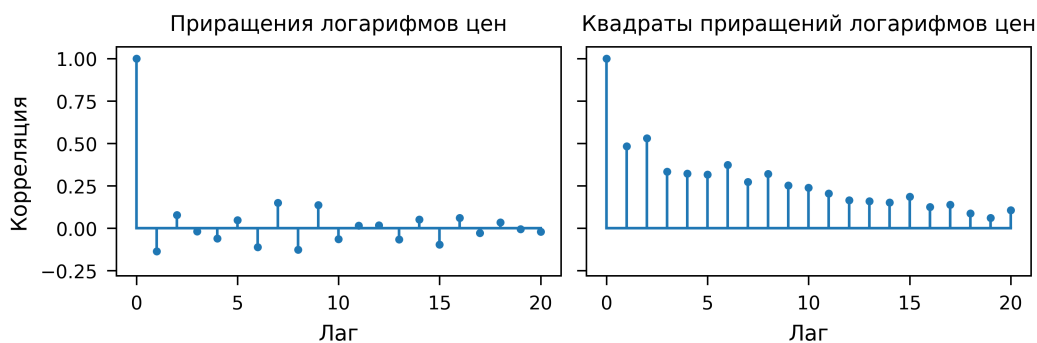


Рис. 3: Автокорреляционная функция для логарифмов приращений значения индекса SnP 500 и квадратов логарифмов приращений.

торые стилизованные факты, отсылая за подробностями к упомянутой статье.

- Имеется зависимость между изменениями цены и изменениями волатильности: часто при падении цены волатильность возрастает, а при росте цены остается без существенных изменений или плавно уменьшается. В модели Блэка—Шоулза такого быть не может, так как величина σ постоянна.
- Кластеризация волатильности: за большими значениями волатильности преимущественно следуют большие значения, за малыми — малые. Если представлять волатильность как степень «беспокойства» рынка, то это означает, что на рынке наблюдаются периоды спокойствия и беспокойства. В модели Блэка—Шоулза, напротив, рынок всегда «одинаково спокоен».
- Присутствие «скачков» (т. е. разрывов) в процессах цен, которые нельзя объяснить только тем, что данные собираются дискретным образом.¹

2.2. Подразумеваемая волатильность

На ликвидных рынках цены опционов можно считать известными (из рыночных данных), и тогда для каждого опциона можно найти значение σ такое, что цена, вычисленная по формуле Блэка—Шоулза, совпадает с рыночной ценой — это значение σ называется *подразумеваемой волатильностью*. Мы будем обозначать его как $\hat{\sigma}(T, K)$, когда нужно подчеркнуть зависимость от страйка и времени исполнения.

Если бы рыночные данные следователи модели Блэка—Шоулза, то построенная по ним функция $\hat{\sigma}(T, K)$ была бы постоянной и равнялась параметру волатильности в модели. В реальности это не так. Например, на рис. 4 приведены *улыбки волатильности*² для опционов на индекс S&P 500 с разными датами исполнения. Видно, что функция $\hat{\sigma}(T, K)$ не постоянна как по K , так и по T .

¹В этом курсе мы будем рассматривать модели, в которых процессы цен непрерывны. Модели со скачками, основанные на *процессах Леви*, были популярны в 2000-х гг.

²Улыбкой волатильности называется функция $\hat{\sigma}(T, K)$, рассматриваемая как функция от страйка K с фиксированным значением T .

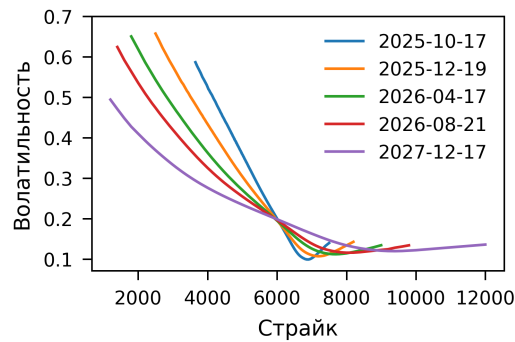


Рис. 4: Улыбки волатильности для индекса S&P 500 с разными датами исполнения, построенные по ценам опционов на дату 1.09.2025.

Это приводит к трудности выбора параметра волатильности в модели Блэка—Шоулза для оценки экзотических производных инструментов. Например, следует ли для оценки барьерного опциона взять подразумеваемую волатильность, соответствующую страйку, равному барьеру, или страйку, равному текущей цене базового актива? Хотелось бы иметь модель, которая позволяет оценивать деривативы, без изменения ее параметров под каждый инструмент.

2.3. К каким ошибкам приводит модель Блэка—Шоулза?

Рассмотрим два типа ошибок, свойственных всем моделям и, в том числе, модели Блэка—Шоулза. Естественно, чем ошибка в модели меньше, тем модель лучше. Соответственно, целью исследования более сложных моделей цен является, в том числе, нахождение моделей дающих меньшие ошибки.

Статическая ошибка

Под *статической ошибкой* модели мы будем понимать несоответствие между рыночными ценами ликвидных (т.е. активно торгующихся и имеющих доступные рыночные цены) производных инструментов³ и ценами этих инструментов, получаемых в модели.

Статическая ошибка приводит к следующему нежелательному эффекту: модель дает цены инструментов, по которым их невозможно купить или продать. Отметим, что статическая ошибка означает не то, что параметры модели неправильно откалиброваны к рыночным данным, а то, что модель в принципе не способна попасть в набор цен деривативов ни при каких комбинациях своих параметров.

В модели Блэка—Шоулза статическая ошибка возникает из-за того, что в ней предполагается постоянство волатильности: каким бы ни был параметр σ ,

³Под ликвидными производными инструментами далее, в основном, имеются ввиду ванильные европейские опционы колл и пут.

модель не может воспроизвести рыночные улыбки волатильности, что означает невозможность воспроизвести рыночные цены ванильных опционов.

Динамическая ошибка

Под *динамической ошибкой* мы будем понимать несоответствие между вероятностными распределениями процессов цен базовых активов, процессов цен ликвидных производных инструментов, а также других динамических характеристик⁴, которые получаются в модели и наблюдаются в реальных данных.

Динамическая ошибка приводит к ошибке репликации: производные инструменты, которые в выбранной модели теоретически можно реплицировать с помощью самофинансируемых стратегий, не реплицируются в точности.

Поясним на примере. Пусть требуется реплицировать платежное обязательство, производящее выплату X в момент времени T . Для простоты предположим, что процентная ставка равна нулю, а X зависит только от S_T , т. е. $X = f(S_T)$. Если использовать для репликации модель Блэка—Шоулза, то количество рискованного актива H_t в реплицируемом портфеле π_t должно быть равно дельте инструмента:

$$H_t = V'_s(t, S_t),$$

где $V_t(t, s) = E^Q(f(S_T) \mid S_t = s)$ — его цена в модели Блэка—Шоулза. Тогда стоимость портфеля π_t в момент исполнения будет равна

$$V_T^\pi = V(0, S_0) + \int_0^T H_t dS_t = V(0, S_0) + \int_0^T V'_s(t, S_t) dS_t.$$

С другой стороны, по формуле Ито имеем

$$V(T, S_T) = V(0, S_0) + \int_0^T V'_t(t, S_t) dt + \int_0^T V'_s(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \int_0^T V''_{ss}(t, S_t) (dS_t)^2.$$

Так как $X = V(T, S_T)$, то для *ошибки репликации* $\varepsilon := V_T^\pi - X$ получаем выражение

$$\varepsilon = \int_0^T V'_t(t, S_t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T V''_{ss}(t, S_t) (dS_t)^2.$$

Далее воспользуемся тем, что $V'_t(t, s) = -\frac{1}{2}\sigma^2 V''_{ss}(t, s)$, как следует из уравнения Блэка—Шоулза (при нулевой безрисковой ставке); здесь σ — параметр волатильности в модели, используемой для репликации. Если же допустить, что в реальности процесс цены S_t имеет стохастическую волатильность, т. е. $dS_t = \sigma_t S_t dW_t$ со случайным процессом σ_t , то получим ненулевую ошибку:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma_t^2 - \sigma^2) V''_{ss}(t, S_t) S_t^2 dt.$$

⁴Например, такими характеристиками могут быть величины, вычисляемые из поверхности волатильности: волатильность опционов АТМ, наклон и кривизна поверхности, и др.

3. Краткая история моделей стохастической волатильности

Под моделями стохастической волатильности мы будем понимать модели, в которых процесс цены базового актива относительно эквивалентной мартингальной меры имеет вид

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t,$$

где r_t — безрисковая процентная ставка (в этом курсе она будет, как правило, считаться детерминированной функцией), а σ_t — случайный процесс⁵. Замена постоянного параметра σ в модели Блэка—Шоулза на случайный процесс приводит к большому разнообразию получаемых моделей.

Далее перечислим некоторые известные модели стохастической волатильности, кратко упомянув их достоинства и недостатки. При первом чтении этого раздела многое может показаться непонятным. К нему стоит вернуться после окончания курса.

Модель CEV

Первой моделью стохастической волатильности была *модель CEV*⁶, предложенная Дж. Коксом (J. Cox, 1975). Уравнение цены в ней имеет вид

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t,$$

где $\gamma \geq 0$ и $\sigma > 0$ — параметры модели. Таким образом, здесь $\sigma_t = \sigma S_t^{\gamma-1}$. При $\gamma = 1$ получается модель Блэка—Шоулза, а при $\gamma = 0$ — модель Башелье.

Если $\gamma \in [0, 1)$, то волатильность растет, когда цена падает, и падает, когда, цена растет. В первом приближении такое поведение действительно наблюдается в ценах акций. Кроме того, улыбки волатильности в модели CEV при $\gamma \in (0, 1)$ получаются скошенными вправо, что тоже в некоторой степени соответствует наблюдаемым данным. Если $\gamma > 1$, то получается противоположное поведение, которое не характерно для рынков акций, но, может наблюдаться, например, на рынках товаров.

У модели CEV имеется два недостатка. Во-первых, она недостаточно гибкая, чтобы правильно описывать наблюдаемые поверхности подразумеваемой волатильности (у нее всего два параметра).

Во-вторых, функциональная зависимость $\sigma_t = \sigma(S_t)$ означает, что волатильность зависит только от текущего уровня цены, но в реальности на изменение волатильности оказывают влияние и другие факторы. Можно провести такой

⁵В случае, когда σ_t является функцией только от текущего значения цены S_t и времени, волатильность часто называют *локальной*, а не стохастической; см. далее.

⁶Constant Elasticity of Variance — модель с постоянной эластичностью дисперсии.

мысленный эксперимент. Пусть сегодня акция стоит 100, а через год будет стоить 120. Если за этот год цена акции будет расти «равномерно» то можно ожидать, что к концу года волатильность будет в пределах своих «обычных» значений. Однако, если за первые 11 месяцев цена вырастет до 180, а за последний месяц упадет до 120, то волатильность будет высокой. В модели CEV, напротив, в обоих случаях волатильность должна быть одинаковой.

Модель локальной волатильности

Модель локальной волатильности, предложенная Б. Дюпиром (B. Dupire, 1994), решает проблему статической ошибки: она в точности калибруется к ценам наблюдаемых европейских опционов. Модель имеет вид

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t,$$

где $\sigma(t, s)$ — детерминированная функция, которая определяется из рыночных цен опционов по некоторой аналитической формуле.

Несмотря на отсутствие статической ошибки, в модели локальной волатильности присутствует динамическая ошибка по той же причине, что и в модели CEV — из-за жесткой связи волатильности и цены.

Модель Хестона

Одной из наиболее известных моделей стохастической волатильности является модель С. Хестона (S. Heston, 1993). Она задается уравнениями

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}, \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}, \\ dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} &= \rho dt, \end{aligned}$$

где процесс V_t называется стохастической дисперсией (а $\sigma_t = \sqrt{V_t}$ — стохастической волатильностью). Величины $\kappa, \theta, \sigma, \rho, V_0$ — параметры модели. Третье уравнение означает, что броуновские движения $W_t^{(1)}$ и $W_t^{(2)}$ являются коррелированными с коэффициентом корреляции ρ (т.е. $E W_t^{(1)} W_t^{(2)} = \rho t$).

Пять параметров придают модели Хестона достаточно гибкости в подгонке к рыночным ценам опционов, но она все равно имеет статическую ошибку — это неизбежно при конечном числе параметров. С другой стороны, зависимость волатильности от дополнительного случайного фактора позволяет более правильно отражать ее динамику по сравнению с моделью локальной волатильности.

Большим достоинством модели Хестона является наличие эффективного способа вычисления цен европейских опционов, что необходимо для калибровки параметров модели. Это важное свойство любой модели — можно придумать много разных уравнений, задающих стохастическую волатильность, но если нет

эффективного метода вычисления цен простых деривативов, то такую модель модель будет трудно использовать на практике.

В дополнение к модели Хестона упомянем некоторые другие модели, в которых волатильность задается диффузионным процессом; эти модели не будут рассматриваться с нашим курсе, но они довольно обширно изучались в литературе: модель Халла—Уайта (Hull—White), модель Стейна—Стейна (Stein—Stein), модель 3/2.

Модель SABR

Другой хорошо известной моделью стохастической волатильности является модель SABR⁷, предложенная П. Хэганом соавторами (P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski, D. Woodward, 2002):

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \alpha_t F_t^\beta dW_t^{(1)}, \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_t^{(2)}, \\ dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} &= \rho dt, \end{aligned}$$

где $\alpha_0, \beta, \nu, \rho$ — параметры модели.

Достоинство модели SABR состоит в том, что для нее имеется приближенная аналитическая формула для подразумеваемой волатильности, которая позволяет быстро калибровать параметры модели и вычислять цены ванильных опционов.

Вообще, модель SABR часто используется не как динамическая модель, а именно как формула для интерполяции улыбок волатильности с учетом их динамики при изменении цены базового актива. Под интерполяцией понимается то, что в реальности значения подразумеваемой волатильности даны в дискретном наборе точек (для разных страйков времен исполнения).

Поясним на примере. Пусть $V(t, s, \sigma)$ — функция, задающая цену опциона по формуле Блэка—Шоулза. Чтобы получить его рыночную цену, вместо σ нужно подставить подразумеваемую волатильность $\hat{\sigma}(t, s)$ этого опциона⁸. Тогда, например, дельта опциона будет вычисляться как

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial s} = \Delta_{BS} + \mathcal{V}_{BS} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial s},$$

где Δ_{BS} и \mathcal{V}_{BS} — дельта и вега в модели Блэка—Шоулза. Таким образом, возникает поправка в виде последнего члена, связанная с тем, что улыбка волатильности обладает динамикой (движется при изменении цены s). Имея аналитическую формулу для $\hat{\sigma}$, эту поправку легко вычислить.

⁷Stochastic Alpha, Beta, Rho — стохастическая альфа, бета, ро.

⁸Здесь параметры опциона T, K фиксированы, но считается, что подразумеваемая волатильность зависит от времени и цены базового актива. Может присутствовать зависимость и от других факторов, но для простоты мы сейчас ей пренебрежем.

Модель SVI

Модель SVI⁹ (J. Gatheral, 1999) — это метод интерполяции и экстраполяции улыбок волатильности. Она представляет из себя специально подобранную аналитическую функцию, зависящую от 5 параметров, которая хорошо «ложится» на рыночные улыбки волатильности.¹⁰

Задача интерполяции и экстраполяции волатильности является непростой по той причине, что желательно интерполировать и экстраполировать так, чтобы цены ванильных опционов, вычисленные по получаемой подразумеваемой волатильности, не приводили к наличию арбитража. При использовании общих методов (таких, как например, сплайны), добиться этого труднее, чем при использовании SVI.

Модель Бергоми

Модель Бергоми (L. Bergomi, 2004–2005) позволяет более аккуратно моделировать динамику форвардной дисперсии, что важно для оценки экзотических опционов, зависящих от значений подразумеваемой волатильности в будущем.

В общем случае модель Бергоми порождается n броуновскими движениями (n -факторная модель), но сейчас для простоты рассмотрим только ее 1-факторную версию. Она задается уравнениями

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{\xi_t^T} S_t dW_t^{(1)}, \\ d\xi_t^T &= \omega e^{-\kappa(T-t)} \xi_t^T dW_t^{(2)}, \quad T > 0, \quad t \in [0, T], \\ dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} &= \rho dt. \end{aligned}$$

где ω, κ, ρ — параметры модели, а $\xi^T = (\xi_t^T)_{t \in [0, T]}$ — семейство процессов T -форвардной дисперсии, индексированных параметром $T > 0$, задающим дату экспирации.

Под T -форвардной дисперсией на дату t понимается случайная величина $\xi_t^T = E^Q(\sigma_T^2 \mid \mathcal{F}_t)$, т. е. условное ожидание квадрата стохастической волатильности в будущем. Для каждого T получается свой процесс ξ_t^T с временем $t \leq T$. Если зафиксировать текущее время t , то получится кривая форвардной дисперсии ξ_t^T , $T \geq t$. Мгновенная стохастическая волатильность равна $\sigma_t = \sqrt{\xi_t^t}$.

Начальная кривая форвардной дисперсии ξ^0 является параметром модели и может быть оценена по рыночным данным. Несмотря на то, что в каждый момент времени t имеется континуум значений форвардной дисперсии ξ_t^T , $T \geq t$, вся кривая управляется всего одним броуновским движением W_t (в n -факторной модели будет n броуновских движений), что делает модель доступной для аналитических и численных расчетов.

⁹Stochastic Volatility Inspired — модель, «вдохновленная» стохастической волатильностью.

¹⁰Модель SVI не описывает динамику движения цен, т. е., в общем-то, не является моделью стохастической волатильности.

Модели грубой волатильности

В 2010-х гг. в научной литературе получили популярность модели, где стохастическая волатильность задается процессами, которые имеют более хаотичные (грубые) траектории, чем диффузионные процессы. Примером такой модели является

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t,$$
$$\sigma_t = \sigma e^{\nu W_t^H}$$

где $W_t^H = (W_s^H)_{s \geq 0}$ — *дробное* (или, еще говорят, *фрактальное*) броуновское движение с параметром $H \in (0, 1)$. По определению, дробным броуновским движением называется гауссовский случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $\text{cov}(W_t^H, W_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$. При $H = 1/2$ получается стандартное броуновское движение. С помощью параметра H можно контролировать грубость траекторий: чем H ближе к нулю, тем траектории грубее¹¹.

К идее грубой волатильности приводят два наблюдения. Во-первых, статистический анализ внутридневных изменений цен показывает, что распределение реализованной волатильности за день обладает свойствами, которые не могут получиться у диффузионных процессов, но ими обладает, например, фрактальное геометрическое броуновское движение с малым показателем H (со значением примерно $H = 0.15$). Во-вторых, в рыночных поверхностях подразумеваемой волатильности наблюдается такой эффект, что коэффициент наклона улыбки волатильности ведет себя примерно как T^p при времени до исполнения T близком к нулю, где значение показателя p близко к $-1/2$. Опять же, этого нельзя достичь в моделях, где волатильность задается диффузионным процессом, но можно, если она более грубая.

В литературе изучались разные модификации стандартных моделей на случай грубой волатильности: грубая модель Хестона, грубая модель SABR, грубая модель Бергоми и т. п. Большим недостатком моделей грубой волатильности является сложность работы с ними аналитически и численно. Это вызвано тем, что дробное броуновское движение не является ни марковским процессом, ни семимартингалом (за исключением случая $H = 1/2$), и поэтому стандартные средства из стохастического анализа к нему не применимы. К настоящему времени в финансовой индустрии модели грубой волатильности так и не начали активно использоваться.

Модели локальной стохастической волатильности

Локальная стохастическая волатильность — это «надстройка» над какой-либо моделью стохастической волатильности, заключающаяся в добавлении в ко-

¹¹Более точно: на любом конечном отрезке траектории процесса W^H с вероятностью 1 непрерывны по Гёльдеру с показателем H' для любого $H' < H$.

эффицент волатильности *функции леввериджа* $\ell(t, s)$:

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t \ell(t, S_t) dW_t,$$

где σ_t — стохастическая волатильность, заданная конкретным процессом, зависящим от параметров (например, как в модели Хестона, Бергоми и т. п.), а функция леввериджа $\ell(t, s)$ подбирается таким образом, чтобы исключить статическую ошибку. Стохастическая часть модели (процесс σ_t) дает «правильные» динамические характеристики, а локальная часть (функция ℓ) — статические.

Из результатов для модели локальной волатильности выводится, что ℓ выражается через условное математическое ожидание $E(\sigma_t | S_t)$, что приводит к уравнению

$$dS_t = r S_t dt + \sigma_t S_t f(t, S_t, E(\sigma_t | S_t)) dW_t, \quad (1)$$

где функция f выписывается явно через поверхность локальной волатильности. Это уравнение представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение Маккина—Власова, т. е. уравнение в котором коэффициенты зависят от вероятностного распределения его решения.

Модели локальной стохастической волатильности являются современным «стандартом» в финансовой индустрии, особенно в задачах оценки деривативов, зависящих от нескольких базовых активов. Определенную трудность при работе с ними представляет калибровка локальной части, т. е. численное нахождение функции $\ell(t, s)$. Более того, в настоящее время до конца не понятно, при каких условиях уравнение (1) корректно задает модель, т. е. когда у него существует единственное решение, а также при каких условиях используемые численные методы сходятся к теоретическому решению.

Резюме лекции

- Модель Блэка—Шоулза неправильно описывает вероятностные распределения цен: в реальности приращения их логарифмов имеют распределение, отличное от нормального, обладают тяжелыми хвостами и зависимы.
- Модель Блэка—Шоулза также неправильно описывает поверхности подразумеваемой волатильности: в ней они плоские, а в реальности это не так.
- Моделям присущи статические и динамические ошибки. Первая означает несоответствие между рыночными ценами ликвидных производных инструментов и ценами этих инструментов в модели; вторая — несоответствие между вероятностными распределениями процессов цен базовых и производных инструментов, которые получаются в модели и наблюдаются в реальных данных.

Лекция 2

Фундаментальные результаты теории арбитража

1. Общая модель рынка (14)

2. Отсутствие арбитража и безарбитражные цены (16)

Первая фундаментальная теорема финансовой математики (16). Безарбитражные цены (19). Полнота рынка и вторая фундаментальная теорема (21).

3. Сведение к нулевой безрисковой ставке. Форвардные цены (22)

Резюме лекции (24)

Эта лекция посвящена фундаментальным теоретическим результатам. Основная ее цель — показать, как определить справедливую цену платежного обязательства, и объяснить, почему ее можно вычислить в виде ожидания дисконтированной выплаты по эквивалентной мартингальной мере.

1. Общая модель рынка

Пусть дано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ со стандартным d -мерным броуновским движением¹ $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$. Горизонт времени T конечен.

Рынок в модели состоит из одного безрискового актива и N рискованных активов. Цена безрискового актива задается процессом

$$dB_t = r_t B_t dt \quad \left[B_t = B_0 e^{\int_0^t r_s ds} \right].$$

Без ограничения общности считается, что $B_0 = 1$. В этой лекции процентная ставка r_t случайная, хотя далее в курсе она, как правило, будет детерминированной (но не постоянной по времени). Всегда будем предполагать, что r_t ограничена снизу, т.е. $r_t \geq \underline{r}$ для некоторой константы \underline{r} .

Цены рискованных активов задаются процессами Ито

$$dS_t^n = \mu_t^n dt + \sum_{i=1}^d \sigma_t^{ni} dW_t^i, \quad (1)$$

где μ_t^n, σ_t^{ni} — некоторые случайные процессы, для которых стохастические интегралы в формуле выше корректно определены.² Будем считать, что рискованные

¹Необходимые далее теоретические результаты о многомерном броуновском движении и многомерных процессах Ито приведены в лекции 9 курса «Введение в финансовую математику», разд. 1.2.

²Отметим, что здесь в коэффициенты сноса и диффузии не входит множитель S_t , как,

активы могут выплачивать дивиденды с интенсивностями, задаваемыми случайными процессами $q_t^n \geq 0$.

Замечание 1. Уравнение (1) представляет общую форму модели рынка, где цены рискованных активов задаются процессами Ито. Однако, в дальнейших лекциях мы, в основном, будем иметь дело с моделями, содержащими один рискованный актив с ценой

$$dS_t^n = \mu_t^n dt + \sigma_t^n dW_t, \quad (2)$$

где W_t — одномерное броуновское движение, при этом процесс σ_t управляется другим броуновским движением, которое коррелировано с W_t .

Определение 1. *Торговой стратегией* называется измеримый согласованный³ процесс $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$, где $\pi_t = (G_t, H_t^1, \dots, H_t^N)$. *Стоимостью портфеля* стратегии π называется процесс

$$V_t^\pi = G_t B_t + \sum_{n=1}^N H_t^n S_t^n.$$

Стратегия π называется *самофинансируемой*, если корректно определены интегралы⁴ $\int_0^t G_t dB_t$, $\int_0^t q_t^n H_t^n S_t^n dt$, $\int_0^t H_t^n dS_t^n$ и выполнено равенство (понимаемое в интегральном смысле)

$$dV_t^\pi = G_t dB_t + \sum_{n=1}^N H_t^n (q_t^n S_t^n dt + dS_t^n). \quad (3)$$

Стратегия π называется *допустимой*, если существует константа c такая, что $V_t^\pi \geq c$ для всех $t \in [0, T]$.

Далее под словом «стратегия» мы будем всегда понимать допустимую самофинансируемую стратегию, если не оговорено иного.

Определение стоимости портфеля и условие самофинансируемости аналогичны соответствующим определениям, которые были даны для модели Блэка—Шоулза в курсе «Введение в финансовую математику», поэтому мы не будем подробно останавливаться на их интерпретации.

Что касается допустимости, то в том курсе использовалось более сильное условием (процесс $H_t S_t$ квадратично интегрируем относительно эквивалентной мартингальной меры), которое в общей модели не удобно, так как в ней нет яв-

например, в модели Блэка—Шоулза. Это дает большую общность рассуждений.

³В литературе часто считают, что стратегии задаются *предсказуемыми* процессами. Однако если цены задаются процессами Ито, то модели с согласованными и предсказуемыми стратегиями будут, в сущности, эквивалентны.

⁴Первые два интеграла понимаются как потраекторные интеграла Лебега, а третий интеграл — как стохастический интеграл по процессу Ито. Они корректно определены при выполнении условий $\int_0^T r_t B_t |G_t| dt < \infty$, $\int_0^T (|\mu_t^n H_t^n| + |q_t^n H_t^n|) dt < \infty$, $\int_0^T (\sigma_t^{ni} H_t^n)^2 dt < \infty$.

ного выражения для ЭММ. Напомним, что условие допустимости необходимо, чтобы избежать арбитражных возможностей.

Определение 2. *Дисконтированными ценами рискованных активов с учетом дивидендов* называются процессы

$$\tilde{S}_t^n = e^{\int_0^t q_s^n ds} \frac{S_t^n}{B_t} = e^{\int_0^t (q_s^n - r_s) ds} S_t^n.$$

Дисконтированной стоимостью портфеля стратегии π называется процесс

$$\tilde{V}_t^\pi = \frac{V_t^\pi}{B_t} = e^{-\int_0^t r_s ds} V_t^\pi.$$

2. Отсутствие арбитража и безарбитражные цены

Следующая задача — определить, что понимать под справедливой ценой платежного обязательства. Так как большинство моделей, которые мы будем рассматривать, являются неполными, то понятие цены репликации, которым мы пользовались в модели Блэка—Шоулза, здесь не является подходящим. Вместо него мы будем пользоваться понятием *безарбитражной* цены. Для этого сначала обсудим понятие арбитража и условия его отсутствия.

2.1. Первая фундаментальная теорема финансовой математики

Напомним, что один из центральных результатов для моделей рынка с дискретным временем — *первая фундаментальная теорема* финансовой математики — утверждает, что отсутствие арбитража равносильно существованию эквивалентной мартингальной меры. В непрерывном времени ситуация становится сложнее, и для того, чтобы получить аналогичный результат, возникает необходимость ввести новые понятия.

Определение 3. Будем называть \mathcal{F}_T -измеримую случайную величину X *бесплатным ланчем с исчезающим риском* (free lunch with vanishing risk, FLVR), если

- а) $X \geq 0$ п. н.,
- б) $P(X > 0) > 0$,
- в) для любого $\varepsilon > 0$ найдется стратегия π такая, что $V_0^\pi = 0$, $V_T^\pi \geq X - \varepsilon$ п. н.

Будем говорить, что в модели рынка выполнено *условие отсутствия бесплатного ланча с исчезающим риском* (no free lunch with vanishing risk, NFLVR) и называть такой рынок *безарбитражным*, если бесплатного ланча с исчезающим риском не существует.

Смысл условия NFLVR состоит в том, что, начиная из нулевого портфеля, нельзя получить прибыль с риском, стремящемся к нулю (прибыль равна X , а «исчезающий» риск равен ε , который можно выбрать сколь угодно малым).

NFLVR является более сильным условием, чем простое условие отсутствие арбитража (NA). Напомним, что NA означает, что не существует такой стратегии π , что $V_0^\pi = 0$, $V_T^\pi \geq 0$ и $P(V_T^\pi > 0) > 0$. Если NA не выполнено, то $X = V_T^\pi$ и будет бесплатным ланчем с исчезающим риском.

Определение 4. *Эквивалентной локальной мартингальной мерой (ЭЛММ)* называется вероятностная мера $Q \sim P$, относительно которой процессы \tilde{S}^n являются локальными мартингалами. *Эквивалентной мартингальной мерой (ЭММ)* называется вероятностная мера $Q \sim P$, относительно которой процессы \tilde{S}^n являются мартингалами.

Замечание 2. Любая ЭММ является ЭЛММ, но обратное не верно.

Следующая теорема вытекает из классического варианта первой фундаментальной теоремы финансовой математики, доказанного Ф. Дельбаном и В. Шахермайером (F. Delbaen, W. Schachermayer, 1994) для моделей рынка, в которых цены активов задаются семимартингалами.

Теорема 1 (первая фундаментальная теорема; теорема Дельбана—Шахермайера). *Свойство NFLVR равносильно существованию ЭЛММ.*

Мы дадим доказательство только легкой импликации $\exists Q \implies \text{NFLVR}$. В другую сторону доказательство очень трудное.

Доказательство. Предположим, что ЭЛММ существует, но условие NFLVR не выполнено. Возьмем последовательность стратегий π^n таких, что $V_0^{\pi^n} = 0$ и $V_T^{\pi^n} \geq X - 1/n$, где X — бесплатный ланч с исчезающим риском. Тогда

$$0 < E^Q \frac{X}{B_T} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E^Q \frac{V_T^{\pi^n}}{B_T} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V_0^{\pi^n} = 0.$$

Здесь во втором неравенстве воспользовались тем, что $1/(nB_T) \rightarrow 0$ равномерно, так как предполагается, что процентная ставка r_t ограничена снизу, что влечет ограниченность сверху величины $1/B_T$. В третьем неравенстве воспользовались тем, что $\tilde{V}_t^{\pi^n}$ является локальным мартингалом, ограниченным снизу, и, следовательно, является супермартингалом (см. раздел 1.7 в лекции 7 во «Введении в финансовую математику»). Получаем противоречие: $0 < 0$. \square

Покажем, как преобразуются процессы цен рискованных активов при замене меры на ЭЛММ.

Предложение 1. Пусть Q является ЭЛММ. Тогда верно представление

$$dS_t^n = (r_t - q_t^n)S_t^n dt + \sum_{i=1}^d \sigma_t^{ni} d\widetilde{W}_t^i, \quad (4)$$

где $\widetilde{W}_t = (\widetilde{W}_t^1, \dots, \widetilde{W}_t^d)$ — стандартное броуновское движение относительно Q .

Доказательство. Заметим, что процессы \widetilde{S}_t^n относительно P имеют вид

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t^n &= d(e^{\int_0^t (q_s^n - r_s) ds} S_t^n) = (q_t^n - r_t) \widetilde{S}_t^n dt + e^{\int_0^t (q_s^n - r_s) ds} dS_t^n \\ &= ((q_t^n - r_t) \widetilde{S}_t^n + e^{\int_0^t (q_s^n - r_s) ds} \mu_t^n) dt + e^{\int_0^t (q_s^n - r_s) ds} \sum_{i=1}^d \sigma_t^{ni} d\widetilde{W}_t^i. \end{aligned}$$

При эквивалентной замене меры броуновское движение переходит в броуновское движение со сносом (по теореме Гирсанова для локальных мартингалов и теореме Леви, см. [14], гл. III, теорема 3.11 и гл. II, теорема 4.4), т. е. справедливо представление $W_t^i = A_t^i + \widetilde{W}_t^i$, где $\widetilde{W}_t = (\widetilde{W}_t^1, \dots, \widetilde{W}_t^d)$ — стандартное броуновское движение относительно Q , а A_t^i — непрерывный согласованный процесс ограниченной вариации. Так как процесс \widetilde{S}_t^n должен иметь нулевой снос относительно Q , то он имеет вид $d\widetilde{S}_t^n = e^{\int_0^t (q_s^n - r_s) ds} \sum_{i=1}^d \sigma_t^{ni} d\widetilde{W}_t^i$. Применяя формулу Ито к $S_t^n = e^{\int_0^t (r_s - q_s^n) ds} \widetilde{S}_t^n$, получаем представление (4). \square

Чтобы найти ЭЛММ, можно воспользоваться теоремой Гирсанова. Покажем, как это сделать на конкретном примере.

Пример 1. Пусть модель задается уравнениями

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1, \\ d\sigma_t &= a_t dt + b_t dW_t^2, \end{aligned}$$

где W_t^1, W_t^2 — независимые броуновские движения.

Определим броуновские движения со сносом

$$d\widetilde{W}_t^1 = \nu_t dt + dW_t^1, \quad d\widetilde{W}_t^2 = \rho_t dt + dW_t^2,$$

где возьмем $\nu_t = (\mu_t - r_t + q_t)/\sigma_t$, а ρ_t выберем произвольным. Будем предполагать, что процессы ν_t, ρ_t таковы, что $\int_0^T |\nu_t| dt < \infty$ и $\int_0^T |\rho_t| dt < \infty$, и, следовательно, процессы \widetilde{W}_t^i корректно определены. Тогда

$$\begin{aligned} dS_t &= (r_t - q_t) S_t dt + \sigma_t S_t d\widetilde{W}_t^1, \\ d\sigma_t &= (a_t - b_t \rho_t) dt + b_t d\widetilde{W}_t^2. \end{aligned}$$

Если применима теорема Гирсанова (например, когда выполнено условие Новикова), то можно найти меру $Q \sim P$, относительно которой \widetilde{W}_t будем двумерным броуновским движением без сноса. Тогда Q будет ЭЛММ, что нетрудно

увидеть, применяя формулу Ито к \tilde{S}_t , как это сделано в доказательстве предложения 1.

Заметим, что в рассматриваемой модели из произвольности процесса ρ видно, что ЭЛММ не единственна.

2.2. Безарбитражные цены

Определение 5. Пусть рынок из активов (B, S^1, \dots, S^N) является безарбитражным. Тогда *безарбитражной ценой* платежного обязательства европейского типа с выплатой X в момент времени T называется процесс V_t^X такой, что $V_T^X = X$ и расширенный рынок $(B, S^1, \dots, S^N, S^{N+1})$, где $S_t^{N+1} = V_t^X$ и актив $N + 1$ не выплачивает дивиденды, является безарбитражным.

Замечание 3. Безарбитражная цена может быть не единственной.

Предложение 2. Если Q является ЭЛММ, то для любого платежного обязательства X с $E^Q |X| < \infty$ процесс

$$V_t = B_t E^Q \left(\frac{X}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

является безарбитражной ценой X .

Доказательство. Процесс V_t/B_t является Q -мартингалом (так как он является мартингалом Леви), а в расширенном рынке $\tilde{S}_t^{N+1} = V_t/B_t$. Следовательно, Q является ЭЛММ для расширенного рынка. Тогда по первой фундаментальной теореме расширенный рынок безарбитражен. \square

Замечание 4. В предложении 2 есть небольшой пробел: в определении модели мы предполагаем, чтобы процессы цен рискованных активов являлись процессами Ито. Поэтому, чтобы предложение было формально верным, необходимо еще потребовать, чтобы процесс $S_t^{N+1} = V_t$ был представим в таком виде, что в общем случае не гарантируется автоматически.

Этого затруднения можно избежать, если изначально рассматривать модель, где цены рискованных активов задаются непрерывными локальными мартингалами: первая фундаментальная теорема остается верной для таких моделей, и, следовательно, верно также предложение 2. Однако тогда для формулировки условия самофинансирования пришлось бы обсудить конструкцию интеграла по локальному мартингалу, которая не очень-то проста, но в дальнейшем нам не потребуется.

Предложение 2 ничего не говорит о том, какую ЭЛММ (если их несколько) использовать для оценки производных инструментов. На практике применяют следующие соображения, которым мы тоже будем следовать в дальнейшем.

- Для вычисления цен всех деривативов используют одну и ту же ЭЛММ Q . Часто эту меру выбирают таким образом, чтобы цены ликвидных деривативов, вычисленные в модели, были как можно более близкими к наблюдаемым рыночным ценам (т. е. стремятся уменьшить статическую ошибку). Другим критерием выбора ЭЛММ может быть, например, получение правильной динамики цен производных инструментов или динамики характеристик поверхности волатильности таких как наклон, кривизна и т. п.
- Наилучшая ЭЛММ выбирается не из всего множества ЭЛММ, а из некоторого параметрического подмножества, при этом обычно ограничиваются рассмотрением только ЭММ. Это приводит к задаче нахождения комбинации параметров, дающих наименьшую ошибку в ценах ликвидных инструментов (или наиболее правильную динамику цен).

В заключение раздела приведем результат о том, что для реплицируемых платежных обязательств в качестве справедливой (т. е. безарбитражной) цены можно взять цену репликации.

Предложение 3. Пусть рынок из активов (B, S^1, \dots, S^N) является безарбитражным, а платежное обязательство X реплицируемо с помощью стратегии $\pi_t = (G_t, H_t^1, \dots, H_t^N)$, у которой процессы G_t и H_t^n , $n = 1, \dots, N$, ограничены. Тогда процесс V_t^π является безарбитражной ценой X .

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что если на расширенном рынке имелся бы арбитраж, то он имелся бы и на исходном рынке, так как любая стратегия на расширенном рынке может быть преобразована в стратегию на исходном рынке путем репликации актива $N + 1$ активами из исходного рынка.

Дадим строгое доказательство. Предположим, что для расширенного рынка с ценой $S_t^{N+1} = V_t^\pi$ не выполнено условие NFLVR. Пусть X — бесплатный ланч с исчезающим риском. Рассмотрим стратегии $\pi^k = (g_t^k, h_t^{k,1}, \dots, h_t^{k,N+1})$ такие, что $V_0^{\pi^k} = 0$ и $V_T^{\pi^k} \geq X - 1/k$. Имеем

$$V_t^{\pi^k} = g_t^k B_t + \sum_{n=1}^{N+1} h_t^{k,n} S_t^n = (g_t^k + h_t^{k,N+1} G_t) B_t + \sum_{n=1}^N (h_t^{k,n} + h_t^{k,N+1} H_t^n) S_t^n,$$

где воспользовались тем, что $S_t^{N+1} = G_t B_t + \sum_{n=1}^N H_t^n S_t^n$.

Пусть $\tilde{\pi}_t^k = (g_t^k + h_t^{k,N+1} G_t, h_t^{k,1} + h_t^{k,N+1} H_t^1, \dots, h_t^{k,N} + h_t^{k,N+1} H_t^N)$ — стратегии на исходном рынке. Из ограниченности процессов G_t, H_t^n следует, что интегралы, присутствующие в условии самофинансируемости для $\tilde{\pi}^k$, корректно определены, и, следовательно, $\tilde{\pi}^k$ являются самофинансируемыми, что следует из самофинансируемости π^k и π . Кроме того, из допустимости π^k следует допустимость $\tilde{\pi}^k$. Но тогда получаем, что X — бесплатный ланч с исчезающим риском на исходном рынке. Противоречие. \square

Замечание 5. В общей модели рынка в дискретном времени цены репликации обладают важным свойством: на безарбитражном рынке у любого реплицируемого платежного обязательства цена репликации не зависит от реплицирующей стратегии; в частности, безарбитражная цена реплицируемого платежного обязательства однозначно определена и совпадает с ценой репликации (см. лекцию 4 во «Введении в финансовую математику»).

В непрерывном времени это неверно. Даже в модели Блэка—Шоулза с классом допустимых стратегий как в определении 1 (т.е. $V_t^\pi \geq c$) и, для простоты, с нулевой безрисковой ставкой, можно построить допустимую самофинансируемую стратегию π такую, что $V_0^\pi > 0$ и $V_T^\pi = 0$.

Для этого возьмем самофинансируемую стратегию π , у которой $V_0^\pi = 1$ и

$$H_t = -\frac{1}{(1-t)S_t} \mathbf{I}(t \leq \tau),$$

где $\tau = \inf\{t : \int_0^t (1-s)^{-1} dW_s = 1\}$. Аналогично примеру в лекции 10 во «Введении в финансовую математику» получаем, что $V_T^\pi = 0$. Таким образом, платежное обязательство $X = 0$ реплицируемо двумя способами: с помощью стратегии π и с помощью нулевой стратегии.

Этой проблемы можно избежать, если использовать более сложное определение класса допустимых стратегий. Подробное изложение можно найти в книге [1], гл. 11, разд. 7. В нашем курсе этот материал не потребуется.

2.3. Полнота рынка и вторая фундаментальная теорема

Определение 6. Безарбитражная модель рынка называется *полной*, если любое \mathcal{F}_T -измеримое ограниченное платежное обязательство X реплицируемо.

В дискретном времени полнота рынка равносильна единственности ЭММ (*вторая фундаментальная теорема* финансовой математики). Приведем без доказательства результат, который представляет одну из версий второй фундаментальной теоремы для непрерывного времени (доказательство см. в книге [1], теоремы 11.52 и 11.54).

Теорема 2. Пусть в модели рынка существует ЭММ. Тогда модель полна если и только если ЭММ единственна.

Большинство моделей стохастической волатильности, которые мы будем рассматривать в курсе, будут неполными. Поясним на примере модели Хестона, откуда возникает неполнота.

Модель Хестона задается уравнениями

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^1, \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2, \end{aligned}$$

где W^1, W^2 — броуновские движения с коэффициентом корреляции $\rho \in (-1, 1)$.

Рассмотрим платежное обязательство с выплатой $X = f(S_T)$. В силу марковского свойства двумерного процесса (S_t, V_t) цену этого платежного обязательства можно представить в виде $U_t = U(t, S_t, V_t)$ (будем использовать букву U для обозначения цены, чтобы не путать с процессом стохастической дисперсии V_t).

Тогда по формуле Ито (при условии, что функция f достаточно «хорошая»)

$$dU_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t^{(1)} + \gamma_t dW_t^{(2)},$$

где коэффициенты $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ выражаются из формулы Ито, но конкретный их вид сейчас не важен.

С другой стороны, если рассматривать некоторую самофинансируемую стратегию π , торгующую только безрисковым и рисковым активами, то стоимость ее портфеля будет иметь вид

$$dU_t^\pi = G_t dB_t + H_t dS_t = \alpha'_t dt + \beta'_t dW_t^1,$$

а слагаемого с dW_t^2 не возникает. Следовательно, в общем случае (если $\gamma_t \neq 0$) нельзя подобрать такие процессы G_t и H_t , чтобы получить $dV_t^\pi = dU_t$ и, значит, репликация невозможна.

Однако, репликация становится возможной, если разрешить торговать каким-нибудь производным инструментом с ценой, зависящей от процесса V_t . Портфель такой стратегии будет иметь вид $\pi_t = (G_t, H_t, F_t)$, где F_t — количество единиц этого инструмента в портфеле, а стоимость портфеля можно представить в виде

$$dV_t^\pi = \alpha'_t dt + \beta'_t dW_t^{(1)} + \gamma'_t dW_t^{(2)},$$

с коэффициентами $\alpha'_t, \beta'_t, \gamma'_t$, выражающимися через G_t, H_t, F_t . Следовательно, имеется три неизвестных (G_t, H_t, F_t) и три уравнения $(\alpha_t = \alpha'_t, \beta_t = \beta'_t, \gamma_t = \gamma'_t)$, которые, в принципе, позволяют их найти.

Таким образом, изначально неполную модель можно пополнить, если разрешить торговать производными инструментами. В качестве таких инструментов могут быть использованы, например, опционы колл и пут на базовый актив.

3. Сведение к нулевой безрисковой ставке. Форвардные цены

Часто бывает удобнее работать с моделью, в которой безрисковая ставка и ставка дивидендной доходности нулевые. Здесь мы покажем, как можно свести общую модель с детерминированными r_t и q_t к такому случаю при вычислении цен платежных инструментов. Благодаря этому, в дальнейшей части курса мы

часто будем предполагать, что $r_t = q_t = 0$.

Для простоты рассмотрим рынок только с одним рисковым активом. В общем случае результаты аналогичны.

Пусть $X = f(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ — платежное обязательство, зависящее от цены базового актива в моменты времени t_1, \dots, t_n (таким же образом можно рассмотреть зависимость от всей непрерывной траектории).

Нетрудно видеть, что для безарбитражной цены V_t , вычисленной по произвольной ЭЛММ \mathbb{Q} , имеем

$$V_t = \frac{B_t}{B_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t) = B(t, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{f}(S_{t_1}^* \dots, S_{t_n}^*) \mid \mathcal{F}_t),$$

где $S_t^* = D_t S_t$, $D_t = \exp(\int_0^t (q_s - r_s) ds)$ — дисконтированная цена с учетом дивидендов, $B(t, T) = B_t/B_T$ — цена бескупонной облигации, а функция \tilde{f} имеет вид

$$\tilde{f}(s_1, \dots, s_n) = f(s_1/D_{t_1}, \dots, s_n/D_{t_n}).$$

Таким образом, нахождение цены V_t сводится к вычислению условного математического ожидания функции от процесса S_t^* , который имеет нулевой снос относительно меры \mathbb{Q} . Это, в свою очередь, равносильно задаче вычисления цены платежного обязательства \tilde{X} с функцией выплаты \tilde{f} в модели с нулевой безрисковой ставкой и нулевой дивидендной доходностью.

Для вычисления цен платежных обязательств, зависящих от цены базового актива только в один момент времени ($X = f(S_T)$), можно также перейти к форвардной цене, подобно тому, как это делается в формуле Блэка (см. лекцию 11 во «Введении в финансовую математику»).

Напомним, что форвардный контракт с временем исполнения T , заключаемый в момент t , представляет из себя соглашение о покупке единицы рискового актива n в момент T по цене F_t , определяемой в момент t . Расчеты, осуществляемые в момент T , можно отождествить с платежным обязательством $X = S_T^n - F_t$. Так как в момент t расчетов не происходит, то F_t нужно выбрать так, чтобы цена такого платежного обязательства в момент t была нулевой. Это приводит к следующему определению.

Определение 7. *T -форвардной ценой* рискового актива в момент времени t называется \mathcal{F}_t -измеримая случайная величина F_t^T такая, что для платежного обязательства с выплатой $X = S_T - F_t^T$ безарбитражной ценой в момент времени t является нулевая цена.

Если время T ясно из контекста, будем говорить просто «форвардная цена» и опускать верхний индекс T .

Предложение 4. *Предположим, что рынок безарбитражен, а r_t и q_t неслу-*

чайны. Тогда T -форвардной ценой рискового актива n является

$$F_t = e^{\int_t^T (r_s - q_s) ds} S_t. \quad (5)$$

Доказательство. Платежное обязательство с выплатой $X = S_T - F_t$ можно реплицировать стратегией π , у которой $G_s \equiv -F_t B_t / B_T$, $H_s = e^{-\int_t^T q_s ds}$ при $s \geq t$ и $G_s = H_s = 0$ при $s \leq t$, а все остальные компоненты нулевые. Нетрудно проверить, что если F_t выбрать так, что $V_t^\pi = 0$, т.е. как в формуле (5), то стратегия π будет самофинансируемой, а нулевая цена будет безарбитражной для X в момент времени t согласно предложению 3. \square

Далее под форвардной ценой мы всегда будем понимать выражение (5).⁵ Следующий результат показывает, что процессы волатильности спотовой и форвардной цены совпадают (опять же, при условии, что r_t и q_t неслучайны). Таким образом, в этом случае задачи моделирования волатильности спотовой и форвардной цены эквивалентны.

Предложение 5. Пусть рынок безарбитражен, r_t и q_t неслучайны, а процесс цены рискового актива имеет вид (2). Тогда T -форвардная цена этого актива относительно любой ЭЛММ имеет вид

$$dF_t = \sigma_t F_t d\widetilde{W}_t, \quad (6)$$

где \widetilde{W}_t — броуновское движение относительно этой ЭЛММ.

Доказательство. Согласно (4), имеем $dS_t = (r_t - q_t)S_t dt + \sigma_t S_t d\widetilde{W}_t$. Применяя формулу Ито к выражению (5), получаем доказываемое утверждение. \square

Пример 2. Вычисление цен опционов колл и пут в модели

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\widetilde{W}_t$$

сводится к вычислению математических ожиданий

$$V_t^{\text{call}} = B(t, T) E^Q((F_t^T - K)^+ | \mathcal{F}_t), \quad V_t^{\text{put}} = B(t, T) E^Q((K - F_t^T)^+ | \mathcal{F}_t),$$

где процесс форвардной цены F_t^T удовлетворяет уравнению (6).

⁵Как уже было сказано в замечании 5, могут иметься другие безарбитражные цены, которые возникают из-за того, что используемое нами условие допустимости слишком слабое. Если его усилить, как описано в [1], гл. 11, разд. 7, то именно (5) будет «правильной» форвардной ценой.

Резюме лекции

- Безарбитражность рынка равносильна существованию эквивалентной локальной мартингальной меры (первая фундаментальная теорема).
- Если в модели существует эквивалентная мартингальная мера (не локальная), то ее единственность равносильна полноте рынка (вторая фундаментальная теорема).
- Безарбитражная цена интегрируемого платежного обязательства задается условным математическим ожиданием его дисконтированной выплаты относительно ЭЛММ:

$$V_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Безарбитражные цены, в общем случае, не единственны.

- Относительно ЭЛММ имеются два эквивалентных описания процесса цены рискованного актива в терминах спотовых и форвардных цен (при условии, что r_t и q_t неслучайны):

$$dS_t^n = (r_t - q_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad \Longleftrightarrow \quad dF_t = \sigma_t F_t dW_t,$$

где W — броуновское движение относительно ЭЛММ.

Лекция 3

Стохастические дифференциальные уравнения

1. Определения (26)

Слабые и сильные решения (26). Слабая и сильная единственность (28).

2. Условия существования и единственности решения (28)

Сильные решения (28). Слабые решения (29). Строго марковское свойство (31).

3. Многомерная формула Фейнмана—Каца (33)

4. Примеры (34)

Линейное уравнение (34). Процесс CEV (34). Процесс CIR (35).

Резюме лекции (35)

Модели стохастической волатильности описываются с помощью стохастических дифференциальных уравнений, задающих процессы цены рискового актива и волатильности. В этой лекции мы обсудим общие вопросы, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями: существование и единственность решения, а также свойства, которыми решение обладает.

Большинство результатов даны без доказательств. Их можно найти в гл. 5 книги [2] и гл. 1 книги [8].

1. Определения

1.1. Слабые и сильные решения

Стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) называется уравнение вида

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x, \quad (1)$$

где X_t — неизвестный случайный процесс, а W_t — броуновское движение. В общем случае эти процессы могут быть многомерными: $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ и $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$. Тогда $a(t, x)$ является измеримой функцией из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^n , а $b(t, x)$ — измеримой функцией из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n \times d}$, и уравнение (1) нужно понимать в векторном смысле (точный смысл см. в следующем определении). Начальное условие $x \in \mathbb{R}^n$ будем считать неслучайным.

Функция $a(t, x)$ называется *коэффициентом сноса*, а функция $b(t, x)$ — *коэффициентом диффузии*.

Определение 1. *Решением* (часто говорят *слабым решением*) уравнения (1) называется совокупность $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P, W, X)$, где — $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ — фильтрованное вероятностное пространство,

- W — броуновское движение, определенное на этом пространстве,
- X — непрерывный согласованный процесс, определенный на этом пространстве, и такой, что для любого $t \geq 0$ выполнено неравенство¹

$$\int_0^t \|a(s, X_s)\| ds + \int_0^t \|b(s, X_s)\|^2 ds < \infty, \quad (2)$$

а также для любого $t \geq 0$ и $n = 1, \dots, N$ выполнено равенство

$$X_t^n = x + \int_0^t a^n(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t b^{ni}(s, X_s) dW_s^i. \quad (3)$$

Далее для краткости мы будем говорить просто «решение X », имея ввиду всю совокупность $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P, W, X)$.

Определение 2. Решение уравнения (1) называется *сильным*, если процесс X согласован с фильтрацией $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s \leq t)$, порожденной броуновским движением и пополненной².

Поясним различие между сильным и слабым решениями. В слабом решении ищется и сам неизвестный процесс X , и вероятностное пространство, на котором определен этот процесс и броуновское движение W . Если же существует сильное решение, то можно показать, что оно является функционалом от траекторий броуновского движения (см. [8], предложение 1.5), т. е. найдется измеримое отображение $\Phi: C(R_+) \rightarrow C(\mathbb{R}_+)$ такое, что $X_t = \Phi(W)_t$. Отсюда следует, что сильное решение можно построить на любом вероятностном пространстве с броуновским движением W . Если решения является слабым, но не является сильным, то это означает, что для его построения недостаточно лишь одного источника случайности в виде броуновского движения (оно содержит дополнительную «рандомизацию»).

Модели стохастической волатильности, с которыми мы будем работать далее, будут задаваться сильными решениями СДУ. Понятие слабого решения нам нужно затем, что для доказательства существования сильного решения часто сначала проще показать, что существует слабое, а затем воспользоваться результатами о том, когда слабое решения является сильным.

Пример 1. Уравнение Танаки

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t) dW_t, \quad X_0 = 0,$$

где $\operatorname{sgn}(x) = 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sgn}(x) = -1$ при $x \leq 0$, имеет слабое решение, являющееся броуновским движением. Его можно построить так: в качестве X_t возь-

¹Это неравенство требуется, чтобы интегралы в формуле (3) были корректно определены.

²Пополнение означает, что в \mathcal{F}_0 добавлены подмножества событий нулевой вероятности.

мом броуновское движение, заданное на каком-то вероятностном пространстве, и положим $W_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s$. По *теореме Леви*³ W является броуновским движением, и, следовательно, процессы (X, W) задают слабое решение. Можно показать, что сильного решения это уравнение не имеет (см. [8], гл. 1, пример 1.18).

1.2. Слабая и сильная единственность

Определение 3. Уравнение (1) обладает свойством *слабой единственности* решения (также говорят *единственности по распределению*), если любые два решения X и \tilde{X} совпадают по распределению, т. е. равны все конечномерные распределения $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (\tilde{X}_{t_1}, \dots, \tilde{X}_{t_k})$

Определение 4. Уравнение (1) обладает свойством *сильной единственности* решения (также говорят *потраекторной единственности*), если любые два решения X и \tilde{X} , заданные на одном и том же вероятностном пространстве и удовлетворяющее уравнению (1) с одним и тем же броуновским движением, совпадают с вероятностью 1, т. е. $X_t = \tilde{X}_t$ п. н. для всех $t \geq 0$.

Следующая теорема Ямады—Ватанабе будет очень полезна в дальнейшем: она утверждает, что существование сильного решения можно получить из существования слабого и свойства сильной единственности (а сильная единственность будет иметь место, если выполнены условия другой теоремы Ямады—Ватанабе, см. далее).

Теорема 1 (Т. Ямада, С. Ватанабе). *Из сильной единственности следует слабая единственность. Из сильной единственности и существования слабого решения следует существование сильного решения.*

Далее для краткости мы будем говорить, что у некоторого СДУ «существует единственное слабое решение», если слабое решение существует и выполнено свойство слабой единственности. Аналогично, фраза «существует единственное сильное решение» означает существование сильного решения и выполнение свойства сильной единственности.

2. Условия существования и единственности решения

2.1. Сильные решения

Теорема 2 (К. Ито). *Пусть существует константа C такая, что для всех $t \geq 0$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} \|a(t, x) - a(t, y)\| + \|b(t, x) - b(t, y)\| &\leq C\|x - y\|, \\ \|a(t, x)\| + \|b(t, x)\| &\leq C(1 + \|x\|). \end{aligned}$$

³Непрерывный локальным мартингал W_t с $W_0 = 0$ является броуновским движением тогда и только тогда, когда $W_t^2 - t$ является локальным мартингалом.

Тогда уравнение (1) имеет единственное сильное решение для любого начального условия x_0 .

Замечание 1. Можно сформулировать версию этой теоремы (а также и последующих теорем) для решения на отрезке $[0, T]$ — нужно лишь потребовать, чтобы неравенства выполнялись для $t \in [0, T]$.

Пример 2. По теореме Ито уравнение для геометрического броуновского решения $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ имеет единственное сильное решение с любым начальным условием $S_0 = s_0$. Аналогично, единственное сильное решение имеет уравнения для процесса Орнштейна—Уленбека $dX_t = \lambda(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$.

Теорема 3 (Т. Ямада, С. Ватанабе). Пусть существуют константа C и функция $h(x): \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ со свойством $\int_0^\varepsilon h^{-2}(x)dx = \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, такие, что

$$\begin{aligned}\|a(t, x) - a(t, y)\| &\leq C\|x - y\|, \\ \|b(t, x) - b(t, y)\| &\leq h(\|x - y\|).\end{aligned}$$

Тогда уравнение (1) обладает свойством сильной единственности.

2.2. Слабые решения

Неоднородные уравнения

Теорема 4 (А.В. Скороход). Пусть функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$ ограничены и непрерывны. Тогда уравнение (1) имеет слабое решение.

Теорема 5 (Д. Струк, С. Варадан). Пусть $d = n$. Предположим, что функция $a(t, x)$ ограничена, а $b(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет следующему условию: для любых $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ найдется константа $\varepsilon(t, x) > 0$ такая, что $\|b(t, x)y\| \geq \varepsilon(t, x)\|y\|$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда уравнение (1) имеет единственное слабое решение.

Замечание 2. Для $d = n = 1$ условия теоремы Струка—Варадана на функцию $b(t, x)$ означают, что она непрерывна и строго положительна.

Одномерные однородные уравнения: нулевой снос

В этом и следующем разделах мы будем рассматривать одномерное однородное СДУ, т.е. уравнение вида

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0. \quad (4)$$

Теорема 6 (Х.-Ю. Энгельберт, В. Шмидт). Пусть $a \equiv 0$. Определим множества

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{b^2(y)} dy = \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0 \right\}, \quad Z = \{x \in \mathbb{R} : b(x) = 0\}.$$

Тогда

- а) уравнение (4) имеет слабое решение для любого начального условия x_0 тогда и только тогда, когда $I \subseteq Z$;
- б) уравнение (4) имеет единственное слабое решение для любого начального условия x_0 тогда и только тогда, когда $I = Z$;

При нулевом коэффициенте сноса решение уравнения (4) всегда является локальным мартингалом (так как стохастический интеграл является локальным мартингалом). Следующий результат дает критерий мартингальности решения.

Теорема 7 (А. Миятович, М. А. Урусов). Пусть $a \equiv 0$, функция $b(x)$ такова что $b(0) = 0$, $b(x) > 0$ при $x > 0$ и $\int_x^y b^{-2}(z)dz < \infty$ для любых $0 < x < y$, и уравнение (4) имеет слабое решение.

Возьмем такое решение, что, если оно достигает 0, то остается в нуле (т. е. $P(\exists t > s : X_s = 0, X_t \neq 0) = 0$). Тогда оно является мартингалом в том и только том случае, когда

$$\int_1^\infty \frac{x}{b^2(x)} dx = \infty.$$

Одномерные однородные уравнения: произвольный снос

Чтобы сформулировать теорему о достаточных условиях для существования и единственности решения уравнения (4) с ненулевым сносом, нам потребуется ввести понятие решения до момента выхода из интервала.

Определение 5. Решением уравнения (4) в интервале (l, r) называется совокупность $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P, W, X)$, где W — броуновское движение, определенное на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, а X — согласованный непрерывный процесс, для которого найдутся последовательности $l_n \downarrow l$ и $u_n \uparrow u$ такие, что для моментов остановки $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (l_n, u_n)\}$ с вероятностью 1 выполнено неравенство

$$\int_0^{\tau_n} |a(X_s)| ds + \int_0^{\tau_n} b^2(X_s) ds < \infty,$$

а также с вероятностью 1 выполнено равенство⁴

$$X_t^n = x_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_s) dW_s \text{ при } t \leq \tau_n.$$

Теорема 8 (Х.-Ю. Энгельберт, В. Шмидт). Для существования единственного слабого решения уравнения (4) в интервале $(l, r) \ni x_0$ достаточно выполнения следующих условий:

⁴Условие «при $t \leq \tau_n$ » в этом равенстве означает, что если умножить обе его части на индикатор $I(t \leq \tau_n)$, то полученное равенство будет выполнено с вероятностью 1.

a) $b(x) \neq 0$ для всех $x \in (l, r)$;

b) $\int_x^y (1 + |a(z)|) b^{-2}(z) dz < \infty$ для любых x, y таких, что $l < x < y < r$.

Если решение существует в интервале (l, r) то возникает вопрос, выходит ли оно когда-нибудь из этого интервала (заметим, что если не выходит, то оно будет существовать для всех $t \geq 0$). Следующая теорема, называемая *критерием взрыва У. Феллера*⁵ дает необходимое и достаточное условие невыхода из интервала за конечное время.

Будем считать, что для уравнения (4) выполнены условие предыдущей теоремы о существовании решения в интервале (l, r) .

Пусть $\tau_l = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (l, r)\}$ — момент первого достижения нижней границы (где $\inf \emptyset = \infty$), и аналогично определим τ_r , а также положим $\tau = \min(\tau_l, \tau_r)$ — момент первого выхода из интервала. Для произвольного $c \in (l, r)$ определим функцию

$$v(x) = \int_c^x \int_c^y \exp\left(-2 \int_z^y \frac{a(u)}{b^2(u)} du\right) \frac{dz}{b^2(z)} dy, \quad x \in (l, r).$$

Теорема 9 (У. Феллер). *Решение не выходит на нижнюю границу интервала ($\tau_l = \infty$ п. н.) тогда и только тогда, когда $v(c) \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow l$. Решение не выходит на верхнюю границу интервала ($\tau_r = \infty$ п. н.) тогда и только тогда, когда $v(c) \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow r$.*

2.3. Строго марковское свойство

Если уравнение (1) имеет единственное слабое решение, то оно является строго марковским процессом. Чтобы строго сформулировать этот результат, введем дополнительные понятия.

Будем рассматривать уравнение (1), но с начальным условием $X_t = x$, заданным в произвольный момент времени $t \geq 0$. Это уравнение нужно понимать в интегральном виде:

$$X_u^n = x + \int_t^u a^n(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_t^u b^{ni}(s, X_s) dW_s^i, \quad u \geq t. \quad (5)$$

Под (слабым) решением этого уравнения понимается фильтрованное вероятностное пространство с определенным на нем броуновским движением и процесс $X = (X_s)_{s \geq t}$, удовлетворяющий уравнению. Слабая единственность решения понимается как совпадение по распределению любых двух решений.

Рассмотрим пространство $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ непрерывных вектор-функций θ_s , определенных на \mathbb{R}_+ и принимающих значения в \mathbb{R}^N . Снабдим его борелевской σ -

⁵Такое название объясняется случаем $l = -\infty, r = +\infty$: выход решения из него за конечное время — это выход «на бесконечность», т. е. «взрыв».

алгеброй⁶, что позволит говорить об измеримых отображениях $F: C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$. Например, таким отображением является $F(\theta) = \theta_1^i$ (i -я координата функции θ в момент времени 1); если его применить к траекториям процесса $\{X_{t+s}, s \geq 0\}$, то получим случайную величину X_{t+1}^i .

Когда нужно будет говорить о математическом ожидании функций от процесса X и подчеркнуть, что X является решением уравнения (5) с начальным условием $X_t = x$, будем использовать запись $E(\cdot \mid X_t = x)$. Если начальное условие ясно из контекста, то указание начального условия будем опускать.

Теорема 10 (см. [2], гл. 5.4.C, теорема 4.20). *Пусть уравнение (5) имеет единственное слабое решение для всех $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^N$, причем коэффициенты $a(t, x)$ и $b(t, x)$ ограничены на любом компакте в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$.*

Для некоторых $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ рассмотрим решение с начальным условием $X_{t_0} = x_0$, заданное на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ с броуновским движением W . Пусть $\tau \geq t_0$ — произвольный момент остановки фильтрации \mathbb{F} . Тогда для любого измеримого отображения $F: C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено строго марковское свойство

$$\begin{aligned} E(F(X_{\tau+s}, s \geq 0) \mid \mathcal{F}_\tau) &= E(F(X_{\tau+s}, s \geq 0) \mid X_\tau) \\ &= E(F(X_{t+s}, s \geq 0) \mid X_t = x) \Big|_{t=\tau, x=X_\tau}, \end{aligned} \quad (6)$$

в предположении, что условные математические ожидания определены.

Поясним суть равенства (6). В левой его части стоит случайная величина, измеримая относительно \mathcal{F}_τ . В середине — величина, измеримая относительно σ -алгебры $\sigma(X_\tau) \subseteq \mathcal{F}_\tau$. В правой части — функция $v(t, x) = E(F(X_{t+s}, s \geq 0) \mid X_t = x)$, в которую подставляется τ вместо t и X_τ вместо x . Строго марковское свойство утверждает, что они равны, и, таким образом, будущие значения процесса X зависят только от текущего значения, но не от прошлых.

Приводимое далее следствие будет полезно при вычислении цен платежных обязательств.

Следствие 1. *В предположениях предыдущей теоремы рассмотрим случайный процесс $V_t = E(g(X_T) \mid \mathcal{F}_t)$, $t \in [0, T]$, где функция $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $E|g(X_T)| < \infty$. Тогда $V_t = v(t, X_t)$, где $v(t, x) = E(g(X_T) \mid X_t = x)$.*

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0, T]$ и применим теорему к $F(\theta) = g(\theta_{T-t})$, так что $F(X_{t+s}, s \geq 0) = g(X_T)$. \square

⁶Борелевская σ -алгебра порождена всеми открытыми подмножествами $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$, а открытые подмножества определяются по метрике $\rho(\theta, \nu) = \sup_{s \geq 0} \|\theta_s - \nu_s\|$.

3. Многомерная формула Фейнмана—Каца

Приведем многомерный аналог формулы Фейнмана—Каца, которая нам уже встречалась в курсе «Введение в финансовую математику».

Пусть заданы функции

$$a(t, x): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(t, x): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad c(t, x): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Здесь, как и ранее, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ обозначает n -мерную пространственную переменную, а $t \geq 0$ — время.

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n a^i(t, x) \frac{\partial V}{\partial x^i}(t, x) + \sum_{i,j=1}^n b^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(t, x) = c(t, x) V(t, x) \quad (7)$$

$$V(T, x) = f(x), \quad (8)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Формула Фейнмана—Каца дает *вероятностное представление* решения этой задачи в терминах процесса X_t , удовлетворяющего уравнению

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t. \quad (9)$$

Теорема 11 (формула Фейнмана—Каца). *Пусть функции $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$, $f(x)$ достаточно «хорошие». Тогда решение задачи (7)–(8) представимо в виде*

$$V(t, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^T c(s, X_s)ds} f(X_T) \mid X_t = x \right), \quad (10)$$

и, в частности, это решение единственно в классе функций $C^{1,2}$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Замечание 3. Достаточные условия «хорошести» функций a, b, c, f , при которых справедлива формула Фейнмана—Каца, следующие (см., например, [2], гл. 5, разд. 5.7.B):

1. f непрерывна, а также либо $|f(x)| \leq L(1 + \|x\|^p)$ для некоторых констант $L, p > 0$, либо $f(x) \geq 0$ для всех x ;
2. a и b непрерывны и удовлетворяют условию линейного роста $\|a(t, x)\| + \|b(t, x)\| \leq K(1 + |x|)$ с константой K для всех t, x ;
3. уравнение (9) имеет единственное слабое решение для всех $t \in [0, T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$;
4. задача (7)–(8) имеет решение $V(t, x)$ являющееся функцией класса $C^{1,2}$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, причем $|V(t, x)| \leq M(1 + \|x\|^q)$ с константами $M, q > 0$.

4. Примеры

4.1. Линейное уравнение

По теореме Ито линейное одномерное уравнение

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t)dt + (\gamma + \delta X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

с постоянными коэффициентами α , β , γ , δ имеет единственное сильное решение для любого начального условия. Непосредственно применяя формулу Ито, можно убедиться, что решение задается формулой

$$X_t = e^{\delta W_t + (\beta - \frac{\delta^2}{2})t} \left(x_0 + (\alpha - \gamma\delta) \int_0^t e^{-\delta W_s - (\beta - \frac{\delta^2}{2})s} ds + \gamma \int_0^t e^{-\delta W_s - (\beta - \frac{\delta^2}{2})s} dW_s \right).$$

4.2. Процесс CEV

Рассмотрим уравнение

$$dX_t = \sigma |X_t|^\beta dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

где $\beta > 0$ — параметр. Это уравнение задает процесс цены рискового актива в модели CEV (Constant Elasticity of Variance) в случае, когда безрисковая процентная ставка равна нулю. Исследуем свойства этого уравнения.

- По теореме Энгельберта—Шмидта (теорема 6) существует слабое решение.
- Для $\beta \geq 1/2$ по теореме Ямады—Ватанабе (теорема 3) имеет место сильная единственность. Следовательно, в этом случае по другой теореме Ямады—Ватанабе (теорема 1) существует единственное сильное решение.
- Если же $\beta < 1/2$, то по теореме Энгельберта—Шмидта решение не единственно. Например, если $x_0 = 0$, то $X_t \equiv 0$ является решением, но можно показать, что существует и ненулевое решение (*пример И. В. Гирсанова*, см. [8], гл. 1, пример 1.22).
- Для функции $v(x)$ из критерия Феллера имеем $v(\infty) = \infty$ при любом $\beta > 0$ и $v(0) = \infty$ при $\beta \geq 1$, $v(0) < \infty$ при $\beta < 1$. Следовательно, решение никогда не уходит на бесконечность за конечное время при любом β . Решение не достигает нуля при $\beta \geq 1$, и достигает нуля при $\beta < 1$. В последнем случае из самого уравнения видно, что можно взять такое решение, что после того, как оно достигает нуля, оно остается в нуле.
- По теореме Миятовича—Урусова (теорема 7) решение является мартингалом тогда и только тогда, когда $\beta \leq 1$ (то решение, которое остается в нуле после его достижения).

4.3. Процесс CIR

Рассмотрим уравнение

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \xi\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0 \quad (12)$$

с параметрами $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\xi > 0$. Это уравнение задает процесс стохастической безрисковой ставки в модели Кокса—Ингерсолла—Росса (Cox—Ingersoll—Ross, CIR), а также процесс стохастической дисперсии в модели Хестона. В теории случайных процессов он также называется процессом квадратного корня.

- По теореме Энгельберта—Шмидта (теорема 8) существует слабое решение в интервале $(0, \infty)$.
- Для функции $v(x)$ из критерия Феллера нетрудно увидеть, что $v(\infty) = \infty$. Таким образом, решение не уходит на бесконечность за конечное время.
- При $x \rightarrow 0$ поведение функции $v(x)$ следующее (где знак \simeq означает асимптотическую эквивалентность):

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_x^1 \int_y^1 e^{2 \int_y^z \frac{\kappa(\theta-u)}{\xi^2 u} du} \frac{dz}{\xi^2 z} dz dy \simeq \int_x^1 \int_y^1 e^{\frac{2\kappa}{\xi^2} (\theta \ln \frac{z}{y} - (z-y))} \frac{dz}{z} dy \\ &\simeq \int_x^1 \int_y^1 \left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\xi^2}} \frac{dz}{z} dy \simeq \int_x^1 \left(y^{-\frac{2\kappa\theta}{\xi^2}} - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $v(0) = \infty$, если $2\kappa\theta \geq \xi^2$, и $v(0) < \infty$ иначе.

- По критерию Феллера при $2\kappa\theta \geq \xi^2$ решение не достигает нуля и остается всегда положительным. Из теорем Ямады—Ватанабе в этом случае следует существование единственно сильного решения (теорему 1 нужно применить с функцией $h(x) = \xi\sqrt{x}$).
- Если $2\kappa\theta < \xi^2$, то решение достигает нуля за конечное время, при этом можно показать, что оно существует для всех $t \geq 0$, является неотрицательным, а мера Лебега множества моментов времени, в которых решение проводит в нуле, равна 0 п. н.⁷

Резюме лекции

В теории стохастических дифференциальных уравнений существуют понятия сильного и слабого решения, которые отличаются тем, что в сильном ре-

⁷Для доказательства существования можно воспользоваться теоремой Скорохода, применяя ее к «усеченным» коэффициентам сноса и диффузии, полагая их равными нулю вне отрезка $[0, n]$. Это даст решение до момента выхода из этого отрезка, а затем нужно устремить $n \rightarrow \infty$. Чтобы доказать неотрицательность, заменим коэффициент диффузии на $\eta\sqrt{X_t^+}$. Тогда, если предположить, что решение проходит через 0, получим противоречие, так как в отрицательной полуоси оно должно являться строго возрастающей функцией. Аналогично, решение не может проводить в нуле положительное время.

шении неизвестный процесс X измерим относительно фильтрации, порожденной броуновским движением, а в слабом решении этого не требуется. Решение называется единственным в сильном смысле, если любые два решения, построенные с одним и тем же броуновским движением, совпадают потраекторно п. н. Решение называется единственным в слабом смысле, если любые два решения совпадают по распределению.

В лекции приведены следующие теоремы.

- Теорема Ито: достаточное условие сильного существования и сильной единственности.
- Теорема Ямады—Ватанабе: сильная единственность и слабое существование влекут сильное существование.
- Теорема Ямады—Ватанабе: достаточное условие сильной единственности.
- Теорема Скорохода: достаточное условие слабого существования.
- Теорема Струка—Варадана: достаточное условие слабого существования и слабой единственности.
- Теорема Энгельберта—Шмидта (нулевой снос): необходимое и достаточное условие слабого существования и слабой единственности для одномерного однородного уравнения;
- Теорема Энгельберта—Шмидта (произвольный снос): достаточное условие слабого существования и слабой единственности решения интервале.
- Теорема Миятовича—Урусова: критерий мартингальности решения.
- Теорема Феллера: критерий выхода из интервала.
- Формула Фейнмана—Каца: вероятностное представление решения задачи Коши для параболического уравнения с частными производными.

Лекция 4

Модель локальной волатильности

1. Формула Дюпира (37)

Основной результат (37). Достоинства и недостатки модели локальной волатильности (38).

2. Вспомогательные результаты (39)

Формула Бридена–Литценбергера (40). Локальное время (41).

3. Доказательство формулы Дюпира (43)

Случай нулевой процентной ставки (43). Общий случай (43). Другое доказательство (44).

4. Алгоритм Андреасена–Хьюджа (44)

Построение локальной волатильности по дискретным ценам опционов (44). Интерполяция цен опционов (46).

Резюме лекции (47)

В модели локальной волатильности цена рискованного актива задается уравнением $dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t$, где функцию $\sigma(t, s)$ можно выбрать таким образом, что цены европейских опционов в модели будут совпадать с рыночными ценами, т. е. полностью исключить статическую ошибку. В этой лекции мы докажем формулу Б. Дюпира, которая дает выражения для $\sigma(t, s)$ через цены опционов.

1. Формула Дюпира

1.1. Основной результат

Пусть задана функция $\hat{C}(T, K)$, которая выражает рыночные цены опционов колл на конкретный базовый актив для всевозможных страйков $K > 0$ и времен исполнения $T \in [0, T_{\max}]$. Под рыночными ценами мы понимаем цены опционов, которые можно получить из биржевых данных¹

Нашей целью будет построить модель, в которой бы получались в точности такие же цены опционов. Будем рассматривать процесс цены рискованного актива вида

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t, \quad (1)$$

где r_t — детерминированная процентная ставка (считается, что она известна и

¹В реальности имеется конечный набор значений страйков и времен исполнения, т. е. функция \hat{C} известна лишь в конечном числе точек. Задача интерполяции цен опционов будет рассмотрена в разделе 4.

ограничена), а $\sigma(t, s)$ — неизвестная функция, которую нужно найти из условия совпадения цен опционов. Будем предполагать, что дивиденды в модели отсутствуют, но, тем не менее, все приводимые далее результаты останутся верными и для детерминированной ставки дивидендной доходности q_t — нужно лишь в формулах заменить r_t на $r_t - q_t$.

Считается, что исходная вероятностная мера P уже является мартингаловой, поэтому коэффициент сноса равен безрисковой ставке (см. пояснение в разделе 2.2 лекции 2). Пусть далее функция

$$C(T, K) = \frac{1}{B_T} E(S_T - K)^+,$$

где $B_T = e^{\int_0^T r_t dt}$, обозначает цены опционов колл в модели (1).

Теорема 1 (формула Дюпира). Пусть функция $\hat{C}(T, K)$ имеет непрерывные частные производные \hat{C}'_T , \hat{C}'_K , \hat{C}''_{KK} , причем $C'_T(T, K) + r_t K C'_K(T, K) \geq 0$ и $C''_{KK}(T, K) > 0$ на $(0, T_{\max}] \times (0, \infty)$. Для $t \in (0, T_{\max}]$, $s > 0$ определим функцию

$$\sigma(t, s) = \sqrt{\frac{2(\hat{C}''_T(t, s) + r_t s \hat{C}''_K(t, s))}{s^2 \hat{C}''_{KK}(t, s)}}. \quad (2)$$

Пусть для этой функции уравнение (1) имеет слабое решение², являющееся строго положительным процессом, причем процесс $\tilde{S}_t = S_t/B_t$ является мартингалом и для каждого $t \in (0, T]$ величина S_t имеет абсолютно непрерывное распределение. Тогда $C(T, K) = \hat{C}(T, K)$ при всех $T \in [0, T_{\max}]$, $K > 0$.

Итак, при выполнении условий теоремы существует функция $\sigma(t, s)$, с которой модель (1) дает цены опционов, совпадающие с рыночными. Такая функция $\sigma(t, s)$ называется *локальной волатильностью*, построенной по данной поверхности цен $\hat{C}(T, K)$. Само уравнение (1) называется *моделью локальной волатильности*.

Замечание 1. Мы рассматриваем только цены опционов колл, потому что опционы пут в теории дают такую же локальную волатильность. Действительно, в любой безарбитражной модели выполняется паритет цен опционов колл-пут, а также он выполняется в рыночных данных. Следовательно, если модель воспроизводит рыночные цены опционов колл, то она воспроизводит и цены опционов пут.

1.2. Достоинства и недостатки модели локальной волатильности

Достоинство модели локальной волатильности заключается в точном воспроизведении рыночных цен ванильных опционов колл и пут в *текущий* мо-

²Для $t = 0$ определим $\sigma(t, s)$ произвольным образом, так, чтобы уравнение (1) имело решение.

мент времени. Как следствие, если какой-то производный инструмент можно реплицировать ванильными опционами, то модель локальной волатильности воспроизводит и его цену.

Недостатком модели является то, что она не гарантирует, что рыночные цены опционов будут равны модельным ценам в *будущие* моменты времени, что приводит к динамической ошибке репликации. Более того, модель локальной волатильности может показывать динамику цен опционов качественно отличающуюся от того, как цены изменяются в реальности, причем эта динамика даже «менее правильная», чем, скажем, в модели Блэка—Шоулза.

Чтобы это увидеть, посмотрим, как изменяются улыбки подразумеваемой волатильности при изменении цены базового актива в модели локальной волатильности. Так как цены опционов однозначно определяются своими подразумеваемыми волатильностями, то о поведении цен опционов можно судить по поведению подразумеваемой волатильности, и наоборот.

Оказывается, что в модели локальной волатильности при изменении цены базового актива поверхность волатильности двигается в противоположном направлении, по сравнению с тем, как она обычно меняется в реальности. На рис. 1 приведена иллюстрация этого факта на симулированных данных с помощью модели Хестона³. Синяя кривая представляет улыбку волатильности (т. е. функцию $K \mapsto \hat{\sigma}(T, K)$ для фиксированного T) в модели Хестона для некоторого набора параметров модели и цены базового актива $S_0 = 100$. Зеленая кривая показывает, как в ней изменится улыбка волатильности, если цена базового актива вырастет на небольшое значение ε , а все остальные параметры останутся неизменными. Оранжевая кривая — это улыбка волатильности в модели локальной волатильности с функцией $\sigma(t, s)$ построенной по ценам опционов в исходной модели Хестона, после того как цена базового актива увеличится на ε . Видно, что в модели Хестона улыбка передвигается вправо, а в модели локальной волатильности влево и вниз⁴. На реальных рынках наблюдается динамика улыбок волатильности более похожая на ту, что в модели Хестона.

2. Вспомогательные результаты

В этом разделе собраны технические результаты, которые потребуются для доказательства формулы Дюпира. Приводимое доказательство следует книге [3]. Оригинальное доказательство Б. Дюпира приведено в разделе 3.3.

³Модель стохастической волатильности, которую мы будем изучать далее в курсе.

⁴Более полное объяснение, почему так получается, приведено в разделе 3 дополнения 1.

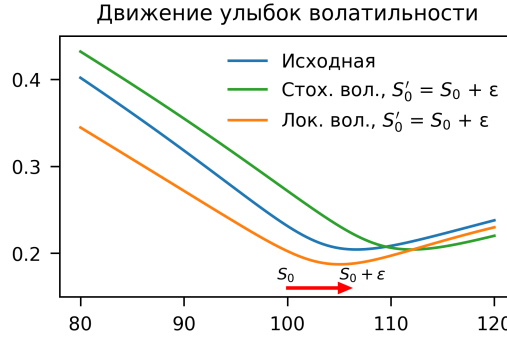


Рис. 1: Изменение улыбок волатильности в модели локальной волатильности и модели стохастической волатильности при изменении цены базового актива.

2.1. Формула Бридена–Литценбергера

Следующий результат в приложениях к оценке опционов впервые встречается в работе Д. Бридена и Р. Литценбергера [7] и поэтому в литературе часто называется *формулой Бридена–Литценбергера*.

Предложение 1. Пусть $S \geq 0$ — случайная величина, $ES < \infty$. Обозначим $C(K) = E(S - K)^+$, $K \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что $C \in C^2((0, \infty))$. Тогда S имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f(s) = C''(s)$.

Доказательство. Имеем $C(K) = \int_K^\infty (s - K)dF(s) = \int_K^\infty (K - s)d(1 - F(s))$, где F — функция распределения S . Интегрируя по частям⁵, получаем

$$C(K) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left((K - b)(1 - F(b)) + \int_K^b (1 - F(s))ds \right).$$

Заметим, что $\lim_{b \rightarrow \infty} b(1 - F(b)) = 0$. Действительно,

$$0 = \lim_{b \rightarrow \infty} ES I(S > b) \geq \lim_{b \rightarrow \infty} bP(S > b) = \lim_{b \rightarrow \infty} b(1 - F(b)),$$

где в первом равенстве воспользовались теоремой о мажорируемой сходимости и тем, что $ES < \infty$. Тогда $C(K) = \int_K^\infty (1 - F(s))ds$, откуда $C'(K) = F(K) - 1$. Следовательно, $F(s)$ непрерывно дифференцируема и $f(s) = C''(s)$. \square

Замечание 2 (смысл формулы Бридена–Литценбергера). Пусть безрисковая процентная ставка равна 0. Тогда, согласно формуле Бридена–Литценбергера, поверхность цен опционов колл $\hat{C}(T, K)$ задает семейство одномерных плотностей $f_t(s) = \hat{C}''_{KK}(t, s)$. С другой стороны, цены опционов в модели $C(T, K) := E(S_T - K)^+$ определяются одномерными распределениями величин S_T . Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между ценами опционов

⁵Для интеграла Лебега–Стилтьеса справедлива следующая формула интегрирования по частям (см. [15], гл. II, § 6, теорема 11). Пусть функции F, G имеют ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, причем F непрерывна справа и имеет пределы слева в каждой точке, а G непрерывна. Тогда $F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(x)dG(x) + \int_a^b G(x)dF(x)$.

колл (или пут) и одномерными распределениями процесса цены относительно эквивалентной мартингальной меры (при условии, что функция $C(T, K)$ и распределения величин S_T достаточно хорошие). Рассуждение остается справедливым и в случае произвольной безрисковой ставки.

Как следствие, модель локальной волатильности можно рассматривать как модель, воспроизводящую заданные одномерные распределения процесса цены рискованного актива.

2.2. Локальное время

Подробное изложение результатов о *локальных временах* случайных процессов можно найти в книге [13], гл. VI; здесь же мы приведем без доказательств только нужные нам факты.

Далее в этом разделе X — локальный мартингал вида⁶ $dX_t = \sigma_t dW_t$.

Предложение 2 (формула Танаки, [13], гл. VI, теоремы 1.2 и 1.7). *Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует п. н.-единственный неубывающий непрерывный согласованный процесс $L_t^a(X)$ такой, что*

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a(X),$$

где $\operatorname{sgn}(x) = 1$ для $x \geq 0$ и $\operatorname{sgn}(x) = -1$ для $x < 0$ (так, что правая производная $|x|' = \operatorname{sgn}(x)$).

Более того, существует модификация процесса $L_t^a(X)$, которая непрерывна по паре переменных (t, a) .

Определение 1. Процесс $L_t^a(X)$ называется *локальным временем* процесса X на уровне a .

Далее всегда будем рассматривать модификацию локального времени, которая непрерывна по паре переменных.

Замечание 3. Формула Танаки обобщает формулу Ито на негладкую функцию $f(x) = |x - a|$. По формуле Ито $|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$, однако производная f'' не определена. Формула Танаки говорит, что вместо $\int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$ нужно поставить локальное время.

Напомним, что если функция f выпукла на \mathbb{R} , то у нее в каждой точке существует левая и правая производная; левая производная непрерывна слева, а правая справа, причем обе производные не убывают. В частности, из этих

⁶Все приводимые результаты остаются верными и для произвольных непрерывных локальных мартингалов, но в формулах нужно будет заменить $\sigma_t^2 dt$ на $d\langle X \rangle_t$, где $\langle X \rangle_t$ — квадратическая характеристика непрерывного локального мартингала X , т. е. неубывающий непрерывный согласованный процесс такой, что $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ является локальным мартингалом.

свойств следует, что для выпуклой функции можно определить σ -конечную меру на \mathbb{R} по формуле $\mu_f((a, b]) = f'(b) - f'(a)$, где f' — правая производная. Далее будем обозначать ее как $f''(da)$.

Предложение 3 (формула Ито–Танаки–Мейера, [13], гл. VI, теорема 1.5). *Если функция $f(x)$ выпукла, то*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) f''(da).$$

Пример 1. Если $f(x) = (x - a)^+$, то правая производная $f'(x) = I(x \geq a)$. Тогда

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I(X_s \geq a) dX_s + \frac{1}{2} L_t^a(X).$$

Предложение 4. Пусть локальный мартингал X_t вида $dX_t = \sigma_t dW_t$ является настоящим мартингалом. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ процесс $Y_t = \int_0^t I(X_s \geq a) dX_s$ тоже является мартингалом. Как следствие, справедливо равенство

$$\frac{1}{2} E L_t^a(X) = E(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+.$$

Короткое доказательство предложения 4 для более общего случая можно найти в статье [12].

Предложение 5 (формула для времени пребывания, [13], гл. VI, теорема 1.6). *Для любой неотрицательной измеримой функции $f(x)$ выполнено равенство*

$$\int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a(X) da = \int_0^t f(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Замечание 4. Поясним, откуда возникает формула для времени пребывания. Можно дать эквивалентное определение локального времени:

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|X_s - a| < \varepsilon) \sigma_s^2 ds.$$

По своему смыслу эта формула означает, что локальное время является плотностью меры времени пребывания в точке a (см. [13], гл. VI, следствие 1.9), где мера пребывания μ — это случайная мера

$$\mu_t(\omega, A) = \int_0^t I(X_s \in A) ds,$$

для борелевских множеств A . Если приближать измеримую функцию f простыми функциями (линейными комбинациями индикаторов), то из этого определения и получается формула времени пребывания.

3. Доказательство формулы Дюпира

3.1. Случай нулевой процентной ставки

Пусть сначала $r_t \equiv 0$. Согласно предложению 4,

$$C(T, K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \mathbb{E} L_T^K(S).$$

Обозначим $f(t, s)$ плотность величины S_t . Тогда, умножая обе части полученного равенства на произвольную гладкую функцию $h(s)$ с компактным носителем и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(K) C(T, K) dK &= \int_{\mathbb{R}} h(K) (S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T h(S_t) \sigma^2(t, S_t) S_t^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(K) (S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h(K) f(t, K) \sigma^2(t, K) K^2 dK dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(K) \left((S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \int_0^T C''_{KK}(t, K) \sigma^2(t, K) K^2 dt \right) dK, \end{aligned}$$

где в первом равенстве воспользовались формулой времени пребывания, во втором представили математическое ожидание в виде интеграла по плотности и поменяли пределы интегрирования, а в третьем равенстве воспользовались формулой Бридена—Литценбергера. В силу произвольности функции h из совпадения интегралов получаем равенство подынтегральных функций

$$C(T, K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2} \int_0^T C''_{KK}(t, K) \sigma^2(t, K) K^2 dt.$$

Дифференцируя по T , получаем доказываемое утверждение.

3.2. Общий случай

Покажем как случай произвольной детерминированной процентной ставки r_t можно свести к $r_t \equiv 0$. Для заданной функции $C(T, K)$ и функции $\sigma(t, s)$, определяемой по формуле Дюпира (2), введем две новые функции

$$\widehat{C}^*(T, K) = \widehat{C}(T, KB_T), \quad \sigma^*(t, s) = \sigma(t, sB_t).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\sigma^*(t, s) = \sqrt{\frac{2(\widehat{C}^*)'_T(t, s)}{s^2(\widehat{C}^*)''_{KK}(t, s)}}.$$

Кроме того, используя формулу Ито, находим, что, если процесс S_t удовлетворяет уравнению (1) с функцией $\sigma(t, s)$, то дисконтированная цена $S_t^* = S_t/B_t$

удовлетворяет уравнению $dS_t^* = \sigma^*(t, S_t^*)S_t^*dW_t$.

Таким образом, к функциям \widehat{C}^* , σ^* и процессу S_t^* можно применить доказываемую теорему в случае $r_t \equiv 0$, откуда следует, что цены опционов $C^*(T, K) = E(S_T^* - K)^+$ удовлетворяют равенству $C^*(T, K) = \widehat{C}^*(T, K)$.

Остается заметить, что $C(T, KB_T) = B_T^{-1} E(S_T - KB_T)^+ = E(S_T^* - K)^+ = C^*(T, K)$, и, следовательно, $C(T, KB_T) = \widehat{C}(T, KB_T)$. Тогда $C(T, K) = \widehat{C}(T, K)$.

3.3. Другое доказательство

Приводимая далее цепочка равенств следуют рассуждениям в статье [5]. Некоторые переходы в ней трудно обосновать строго, поэтому ее нельзя назвать формальным доказательством.

Рассмотрим только случай $r_t \equiv 0$. Пусть $f(t, s)$ — плотность S_t . Тогда

$$\begin{aligned} C'_T(T, K) &= \int_K^\infty (s - K) \frac{\partial f}{\partial t}(T, s) ds = [\text{прямое уравнение Колмогорова}] \\ &= \frac{1}{2} \int_K^\infty (s - K) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\sigma^2 s^2 f)(T, s) ds = [\text{интегрирование по частям}] \\ &= -\frac{1}{2} \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial s} (\sigma^2 s^2 f)(T, s) ds \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 f(T, K) = [\text{формула Бридена—Литценбергера}] \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 C''_{KK}(T, K). \end{aligned}$$

Получаем, что если $C(T, K)$ — цены опционов колл в модели, то функция $\sigma(t, s)$ должна удовлетворять равенству $\sigma^2(t, s) = 2C'_T(t, s)/C''_{KK}(t, s)$. Соответственно, если модель воспроизводит рыночные цены опционов ($C = \widehat{C}$), то верна формула Дюпира (2).

4. Алгоритм Андреасена—Хьюджа

4.1. Построение локальной волатильности по дискретным ценам опционов

Пусть задан конечный набор времен исполнения $T_1 < T_2 < \dots < T_m$ и для каждого времени исполнения задан набор цен опционов колл $\widehat{C}_{i,j} = \widehat{C}(T_i, \widehat{K}_{i,j})$, где $\widehat{K}_{i,1} < \dots < \widehat{K}_{i,n_i}$ — различные страйки. В этом разделе мы приведем алгоритм Андреасена—Хьюджа [0] построения функции локальной волатильности $\sigma(t, s)$ по ценам $\widehat{C}_{i,j}$.

Далее будем считать безрисковую ставку равной 0. В случае ненулевой ставки можно построить локальную волатильность $\sigma^*(t, s)$ для дисконтированного

процесса цены (для этого нужно применить тот же самый алгоритм, но считая, что вместо страйков $\widehat{K}_{i,j}$ заданы страйки $\widehat{K}_{i,j}B_{T_i}$, а цены опционов те же — это следует из рассуждений в доказательстве формулы Дюпира, см. раздел 3.2), и тогда искомая локальная волатильность будет $\sigma(t, s) = \sigma^*(t, s/B_t)$.

Положим $T_0 = 0$. Функция $\sigma(t, s)$ будет кусочно-постоянной по t на промежутках $(T_{i-1}, T_i]$ и кусочно-линейной по s на промежутках $(\widehat{K}_{i,j-1}, \widehat{K}_{i,j}]$, а именно для $t \in (T_{i-1}, T_i]$ положим

$$\sigma(t, s) = \begin{cases} a_{i,1}, & \text{при } s \leq \widehat{K}_{i,1}, \\ \frac{a_{i,j-1}(s - \widehat{K}_{i,j-1}) + a_{i,j}(\widehat{K}_{i,j} - s)}{\widehat{K}_{i,j} - \widehat{K}_{i,j-1}}, & \text{при } \widehat{K}_{i,j-1} < s \leq \widehat{K}_{i,j}, \\ a_{i,n_i}, & \text{при } s > \widehat{K}_{i,n_i}, \end{cases}$$

где значения $a_{i,j}$ предстоит найти. Идея состоит в том, что по значениям $a_{i,j}$ можно вычислить цены опционов $C(T, K)$ в модели, и, следовательно, нужно выбрать $a_{i,j}$ так, чтобы получаемые цены в точках $(T_i, K_{i,j})$ были как можно ближе к заданным значениям $\widehat{C}_{i,j}$.

Покажем, как по выбранным $a_{i,j}$ найти цены опционов в модели. Будем искать функцию $C(T, K)$ для $T = T_i$ по индукции. Для $i = 0$ положим $C(0, K) = (S_0 - K)^+$. Далее воспользуемся тем, что формулу Дюпира можно записать в виде

$$C'_T(T, K) = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) C''_{KK}(T, K).$$

Если функция $C(T_{i-1}, K)$ построена, то, дискретизируя производную по T , получаем дифференциальное уравнение на функцию $C(T_i, K)$:

$$\frac{C(T_i, K) - C(T_{i-1}, K)}{\Delta T_i} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T_i, K) C''_{KK}(T_i, K),$$

где $\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$. Чтобы его решить, воспользуемся методом конечных разностей и дискретизируем производную по K . Для этого зафиксируем набор страйков K_0, \dots, K_m , где $K_l = K_0 + l\Delta K$, так что K_0 достаточно мало, а K_m достаточно велико. Будем использовать один и тот же набор K_l для всех значений T_i , поэтому промежуток (K_0, K_m) должен, как минимум, покрывать все страйки $\widehat{K}_{i,j}$, для которых нам даны цены $\widehat{C}_{i,j}$.

Для $l = 1, \dots, m-1$ получаем разностные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{C(T_i, K_l) - C(T_{i-1}, K_l)}{\Delta T_i} \\ &= \frac{1}{2} K_l^2 \sigma^2(T_i, K_l) \frac{C(T_i, K_{l-1}) - 2C(T_i, K_l) + C(T_i, K_{l+1}))}{(\Delta K)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для $l = 0$ и $l = m$ добавим условия $C''_{KK}(T_i, K_l) = 0$, что даст уравнения

$$C(T_i, K_0) - C(T_{i-1}, K_0) = 0, \quad (4)$$

$$C(T_i, K_m) - C(T_{i-1}, K_m) = 0. \quad (5)$$

Систему линейных уравнений (3)–(5) можно представить в матричном виде $Ac_i = c_{i-1}$, где $c_i = (c_{i,0}, \dots, c_{i,l})$ — вектор неизвестных, соответствующих значениям $C(T_i, K_l)$, а матрица A имеет трехдиагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ -z_1 & 1 + 2z_1 & -z_1 & & & \\ & -z_2 & 1 + 2z_2 & -z_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -z_{m-1} & 1 + 2z_{m-1} & -z_{m-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$z_l = \frac{\Delta T_i}{2(\Delta K)^2} K_l^2 \sigma^2(T_i, K_l).$$

Матрица A обладает свойством строгого диагонального преобладания (каждый элемент на главной диагонали по модулю больше суммы модулей других элементов в строке), и хорошо известно, что такие матрицы обратимы. Следовательно, рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение. Трехдиагональный вид позволяет эффективно находить его численно, например, *методом прогонки*.

Пусть $c_i(a_i)$ обозначает решение этой системы, зависящее от вектора параметров $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n_i})$. Тогда для выбора a_i решается оптимизационная задача

$$\sum_{j=1}^{n_i} (\hat{C}_{i,j} - c_{i,j}(a_i))^2 \rightarrow \min.$$

После нахождения a_i переходят к аналогичной процедуре для нахождения a_{i+1} , и так далее.

4.2. Интерполяция цен опционов

Алгоритм Андреасена—Хьюджа также используется для интерполяции цен опционов, т. е. нахождения $\hat{C}(T, K)$ в точках, отличных от $(T_i, K_{i,j})$.

Пусть $T \in (T_{i-1}, T_i)$ (или $T > T_m$ — для задачи экстраполяции). Тогда значения $C(T, K_l)$ находятся из решения системы (3)–(5) с T вместо T_i , т. е. решая $Ac = c_{i-1}$, где c — вектор неизвестны цен $C(T, K_l)$, а матрица A имеет такой же

вид, как и выше, но с элементами

$$z_l = \frac{T - T_{i-1}}{2(\Delta K)^2} K_l^2 \sigma^2(T_i, K_l).$$

После нахождения $C(T, K_l)$ цены в промежуточных точках $K \in (K_0, K_m)$ можно получить линейной интерполяцией, а для $K < K_0$ или $K > K_m$ экстраполировать цены в виде $C(T, K) = (S_0 - K)^+$ (это соответствует тому, что выше мы считали $C''_{KK}(T_i, K_0) = C''_{KK}(T_i, K_m) = 0$, что вместе с начальным условием $C(0, K) = (S_0 - K)^+$ по формуле Дюпира дает равенство $C(T_i, K_l) = C(T_i, K_l) = (S_0 - K_l)^+$ для $l = 0, m$.)

Резюме лекции

- Модель локальной волатильности: $dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t$, где функцию $\sigma(t, s)$ нужно выбрать так, что модель будет в точности воспроизводить рыночные цены опционов колл (и, следовательно, цены опционов пут).
- Формула Дюпира дает явное выражение для функции $\sigma(t, s)$ через поверхность рыночных цен опционов колл $\widehat{C}(T, K)$:

$$\sigma(t, s) = \sqrt{\frac{2(\widehat{C}'_T(t, s) + r_t s \widehat{C}'_K(t, s))}{s^2 \widehat{C}''_{KK}(t, s)}}.$$

- Достоинство модели локальной волатильности: точное воспроизведение цен опционов и подразумеваемых волатильности. Недостаток: неверная динамика цен опционов и подразумеваемой волатильности.
- Алгоритм Андреасена—Хьюджа позволяет построить локальную волатильность по дискретному набору цен опционов, а также интерполировать и экстраполировать цены опционов на значения времени исполнения и страйка, отсутствующие в рыночных данных.

Лекция 5

Модель Хестона: цены европейских опционов

1. Описание модели (48)

Уравнения, задающие модель (48). Мартингальность процесса цены (*) (49).

Условие для безарбитражности модели (*) (51).

2. Формула для цены европейских опционов (52)

Формулировка теоремы (52). Доказательство (53).

3. Калибровка модели. Качественная роль параметров (57)

Резюме лекции (59)

Модель Хестона (S. Neston, 1993) — это одна из популярных моделей стохастической волатильности. Ее главное достоинство состоит в том, что в ней имеется формула для цен европейских опционов колл и пут, которая сводится к вычислению некоторого интеграла, что позволяет быстро находить цены опционов численно.

1. Описание модели

1.1. Уравнения, задающие модель

Далее всегда будем считать, что исходная вероятностная мера P уже является мартингальной. Кроме того, для простоты изложений и краткости формул мы будем предполагать, что безрисковая процентная ставка нулевая, а рискованный актив не платит дивиденды (о том, как к такому случаю свести общую модель, см. раздел 3 лекции 2).

Цена рискованного актива в модели Хестона описывается уравнениями

$$dS_t = \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(1)}, \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)}, \quad (2)$$

где процесс V_t называется *стохастической дисперсией* ($\sqrt{V_t}$ — *стохастическая волатильность*), $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ — стандартные броуновские движения с коэффициентом корреляции $\rho \in (-1, 1)$, т.е. $E(W_t^{(1)}W_t^{(2)}) = \rho t$. Величины $\kappa, \theta, \sigma > 0$, $\rho \in (-1, 1)$, а также начальное значение $V_0 \geq 0$ являются параметрами модели, которые нужно оценить из рыночных данных. Отметим, что процесс стохастической дисперсии V_t — это процесс CIR, рассмотренный в лекции 3.

Начальные значения S_0 и V_0 далее всегда будет считаться строго положительными.

Предложение 1. Система уравнений (1)–(2) имеет единственное сильное решение (S, V) , причем процесс S_t строго положителен. Двумерный процесс (S_t, V_t) является строго марковским. Если $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, то процесс V_t строго положителен.

Доказательство. Существование единственного сильного решения уравнения (2), а также то, что условие $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ (условие Феллера) приводит к положительности решения, обсуждалось в лекции 3. Сильное решение уравнения (1) можно построить в явном виде:

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^{(1)} - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds}.$$

Проверка того, что это действительно решение, проводится по формуле Ито. Единственность (впрочем, как и существование) вытекает из того, что S_t является *стохастической экспонентой* процесса $dX_t = \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}$ и общего результата о существовании и единственности стохастической экспоненты (см. подробнее приложение 2).

Строго марковское свойство процесса (S, V) следует из существования и единственности решения (см. теорему 10 в лекции 3). \square

Можно дать следующую интерпретацию параметрам процесса стохастической дисперсии. Во-первых, заметим, что

$$\mathbb{E} V_t = \theta + (V_0 - \theta)e^{-\kappa t}. \quad (3)$$

Эта формула получается, если взять математическое ожидание от обеих частей интегральной формы уравнения (2). Тогда, обозначая, $f(t) = \mathbb{E} V_t$, получаем уравнение $f(t) = V_0 + \kappa \int_0^t (\theta - f(s)) ds$, решением которого является (3).

Таким образом, процесс V_t обладает свойством возврата к уровню θ , называемому *долгосрочным средним*. Параметр κ задает *скорость возврата* к θ . Параметр σ называют *волатильностью волатильности* (*vol-of-vol*), он контролирует насколько сильны колебания волатильности.

1.2. Мартингальность процесса цены (*)

Напомним (см. лекцию 2), что желательным свойством любой модели является настоящая (не локальная) мартингальность цены рискованного актива S_t .

Предложение 2. В модели Хестона процесс S_t является мартингалом.

Доказательство будет состоять в проверке условия Новикова. Для этого мы ограничим процесс V_t сверху подходящим процессом V'_t , для которого условие Новикова легко проверяется. Потребуется следующий вспомогательный результат, который можно найти в [2], гл. 5, предложение 2.18.

Лемма 1 (теорема сравнения для стохастических дифференциальных уравнений). Пусть $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ — сильные решения уравнений

$$dX_t^{(i)} = a^{(i)}(t, X_t^{(i)})dt + b(t, X_t^{(i)})dW_t, \quad X_0^{(i)} = x_0^{(i)},$$

заданные на одном вероятностном пространстве. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. функции $a^{(i)}(t, x)$, $b(t, x)$ непрерывны;
 2. $|a^{(i)}(t, x) - a^{(i)}(t, y)| \leq K|x - y|$ с некоторой константой $K > 0$ для всех t, x и хотя бы одного $i = 1, 2$;
 3. найдется возрастающая функция $h(x)$ такая, что $h(0) = 0$, $\int_0^\varepsilon h(x)dx = \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, а также $|b(t, x) - b(t, y)| \leq h(|x - y|)$ для всех x, y ;
 4. $x_0^{(1)} \leq x_0^{(2)}$;
 5. $b^{(1)}(t, x) \leq b^{(2)}(t, x)$ для всех t, x ;
- Тогда $X_t^{(1)} \leq X_t^{(2)}$ п. н. для всех $t \geq 0$.

Доказательство предложения 2. Как было отмечено выше, процесс S_t является стохастической экспонентой процесса $dX_t = \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$. Следовательно, для того, чтобы S_t был мартингалом, достаточно выполнения условия Новикова (см. приложение 2)

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T V_t dt\right) < \infty.$$

В свою очередь, для этого достаточно (см. следствие 1 в приложении 2), чтобы для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех $t \in [0, T - \varepsilon]$ было выполнено неравенство

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_t^{t+\varepsilon} V_s ds\right) < \infty.$$

Заметим, что по неравенству Йенсена $\exp(\int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{2} V_s ds) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \exp(\frac{\varepsilon}{2} V_s) ds$, а поэтому

$$\mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2} \int_t^{t+\varepsilon} V_s ds\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \mathbb{E} e^{\frac{\varepsilon}{2} V_s} ds. \quad (4)$$

Оценим $\mathbb{E} e^{\frac{\varepsilon}{2} V_s}$. Положим $n = 4\lceil \kappa\theta/\sigma^2 \rceil$, $\alpha = \kappa/2$ и рассмотрим процесс

$$dV'_t = (n\sigma^2/4 - 2\alpha V'_t)dt + \sigma\sqrt{V'_t}dW_t^2, \quad V'_0 = V_0.$$

Параметры n и α выбраны так, что для всех $v \geq 0$ выполнено неравенство $n\sigma^2/4 - 2\alpha v \geq \kappa(\theta - v)$. Тогда, используя теорему сравнения, находим, что

$$V'_t \geq V_t \text{ п. н. для всех } t \geq 0.$$

Таким образом, достаточно будет оценить сверху подходящим образом ожи-

дание $E e^{\frac{\varepsilon}{2} V'_t}$. Для этого покажем, что верно равенство по распределению $V'_t \stackrel{d}{=} U_t$ для процесса

$$U_t = \sum_{i=1}^n (Y_t^{(i)})^2,$$

где $Y^{(i)}$ — независимые процессы Орнштейна—Уленбека

$$dY_t^{(i)} = -\alpha Y_t^{(i)} dt + \frac{\sigma}{2} dB_t^{(i)}$$

с начальными условиями $Y_0^{(i)}$ такими, что $\sum_i (Y_0^{(i)})^2 = V'_0$.

Действительно, применяя формулу Ито, получаем

$$dU_t = \left(\frac{n\sigma^2}{4} - 2\alpha U_t \right) dt + \sum_{i=1}^n Y_t^{(i)} dB_t^{(i)} = \left(\frac{n\sigma^2}{4} - 2\alpha U_t \right) dt + \sigma \sqrt{U_t} dZ_t$$

с процессом

$$dZ_t = \frac{\sum_i Y_t^{(i)}}{\sigma \sqrt{U_t}} dB_t^i.$$

Процесс Z_t является локальным мартингалом. Кроме того, его квадратическая характеристика равна t (т. е. $Z_t^2 - t$ является локальным мартингалом), в чем нетрудно убедиться по формуле Ито, показав, что дифференциал $d(Z_t^2 - t)$ не содержит члена с dt . Отсюда по теореме Леви¹ следует, что Z_t — стандартное броуновское движение и, значит, U_t удовлетворяет тому же уравнению, что и V'_t , т. е. является процессом CIR с теми же параметрами. Таким образом, U и V' совпадают по распределению.

Так как процессы Орнштейна—Уленбека Y_t^i имеют гауссовские распределения, то для любого $c > 1$ и всех $t \in [0, T]$ найдется малое $\varepsilon > 0$ такое, что $E e^{\frac{\varepsilon}{2} (Y_t^i)^2} < c$, и тогда

$$E e^{\frac{\varepsilon}{2} V'_t} \leq c^n.$$

Отсюда следует, что правая часть (4) конечна, что нам и требовалось. \square

1.3. Условие для безарбитражности модели (*)

Выше мы предполагали, что исходная вероятностная мера P уже является мартингальной. Если же относительно меры P процесс цены S_t имеет произвольный коэффициент сноса, то вопрос о существовании эквивалентной мартингальной меры и выполнении свойства безарбитражности (NFLVR) становится деликатным и зависит от выполнения условия Феллера. Для простоты изложения, ограничимся случаем постоянной безрисковой ставки r и постоянного коэффициента сноса μ .

¹Непрерывный локальный мартингал с нулевым начальным значением является стандартным броуновским движением тогда и только тогда, когда его квадратическая характеристика равна t .

Предложение 3 (см. [9]). Пусть относительно меры P цена рискового актива задается уравнениями

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}, \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}, \end{aligned}$$

где $\mu \neq r$ и $V_0, S_0 > 0$. Тогда ЭЛММ в такой модели существует в том и только том случае, когда выполнено условие Феллера $2\kappa\theta \geq \sigma^2$.

2. Формула для цены европейских опционов

В этом разделе будет получена формула для цен ванильных опционов колл и пут в модели Хестона, которая сводится к вычислению некоторого интеграла. Значение этого интеграла можно найти методами численного интегрирования.

Идея будет состоять в том, чтобы сначала выразить цену опциона через вероятности его исполнения относительно двух вероятностных мер, затем получить аналитическую формулу для характеристических функций логарифма цены рискового актива относительно этих мер и, обратив их, найти вероятности исполнения опциона. Упомянутый выше интеграл будет возникать при обращении характеристических функций.

Далее будем рассматривать только опционы колл. Цены опционов пут можно найти аналогично или воспользоваться паритетом цен колл-пут.

2.1. Формулировка теоремы

Зафиксируем время исполнения T . Определим функции

$$\begin{aligned} \varphi(u; t, x, v) &= \exp(C(T - t, u) + D(T - t, u)v + iux), \quad u \in \mathbb{R}_+ \cup (\mathbb{R}_+ - i), \\ \tilde{\varphi}(u; t, x, v) &= e^{-x} \varphi(u - i; t, x, v), \quad u \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

где

$$C(\tau, u) = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left((\kappa - \rho\sigma iu - d(u))\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g(u)e^{-d(u)\tau}}{1 - g(u)} \right) \right), \quad (5)$$

$$D(\tau, u) = \frac{\kappa - \rho\sigma iu - d(u)}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{-d(u)\tau}}{1 - g(u)e^{-d(u)\tau}} \right), \quad (6)$$

$$d(u) = \sqrt{(\rho\sigma iu - \kappa)^2 + \sigma^2(iu + u^2)}, \quad g(u) = \frac{\rho\sigma iu - \kappa + d(u)}{\rho\sigma iu - \kappa - d(u)}. \quad (7)$$

Здесь везде $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Множество $\mathbb{R}_+ - i$ обозначает полупрямую в комплексной плоскости, параллельную неотрицательной действительной полуоси и исходящую из точки $-i$. Переменные t, x, v вещественные.

Как будет видно далее, φ является условной характеристической функцией $E(e^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v)$, где $X_t = \ln S_t$, а $\tilde{\varphi}$ — это та же характеристическая функция, но вычисленная по другой мере.

В следующей теореме, как и прежде, считается, что безрисковая процентная ставка равна нулю, а базовый актив не выплачивает дивиденды.

Теорема 1 (С. Хестон). *Цена опциона колл со страйком K и временем исполнения T в момент времени t равна*

$$C_t = C(t, \ln S_t, V_t), \quad (8)$$

где функция C имеет вид

$$C(t, x, v) = e^x \tilde{\Pi}(t, x, v) - K\Pi(t, x, v) \quad (9)$$

с функциями $\tilde{\Pi}$, Π определенными по формулам

$$\Pi(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(t, x, v; u)}{iu} \right) du, \quad (10)$$

$$\tilde{\Pi}(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\varphi}(t, x, v; u)}{iu} \right) du. \quad (11)$$

Замечание 1. В формулах (5) и (7) присутствуют комплексный корень и комплексный логарифм, являющиеся, вообще говоря, многозначными функциями. Несмотря на то, что утверждение теоремы справедливо при любом выборе ветвей этих функций, удобнее всего здесь взять их главные значения². Это обеспечивает непрерывность функций C и D на множестве $u \in \mathbb{R}_+$ и $u \in (\mathbb{R}_+ - i)$, что хорошо сказывается на работе методов численного интегрирования для нахождения Π и $\tilde{\Pi}$.

Доказательство непрерывности технически нетрудное, но достаточно громоздкое, см. детали в статье [6]. Основная его идея состоит в том, что когда u пробегает множество \mathbb{R}_+ или $\mathbb{R}_+ - i$, аргументы логарифма и корня не пересекают отрицательную действительную полуось, что влечет их непрерывность в силу использования главных ветвей.

2.2. Доказательство

Представление цены опциона через вероятности исполнения

Первый шаг будет состоять в том, чтобы выразить цену опциона колл через вероятности его исполнения по двум мерам. Отметим, что приводимая ниже лемма выполнена не только в модели Хестона, но вообще в любой безарбитражной модели, при условии что безрисковая ставка равна 0, рисковый актив

²Напомним, что для числа $z \in \mathbb{C}$, записанного в виде $z = re^{i\varphi}$, $r \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, главные значения логарифма и квадратного корня определены как $\ln z = \ln r + i\varphi$ и $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ (логарифм не определен для $z = 0$).

не выплачивает дивиденды, а его цена является настоящим мартингалом относительно меры \mathbb{P} .

Зафиксируем момент исполнения T и определим новую вероятностную меру $\tilde{\mathbb{P}}$ с плотностью

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \frac{S_T}{S_0}.$$

Лемма 2. *Цена опциона колл со страйком K и временем исполнения T в момент t представима в виде*

$$C_t = S_t \tilde{\mathbb{P}}(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t) - K \mathbb{P}(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t).$$

Доказательство. Заметим, что

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}((S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T \mathbf{I}(S_T \geq K) \mid \mathcal{F}_t) - K \mathbb{P}(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t).$$

Пусть $Z = S_T/S_0$ обозначает плотность $d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$. Тогда из формулы пересчета для условных математических ожиданий (см. замечание ниже) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbf{I}(S_T \geq K) \mid \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z \mathbf{I}(S_T \geq K) \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z \mid \mathcal{F}_t)} \\ &= S_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T \mathbf{I}(S_T \geq K) \mid \mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

где воспользовались тем, что $\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_t) = S_t/S_0$, так как S_t — мартингал относительно меры \mathbb{P} . Подставляя получившееся равенство в формулу выше, получаем доказываемое утверждение. \square

Замечание 2. *Формула пересчета* для условных математических ожиданий утверждает, что для двух мер $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ с плотностью $Z = d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$, произвольной σ -алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и $\tilde{\mathbb{P}}$ -интегрируемой случайной величины ξ верно равенство (см. [15], гл. II, § 7, теорема 6)

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(\xi \mid \mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z\xi \mid \mathcal{G})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z \mid \mathcal{G})}.$$

Характеристические функции логарифма цены

Будем работать с процессом логарифма цены рискового актива

$$X_t = \ln S_t.$$

Для $t \leq T$ определим условные характеристические функции

$$\begin{aligned} \varphi(u; t, x, v) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v), & u \in \mathbb{R}_+ \cup (\mathbb{R}_+ - i), \\ \tilde{\varphi}(u; t, x, v) &= \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(e^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v), & u \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Второй шаг в доказательстве теоремы 1 — вычисление функций φ и $\tilde{\varphi}$. Для начала покажем, что вычисление $\tilde{\varphi}$ можно свести к φ .

Лемма 3. *Справедливо равенство $\tilde{\varphi}(u; t, x, v) = e^{-x}\varphi(u - i; t, v, x)$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u; t, x, v) &= \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(e^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Ze^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z \mid X_t = x, V_t = v)} \\ &= e^{-x} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{i(u-i)X_T} \mid X_t = x, V_t = v) = e^{-x}\varphi(u - i; t, x, v),\end{aligned}$$

где воспользовались формулой пересчета для условных ожиданий, а также тем, что $Z = S_T/S_0$ и $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T \mid X_t = x, V_t = v) = e^x$, так как S_t — мартингал. \square

Лемма 4. *Для любого $u \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(u; t, x, v)$ является единственным решением задачи Коши (в классе $C^{1,2}$ на $[0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$)*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2 v}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial v} - \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad (12)$$

$$\varphi(u; T, x, v) = e^{iux}. \quad (13)$$

Доказательство. Этот результат напрямую следует из формулы Фейнмана—Каца (см. лекцию 3), примененной ее к вещественной и мнимой частям φ . \square

Покажем теперь, как решить задачу Коши (12)–(13). Идея состоит в том, чтобы искать решение в специальном виде

$$\varphi(u; t, x, v) = \exp(C(T - t, u) + D(T - t, u)v + iux) \quad (14)$$

с неизвестными функциями $C(\tau, u)$ и $D(\tau, u)$. Чтобы их найти, подставим φ такого вида в (12) и получим уравнение

$$v \left(-\frac{\partial D}{\partial \tau} + \rho \sigma i u D - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 - \frac{1}{2} i u - \kappa D \right) + \left(-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \kappa \theta D \right) = 0. \quad (15)$$

Равенство будет выполнено, если каждая из скобок тождественно равна нулю. Заметим, что первая скобка не содержит функцию C , что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию D :

$$D' = \rho \sigma i u D + \frac{1}{2}(\sigma^2 D^2 - i u - u^2) - \kappa D, \quad D(0, u) = 0,$$

где штрих обозначает производную по переменной τ , а переменная u является фиксированным параметром. Начальное условие $D(0, u) = 0$ возникает из того, что $\varphi(u, T, x, v) = \exp(iux)$ по определению функции φ , а тогда из формулы (14) видно, что значение $D(0, u)$ должно быть равно 0 для всех u .

Уравнение для D является *дифференциальным уравнением Риккати* и решается известными методами. Для удобства запишем его в виде

$$D' = \alpha + \beta D + \gamma D^2,$$

где

$$\alpha = -\frac{iu + u^2}{2}, \quad \beta = \rho\sigma iu - \kappa, \quad \gamma = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Нетрудно проверить, что если функция $z(\tau)$ является решением уравнения

$$z''(\tau) - \beta z(\tau) + \alpha \gamma z(\tau) = 0,$$

то

$$D(\tau, u) = -\frac{z'(\tau)}{\gamma z(\tau)}$$

является решением исходного уравнения.

Уравнение для $z(\tau)$ линейное, хорошо известно его общее решение. Для этого рассмотрим характеристическое уравнение $r^2 - \beta r + \alpha\gamma = 0$. Непосредственно проверяется, что при любых значениях параметров модели Хестона и $u \in \mathbb{R}_+$ или $u \in (\mathbb{R}_+ - i)$ дискриминант $d = \sqrt{(\rho\sigma iu - \kappa)^2 + \sigma^2(iu + u^2)}$ не обращается в нуль и, следовательно, общее решение имеет вид

$$z(\tau) = K_1 e^{r_1 \tau} + K_2 e^{r_2 \tau},$$

где K_1, K_2 — свободные константы, а $r_1 = (\beta + d)/2$, $r_2 = (\beta - d)/2$ — корни характеристического уравнения. Это дает

$$D(\tau) = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{K_1 r_1 e^{r_1 \tau} + K_2 r_2 e^{r_2 \tau}}{K_1 e^{r_1 \tau} + K_2 e^{r_2 \tau}} \right).$$

Чтобы получить решение, удовлетворяющее начальному условию $D(0, u) = 0$, выберем

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -\frac{r_1}{r_2},$$

что после преобразований приводит к формуле (6) для $D(\tau, u)$.

Затем функцию C нетрудно найти из условия равенства нулю второй скобки в уравнении (15) и начального условия $C(0, u) = 0$ (возникающего по той же причине, что и для D). Получаем

$$C(\tau, u) = \kappa\theta \int_0^\tau D(s, u) ds.$$

Вычисляя интеграл, приходим к формуле (5). Подытоживая приведенные рассуждения, получаем следующий результат.

Лемма 5. *Решением задачи (12)–(13) является функция φ вида (14), в кото-*

рой $D(\tau, u)$ и $C(\tau, u)$ заданы по формулам (5)–(7).

Обращение характеристических функций и завершение доказательства

Лемма 6 (формула обращения, см. [10]). Пусть $\varphi(u)$ — характеристическая функция распределения $F(x)$, т. е. $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dF(x)$. Тогда

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iux} \varphi(u)}{iu} \right) du.$$

Обозначим теперь $\Pi(t, x, v)$ и $\tilde{\Pi}(t, x, v)$ условные вероятности исполнения опционов:

$$\begin{aligned} \Pi(t, x, v) &= P(\ln X_T \geq \ln K \mid X_t = x, V_t = v), \\ \tilde{\Pi}(t, x, v) &= \tilde{P}(\ln X_T \geq \ln K \mid X_t = x, V_t = v). \end{aligned}$$

Тогда по формуле обращения получаем для Π и $\tilde{\Pi}$ представления (10)–(11).

Остается воспользоваться тем, что (S_t, V_t) и, следовательно (X_t, V_t) , является марковским процессом, а поэтому в лемме (2) можно заменить вероятность $P(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t)$ на $\Pi(t, X_t, V_t)$ (и, аналогично, $\tilde{P}(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t)$), что даст доказываемую формулу для цены опциона.

3. Калибровка модели. Качественная роль параметров

Под *калибровкой модели* понимается задача определения ее параметров (например, для модели Хестона это набор $\Theta = (V_0, \kappa, \theta, \sigma, \rho)$). Для базовых активов, у которых имеется ликвидный рынок ванильных опционов, стандартным способом калибровки является минимизация статической ошибки, т. е. ставится цель найти параметры, при которых модель дает цены опционов наиболее близкие к рыночным.

При этом, обычно сравнивают не сами цены опционов, а их подразумеваемые волатильности³. А именно, пусть $\hat{\sigma}_{\text{model}}(T, K; \Theta)$ обозначает подразумеваемую волатильность опциона с временем исполнения T и страйком K в модели с набором параметров Θ , а $\hat{\sigma}_{\text{market}}(T, K)$ обозначает рыночную подразумеваемую волатильность. Пусть рыночные волатильности даны для пар $(T_i, K_i)_{i=1}^n$. Тогда решается задача

$$\sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_{\text{model}}(T_i, K_i; \Theta) - \hat{\sigma}_{\text{market}}(T_i, K_i))^2 \xrightarrow{\Theta} \min. \quad (16)$$

Параметры Θ , на которых достигается минимум, находятся численно. Для активов с большим количеством торгуемых опционов на практике разумно брать

³По той причине, что подразумеваемые волатильности для разных опционов являются величинами «одного порядка», а цены опционов могут весьма сильно различаться.

не все доступные пары (T_i, K_i) , а, скажем, лишь небольшое количество страйков для нескольких времен исполнения; см. пример ниже.

После того, как модель откалибрована, ее можно использовать для нахождения цен и хеджирования других производных инструментов. Более детально мы обсудим эти вопросы в следующей лекции.

Замечание 3. Говоря подробнее о задаче (16), величины $\hat{\sigma}_{\text{model}}$ вычисляются следующим образом. Пусть безрисковая процентная ставка r_t не обязательно нулевая (но детерминированная), а рисковый актив может выплачивать дивиденды непрерывным образом со ставкой доходности q_t . Модель изменения безрисковой ставки и дивидендной доходности нам здесь не важна, но будем считать, что известны цены бескупонных облигаций $B(0, T_i)$ (их нужно вычислить из рыночных данных, см. подробнее лекцию 12 в курсе «Введение в финансовую математику»).

Как следует из предложения 5 в лекции 2, считая, что исходная вероятностная мера уже является мартингальной, в модели Хестона T -форвардная цена удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} dF_t^T &= \sqrt{V_t} F_t^T dW_t^{(1)}, \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)}, \end{aligned}$$

где начальное значение F_0^T можно найти, например, из улыбки волатильности для срока исполнения T через паритет цен колл-пут. Тогда для нахождения подразумеваемой волатильности нужно вычислить цены опционов колл или пут

$$V_i^{\text{call}} = B(0, T_i) E(F_{T_i}^{T_i} - K)^+ \quad (\text{или } V_i^{\text{put}} = B(0, T_i) E(K - F_{T_i}^{T_i})^+),$$

а затем найти $\hat{\sigma}_{\text{model}}(T_i, K_i; \Theta)$, обратив формулу Блэка.

Пример 1. Рис. 1 иллюстрирует калибровку модели Хестона к поверхности волатильности на индекс SnP 500. Для простоты здесь взяты лишь 4 улыбки волатильности (времена исполнения $T = 0.13, 0.63, 0.97, 2.29$ лет) и в каждой по 10 страйков. Значения страйков выбраны таким образом, что минимальный страйк для каждой улыбки равен страйку опциона пут, имеющего дельту⁴, ближайшую к значению -0.001 , а максимальный страйк равен страйку опциона колл с дельтой, ближайшей к 0.001 ; остальные страйки задают равномерное разбиение этого отрезка.

Можно увидеть, что модель Хестона не обеспечивает точного попадания в подразумеваемые волатильности (и, следовательно, в рыночные цены опцио-

⁴Напомним, что при $K \rightarrow 0$ дельта опциона пут стремится к 0 и отрицательна, а при $K \rightarrow \infty$ дельта опциона колл стремится к 0 и положительна. Мы строим улыбки волатильности по опционам OTMF, поэтому для малых страйков рассматриваются опционы пут, а для больших — опционы колл.

нов). Это неизбежно, так как у модели всего 5 параметров, а точек на поверхности волатильности, к которым осуществляется калибровка, гораздо больше.

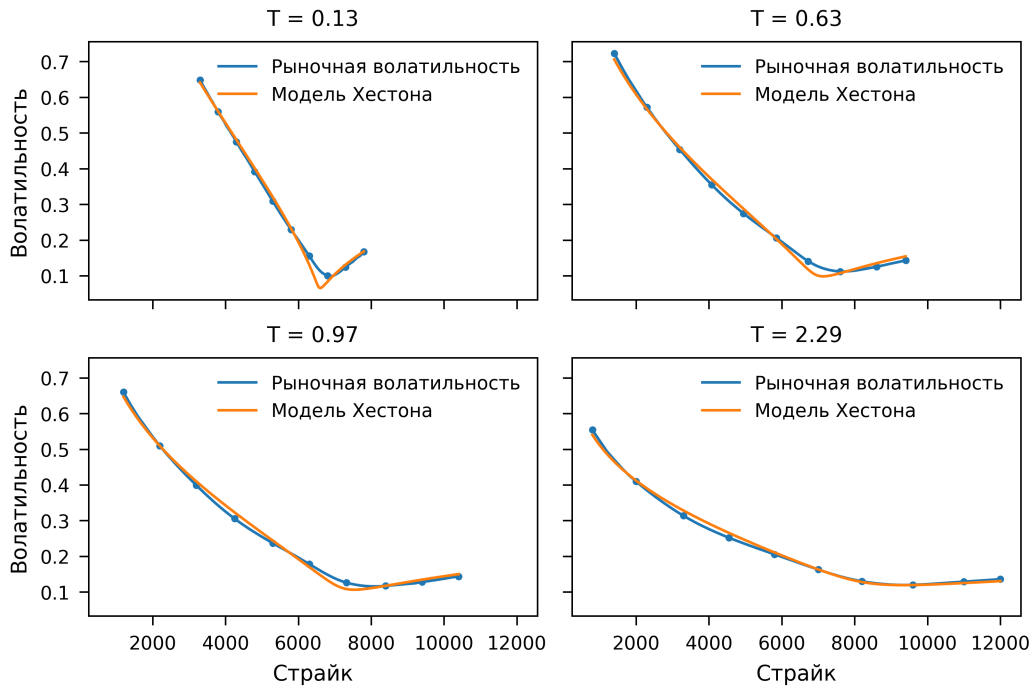


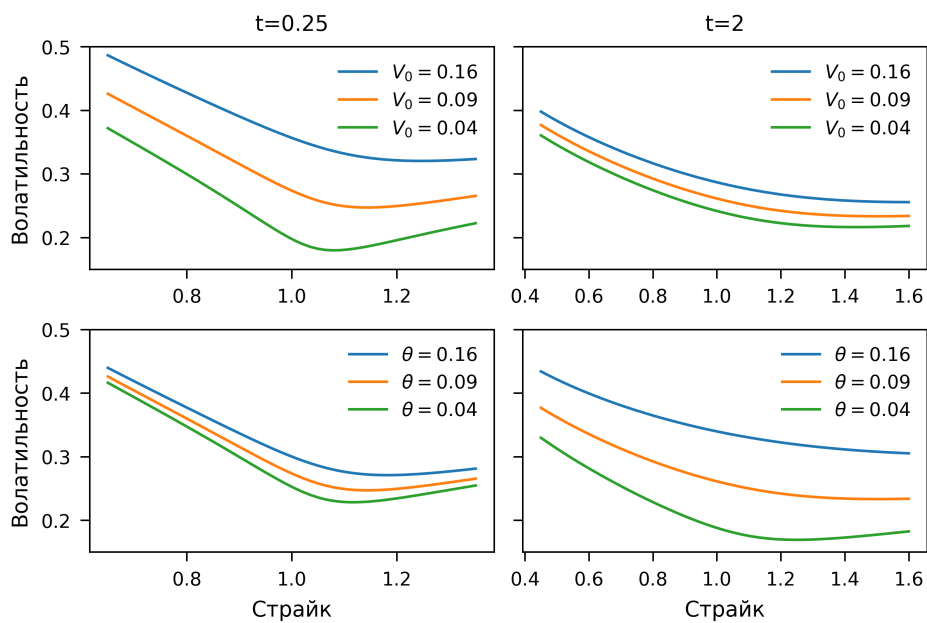
Рис. 1: Калибровка модели Хестона к улыбкам волатильности на опционы на индекс SnP 500. Точками отмечены страйки, использовавшиеся для калибровки. Данные на 1.09.2025 г.

В заключение покажем, как параметры модели влияют на форму улыбок волатильности. Для этого рассмотрим исходную модель с начальной ценой $S_0 = 1$ и параметрами

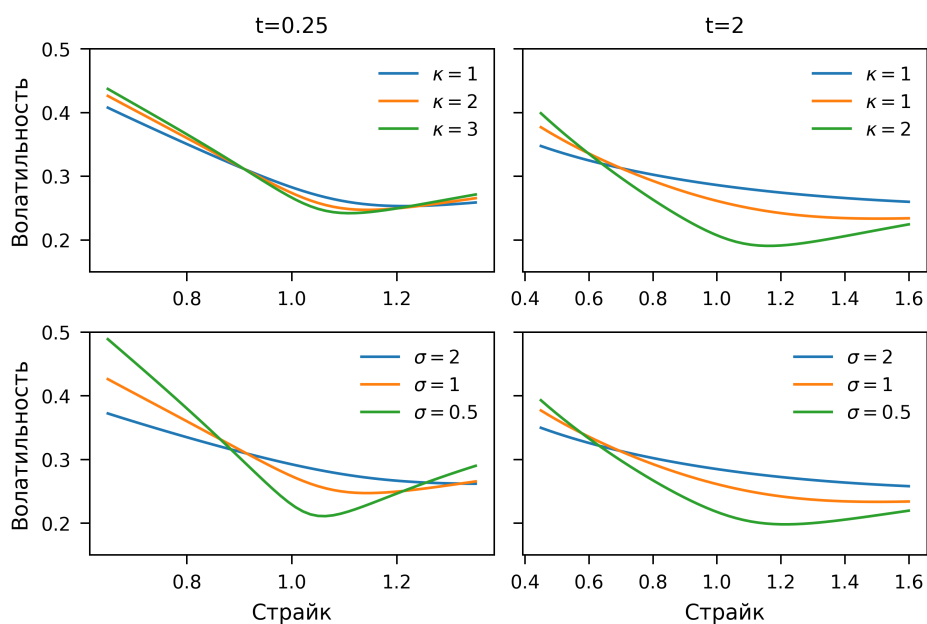
$$V_0 = 0.09, \quad \kappa = 2, \quad \theta = 0.09, \quad \sigma = 1, \quad \rho = -0.5$$

и посмотрим, как будут изменяться улыбки волатильности для времен исполнения $T = 0.5$ и $T = 2$ при изменении одного из параметров модели. Результаты представлены на рис. 2. Из него качественно можно сделать следующие выводы.

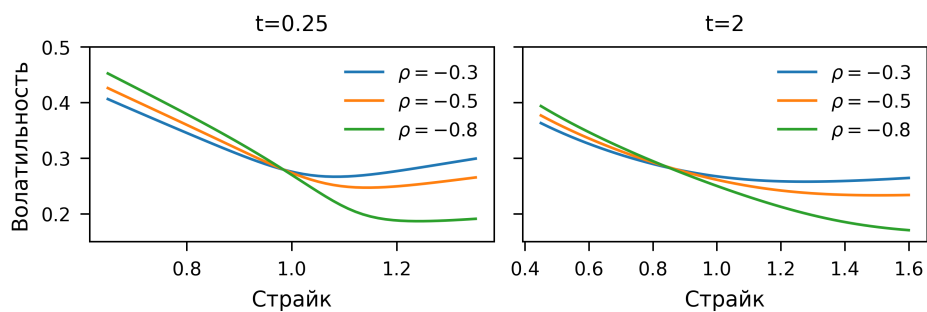
- Параметры V_0 и θ , главным образом, отвечают за вертикальное положение улыбок волатильности, причем V_0 больше влияет на улыбки с близким сроком исполнения, а θ — с дальним. При увеличении этих параметров улыбки смещаются вверх.
- Параметры κ и σ , главным образом, отвечает за выпуклость улыбок. При увеличении κ улыбки становятся более выпуклыми, а при увеличении σ более плоскими.
- Параметр ρ , главным образом, отвечает за наклон улыбок. Чем меньше его значение, тем более крутой левый хвост имеет улыбка.



(a) V_0 и θ влияют на вертикальное положение.



(b) κ и σ влияют на выпуклость.



(c) ρ влияет на наклон.

Рис. 2: Влияние параметров модели Хестона на улыбки волатильности.

Резюме лекции

- В модели Хестона стохастическая волатильность задается квадратным корнем процесса CIR.
- Стохастическая волатильность строго положительна при выполнении условия Феллера $2\kappa\theta \geq \sigma^2$.
- Основным результатом лекции является формула для цены европейских опционов колл и пут, сводящаяся к вычислению некоторого интеграла, включающего характеристическую функцию логарифма цены. Характеристическая функция представима в явном виде.
- Калибровка (т. е. подбор параметров) модели Хестона обычно осуществляется путем минимизации среднеквадратичного отклонения подразумеваемых волатильностей в модели от рыночных подразумеваемых волатильностей.

ДОПОЛНЕНИЯ К ЛЕКЦИЯМ

Дополнение 1

К модели локальной волатильности

Здесь собраны результаты о модели локальной волатильности, которые не вошли в лекцию 4, но представляют определенный интерес.

1. Формула Дюпира через подразумеваемую волатильность

Формулу Дюпира для локальной волатильности можно переписать так, чтобы вместо поверхности цен опционов она содержала поверхность *полной подразумеваемой дисперсии*. Полная подразумеваемая дисперсия опциона (total implied variance) равна величине $\hat{w} = \hat{\sigma}^2 T$, где $\hat{\sigma}$ — его подразумеваемая волатильность. Представление локальной волатильности через \hat{w} может быть удобно, когда дана поверхность подразумеваемой волатильности, а не непосредственно цены опционов.

Сделаем замену координат и вместо страйка K будем использовать *лог-форвардную денежную стоимость* $y = \ln(K/F_0^T)$, где $F_0^T = B_T S_0$ обозначает T -форвардную цену в момент времени $t = 0$. Величины S_0 и функция B_t считаются фиксированными; безрисковая процентная ставка неслучайна.

Нетрудно видеть, что имеется взаимно-однозначное соответствие между переменными (T, K, σ) и (T, y, w) , причем подразумеваемая волатильность $\hat{\sigma}(T, K)$ и полная подразумеваемая дисперсия $\hat{w}(T, y)$ связаны по формулам

$$\hat{w}(T, y) = \hat{\sigma}^2(T, e^y F_0^T) T, \quad \hat{\sigma}(T, K) = \sqrt{\hat{w}(T, \ln(K/F_0^T))} / T.$$

Предложение 1. Пусть для заданной поверхности цен опционов $\hat{C}(T, K)$ выполнены условия теоремы 1 из лекции 4. Тогда локальную волатильность можно представить в виде $\sigma(t, s) = \sqrt{v(t, \ln(s/F_0^t))}$, где функция $v(t, y)$ связана с $\hat{w}(t, y)$ по формуле

$$v(t, y) = \frac{\hat{w}'_T(t, y)}{1 - \frac{y}{\hat{w}(t, y)} \hat{w}'_y(t, y) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\hat{w}(t, y)} - \frac{y^2}{\hat{w}^2(t, y)} \right) (\hat{w}'_y(t, y))^2 + \frac{1}{2} \hat{w}''_{yy}(t, y)}. \quad (1)$$

Доказательство. В переменных (y, w) формула Блэка для цены опциона колл принимает вид

$$c(y, w) = S_0(\Phi(d_1) - e^y \Phi(d_2)),$$
$$d_1 = -\frac{y}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{w}.$$

Путем непосредственного дифференцирования проверяются следующие соотношения между производными:

$$\begin{aligned} c'_y &= c - S_0 \Phi(d_1), & c'_w &= \frac{S_0}{2\sqrt{w}} \varphi(d_1), \\ c''_{yy} &= c'_y + 2c'_w, & c''_{wy} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right) c'_w, & c''_{ww} &= -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2w} - \frac{y^2}{2w^2}\right) c'_w, \\ y'_T &= -r_T, & y'_K &= \frac{1}{K}, & y''_{KK} &= -\frac{1}{K^2}. \end{aligned}$$

Далее в формулу Дюпира

$$\sigma^2(T, K) = 2 \frac{\frac{\partial}{\partial T} C(T, K) + r_T K \frac{\partial}{\partial K} C(T, K)}{K^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(T, K)} \quad (2)$$

подставим $C(T, K) = c(y(T, K), \hat{w}(T, y(T, K)))$ и вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= c'_y y'_T + c'_w (\hat{w}'_T + \hat{w}'_y y'_T) = -r_T (c'_y + c'_w \hat{w}'_y) + c'_w \hat{w}'_T, \\ \frac{\partial C}{\partial K} &= (c'_y + c'_w \hat{w}'_y) y'_K = (c'_y + c'_w \hat{w}'_y) \frac{1}{K}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= c''_{yy} (y'_K)^2 + 2c''_{yw} y'_K \frac{\partial w}{\partial K} + c'_y y''_{KK} + c''_{ww} y'_K \frac{\partial w}{\partial K} + c'_w \left(\frac{\partial w}{\partial K}\right)^2 + c'_w \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \\ &= \frac{2}{K^2} c'_w \left(1 - \frac{y}{w} w'_y - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w} - \frac{y^2}{w^2}\right) (w'_y)^2 + \frac{1}{2} w''_{yy}\right). \end{aligned}$$

Из первых двух равенств находим, что

$$\frac{\partial}{\partial T} C(T, K) + r_T K \frac{\partial}{\partial K} C(T, K) = c'_w w'_T.$$

Подставляя полученные выражения в (2), получаем формулу (1). \square

2. Локальная волатильность форвардной цены

Покажем, что в модели локальной волатильности форвардная цена тоже допускает представление в виде уравнение, где коэффициент волатильности зависит только от времени и форвардной цены.

Предложение 2. Пусть цена рискованного актива задается моделью локальной волатильности $dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t$, где процентная ставка r_t неслучайна. Тогда T -форвардная цена $F_t^T = S_t B_T / B_t$, где $t \in [0, T]$, удовлетворяет уравнению

$$dF_t^T = \sigma_f(t, F_t^T) F_t^T dW_t, \quad F_0^T = S_0 B_T,$$

с функцией

$$\sigma_f(t, f) = \sigma(t, f B_t / B_T),$$

а процесс приращения логарифма форвардной цены $Y_t^T = \ln F_t^T - \ln F_0^T$ удовлетворяет уравнению

$$dY_t^T = -\frac{1}{2}v(t, Y_t^T)dt + \sqrt{v(t, Y_t^T)}dW_t, \quad X_0^T = 0,$$

где $v(t, y)$ — функция из (1).

Доказательство. Как было показано в лекции 2 (см. следствие 5), коэффициент волатильности у процессов F_t и S_t одинаковый (в том смысле, что это один и тот же случайный процесс), а коэффициент сноса у F_t нулевой. Таким образом,

$$dF_t = \sigma(t, S_t)F_t dW_t = \sigma(t, F_t B_t / B_T)F_t dW_t,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы получить уравнение для Y_t^T , заметим, что из соотношения $\sigma^2(t, s) = v(t, \ln(s/F_0^t))$ следует, что

$$\sigma_f^2(t, F_t^T) = \sigma^2(t, F_t^T B_t / B_T) = v(t, \ln(F_t^T B_t / (B_T F_0^t))) = v(t, Y_t^T).$$

Применяя далее формулу Ито к Y_t^T , получаем требуемое уравнение. \square

3. Аппроксимация подразумеваемой волатильности

3.1. Формулировка результата

В этом разделе мы приведем приближенную аналитическую формулу Хэган—Вудвард [11] для подразумеваемой волатильности в модели вида

$$dS_t = a(t)A(S_t)dW_t. \quad (3)$$

Будем считать, что функции $a(t)$ и $A(s)$ принимают неотрицательные значения. Заметим, что множитель S_t для удобства включен в коэффициент $A(S_t)$.

Теорема 1 (П. Хэган, Д. Вудвард). Пусть $\hat{\sigma}(T, K)$ — подразумеваемая волатильность в модели (3). Положим

$$\tilde{s} = (S_0 + K)/2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t)dt}.$$

Тогда верна следующая приближенная формула:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(T, K) = \frac{\alpha A(\tilde{s})}{\tilde{s}} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{A''(\tilde{s})}{A(\tilde{s})} - 2 \left(\frac{A'(\tilde{s})}{A(\tilde{s})} \right)^2 + \frac{2}{\tilde{s}^2} \right) (S_0 - K)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left(2 \frac{A''(\tilde{s})}{A(\tilde{s})} - \left(\frac{A'(\tilde{s})}{A(\tilde{s})} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{s}^2} \right) \alpha^2 A^2(\tilde{s}) T + \dots \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Замечание 1. Это не строгий результат. Во-первых, *приближенная* формула означает, что есть некоторый метод, который позволяет написать следующие члены в разложении (4), но готовой аналитической формулы для них нет. Метод основан на введении параметра в уравнение с частными производными для цены опциона и разложении решения по степеням этого параметра. Во-вторых, разложение проводится формальным образом, не заботясь о сходимости получающихся рядов. Тем не менее, для «не слишком плохих» функций $a(t)$ и $A(s)$ численно показывается, что приближенная формула дает хорошее соответствие с настоящей подразумеваемой волатильностью.

Замечание 2. В случае ненулевой процентной ставки будет справедлив аналогичный результат, если предположить, что модели (3) удовлетворяет T -форвардная цена. Тогда в формуле (4) нужно заменить S_0 на F_0 и \tilde{s} на $\tilde{f} = (F_0 + K)/2$. Детали см. в статье [11].

Замечание 3. Из формулы (4) можно увидеть, как изменяется подразумеваемая волатильность при изменении цены базового актива и, в частности, объяснить, почему в модели локальной волатильности получается неверная динамика цен опционов и подразумеваемой волатильности.

Пусть $\hat{\sigma}_0(T, K)$ обозначает улыбку волатильности для фиксированного момента исполнения T в момент времени $t = 0$. Если рассматривать страйки K вблизи значения S_0 , то в формуле (4) можно ограничиться только первым членом в правой части (вклад остальных будет мал). Тогда получим

$$A(s) \approx \frac{1}{\alpha} \hat{\sigma}(T, 2s - S_0)s.$$

Если заменить цену S_0 на $S_0 + \varepsilon$, то новая улыбка волатильности станет равна

$$\hat{\sigma}_n(T, K) \approx \frac{A((S_0 + \varepsilon + K)/2)}{\alpha(S_0 + \varepsilon + K)/2} \approx \hat{\sigma}(T, K + \varepsilon).$$

Следовательно, если $\varepsilon > 0$, то улыбка сдвигается влево, а если $\varepsilon < 0$, то вправо. В реальности наблюдается движение в другую сторону (см. обсуждение в разделе 1.2 лекции 4).

3.2. Схема «доказательства»

Для краткости покажем лишь, как получить первые два члена в приближенной формуле. Для последующих членов рассуждения аналогичны, но быстро становятся слишком громоздкими.

Зафиксируем страйк K и время исполнения T . Как следует из формулы Фейнмана—Каца, цена опциона $C(t, s) = E((S_T - K)^+ | S_t = s)$ удовлетворяет

уравнению

$$\begin{cases} C_t(t, s) + \frac{A^2(s)}{2} C_{ss}(t, s) = 0, \\ C(T, s) = (s - K)^+, \end{cases} \quad (5)$$

где нижние индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным (для удобства будем опускать сам знак производной). Положим $\varepsilon = A(K)$ и сделаем замену переменных

$$\tau = T - t, \quad x = \frac{s - K}{\varepsilon}, \quad Q(\tau, x) = \frac{C(t(\tau), s(x))}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\begin{cases} Q_\tau(\tau, x) - \frac{A^2(K + \varepsilon x)}{2A^2(K)} Q_{xx}(\tau, x) = 0, \\ Q(0, x) = x^+. \end{cases} \quad (7)$$

Обозначим $\nu_1 = A'(K)/A(K)$ и разложим в ряд, формально считая ε малым параметром:

$$\begin{aligned} A(K + \varepsilon x) &= A(K)(1 + \varepsilon \nu_1 x + \dots), \\ Q(\tau, x) &= Q^{(0)}(\tau, x) + \varepsilon Q^{(1)}(\tau, x) + \dots, \end{aligned}$$

где $Q^{(0)}, Q^{(1)}$ — неизвестные функции. Подставляя эти разложения в уравнение (7) и группируя члены при степенях ε , получаем уравнения

$$\begin{cases} Q_\tau^{(0)} - \frac{1}{2} Q_{xx}^{(0)} = 0, & Q_\tau^{(1)} - \frac{1}{2} Q_{xx}^{(1)} = \nu_1 x Q_{xx}^{(0)}, \\ Q^{(0)}(0, x) = x^+, & Q^{(1)}(0, x) = 0 \end{cases}$$

(для членов при $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ и т. д. будут получаться аналогичные системы, которые мы не приводим для краткости изложения). Решая эти уравнения, находим¹

$$\begin{aligned} Q^{(0)}(\tau, x) &= G(\tau, x) := x\Phi(x/\sqrt{\tau}) + \sqrt{\tau}\varphi(x/\sqrt{\tau}), \\ Q^{(1)}(\tau, x) &= \nu_1 \tau x G_\tau(\tau, x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q = Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)} + \dots = G + \varepsilon \nu_1 \tau x G'_\tau + \dots$$

¹В том, что это действительно решения, можно убедиться подстановкой, используя соотношения

$$G_\tau(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right), \quad G_{xx}(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right), \quad G_{\tau x} = -\frac{x}{\tau}G_\tau.$$

Теперь возьмем такое $\tilde{\tau}$, что $Q(\tau, x) = G(\tilde{\tau}, x)$:

$$\tilde{\tau} = \tau(1 + \varepsilon\nu_1x + \dots).$$

Из того, как мы определили Q в (6), следует, что

$$C(t, s) = \varepsilon G(\tilde{\tau}, x) = G(\varepsilon^2\tilde{\tau}, \varepsilon x) = G(\tau^*, s - K),$$

где

$$\tau^* = \varepsilon^2\tilde{\tau} = A^2(K)\tau(1 + \nu_1(s - K) + \dots).$$

Из разложения $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \dots$, получаем

$$\sqrt{\tau^*} = A(K)\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{2}\nu_1(s - K) + \dots\right).$$

Раскладывая $A(K)$ в ряд в точке $\tilde{s} = \frac{1}{2}(s + K)$, получаем

$$\sqrt{\tau^*} = A(\tilde{s})\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{\gamma_2 - 2\gamma_1^2}{24}(s - K)^2 + \dots\right). \quad (8)$$

где $\gamma_1 = A'(\tilde{s})/A(\tilde{s})$, $\gamma_2 = A''(\tilde{s})/A(\tilde{s})$ и т. д.

Таким же образом для модели Блэка—Шоулза (нужно взять $A(s) = \hat{\sigma}s$), находим

$$\sqrt{\tau_{BS}^*} = \hat{\sigma}\tilde{s}\sqrt{\tau}\left(1 - \frac{1}{12\tilde{s}^2}(s - K)^2 + \dots\right). \quad (9)$$

Равенство $C(t, s) = C_{BS}(t, s)$ влечет $G(\tau^*, s - K) = G(\tau_{BS}^*, s - K)$, и, следовательно, $\tau^* = \tau_{BS}^*$ в силу монотонности G . Отсюда получаем, что $\sqrt{\tau^*} = \sqrt{\tau_{BS}^*}$. Выражая теперь $\hat{\sigma}$ из (8)–(9), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{A(\tilde{s})}{\tilde{s}}\left(1 + \frac{\gamma_2 - 2\gamma_1^2}{24}(s - K)^2 + \dots\right)\left(1 - \frac{1}{12\tilde{s}^2}(s - K)^2 + \dots\right)^{-1} \\ &= \frac{A(\tilde{s})}{\tilde{s}}\left\{1 + \frac{1}{24}\left(\frac{A''(\tilde{s})}{A(\tilde{s})} - 2\left(\frac{A'(\tilde{s})}{A(\tilde{s})}\right)^2 + \frac{2}{\tilde{s}^2}\right)(s - K)^2 + \dots\right\}, \end{aligned}$$

где во втором равенстве воспользовались разложением $(1 - z + \dots)^{-1} = 1 + z + \dots$. Полагая $s = S_0$, получаем доказываемую формулу.

Дополнение 2

Стохастическая экспонента и условие Новикова

Пусть X_t — одномерный процесс Ито, заданный на некотором фильтрованном вероятностном пространстве и имеющий вид

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

где a_t, b_t — некоторые случайные процессы, для которых соответствующие интегралы корректно определены.

Определение 1. *Стохастической экспонентой* процесса X называется непрерывный согласованный процесс Y , удовлетворяющий уравнению

$$dY_t = Y_t dX_t, \quad Y_0 = 1. \quad (1)$$

Обозначение: $Y_t = \mathcal{E}(X)_t$.

Замечание 1. Уравнение (1), как обычно, нужно понимать в интегральном смысле, т. е.

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s dX_s = 1 + \int_0^t b_s Y_s ds + \int_0^t \sigma_s Y_s dW_s.$$

Стохастическую экспоненту можно определить для любого семимартингала X , но мы далее для простоты ограничимся только процессами Ито.

Пример 1. Геометрическое броуновское движение $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ является стохастической экспонентой броуновского движения со сносом $X_t = \mu t + \sigma W_t$.

Предложение 1 (формула Долеан—Дэда). *Уравнение (1) имеет единственное сильное решение*

$$Y_t = \exp \left(X_t - X_0 - \int_0^t \sigma_s^2 ds \right).$$

Тот факт, что такой процесс Y_t является решением уравнения (1) проверяется непосредственно по формуле Ито. Доказательство единственности см., например, в книге [14], гл. I, § 4f.

Если у процесса X_t коэффициент сноса $b_t = 0$, то стохастическая экспонента Y_t является локальным мартингалом. Возникает вопрос, а когда она является настоящим мартингалом? Стандартным способом проверки является следующее условие Новикова, которое уже упоминалось в курсе «Введение в финансовую математику» при обсуждении условий выполнения теоремы Гирсанова. Доказательство см. в книге [2], гл. 3.

Предложение 2 (условие Новикова). Предположим, что $dX_t = \sigma_t dW_t$ и выполнено условие

$$\mathbb{E} e^{\int_0^T \sigma_t^2 dt} < \infty.$$

Тогда стохастическая экспонента $Y_t = \mathcal{E}(X)_t$ является мартингалом.

Следствие 1 (см. [2], гл. 3, следствие 5.14). Стохастическая экспонента процесса $dX_t = \sigma_t dW_t$, $t \in [0, T]$, является мартингалом, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $t \in [0, T - \varepsilon]$ выполнено неравенство

$$\mathbb{E} e^{\int_t^{t+\varepsilon} \sigma_s^2 ds} < \infty.$$

Список литературы

Основные источники: книги

1. *Eberlein E., Kallsen J.* Mathematical Finance. — Springer, 2019.
2. *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. — 2nd ed. — Springer, 1991.
3. *Musiela M., Rutkowski M.* Martingale Methods in Financial Modelling. — Springer, 2009.

Основные источники: статьи

4. *Cont R.* Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues // Quantitative Finance. — 2001. — Vol. 1, no. 2. — P. 223.
5. *Dupire B.* Pricing with a smile // Risk. — 1994. — Vol. 7, no. 1. — P. 18–20.

Дополнительные источники

6. *Albrecher H., Mayer P., Schoutens W., Tistaert J.* The little Heston trap. — 2007.
7. *Breeden D. T., Litzenberger R. H.* Prices of state-contingent claims implicit in option prices // Journal of Business. — 1978. — Vol. 51, no. 4. — P. 621–651.
8. *Cherny A. S., Engelbert H.-J.* Singular Stochastic Differential Equations. — Springer, 2005.
9. *Desmettre S., Leobacher G., Rogers L. C. G.* Change of drift in one-dimensional diffusions // Finance and Stochastics. — 2021. — Vol. 25, no. 2. — P. 359–381.
10. *Gil-Pelaez J.* Note on the inversion theorem // Biometrika. — 1951. — Vol. 38, no. 3/4. — P. 481–482.
11. *Hagan P. S., Woodward D. E.* Equivalent Black volatilities // Applied Mathematical Finance. — 1999. — Vol. 6, no. 3. — P. 147–157.
12. *Hamza K., Klebaner F.* Expectation of local times and the Dupire formula // Stochastic Processes and their Applications. — 2022. — Vol. 150. — P. 782–787.
13. *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. — Springer, 1991.
14. *Жакоб Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. — Физматлит, 1994.

15. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — МЦНМО, 2004.