ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ
И МЕХАНИКИ

Кафедра Математических методов исследования операций

Методические указания
для решения задач по спецкурсу

«МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ»

для студентов 4 курса дневного и вечернего отделений
факультета ПММ

Составители: Баева Н.Б.
Замятин И.В.
Азарнова Т.В.
Аснина А.Я.

Воронеж
2002

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Важнейшим направлением совершенствования практических полезных навыков прикладного математика является ознакомление его с широким спектром упражнений и задач, представляющих собой описание фрагментов типовых ситуаций, возникающих при решении задач математического моделирования экономических и производственных процессов. Основной задачей методических указаний является создание учебной среды, обеспечивающей выработку устойчивых навыков владения разнообразными приёмами моделирования и создающей основу умения применять теоретические основы моделирования к решению реальных задач экономической практики.

Методические указания содержат пять параграфов, в которых приведён справочный материал, содержащий описание приёмов моделирования и перечень заданий, выполнение которых в указанном порядке обеспечивает устойчивое овладение им. Типы заданий охватывают весь круг прикладных макроэкономических и микроэкономических моделей, читаемых в курсе «Моделирование экономических и производственных процессов» для студентов 4 курса дневного и 5 курса вечернего отделения факультета ПММ. Последний параграф (шестой) содержит формулировку заданий и упражнений для самостоятельной работы студентов и может быть использован студентами для самоконтроля глубины усвоения основ прикладного моделирования экономических и производственных процессов.

При выполнении заданий, приведённых в данных методических указаниях, следует иметь в виду, что в первую очередь следует овладеть приёмами, используемыми в §1 и §2. Все остальные задания можно выполнять в произвольном порядке. Внутри параграфов задания приведены в порядке возрастания сложности разработки их математических моделей.

Основы математического моделирования экономических и производственных процессов рекомендуется изучать, используя литературу, список которой дан в Приложении. Там же приведена программа курса «Моделирование экономических и производственных процессов». Задачи, приведенные в данной разработке, могут быть также использованы в курсе «Математические методы исследования операций».

§ 1. Моделирование процессов формирования оптимального ассортимента

1.1. Модель формирования оптимального ассортимента

Рассматривается некоторый производственный объект. Для выпуска продукции объект использует материальные, трудовые и сырьевые ресурсы, а также имеющееся в его распоряжении производственное оборудование. Предполагается, что управляющий орган экономического объекта владеет информацией о возможном объёме поступающих со стороны ресурсов, о величине экономических показателей, о нормах расхода ресурсов и ожидаемой прибыли от реализации каждого вида выпускаемой продукции. Задача состоит в разработке модели формирования *оптимального ассортимента* выпуска для данного экономического объекта. Под оптимальным ассортиментом можно понимать либо выпуск, дающий максимальную прибыль, либо выпуск, требующий минимальных затрат, либо выпуск, максимизирующий объём продаж.

Модель содержит три типа ограничений:

I – на учёт производственных возможностей;
II – на учёт технико-экономических показателей;
III – на спрос.

Ограничения группы **I** формализованно записываются в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1..m$$

Здесь $\boldsymbol{j}$ – номер продукта, $j = 1..n$;
$\boldsymbol{n}$ – число выпускаемых продуктов;
$\boldsymbol{i}$ – номер ресурса, $i=1..m$;
$\boldsymbol{m}$ – число используемых ресурсов;
$\boldsymbol{a_{ij}}$ – нормы расхода i-го ресурса на выпуск единицы j-го продукта;
$\boldsymbol{b_i}$ – общее количество i-го ресурса;
$\boldsymbol{x_j}$ – объём выпуска j-го продукта.

Ограничения **II** группы формализованно записываются в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} d_{lj} x_j \le (\ge) D_l,\ l = 1..L$$

Где $\boldsymbol{l}$ – порядковый номер экономического показателя, $l = 1..L$;
$\boldsymbol{L}$ – число учитываемых экономических показателей;

$\boldsymbol{d_{lj}}$ – величина l-го показателя, оценивающего j-й продукт;

$\boldsymbol{D_l}$ – расчётная величина l-го показателя, принимаемого экономическим объектом для оценки его деятельности.

Ограничения **III** группы формализовано записываются в виде:

$$\underline{A}_j \le x_j \le \overline{A}_j,\ j=1..n$$

$\left(\underline{A}_j, \overline{A}_j\right)$ – интервал возможного изменения выпуска продукции j-го вида.

В качестве функции цели чаще всего используется максимизация прибыли:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

Где $\boldsymbol{c_j}$ – прибыль от реализации продукции j-го вида.

В качестве функции цели можно рассматривать также минимизацию затрат, максимизацию выпуска комплектной продукции (критерии Канторовича).

Рассмотрим модель выбора набора технологий, позволяющих при ограниченных ресурсах получить максимальное число комплектов. Предполагается, что мерой использования технологий принята интенсивность (в единицах измерения времени). Время рассматривается как один из видов ресурсов.

$\boldsymbol{j}$ – порядковый номер вида технологии;

$\boldsymbol{n}$ – число видов технологий;

$\boldsymbol{x_j}$ – интенсивность использования j-й технологии;

$\boldsymbol{i}$ – порядковый номер вида (комплектующего изделия);

$\boldsymbol{l}$ – число видов выпускаемых изделий;

$\boldsymbol{l_i}$ – число деталей i-го вида, необходимых для комплектования единицы выпускаемой продукции;

$\boldsymbol{s}$ – вид ресурса (сырья, энергии и т.д.);

$\boldsymbol{k}$ – число видов выделяемых ресурсов;

$\boldsymbol{b_s}$ – объём выделяемого ресурса s-го вида;

$\boldsymbol{a_{ij}}$ – норма выпуска деталей i-го вида при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;

$\boldsymbol{b_{sj}}$ - норма использования (расхода) s-го вида ресурсов при применении
j-й технологии с единичной интенсивностью;

$\boldsymbol{z}$ - число единиц выпускаемой комплектной продукции.

Математическая модель технологий, максимизирующих число комплектов, имеет вид:

$$z \to \max$$

$$\frac{1}{l_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq z, i = 1..l$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j \leq b_s, s = 1..k$$

$$x_j \geq 0, j = 1..n$$

1.2. Задачи на закрепление приемов моделирования оптимального ассортимента

Задача 1. Компания по производству игрушек изготавливает две различные игрушки ***A*** и ***B***. При изготовлении каждая игрушка должна обрабатываться тремя разными машинами. Эти машины могут обрабатывать только одну игрушку в каждый момент времени. Изготовление одной единицы *A* требует 40 мин. работы 1-й машины, 20 мин. – 2-й и 10 мин. – 3-й. Для изготовления одной единицы *B* необходимо 20 мин. – 1-й, 30 мин. – 2-й и 30 мин. – 3-й. Каждая машина может работать 40 часов в неделю. Игрушка *A* приносит 4 руб. прибыли на единицу, а *B* – 3 руб. Полагают, что спрос на эти игрушки превышает предложение компании.

Построить математическую модель для определения того, сколько каждого вида игрушек должна делать компания каждую неделю, чтобы максимизировать прибыль?

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{x_a}$ объем выпуска игрушки *A*, а через $\boldsymbol{x_b}$ **–** объем выпуска игрушки *B*. Тогда $40x_a$ мин. – общее время работы 1-й машины по обработке всех игрушек *A*, $20x_b$ мин. – общее время работы 1-й машины по обработке всех игрушек *B*. Аналогично для 2-й машины: $20x_a$ мин. – на игрушки *A*, $30x_b$ мин. – на игрушки *B*. И для 3-й машины: $10x_a$ мин. – на игрушки *A*, $30x_b$ мин. – на игрушки *B*. Отсюда получим ограничения группы I – на временные ресурсы каждой машины:

$$40x_a + 20x_b \leq 40$$

$$20x_a + 30x_b \leq 40$$

(1)

$$10x_a + 30x_b \leq 40$$

Ограничения II и III групп для данной задачи не определены.

Построим целевую функцию. Задача состоит в максимизации прибыли компании, поэтому в качестве целевой функции возьмем выражение, описывающее прибыль:

$$4x_a + 3x_b \to \max$$

(2)

Здесь $4x_a$ – общая прибыль, получаемая от реализации игрушки вида *A* в количестве x_a, соответственно $3x_b$ – общая прибыль, получаемая от реализации игрушки вида *B* в количестве x_b.

Таким образом, целевая функция (2) и ограничения (1) представляют собой искомую математическую модель.

<u>Задача 2.</u> Механический цех может изготовить за смену 600 деталей №1 или 1200 деталей №2. Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на обработку в тот же день, позволяет обработать за смену 1200 деталей №1 или 800 деталей №2. Цены на детали одинаковы. Определить ежедневную производственную программу выпуска деталей, максимизирую-щую товарную продукцию предприятия, для каждого из следующих дополнительных условий:

a) оба цеха работают одну смену;
b) механический цех работает три смены, а термический – две смены;
c) предприятие работает в две смены, при этом деталей №1 должно быть изготовлено не более 800 шт., а деталей №2 – не более 1000 шт.

<u>Решение.</u> Обозначим через $\boldsymbol{x_1}$ объем выпуска деталей №1, $\boldsymbol{x_2}$ – деталей №2. Для всех трех модификаций задачи целевая функция остается неизменной – максимум выпуска продукции, то есть:

$$x_1 + x_2 \to \max$$

(1)

При одинаковой целевой функции модификации задачи будут иметь разные ограничения.

a) Примем всю продолжительность одной смены за 1. Тогда $\frac{1}{600}x_1$ - доля смены, в течение которой в механическом цехе будут производиться x_1 деталей №1, а $\frac{1}{1200}x_2$ - доля смены, в течение которой в том же цехе будут производиться x_2 деталей №2. Тогда ограничение на общий объем рабочего времени механического цеха будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2 \le 1$$

(a2)

Аналогичное ограничение построим и для термического цеха:

$$\frac{1}{1200}x_1 + \frac{1}{800}x_2 \le 1$$

(a3)

Ограничения (a2-a3) и целевая функция (1) составляют искомую математическую модель для варианта задачи (a).

b) Как и для варианта (a) примем всю продолжительность одной смены за 1. Тогда получим следующие ограничения на рабочее время обоих цехов:

механический – $\frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2 \le 3$

(b2)

термический – $\frac{1}{1200}x_1 + \frac{1}{800}x_2 \le 2$

(b3)

Ограничения (b2-b3) и целевая функция (1) составляют искомую математическую модель для варианта задачи (b).

c) Как и для вариантов (a) и (b) примем всю продолжительность одной смены за 1. Тогда получим следующие ограничения на рабочее время обоих цехов:

механический – $\frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2 \le 2$

(c2)

термический – $\frac{1}{1200}x_1 + \frac{1}{800}x_2 \le 1$

(c3)

Кроме того, в данном варианте в задаче присутствуют ограничения III вида на спрос, которые выражаются следующим образом:

$$x_1 \le 800, \; x_2 \le 1000$$

(c4)

Ограничения (c2-c4) и целевая функция (1) составляют искомую математическую модель для варианта задачи (c).

<u>Задача 3.</u> Механический завод при изготовлении трёх различных типов деталей использует токарные, фрезерные и строгальные станки. При этом обработку каждой детали можно вести тремя различными технологическими способами.

В таблице указаны ресурсы (в станко-часах) каждой группы станков, нормы расхода времени при обработке детали на соответствующем станке по данному технологическому способу, а также прибыль от выпуска единицы детали каждого вида:

Детали		I			II			III			Ресурсы времени
Технологические способы		1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Станки	Токарный	0,4	0,9	0,5	0,4	0,3	-	0,7	-	0,9	250
	Фрезерный	0,5	-	0,6	1,0	0,2	0,5	0,3	1,4	-	450
	Строгальный	1,3	0,5	0,4	-	1,5	0,3	-	1,0	0,5	600
Прибыль		12			18			30			

Составить оптимальный план загрузки производственных мощностей, обеспечивающий максимальную прибыль.

Считая, что между количеством выпускаемых деталей должно выполняться соотношение 1:2:4, определить производственную программу, обеспечивающую изготовление максимального числа комплектов.

<u>*Решение.*</u> Обозначим через $\boldsymbol{x_{ij}}$ объем выпуска $\boldsymbol{i}$-той детали $\boldsymbol{j}$-тым технологическим способом, а через z – количество выпускаемых комплектов. Тогда ограничения на количество комплектов будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_{11}+x_{12}+x_{13}\geq z\\ &x_{21}+x_{22}+x_{23}\geq 2z\\ &x_{31}+x_{32}+x_{33}\geq 4z \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Блок ограничений на ресурсы представлен ограничениями на количество рабочего времени каждого станка:

токарный:

$$(0{,}4x_{11}+0{,}9x_{12}+0{,}5x_{13})+(0{,}4x_{21}+0{,}3x_{22})+(0{,}7x_{31}+0{,}9x_{33})\leq 250$$

фрезерный:

$$(0{,}5x_{11}+0{,}6x_{13})+(1{,}0x_{21}+0{,}2x_{22}+0{,}5x_{23})+(0{,}3x_{31}+1{,}4x_{32})\leq 450$$

(2)

строгальный:

$$(1{,}3x_{11}+0{,}5x_{12}+0{,}4x_{13})+(1{,}5x_{22}+0{,}3x_{23})+(1{,}0x_{32}+0{,}5x_{33})\leq 600$$

Построим целевую функцию. Задача состоит в максимизации прибыли компании. Поэтому в качестве целевой функции получим следующее выражение:

$$12(x_{11}+x_{12}+x_{13})+18(x_{21}+x_{22}+x_{23})+30(x_{31}+x_{32}+x_{33})\to \max$$

(3)

Таким образом, целевая функция (3) и ограничения (1-2) представляют собой искомую математическую модель.

1.3. Дополнительные упражнения

1. На звероферме могут выращиваться песцы, чёрно-бурые лисы, нутрии и норки. Для их питания используются три вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчёте на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверя.

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)				Ресурс кормов (кг)
	Песец	Лиса	Нутрия	Норка	
1.3.	1	2	1	2	300
II	2	4	2	0	400
III	1	1	3	2	600
Прибыль руб./шкурка	6	12	8	10	

Построить математическую модель для определения того, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была максимальной.

2. Автомобильный завод выпускает машины марок **А** и **В**. Производственные мощности отдельных цехов или отделов приведены в следующей таблице:

№	Наименование цехов или участков	**Количество машин за год**	
		Типа А	Типа В
1	Подготовительное производство	125	110
2	Кузовной цех	80	320
№	Наименование цехов или участков	**Количество машин за год**	
		Типа А	Типа В
3	Производство шасси	110	110
4	Производство двигателей	240	120
5	Сборочный цех	160	80
6	Участок испытаний	280	70

Определить наиболее рентабельную производственную программу при следующих дополнительных условиях:

а) прибыли от выпуска одной машины типа А и В соответственно равны 2000 и 2400 рублей;

б) производственная мощность 1-го и 5-го цехов увеличена в 1,5 раза за счёт использования сверхурочных работ, что приводит к уменьшению прибыли от выпуска одной машины типа А до 1500 рублей и типа В – до 2100 рублей (для «сверхплановых» автомобилей).

3. Механический завод при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-часах), нормы расхода времени при обработке детали на соответствующем оборудовании по данному технологическому способу и прибыль от выпуска единицы деталей каждого вида даны в таблице:

Детали		I		II		Ресурсы времени
Технологические способы		1	2	1	2	
Обору-дование	Токарное	2	2	3	-	20
	Фрезерное	3	1	1	2	37
	Сварочное	-	1	1	4	30
Прибыль		11	6	9	6	

Составить оптимальный план “загрузки оборудования”, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

4. Предприятие может выпускать продукцию по трём технологическим способам. При этом за 1 час по 1-му способу оно выпускает 20 единиц продукции, по 2-му – 25 единиц и по 3-му – 30 единиц продукции.

Количество производственных ресурсов, расходуемых за час при различных способах производства, и наличный объем ресурсов приведены в таблице:

Факторы / Способ производства	Сырьё	Парк станков	Рабочая сила	Энергия	Транспорт	Прочие расходы
I	2	3	7	2	1	4
II	1	4	3	1	0	2
III	3	2	4	3	1	1
Располагаемые ресурсы факторов	60	80	70	50	40	50

Спланировать работу предприятия из условия получения максимума выпуска продукции, если известно, что общее время работы предприятия составляет 30 часов.

5. Предприятие располагает тремя видами ресурсов **А**, **Б**, **В**, в количествах, равных соответственно 34, 16, 22 тыс. единиц. Существует четыре способа производства продукции. Расход каждого вида ресурсов в течение месяца по каждому способу производства известен и приведён в таблице.

способ производства / ресурсы	I	II	III	IV
А	2	4	1	5
Б	4	1	4	1
В	2	3	1	2
Количество выпускаемой в течение месяца продукции, тыс. ед.	7	3	4	2

Определить оптимальную производственную программу таким образом, чтобы выпуск единиц продукции был бы максимальным;

6. В хозяйстве производится зерно, кукуруза на силос и содержится крупный рогатый скот. Для выращивания сельскохозяйственных культур выделяется 10 тыс. га пашни, для содержания скота – 1 тыс. га естественных пастбищ, для производства всех работ – 200 тыс. человеко-дней трудовых ресурсов. На содержание одной коровы затрачивается 25 человеко-дней труда и 40 кормовых единиц, при этом прибыль получается 460 рублей в год. Для корма используются естественные пастбища, а также может отводиться весь урожай кукурузы на силос и до 20% валового сбора зерна. Остальные показатели производства приведены в таблице:

Наименование культуры	Урожайность с 1 га, ц	Затраты труда на 1 га, чел-дней	Коэффициент перевода на 1 кормовую ед.	Прибыль с 1ц, руб.
Зерновые	20	2	1,1	4
Кукуруза на силос	400	20	0,2	1
Естественные пастбища	5	-	0,5	-

Требуется найти оптимальное сочетание производства продукции, дающее хозяйству максимальную прибыль.

7. *“Theta Mashine Shop”* производит три продукта: ротационные покрышки, корпуса подшипников и листовое железо. Управляющий столкнулся с проблемой составления наилучшего производственного плана на следующий месяц. Совместно со своими сотрудниками управляющий пришёл к следующей таблице данных на планируемый месяц:

Продукт	Время на ед. продукции (ч)	Количество металла на ед. продукции (кг)	Цена ед. продукции ($)	Максимальный прогнозируемый спрос (шт.)
Ротационные покрышки	2,5	3,25	30	300
Корпуса подшипников	1,0	1,50	32	550
Листовое железо	2,0	2,00	25	320

Было определено, что в планируемом месяце компания имеет не более 900 часов производственного времени и нет ограничений на поставки металла. Каждый час производственного времени будет стоить $7 (оплата труда), а каждая единица металла – $2. Расчет за поставляемую продукцию производится в конце планируемого месяца. Объем свободных денежных средств (для закупок сырья и оплаты рабочего времени) на начало месяца составляет $14960. Распределение продукции может быть осуществлено в течение этого же месяца.

Каким должен быть производственный план следующего месяца, максимизирующий прибыль?

§ 2. Моделирование процессов перевозок и назначения

2.1. Простейшие модели

Одним из распространённых процессов, при математическом моделировании которых с успехом используется транспортная задача и её модификации, является процесс перевозки и распределения продукции, сырья, трудовых и материальных ресурсов. Другими словами, речь идёт о моделировании процессов перевозки продукции с m пунктов производства в n пунктов потребления так, чтобы при этом был выполнен баланс производства и потребления и затрачены минимальные средства на транспортировку.

Математически этот процесс может быть описан следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_i \to \min \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1..m \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1..n \quad \textbf{(3)}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1..m,\ j = 1..n \quad \textbf{(4)}$$

Здесь $\boldsymbol{a_i}$ – объём запасов i-го продукта на складах (или в пунктах производства), a_i>0;

$\boldsymbol{b_j}$ – объём потребления j-го объекта, b_j>0;

$\boldsymbol{x_{ij}}$ – количество продукции, перевозимое с i-го склада j-му потребителю;

$\boldsymbol{c_{ij}}$ – стоимость перевозки единицы груза с i-го склада j-му потребителю.

Отметим, что задача (1) – (4) является сбалансированной, если:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Если последнее условие не выполняется, причём объём потребления превосходит объём запасов, то ограничение (2) записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ j = 1..n$$

Если же предложение превосходит потребление, то ограничение (1) записывается в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1..m$$

Нередко появляются дополнительные требования на пропускную возможность коммуникации, в этом случае появляется дополнительное ограничение:

$$x_{ij} \le d_{ij}, i = 1..m, j = 1..n \quad (5)$$

где d_{ij} – пропускная способность пути от i-го поставщика к j-му потребителю.

Простой модификацией данной модели является модель процесса назначения. Речь идёт о назначении m различных специалистов на n мест работы при условии, что каждую работу должен выполнять лишь один специалист, и каждый специалист должен выполнять лишь одну работу. Приоритетная возможность i-го специалиста на получение j-й работы оценивается коэффициентами c_{ij} матрицы C. При моделировании таких процессов x_{ij} вводится как булевская переменная

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } \mathrm{i}\textit{-й работник будет назначен на выполнение } \mathrm{j}\textit{-й работы} \\ 0, & \textit{если } \mathrm{i}\textit{-й работник не будет назначен на выполнение } \mathrm{j}\textit{-й работы} \end{cases}$$

Ограничения в этом случае записываются в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \ j = 1..n$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1, i = 1..m,$$

в случае, если $m>n$, т.е. специалистов больше, чем мест работы.

Функция цели имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

К этому же типу моделей примыкают модели задач развития и размещения, заключающихся в одновременном отыскании объёма выпуска изделий на пунктах производства и вопроса прикрепления пунктов производства к пунктам потребления. Данные модели называются моделями развития и размещения и имеют следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j, \ j = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1..m$$

$$\underline{D}_j \le x_j \le \overline{D}_j,\ j = 1..n$$
$$x_{ij} \ge 0, i = 1..m,\ j = 1..n$$

Где $\boldsymbol{c_j}$ – затраты производства единицы продукции у j-го производителя;

$\boldsymbol{x_j}$ – объём производства j-го производителя;

$\underline{D}_j, \overline{D}_j$ – верхняя и нижняя границы для выпуска продукции;

$\boldsymbol{c_{ij}}$ – затраты на транспортировку ед. продукции от j-го производителя к i-му потребителю;

$\boldsymbol{x_{ij}}$ – количество продукции, перевозимой от j-го производителя к i-му потребителю;

$\boldsymbol{a_i}$ – потребности i-го заказчика.

В заключение приведём модель развития и размещения в общем виде, в случае, когда перевозится $\boldsymbol{R}$ видов продукции.

Найти оптимальный вариант развития транспортной сети, удовлетворяющий перевозке грузов к потребителям.

Введём обозначения:

$\boldsymbol{q}$ – номер варианта развития сети, $\boldsymbol{Q}$ – число всех вариантов развития сети;

$\boldsymbol{g}$ **-** вид груза, $\boldsymbol{G}$ – число всех видов груза;

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ – пункты, между которыми осуществляется перевозка;

$\boldsymbol{s}$ – вид лимитированного ресурса; $\boldsymbol{S}$ – число всех видов лимитированных ресурсов;

$\boldsymbol{R_{sij}}$ – количество выделенных ресурсов s-го вида для развития транспортного участка между пунктами i и j;

R^q_{sijg} – потребность в s-м виде ресурсов для перевозки g-го вида грузов по участку i, j согласно q-му варианту развития сети;

c^q_{gij} – текущие затраты на перевозку g-го вида груза из пункта i в пункт j согласно q-му варианту развития сети;

$\boldsymbol{K_{ij}}$ – выделенные капитальные вложения для развития участка сети от пункта i к пункту j;

K^q_{gij} – капитальные вложения, выделенные согласно q-му варианту развития сети для перевозки g-го груза от пункта i к пункту j;

$\boldsymbol{E}$ – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений в транспорт;

$\boldsymbol{a_{ij}}$ – пропускная способность участка I, j;

a^q_{gij} – план перевозок g-го вида продукции, перевозимого от пункта I к пункту j согласно q-му варианту;

x_{gij}^{q} – искомая величина, равная **1**, если на участке от пункта I к пункту j выбирается q-й вариант развития сети по перевозкам g-го вида груза, и равная **0** в противном случае.

Математическая модель:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{G}\sum_{q=1}^{Q}(c_{gij}^{q} + EK_{gij}^{q})x_{gij}^{q} \to \min$$

– минимизация приведённых затрат;

$$\sum_{q=1}^{Q} x_{gij}^{q} \le 1,\ i=1..n,\ j=1..m,\ g=1..G$$

– выбирается лишь один вариант развития;

$$\sum_{g=1}^{G}\sum_{q=1}^{Q} R_{sijg}^{q}\, x_{gij}^{q} \le R_{sij},\ s=1..S, i=1..n,\ j=1..m$$

– ограничение на объёмы выделенных ресурсов;

$$\sum_{g=1}^{G}\sum_{q=1}^{Q} K_{gij}^{q}\, x_{gij}^{q} \le K_{ij},\ i=1..n,\ j=1..m$$

– ограничение на объёмы капитальных вложений;

$$\sum_{g=1}^{G}\sum_{q=1}^{Q} a_{gij}^{q}\, x_{gij}^{q} \le a_{ij},\ i=1..n,\ j=1..m$$

– ограничение на план перевозок.

Данная задача решается методами целочисленного программирования.

2.2. Закрепление приемов построения моделей

<u>Задача 1.</u> Известен выпуск продукции на трёх заводах: 460, 340 и 300 тонн соответственно. Требования четырёх потребителей на эту продукцию составляют: 350, 200, 450 и 100 тонн. Известны также затраты на производство 1 единицы продукции на каждом заводе: 9, 8 и 2 руб. соответственно, а также матрица транспортных расходов на доставку 1 единицы продукции от i-го завода k-му потребителю.

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам из условия минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку.

Сравнить с оптимальным планом, построенным из условия минимизации только транспортных расходов.

Решение. Обозначим через x_{ik} объем поставки продукции от i-того завода k-тому потребителю. Данная транспортная задача является сбалансированной (460+340+300 = 350+200+450+100). Тогда ограничения на выпуск продукции будут выглядеть следующим образом:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=460$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=340$$

(1)

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=300$$

Ограничения на потребление продукции:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=350$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=200$$

(2)

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=450$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=100$$

Неотрицательность объемов поставок:

$$x_{ik}\geq 0,\ i=1..3, k=1..4$$

(3)

Задача состоит в минимизации суммарных расходов на производство и перевозку. Поэтому в качестве целевой функции получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&9(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14})+8(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24})+2(x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34})+\\&+3x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+x_{14}+\\&+5x_{21}+x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+\\&+4x_{31}+5x_{32}+8x_{33}+x_{34}\to\max\end{aligned}$$

(4)

Таким образом, целевая функция (4) и ограничения (1-3) представляют собой математическую модель для решения поставленной задачи.

В случае, когда необходимо минимизировать только транспортные расходы, из целевой функции исключается выражение, описывающее производственные затраты. Целевая функция в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned}&3x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+x_{14}+\\&+5x_{21}+x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+\\&+4x_{31}+5x_{32}+8x_{33}+x_{34}\to\max\end{aligned}$$

(4`)

При этом все ограничения останутся прежними.

Задача 2. Строительный песок добывается в трёх карьерах и доставляется на четыре строительные площадки. Данные о производительности за день ($\boldsymbol{a_i}$ в тоннах), потребностях в песке строительных площадок ($\boldsymbol{b_k}$ в тоннах), затраты на добычу песка (***d_i*** в руб./т) и транспортных расходах (***c_{ik}***) приведены в следующей таблице:

b_k / a_i	40	35	30	45	d_i
46	4	3	2	5	2
34	1	1	6	4	3
40	3	5	9	4	1

Недостающее количество песка – 30 т в день – можно обеспечить следующими тремя путями:

I – увеличение производительности первого карьера, что повлечёт за собой дополнительные затраты в 3 руб. на добычу 1 т сверх плана;

II – увеличение производительности второго карьера с дополнительными затратами в 2 руб./т сверх плана;

III – эксплуатация нового карьера с общими запасами 30 тонн, затратами на добычу 5 руб./т и на транспортировку к указанным строительным площадкам: $c_{41} = 2$, $c_{42} = 3$, $c_{43} = 1$, $c_{44} = 2$ (руб./т).

Построить модель определения плана закрепления строительных площадок за карьерами и оптимального варианта расширения поставок песка.

<u>Решение.</u> Обозначим через ***x_{ik}*** объем поставки продукции от ***i***-того карьера на ***k***-тую строительную площадку. Данная транспортная задача не является сбалансированной $(46+34+40 \le 40+35+30+45)$. Поэтому в задаче без дополнительных условий (I-III) ограничения на выпуск продукции будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 46 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 34 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 40 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Ограничения на потребление продукции:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &\le 40 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &\le 35 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &\le 30 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &\le 45 \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Неотрицательность объемов поставок:

$$x_{ik} \ge 0,\ i = 1..3, k = 1..4 \qquad \textbf{(3)}$$

Задача состоит в минимизации суммарных расходов на производство и перевозку. Поэтому в качестве целевой функции получим следующее выражение:

$$2(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14})+3(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24})+(x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34})+$$
$$+4x_{11}+3x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+$$
$$+x_{21}+x_{22}+6x_{23}+4x_{24}+$$
$$+3x_{31}+5x_{32}+9x_{33}+4x_{34}\to\min$$

(4)

Варианты расширения поставок фактически необходимы для того, чтобы сбалансировать задачу и обеспечить потребности строительных площадок. Поэтому для того чтобы учесть данные варианты, введем новые переменные и изменим ограничения (1-2) и целевую функцию (4).

Пусть $\boldsymbol{x_{4k}}$ – объем поставки песка из нового четвертого карьера на k-ую строительную площадку; $\boldsymbol{z_1}$ – объем дополнительного производства на первом карьере, $\boldsymbol{z_2}$ – объем дополнительного производства на втором карьере. Тогда ограничения (1) будут заменены на следующие:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 46+z_1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 34+z_2$$

(1`)

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 40$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}\le 30$$

Ограничения (2) на следующие:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=40$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=35$$

(2`)

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=30$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=45$$

Неотрицательность объемов поставок:

$$x_{ik}\ge 0,\ i=1..4, k=1..4;\ z_1, z_2\ge 0$$

(3`)

Целевая функция примет вид:

$$2(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14})+5z_1+3(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24})+5z_2+(x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34})+$$
$$+4x_{11}+3x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+$$
$$+x_{21}+x_{22}+6x_{23}+4x_{24}+$$
$$+3x_{31}+5x_{32}+9x_{33}+4x_{34}+$$
$$+2x_{41}+3x_{42}+x_{43}+2x_{44}\to \min$$
(4`)

Задача 3. Первый склад (S_1) имеет сталь двух марок: 3000 т марки «А» и 4000 т марки «Б». Второй склад (S_2) также имеет сталь двух марок: 5000 т марки «А» и 2000 т марки «Б». Сталь должна быть вывезена в два пункта потребления: в пункт P_1 необходимо поставить 2000 т стали марки «А», 3000 т марки «Б» и остальные 2000 т стали любой марки. Аналогично второй пункт потребления P_2 должен получить 6250 т стали, из них 1000 т стали марки «А» и 1500 т стали марки «Б». Известно, что 2000 т стали марки «А» могут быть заменены на 1600т стали марки «Б» (но не наоборот). Стоимость перевозок в рублях за тонну составляет: из пункта S_1 в пункты P_1 и P_2 1 руб. и 1,5 руб., из пункта S_2 в P_1 и P_2 соответственно 2 руб. и 1 руб.

Составить модель оптимального плана перевозок.

Решение. Обозначим через x_{ik}^{g} объем поставки стали g-той марки из i-того склада на k-тый пункт потребления. Подобные задачи (со взаимозаменяемыми ресурсами) решаются путем выражения объемов одного ресурса в единицах другого. Например, в данной задаче выпишем все ограничения в единицах стали марки «Б». В таблице приведены основные параметры задачи, выраженные в единицах стали марки «Б»:

		в исходных единицах	в единицах стали марки «Б»
Запасы на складе S_1	марка «А»	3000	2400
	марка «Б»	4000	4000
Запасы на складе S_2	марка «А»	5000	4000
	марка «Б»	2000	2000
Потребность 1-го пункта потребления	марка «А»	2000	1600
	марка «Б»	3000	3000
	любой марки	2000	1600*
Потребность 2-го пункта потребления	марка «А»	1000	800
	марка «Б»	1500	1500
	любой марки	3750	3000*

* В качестве стали «любой марки» логично выбрать сталь марки «А», которую затем можно заменить на меньшее количество стали марки «Б».

Как видим, общая потребность в стали обоих пунктов потребления составляет 11500 тонн (в единицах стали марки «Б»), в то время как общий запас (обоих складов) составляет 12400 тонн. Задача не является сбалансированной. Тогда ограничения на наличие ресурсов будут выглядеть следующим образом:

$$x_{11}^{A} + x_{12}^{A} \le 3000$$
$$x_{11}^{B} + x_{12}^{B} \le 4000$$

(1)

$$x_{21}^{A} + x_{22}^{A} \le 5000$$
$$x_{21}^{B} + x_{22}^{B} \le 2000$$

Ограничения на потребление стали марки «Б» (т.к. она не заменима маркой «А»):

$$x_{11}^{B} + x_{21}^{B} \ge 3000$$

(2)

$$x_{12}^{B} + x_{22}^{B} \ge 1500$$

Сталь марки «А», как и остаток «любой марки», могут быть заменены сталью марки «Б», поэтому к ограничениям (2) для каждого склада необходимо добавить ограничения на общее количество поставляемой стали всех марок, выраженное в единицах стали марки «Б»:

$$0{,}8\left(x_{11}^{A} + x_{21}^{A}\right) + \left(x_{11}^{B} + x_{21}^{B}\right) = 6200$$

(3)

$$0{,}8\left(x_{12}^{A} + x_{22}^{A}\right) + \left(x_{12}^{B} + x_{22}^{B}\right) = 5300$$

Здесь 6200 и 5300 – общая потребность соответственно 1-го и 2-го пунктов потребления стали обеих марок, выраженная в единицах стали марки «Б» (подробнее – см. таблицу), а $0{,}8 = \frac{1600}{2000}$ – коэффициент перевода стали марки «А» в сталь марки «Б».

Неотрицательность объемов поставок:

$$x_{ik}^{g} \ge 0,\ i = 1..2, k = 1..2, g \in \{\text{"А"}, \text{"Б"}\}$$

(4)

Задача состоит в минимизации суммарных расходов на производство и перевозку. Поэтому в качестве целевой функции получим следующее выражение:

$$\left(x_{11}^{A} + x_{11}^{B}\right) + 1{,}5\left(x_{12}^{A} + x_{12}^{B}\right) + 2\left(x_{21}^{A} + x_{21}^{B}\right) + \left(x_{22}^{A} + x_{22}^{B}\right) \to \min$$

(5)

Целевая функция (5) и ограничения (1-4) представляют собой математическую модель для решения поставленной задачи.

<u>Задача 4.</u> Компания *Beta Motor Company* имеет 4 различных сборочных линии на своём главном заводе. Управляющий производством имеет 5 служащих и желает назначить по одному служащему к каждой из сборочных линий. Каждый из этих служащих может работать на любой сборочной линии, но с различными затратами, связанными с индивидуальным опытом и мастерством. Эти затраты приведены в таблице:

	Сборочная линия			
	1	2	3	4
Служащий 1	23	19	22	27
Служащий 2	18	22	20	18
Служащий 3	25	20	22	30
Служащий 4	20	24	24	28
Служащий 5	16	18	20	25

Каким образом следует управляющему производством прикрепить служащих к сборочным линиям с тем, чтобы минимизировать общие затраты?

<u>Решение.</u> Введем переменные $x_{ik} \in \{0,1\}$ следующим образом: $x_{ik} = 1$, если i-тый служащий назначается на k-тую производственную линию, в противном случае $x_{ik} = 0$. Данная задача не является сбалансированной – количество служащих больше количества производственных линий. Тогда ограничения задачи будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{4} x_{ik} \le 1, \; i = 1..5$$

(1)

– сотрудник не может быть назначен на две линии одновременно, кроме того, один из сотрудников останется неназначенным;

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ik} = 1, \; k = 1..4$$

(2)

– на каждую линию обязательно будет назначен один сотрудник;

$$x_{ik} \in \{0,1\} \qquad \textbf{(3)}$$

– ограничение на переменные по условию.

Задача состоит в минимизации общих затрат на производство. Поэтому в качестве целевой функции получим следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
&23x_{11} + 19x_{12} + 22x_{13} + 27x_{14} + \\
&+18x_{21} + 22x_{22} + 20x_{23} + 18x_{24} + \\
&+25x_{31} + 20x_{32} + 22x_{33} + 30x_{34} + \\
&+20x_{41} + 24x_{42} + 24x_{43} + 28x_{44} \\
&+16x_{51} + 18x_{52} + 20x_{53} + 25x_{54} \to \min
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2.3. Упражнения для самостоятельной работы

1. Построить модель формирования плана перевозок из условия доставки груза в кратчайший срок. Известны объёмы ресурсов у трёх поставщиков (30, 35, 40) и потребности в них у пяти потребителей (20, 34, 16, 10, 25), а также матрица

$$T = \left(t_{ik}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{t_{ik}}$ – время, затрачиваемое на перевозку груза от i-го поставщика в k-тый пункт назначения.

2.У трёх поставщиков есть цемент нескольких видов и марок.

Поставщик	Виды цемента	Марки цемента	Количество цемента, кг	Коэффициент перевода в марку «400»
A_1	Портландцемент	500	2560	1,2
		400	4000	1,0
	Шлакопортландцемент	400	5000	1,0
		300	1800	0,8
A_2	Портландцемент	400	1000	1,0
	Шлакопортландцемент	400	1000	1,0
		300	1210	0,8
A_3	Портландцемент	500	3240	1,2
	Шлакопортландцемент	400	5000	1,0

Известен спрос потребителей на цемент по видам спроса.

Потре-бители	Вид спроса	Объём спроса, кг
B_1	Портландцемент марки 500	1300
	Портландцемент марок 400 или 500	2000
	Цемент любого вида и марки	3000
Потре-бители	Вид спроса	Объём спроса, кг
B_2	Портландцемент марок 400 или 500	2000
	Портландцемент или шлакопортландцемент марок 400 или 500	9000

B_3	Портландцемент марки 500 Цемент любого вида и марки	3000 3500

Затраты на перевозку одной тонны цемента (любого вида) от каждого поставщика до каждого потребителя:

потребители / поставщики	B_1	B_2	B_3
A_1	12	35	27
A_2	20	25	17
A_3	18	9	29

Составить модель формирования плана перевозки цемента, минимизирующего транспортные расходы на перевозку.

3. На 3 сахарных завода доставляется сахарная свекла из 4-х совхозов. Максимальные мощности ее производства по **первому**, **второму** и **четвертому** совхозам равны соответственно 250, 300, и 600 тыс. тонн. Минимальное производство сахарной свеклы **во втором** совхозе составляет 100 тыс. тонн. Себестоимость производства свеклы по совхозам составляет соответственно 15, 20, 35 и 10 руб. за центнер. Стоимость перевозки 1 тонны свеклы на каждый завод задана матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 15 \\ 2 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 15 & 17 & 20 \end{pmatrix}$$

Составить математическую модель оптимального производства сахарной свеклы и ее перевозки на заводы.

4. На заводах, расположенных в точках $\boldsymbol{h_1}$ и $\boldsymbol{h_2}$ **,** из сырья, добываемого в месторождениях $\boldsymbol{i_1}$ и $\boldsymbol{i_2}$, изготавливаются два сорта продукции $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ для пунктов потребления $\boldsymbol{j_1}$ и $\boldsymbol{j_2}$. Потребности пункта $\boldsymbol{j_1}$ могут быть удовлетворены при помощи 1500 единиц продукции сорта A, из которых 1000 единиц «заменимы» B, то есть вместо каждой единицы сорта A можно использовать две единицы сорта B. Для пункта j_2 требуется 1200 единиц продукта сорта A, из которых заменимыми B являются 900 единиц.

Из единицы сырья может быть получено или две единицы продукта A, или четыре единицы продукта B.

Себестоимость добычи сырья в обоих месторождениях одинакова – 60 руб., а провоз единицы сырья обходится: из пункта i_1 в пункт k_1 – 60 руб., в пункт k_2 – 120 руб.; из i_2 в k_1 – 180 руб., в k_2 – 60 руб.

Расходы по изготовлению единицы продукции сорта A на заводах k_1 и k_2 составляют (без расходов по добыче и доставке сырья) соответственно 90 руб. и 60 руб. Расходы по изготовлению единицы продукции сорта B и на заводе k_1, и на заводе k_2 составляют 15 руб.

Перевозка готовой продукции обходится в расчёте на единицу продукции (любого сорта): при снабжении заводом k_1 потребителей в j_1 в 30 руб.; при снабжении тех же потребителей заводом k_2 – 60 руб.; при доставке в пункт i_2 продукции из k_1 расходы составляют 50 руб., при доставке в тот же пункт продукции из k_2 соответствующая величина составляет 70 руб.

Максимально возможный объём добычи сырья в месторождении i_1 – 500 ед., i_2 – 1000 ед.

Верхние границы возможных масштабов производства готовой продукции составляют для завода k_1: 800 единиц продукции сорта A и 2000 единиц сорта B, для завода k_2 – 700 единиц по сорту A и 1600 единиц по сорту B. При этом производственная программа для завода k_1 должна предусматривать производство не менее 600 единиц продукции сорта A.

Требуется составить комплексный план добычи сырья в пунктах i_1 и i_2, переработки его на заводах k_1 и k_2 и доставки готовой продукции потребителям в j_1 и j_2, который обеспечил бы полное удовлетворение потребностей при наименьших производственных и транспортных расходах.

5. Нефтяная компания в ходе аукциона получила в свое распоряжение четыре месторождения. Геологоразведочные работы показали, что в районе месторождения $\boldsymbol{M_1}$ можно было бы пробурить не более 30 скважин, месторождения $\boldsymbol{M_2}$ – не более 80, $\boldsymbol{M_3}$ – не более 10, $\boldsymbol{M_4}$ – не более 20. К сожалению, не существует гарантии, что все пробуренные скважины будут производительны. Вероятности успешного завершения буровых работ на всех месторождениях приведены в таблице:

Месторождения	Вероятность успешного завершения бурения	Стоимость бурения одной скважины, млн. руб.	Количество обсадных труб на одну скважину
M_1	50%	12	20
$\boldsymbol{M_2}$	90%	5	50
M_3	60%	10	35
M_4	80%	8	40

В данной таблице также приведена полная стоимость бурения одной скважины, а также количество обсадных труб, необходимых для одной скважины. Обсадные трубы требуются для подготовки скважины к эксплуатации, поэтому они используются только в случае успешного бурения.

Компания имеет собственные запасы обсадных труб, которые находятся на двух складах компании $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ и $\boldsymbol{S_2}$ в количествах 1500, 850 и 2000 штук соответственно. Кроме того, в случае необходимости трубы могут быть закуплены у производителя, имеющего собственный склад $\boldsymbol{S_4}$ по цене 1 тыс. руб. за штуку в количестве не более 2500.

В следующей таблице приведены затраты на транспортировку труб от каждого склада до каждого из месторождений (тыс. руб. за 1 трубу)

месторождения / склады	M_1	M_2	M_3	M_4
S_1	0,5	0,3	0,6	0,02
S_2	0,01	0,4	0,1	0,4
S_3	0,8	0,6	0,6	1,1
S_4	0,5	0,7	0,6	0,1

Компания имеет возможность оплатить расходы, связанные с разработкой **всех** месторождений.

На основании данной информации построить модель для определения оптимального плана бурения скважин нефтяной компании, минимизирующего все расходы.

6. Инспектор компании «Отеда» имеет 3 различных проекта строительства дорог, каждый из которых был рассчитан на всё лето. Инспектор хочет, чтобы проекты были завершены к концу лета и средства на эти проекты изыскивались на месте. В результате были найдены три подрядчика, каждый из которых предлагал цену на каждые из трёх проектов, которая показана в следующей таблице.

(тыс. долларов)

проект / подрядчик	P_1	P_2	P_3
C_1	14	16	18
C_2	18	14	16
C_3	19	17	20

Необходимо распределить контракты таким образом, чтобы минимизировать общие затраты по всем проектам, предполагая, что каждый подрядчик может выполнить ровно один проект.

7. Компания имеет 5 новых районов продаж и 6 коммивояжёров, пригодных, чтобы назначить их в эти районы. Эти районы продаж достаточно малы, так что для каждого района требуется только один человек. Данные относительно этих районов продаж и коммивояжёров даны ниже.

Район продаж	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Годовой объём потенциальных продаж (в 10000 долл.)	5,2	7,0	6,4	4,8	5,0

Коммивояжёры	1	2	3	4	5	6
Оценка степени захвата риска (%)	75	60	55	80	50	45

Проценты представляют оценку доли потенциальных продаж каждым коммивояжёром, если бы они работали в одинаковых условиях. Проценты отражают различия в способностях коммивояжеров осуществлять продажи.

Каким образом следует сделать назначения для того, чтобы максимизировать общий потенциальный объём продаж?

8. 7 классов школы бизнеса собираются посетить 14 местных компаний. Каждый класс будет разделён на 2 группы и каждая группа посетит одну компанию. Задача заключается в том, чтобы распределить компании между группами таким образом, чтобы наилучшим образом отразить желание входящих в них студентов.

В каждой группе было проведено голосование и опрос для того, чтобы разработать перечень предпочтений для 14 компаний: «1» означает «наиболее предпочтительна», «14» – «наименее предпочтительна». Предпочтения каждого из семи классов приведены в таблице ниже:

Компания		Классы						
		1	2	3	4	5	6	7
1		11	10	11	14	13	6	9
2	М	5	4	3	4	6	4	6
3	М	2	2	4	3	3	7	2
4		14	13	12	10	14	12	14
5	М	1	1	1	2	1	1	1
6		9	12	7	6	11	9	11
7	М	6	7	9	7	2	5	8
8	М	10	14	8	9	8	11	7
9		13	11	13	12	12	13	12
10		12	8	14	13	10	14	13
11		4	6	2	1	7	3	4
12	М	3	3	6	5	4	2	3
13	М	7	9	5	8	5	8	5
14		8	5	10	11	9	10	10

Распределить по две компании на класс так, чтобы минимизировать суммарное значение «точек ранжирования».

Используя тот же самый метод, переделать распределение так, чтобы каждому классу досталось по одной промышленной компании (обозначенной «М» в приведённой таблице) и одной компании, занятой в сфере услуг.

§ 3. Распределительные модели

3.1. Модели распределительных процессов

Задачи оптимального распределения взаимозаменяемых ресурсов получили название *распределительных задач*. Для их формулировки введём обозначения:

$\boldsymbol{i}$ – номер одного из взаимозаменяемых ресурсов, $\boldsymbol{p}$ – общее число взаимозаменяемых ресурсов;
$\boldsymbol{a_i}$ – общее количество i-го ресурса;
$\boldsymbol{k}$ – номер потребителя, $\boldsymbol{q}$ – общее число всех потребителей;
$\boldsymbol{b_k}$ – количество «единиц потребности» k-того потребителя;
$\boldsymbol{c_{ik}}$ – оценка использования единицы i-го ресурса на удовлетворение k-го потребителя;
l_{ik} – количество «единиц потребности» k-того потребителя, которые удовлетворяются единицей i-го ресурса;
$\boldsymbol{x_{ik}}$ – количество единиц i-го ресурса, используемых для удовлетворения k-го потребителя.

С учётом обозначений математическая модель распределительных процессов имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} c_{ik}x_{ik} \to \min(\max)$$

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i, i=1..p \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{q} l_{ik}x_{ik} \ge b_k, k=1..q \quad \textbf{(2)}$$

$$x_{ik} \ge 0, i=1..p, k=1..q \quad \textbf{(3)}$$

В зависимости от конкретного характера задачи может варьироваться конкретное содержание, а также размерность исходных величин a_i, b_k, c_{ik}, l_{ik}, что в свою очередь приведёт к некоторой модификации модели. Так, например, l_{ik} может выражать число единиц i-го ресурса, затрачиваемых на единицу k-той потребности. Тогда ограничения (1), (2) заменяются на

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i$$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{x_{ik}}{l_{ik}} \ge b_k$$

Если при этом c_{ik} означает оценки единицы k-го изделия в руб./шт, то изменится и выражение для целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\frac{c_{ik}x_{ik}}{l_{ik}} \to \min(\max)$$

Целевая функция может максимизироваться, например, если c_{ik} означает прибыль, стоимость и т.д., или минимизироваться, если эти оценки измеряют затраты, себестоимость и т.д. Форма модели также будет зависеть от выбора переменных x_{ik}. Вне зависимости от этих полученных модификаций модели она имеет некоторое сходство с транспортной. Однако наличие в одной из групп ограничений множителей l_{ik} приводит к известным осложнениям при анализе этих моделей.

Распределительные задачи решаются с помощью специальных вычислительных методов, представляющих собой модификацию методов решения транспортных задач. Частными видами таких задач являются:

1) простые распределительные задачи (все l_{ik} = const);

2) задачи с однородными ресурсами (все строки матрицы (l_{ik}) одинаковы, то есть $l_{ik} = l_{1k}$ при различных k);

3) задачи с пропорциональными ресурсами ($l_{ik} = a_i l_{1k}$ при различных i).

3.2. Задачи для закрепления приемов моделирования распределительных процессов

<u>Задача 1.</u> Имеется три сорта бумаги в количествах 10, 8 и 5 т, которые можно использовать на издание четырёх книг тиражом в 8000, 6000, 15000 и 10000 экземпляров. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,6, 0,8, 0,4 и 0,5 кг, а себестоимость (в коп.) печатания книги при использовании i-го сорта бумаги задаётся матрицей:

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов.

<u>Вариант решения 1.</u> Обозначим через $\boldsymbol{x_{ik}}$ *количество бумаги* $\boldsymbol{i}$-го сорта, расходуемой на печать k-той книги. Тогда получим следующие ограничения на запасы бумаги (по каждому сорту):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 10000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 8000$$

(1)

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 5000$$

Ограничения на производственную программу:

$$\frac{1}{0,6}\left(x_{11} + x_{21} + x_{31}\right) \ge 8000$$
$$\frac{1}{0,8}\left(x_{12} + x_{22} + x_{32}\right) \ge 6000$$

(2)

$$\frac{1}{0,4}\left(x_{13} + x_{23} + x_{33}\right) \ge 15000$$
$$\frac{1}{0,5}\left(x_{14} + x_{24} + x_{34}\right) \ge 10000$$

Требование неотрицательности переменных: $x_{ik} \ge 0, \forall i = 1..3, k = 1..4$. **(3)**

Функция цели в данной задаче представляет собой выражение, описывающее производственные расходы на печать книг, которые должны быть минимизированы:

$$\frac{1}{0,6}\left(24x_{11} + 18x_{21} + 30x_{31}\right) +$$
$$\frac{1}{0,8}\left(16x_{12} + 24x_{22} + 24x_{32}\right) +$$
$$\frac{1}{0,4}\left(32x_{13} + 24x_{23} + 16x_{33}\right) +$$
$$\frac{1}{0,5}\left(25x_{14} + 20x_{24} + 20x_{34}\right) + \to \min$$

(4)

Ограничения (1-3) и целевая функция (4) составляют искомую математическую модель.

<u>*Вариант решения 2.*</u> Обозначим через $\boldsymbol{x_{ik}}$ *количество экземпляров* $\boldsymbol{k}$-той *книги*, отпечатанной на бумаге $\boldsymbol{i}$-того сорта. Тогда получим следующие ограничения на запасы бумаги (по каждому сорту):

$$0,6x_{11} + 0,8x_{12} + 0,4x_{13} + 0,5x_{14} \le 10000$$
$$0,6x_{21} + 0,8x_{22} + 0,4x_{23} + 0,5x_{24} \le 8000$$

(1)

$$0,6x_{31} + 0,8x_{32} + 0,4x_{33} + 0,5x_{34} \le 5000$$

Ограничения на производственную программу:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 8000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 6000$$
(2)
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 15000$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 10000$$

Требование неотрицательности переменных: $x_{ik} \geq 0, \forall i = 1..3, k = 1..4$. **(3)**

Функция цели:

$$24x_{11} + 16x_{12} + 32x_{13} + 25x_{14} +$$
$$18x_{21} + 24x_{22} + 24x_{23} + 20x_{24} +$$
$$30x_{31} + 24x_{32} + 16x_{33} + 20x_{34} \to \min$$

(4)

Ограничения (1-3) и целевая функция (4) составляют искомую математическую модель.

<u>Задача 2.</u> Авиакомпания для организации пассажирских перевозок между центром и четырьмя городами располагает тремя группами самолётов: 1-я группа – из 10 четырёхмоторных самолётов, 2-я – из 25 двухмоторных самолётов и 3-я – из 40 двухмоторных старого образца.

Минимальное (гарантированное) количество пассажиров, перевозимых одним самолётом данного типа по каждому маршруту за один месяц (в тыс. человек), и связанные с этим эксплуатационные расходы на 1 самолёт (в тыс. рублей) указаны соответственно в правых верхних и левых нижних углах каждой клетки таблицы. Там же в двух последних строках приведены: количество пассажиров, которое нужно перевезти по данному маршруту в месяц, и стоимость одного билета.

маршрут самолет	Город			
	1	2	3	4
1	1,6 16	2,2 20	1,3 15	–
2	2,8 30	3,0 25	2,4 20	2,0 25
3	0,8 15	–	1,0 12	1,5 16
Количество пассажиров, тыс. чел.	20	50	40	30
Стоимость билета, руб.	25	15	20	15

Распределить самолёты по маршрутам из условия достижения максимальной прибыли авиакомпании.

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{x_{ij}}$ количество самолетов $\boldsymbol{i}$-го вида, выполняющих рейсы по $\boldsymbol{j}$-му маршруту. Тогда получим ограничения на количество самолетов каждого вида:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 10$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 25$$
(1)
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 40$$

В данной задаче потребностью является необходимость перевезти определенное количество пассажиров по определенному маршруту. Тогда ограничения на удовлетворение потребностей будут выглядеть следующим образом:

$$1{,}6x_{11} + 2{,}8x_{21} + 0{,}8x_{31} \ge 20$$
$$2{,}2x_{21} + 3{,}0x_{22} \ge 50$$
(2)
$$1{,}3x_{31} + 2{,}4x_{32} + 1{,}0x_{33} \ge 40$$
$$2{,}0x_{42} + 1{,}5x_{43} \ge 30$$

Требование неотрицательности переменных: $x_{ij} \ge 0, \forall i = 1..3, j = 1..4$.
(3)

Целевая функция должна представлять собой выражение, описывающее доход авиакомпании, который формируется за счет продаж билетов за вычетом эксплуатационных расходов. Она будет иметь вид:

$$25(1{,}6x_{11} + 2{,}8x_{21} + 0{,}8x_{31}) + 15(2{,}2x_{12} + 3x_{22}) + 20(1{,}3x_{13} + 2{,}4x_{23} + 1x_{33}) + 15(2x_{24} + 1{,}5x_{34}) -$$
$$-(16x_{11} + 20x_{12} + 15x_{13}) - (30x_{21} + 25x_{22} + 20x_{23} + 25x_{24}) - (15x_{31} + 12x_{33} + 16x_{34}) \to \max$$
(4)

Ограничения (1-3) и целевая функция (4) составляют искомую математическую модель.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. На четырёх ткацких станках с объёмом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-часов может изготавливаться ткань трёх артикулов в количествах 260, 200, 340 и 500 метров за 1 час. Составить модель формирования плана загрузки станков, если прибыль (в руб.) от реализации 1 м ткани i-го артикула при её изготовлении на k-м станке характеризуется элементами матрицы:

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}2 & 2{,}0 & 2{,}8 \\ 2{,}2 & 1{,}0 & 1{,}9 & 1{,}2 \\ 1{,}6 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix},$$

а суммарная потребность в ткани каждого из артикулов равна соответственно 200, 100 и 150 тыс. м.

2. Четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 700, 500, 450 и 550 машин при себестоимости ремонта одной машины в 50, 70, 65 и 60 руб. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 350, 350, 300 и 200 машин. Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ, в 3-й и 4-й мастерских – только на указанный вид работ. Матрица

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 70 & 50 \\ 20 & 80 & 30 & 10 \\ 60 & 30 & 30 & 40 \\ 10 & 40 & 50 & 50 \\ 20 & 30 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризует транспортные расходы на доставку машины с i-й автобазы на k-тую ремонтную мастерскую.

Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объёма ремонтных работ по всем автобазам.

3. Четыре различных предприятия могут выпускать любой из четырёх видов продукции. Производственные мощности предприятий позволяют обеспечить выпуск продукции каждого вида в количествах (по заводам): 50, 70, 100 и 30 тыс. штук, а плановое задание составляет соответственно (по видам продукции) 30, 80, 20 и 100 тыс. шт. Матрица

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

характеризует себестоимость единицы k-го вида продукции при производстве его на i-м предприятии.

Найти оптимальное распределение планового задания между предприятиями.

4. Имеется три предприятия (1, 2, 3), которые могут выпускать три вида продукции: А, Б, В. Каждое из них располагает двумя видами ресурсов (I, II), объёмы которых составляют для 1-го предприятия 250 и 150 единиц, для 2-го 100 и 200 единиц и для 3-го соответственно 240 и 300 единиц. Известны: нормы затрат каждого ресурса на i-м предприятии для производства единицы k-й продукции (k = 1, 2, 3); себестоимость производства единицы k-й продукции на i-м предприятии; объём производства k-й продукции, предусмотренный производственной программой.

Все указанные числовые данные приведены в следующей таблице:

Предпри-ятия	Продукция А		Продукция Б		Продукция В	
	Нормы затрат	себесто-	Нормы затрат	себесто-	Нормы затрат	себесто-

	I ресурс	II ресурс	имость	I ресурс	II ресурс	имость	I ресурс	II ресурс	имость
1	2	4	2	1,1	2	8	2,5	3	5
2	1,5	5	3	1,6	3	7	2,2	2,5	6
3	2,2	3	2,5	1,2	2,4	9	2,4	4,2	7
Программа выпуска	300			170			250		

Составить математическую модель для определения оптимальной специализации производства из условия минимизации суммарной себестоимости.

Решить ту же задачу из предположения, что I вид ресурсов жёстко закреплён за предприятием, а II вид можно передавать от одного предприятия другому.

§ 4. Моделирование процессов смешивания

4.1. Типовые модели процессов смешивания

Рассматривается проблема составления смесей из различных компонент, обладающих заданным набором свойств. Среди всевозможных смесей необходимо найти смесь, обладающую заданными свойствами, согласующимися со свойствами компонент, и имеющую минимальную стоимость.

Вид формализованной модели задачи составления оптимальных смесей зависит от типов переменных. Если в качестве переменных $\boldsymbol{x_j}$ взять долю $\boldsymbol{j}$-й компоненты в смеси, то модель запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

(1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge R_i, i = 1..m$$

(2)

$$a_j \le x_j \le b_j, \ j = 1..n$$

(3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

(4)

Здесь:

$\boldsymbol{i}$ – порядковый номер свойств, которыми обладают компоненты и смесь, $i = 1..m$;

$\boldsymbol{a_{ij}}$ – величина $\boldsymbol{i}$-го свойства для $\boldsymbol{j}$-той компоненты;

$\boldsymbol{R_i}$ – требование на величину $\boldsymbol{i}$-го свойства для ед. смеси;

(a_j, b_j) – интервал возможного включения j-той компоненты в смесь;
c_j – стоимость единицы j-той компоненты.

Если неизвестные сформулированы в виде: x_j – объём вложений j-той компоненты *в натуральном выражении*, то ограничение (1) приведённой выше модели записывается в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b,$$

где b – общее количество смеси, которое должно быть получено.

В такие модели, как правило, также включаются ограничения (2-3). Однако b_j несёт иную смысловую нагрузку. Здесь b_j – количество j-той компоненты, которое есть в наличии.

Если известны условия изготовления компонентов с учётом имеющихся для этой цели ресурсов, то возникает более сложная объединённая задача составления оптимальной смеси, для которой будут с наибольшим эффектом использованы ресурсы в производстве компонентов. Усложнение задачи может происходить и за счёт внесения в модель ограничений, связанных с условиями использования смесей. В качестве примера рассмотрим модель составления оптимальных схем внесения удобрений. Введём обозначения:

j – вид культуры, J – число всех видов культур;
i – вид смеси удобрений, I – число всех видов смесей;
q – способ внесения удобрений, Q – число всех способов внесения удобрений;
r – номер формы, в которой находится действующее вещество в удобрении (легко- или труднорастворимые);
N_r, P_r, K_r – количество азота, фосфора и калия r-й формы, имеющегося на предприятии;
N_{iqjr}, P_{ijqr}, K_{ijqr} - количество действующего вещества азота, фосфора и калия r-й формы, необходимого для внесения по q-му способу в i-ю смесь под j-ю культуру на 1 га земли;
m – вид органического удобрения, M – число всех видов органических удобрений;
H_m – количество m-го вида органических удобрений, имеющихся на предприятии,
H_{ijqm} – количество органического удобрения m-го вида, вносимое по q-му способу в i-ю смесь под j-ю культуру на 1га земли;
S_{jq} – площадь посева под j-ю культуру, в которую можно внести удобрения по q-му способу;
a_{ijq} – логический коэффициент, равный 1, если можно внести i-ю смесь q-м способом под j-ю культуру, и равный 0 в противном случае;
C_{ijq} – эффективность (прибыль), полученная при внесении i-й смеси q-м способом под j-ю культуру на 1га земли;
x_{ijq} – число гектаров земли, отводимое под j-ю культуру с внесением i-й смеси удобрения q-м способом.

Получим следующую математическую модель:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{Q} c_{ijq} x_{ijq} \to \max$$

Азотные удобрения: $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{l}\sum_{q=1}^{Q} N_{ijqr}\, x_{ijq} \le N_r$

Фосфорные удобрения: $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{Q} P_{ijqr}\, x_{ijq} \le P_r$

Калийные удобрения: $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{Q} K_{ijqr}\, x_{ijq} \le K_r$

Органические удобрения: $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{q=1}^{Q} H_{ijqm}\, x_{ijq} \le H_m,\ m = 1..M$

Площади: $\sum_{i=1}^{I} a_{ijq}\, x_{ijq} \le S_{jq},\ \ j = 1..J,\ \ q = 1..Q$

$$x_{ijq} \ge 0,\ i = 1..I,\ \ j = 1..J,\ q = 1..Q$$

4.2. Задачи на закрепление приемов моделирования процесса смешивания

Задача 1. Из четырёх видов основных материалов (медь, цинк, свинец, никель) составляют три вида сплавов латуни: обычный, специальный и для художественных изделий. Цены единицы веса меди, цинка, свинца и никеля составляют 0,8 руб., 0,6 руб., 0,4 руб. и 1,0 руб., а единицы веса сплава, соответственно, 2 руб., 3 руб., 4 руб.

Сплав для художественных изделий должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца; специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав компоненты могут входить без ограничения.

Производственная мощность предприятия позволяет выпускать (за определённый срок) не более 400 ед. веса обычного сплава, не более 700 ед. веса специального сплава и не более 100 ед. веса сплава для художественных изделий.

Найти производственный план, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{x_{ij}}$ долю $\boldsymbol{i}$-той компоненты в $\boldsymbol{j}$-той смеси. Тогда получим следующие ограничения модели:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$$

(1)

Ограничения на количество компонент в смесях:

$$x_{12}\ge 0{,}7;\ x_{22}\ge 0{,}1;\ x_{32}\le 0{,}2;\ x_{42}\ge 0{,}04$$
$$x_{13}\ge 0{,}5;\ x_{33}\le 0{,}3;\ x_{43}\ge 0{,}06$$

(2)

Требование неотрицательности переменных: $x_{ij}\ge 0, \forall i=1..4,\ j=1..3$.
(3)

Целевая функция представляет собой сумму величин прибыли, получаемой с единицы веса каждого сплава:

$$\begin{aligned}&(2-0{,}8x_{11}-0{,}6x_{21}-0{,}4x_{31}-1{,}0x_{31})+\\&(3-0{,}8x_{12}-0{,}6x_{22}-0{,}4x_{32}-1{,}0x_{42})+\\&(4-0{,}8x_{13}-0{,}6x_{23}-0{,}4x_{33}-1{,}0x_{43})\to\max\end{aligned}$$

(4)

Ограничения (1-3) и целевая функция (4) представляют собой модель для получения искомой информации.

<u>Задача 2.</u> Госпиталь стремится минимизировать стоимость мясного питания (говядина, свинина и баранина). Больничный рацион должен содержать, по крайней мере, 1,5 фунта жирного мяса на человека в неделю. Говядина, которая стоит 1,25 доллара за фунт, содержит 20% жирной и 80% постной части. Свинина – 1,5 доллара за фунт и содержит 60% жирной и 40% постной части, баранина стоит 1,4 доллара за фунт и состоит из 30% жирной и 70% постной части. Госпиталь имеет холодильную площадь не более чем на 900 фунтов мяса. В госпитале на мясной диете 200 пациентов. Сколько фунтов каждого вида мяса необходимо покупать еженедельно для того, чтобы обеспечить необходимую калорийность рациона при минимальной стоимости?

<u>Решение.</u> Пусть $\boldsymbol{x_i}$ – количество мяса $\boldsymbol{i}$-го вида, закупаемого госпиталем. Тогда получим следующие ограничения модели. Ограничение на объем холодильной камеры:

$$x_1+x_2+x_3\le 900 \qquad \textbf{(1)}$$

Ограничение на калорийность рациона:

$$\frac{1}{200}(0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3) \geq 1{,}5$$

(2)

Требование неотрицательности переменных: $x_i \geq 0, \forall i = 1..3$.

(3)

Целевая функция – минимизация расходов на закупки:

$$1{,}25x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}4x_3 \to \min$$

(4)

Целевая функция (4) и ограничения (1-3) образуют искомую модель.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Потребность в азотных удобрениях составляет 10 млн. т. Их можно удовлетворить за счёт производства двух продуктов: аммиачной селитры и аммиачной воды. Для их производства необходим аммиак, общий расход которого для удовлетворения соответствующих нужд в плановом году не может превышать 8 млн. тонн. Технологические нормы материальных затрат, удельные текущие расходы и капитальные вложения в производство каждого из продуктов даны в таблице:

Химический продукт	Технологические нормы затрат аммиака, т/т	Удельные капитальные вложения, руб./т	Себестоимость единицы продукта, руб./т
Аммиачная селитра	0,6	3,0	7,0
Аммиачная вода	1,0	6,0	6,5

Определить план производства селитры и аммиачной воды в плановом году, необходимых для удовлетворения потребности народного хозяйства в азотных удобрениях, с наименьшими суммарными затратами.

Решить задачу при знании нормативной эффективности капитало-вложений 0,1.

Проследить, как отражаются на оптимальном плане изменения значений нормативной эффективности капиталовложений от 0,1 до 0,3.

2. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекингбензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырёх компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина:

сорт A	2 : 3 : 5 : 2
сорт B	3 : 1 : 2 : 1
сорт C	2 : - : 1 : 3

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина составляет соответственно 120 руб., 100 руб. и 150 руб.

Определить план смешивания компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

Определить оптимальный план смешивания из условия максимального использования компонентов.

3. Компания по производству удобрений может произвести в текущем месяце 1400 т нитратов, 1600 т фосфатов и 1200 т поташа. Это количество имеется в распоряжении или уже заказано и не может быть получено в большом количестве, пока не пройдут следующие 30 дней. Необходимо определить способы смешивания активных ингредиентов с определёнными инертными ингредиентами, предложение которых не ограничено, в два основных удобрения, который позволит максимизировать прибыли в текущем месяце.

Двумя основными удобрениями являются тип 1 (5:10:10) и тип 2 (10:10:5). Числа в скобках представляют процентное отношение (по весу) нитратов, фосфатов и поташа соответственно (оставшуюся долю составляют инертные ингредиенты).

Цены ингредиентов показаны в таблице:

Ингредиенты удобрения	Цена за тонну
Нитраты	160
Фосфаты	140
Поташ	100
Инертные удобрения	8

Затраты смешения, упаковки и продажи одинаковы для обоих смесей и составляют 15 долларов за тонну. Цены на удобрения, по которым компания может их реализовать, в настоящее время составляют 50 долларов за тонну типа 1 и 55 долларов для типа 2.

Необходимо определить, сколько производить каждого типа смеси в этом месяце, чтобы максимизировать общую прибыль.

4. «Южная алкогольная корпорация» импортирует три сорта виски – Ирландское, Шотландское и Канадское. Они смешивают их согласно рецептам, устанавливающим максимум или минимум процентного содержания Ирландского и Канадского в каждой смеси:

Смесь	Спецификация	Цена на 1/5 галлона
Old Oierhoul	Не меньше 60% Ирландского Не больше 20% Канадского	6,80
Highband Spec	Не больше 60% Канадского Не меньше 15% Ирландского	5,70
Young Frezy	Не больше 50% Канадского	4,50

Стоимость и запасы трёх основных видов виски приведены в таблице:

Виски	Наличие виски, 1/5 галлона в день	Стоимость 1/5 галлона
Ирландское	2000	7
Шотландское	2500	5
Канадское	1200	4

Составить модель, позволяющую определить, сколько производить каждого типа смеси, чтобы получить максимальную прибыль.

§ 5. Модели оптимального раскроя материала

5.1. Простейшая модель оптимального раскроя материала

На многих промышленных предприятиях при массовом производстве продукции необходимо получить наиболее рациональный раскрой материалов (доски, листы металла, трубы, прокат, рулоны ткани и т.д.). План раскроя считается оптимальным, если он обеспечивает наибольший выход заготовок или наименьший объём отходов.

Простейшая модель оптимального раскроя материалов для получения заданного количества заготовок выглядит следующим образом.

На предприятие поступают однотипные рулоны материалов. Надо найти такой план раскроя рулонов материала по ширине, при котором будут наименьшие отходы.

Введём обозначения:

$\boldsymbol{i}$ – вид заготовки, $\boldsymbol{m}$ – число всех видов заготовок;

$\boldsymbol{j}$ – вариант раскроя рулона по ширине, $\boldsymbol{n}$ – число всех вариантов раскроя;

$\boldsymbol{d_i}$ – необходимое число заготовок i-го вида;

$\boldsymbol{d_{ij}}$ – число заготовок $\boldsymbol{i}$-го вида, которое можно получить из одного рулона материала согласно $\boldsymbol{j}$-му варианту раскроя;

$\boldsymbol{C_j}$ – отходы материала, полученные из рулона материала согласно $\boldsymbol{j}$-му варианту раскроя;

$\boldsymbol{A}$ – общее количество рулонов, имеющихся в наличии;

$\boldsymbol{x_j}$ – искомое число рулонов, раскраиваемых согласно $\boldsymbol{j}$-му варианту.

Математическая запись модели:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = d_i, i = 1..m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le A$$

$$x_j \ge 0$$

Это задача линейного программирования, для решения которой можно применить симплекс-метод.

Теперь рассмотрим **модель оптимального раскроя партий материалов** для изготовления комплектов.

На предприятие, изготавливающее комплекты, поступает сырьё в виде партий материалов, имеющих свои размеры. Надо получить раскрой материалов, обеспечивающий выпуск максимального числа комплектов. Для формирования модели введём обозначения:

s – номер партии материала, S – число всех партий материалов;

i – вид заготовки;

l_i – число заготовок i-го вида, необходимых для одного комплекта;

n – число всех комплектов;

d_s – количество материалов одного размера в одной партии s-го вида;

j – номер варианта раскроя;

n_s – число вариантов раскроя для каждой единицы s-й партии;

d_{sij} – число заготовок i-го вида, получаемых из единицы материала s-й партии согласно j-му варианту раскроя;

x_{sj} – искомое количество единиц материала s-й партии, раскраиваемых согласно j-му варианту.

При раскрое всех партий будет получено $\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{n_s} d_{sji}\, x_{sj}$ заготовок i-го вида

Их достаточно для $\frac{1}{l_i}\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{n_s} d_{sji}\, x_{sj}$ комплектов.

Поскольку число комплектов минимизируется теми заготовками, которые позволяют составить наименьшее число комплектов, то число полных комплектов равно:

$$n = \min_i \frac{1}{l_i}\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{n_s} d_{sji}\, x_{sj}$$

Задача состоит в максимизации числа комплектов

$$\min_i \frac{1}{l_i}\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{n_s} d_{sji}\, x_{sj} \to \max$$

при условии выполнения плана раскроя заготовок

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = d_s,\ s = 1..S,$$

а также неотрицательности компонент.

$$x_{sj} \ge 0,\ s = 1..S,\ j = 1..n_s\,.$$

Если через z обозначить число комплектов, то сформированная модель сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$z \to \max$$

при ограничениях

$$\frac{1}{l_i}\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{n_s} d_{sji}\, x_{sj} \ge z,\ i = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = d_s,\ s = 1..S$$

$$z \ge 0,\ x_{sj} \ge 0,\ s = 1..S,\ j = 1..n_s$$

5.2. Задачи на закрепление материала

<u>Задача 1.</u> Листы материала размером 6х13 надо раскроить так, чтобы получились заготовки двух типов: 800 заготовок размером 4х5 м и 400 штук заготовок размером 2х3 м. При этом расход материала должен быть минимальным. Способы раскроя материала и количество заготовок каждого типа, полученных при раскрое одного листа, даны в таблице.

Размер заготовок, м^2	Способы раскроя			
	I	II	III	IV
4 x 5	3	2	1	0
2 x 3	1	6	9	13

<u>Решение.</u> Пусть $\boldsymbol{x_i}$ – количество заготовок, раскроенных $\boldsymbol{i}$-м способом. Тогда ограничение на количество заготовок:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 800$$
$$x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 400$$

(1)

Требование неотрицательности переменных: $x_i \ge 0, \forall i = 1..3$.
(2)
Целевая функция – минимизация количества расходуемых листов:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

(3)

Ограничения (1-2) и целевая функция (3) образуют искомую модель.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

1. На складе предприятия имеются заготовки (стальные бруски) длиной 8,1 м. Из этих заготовок необходимо изготовить 100 комплектов более коротких заготовок. При этом в один комплект входят два бруска длиной 3 м и по одному бруску длиной 2 м и 1,5 м. Необходимо раскроить исходный материал так, чтобы получить требуемое количество комплектов коротких заготовок с минимальными отходами. Количество коротких заготовок, которое получается из одного исходного бруска при различных способах раскроя, и величины отходов по каждому способу раскроя заданы в таблицах:

Размер заготовки, м	Способ								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	2	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	2	1	4	3	2	1	0
1,5	0	1	0	2	0	1	2	4	5
Отходы, м	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

2. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материалов, причём первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры изготавливаются комплекты, включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Один лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в таблице:

Первая партия				Вторая партия		
Способ раскроя / Детали	1	2	3	Способ раскроя / Детали	1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы получить максимальное число комплектов.

§ 6. Разные задачи

1. Управление аэрофлота хочет нанять новых стюардесс на работу в течение 4-х последующих месяцев. Найм осуществляется в начале месяца и продолжается до конца месяца, чтобы обучить стюардесс прежде, чем они приступят к регулярным полётам.

Требуется 110 часов непрерывной работы стюардессы в течение месяца, чтобы обучить каждую из них, и поэтому непрерывные обслуживающие полёты сокращаются на 110 часов для каждой практикантки.

В среднем стюардесса работает по 160 часов в месяц на авиалиниях аэрофлота. Ниже приведено количество лётных часов стюардесс, необходимое для постоянного обслуживания в следующие 4 месяца:

Сентябрь	9000
Октябрь	8000
Ноябрь	10000
Декабрь	12000

1 сентября на авиалиниях работало 67 стюардесс. Из прошлого опыта известно, что 10% стюардесс покидают свою работу каждый месяц. Каждая стюардесса получает 200 рублей в виде заработной платы. Стоимость подготовки стюардессы 120 рублей.

Составить модель формирования плана найма стюардесс, чтобы обеспечить линии и минимизировать затраты на их обучение и работу.

2. В хозяйстве требуется выполнить следующие типы работ: культивацию пара, подъём пара, культивацию пропашных, сенокос.

Работа выполняется при помощи тракторов ДТ-75 (10 машин), «Беларусь» (8 машин) и Т-25 (5 машин). Сезонная норма выработки составляет: для трактора ДТ-75 – 4000 га, для трактора «Беларусь» – 2400 га и для Т-25 – 750 га.

Требуется распределить работы между тракторами так, чтобы они были выполнены с минимальной себестоимостью. При подъёме пара и культивации пропашных трактор Т-25 не используется.

Вид работы	Себестоимость			Объём работ, га
	ДТ-75	«Беларусь»	Т-25	
Культивация	4,5	4,2	5	1200
Подъём пара	3	3,5		4000
Культивация пропашных	4	4,5		350
Сенокошение	3,5	3	4,2	1000

3. Для контроля за работой баллистической ракеты используются 4 вида датчиков, которые помещены на ракете и результаты измерений которых регистрируются тремя типами наземных регистраторов-самописцев. Каждый датчик определяет одну из характеристик (температура, давление и т.д.) и передаёт результаты по отдельному каналу связи на любой самописец.

В следующей таблице указаны численность датчиков и самописцев, а также время, затрачиваемое на включение соответствующего канала связи.

Самописцы \ Датчики	20	40	50	40
70	2	1	5	3
90	3	2	3	4
60	3	4	1	2

Определить оптимальное закрепление датчиков к регистрирующим устройствам, при котором достигается минимум суммарных затрат времени на переключение каналов.

4. Инвестиционная компания «Омега» имеет 800 тыс. долларов, которые она хочет вложить в некоторые или все из следующих активов: корпоративные облигации, правительственные облигации, высокорисковые корпоративные облигации, обыкновенные акции, привилегированные акции и недвижимость. Эксперт компании по инвестициям оценивает ожидаемую годовую доходность, фактор риска, показывающий вероятность, с которой оцениваемый продукт будет дефицитен. Кроме того, известны сроки, на которые средства могут быть размещены в те или иные активы.

Инвестиционные мероприятия	Ожидаемый годовой продукт (%)	Фактор риска	Средний инвестиционный срок (в годах)
Корпоративные облигации	6,2	0,17	12
Правительственные облигации	7,5	0,03	15
Высокорисковые облигации	14,5	0,63	4
Обыкновенные акции	13,8	0,55	2
Привилегированные акции	7,7	0,12	6
Недвижимость	10,6	0,30	5

Компания стремится увеличить средний инвестиционный срок, по крайней мере, до 7 лет. Правительственное регулирование препятствует вложению более чем 30% инвестиций компании в высокорисковые облигации и обыкновенные акции. Также компания хочет, чтобы средний фактор риска составлял не более чем 0,25.

Как инвестиционная компания «Омега» должна разместить 800 тыс. долларов, чтобы максимизировать ожидаемый доход?

5. Правительственное агентство имеет в распоряжении 100000 долларов для распределения их между пятью фабриками, расположенными вдоль определённой реки с тем, чтобы помочь им сократить уровень загрязнения в реке в течение следующего года. Все фабрики стремятся полностью использовать фонды, полученные для того, чтобы сократить уровень загрязнений.

Текущее исследование показало следующий уровень загрязнения и стоимость сокращения уровня загрязнения.

Завод	F1	F2	F3	F4	F5
Текущий годовой уровень загрязнения (в млн. галлонов)	3,7	5,3	3,1	4,4	4,8
Стоимость сокращения уровня загрязнения на 1 млн. галлонов (тыс. долл.)	4,1	6,95	4,5	3,8	5,72

Из-за определённых условий окружающей среды абсолютно необходимо, чтобы уровень загрязнений F2 и F5 был сокращён, по крайней мере, на 2,9 и 2,4 млн. галлонов соответственно.

Как должны быть распределены деньги по заводам для того, чтобы максимизировать общее сокращение уровня загрязнений в реке в течение следующего года?

6. Самолёт компании “*Gamma Air Lines*" летает между Нью-Йорком и Монреалем. Эти полёты беспосадочные и график их движения показан в таблице:

Из Нью-Йорка в Монреаль			Из Монреаля в Нью-Йорк		
Рейс	Отправление	Прибытие	Рейс	Отправление	Прибытие
110	6.00	8.00	310	7.00	9.00
120	8.00	10.00	320	10.00	12.00
130	12.00	14.00	330	13.00	15.00
140	15.00	17.00	340	16.00	18.00
150	19.00	21.00	350	21.00	23.00
160	23.00	1.00	360	0.00	2.00

Авиационный устав предписывает, что когда члены экипажа приписанного в Нью-Йорке самолёта летят в Монреаль, они должны вернуться в Нью-Йорк на следующем рейсе; подобной же системы придерживаются и члены экипажа, приписанного в Монреале. “*Gamma Air Lines*" желает минимизировать сумму времени остановок в пути своих экипажей. Каким образом следует распределить экипажи, чтобы минимизировать общее время остановок в пути?

7. Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны 5 типов проектов. По каждому из проектов известны: длительность закладки фундамента и строительства остальной части здании в днях, а также жилая площадь дома и стоимость 1 кв. м жилой площади.

Тип дома	I	II	III	IV	V
Длительность закладки фундамента	20	30	35	30	40
Продолжительность остальных работ	40	20	60	35	25
Жилая площадь	3000	2000	5000	4000	6000
Стоимость 1 кв. м	200	150	220	180	200

Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий.

1) Определить план строительства, обеспечивающий ввод максимальной жилой площади в течение года (300 рабочих дней).

2) Решить ту же задачу при дополнительном ограничении, число домов должно оказаться не менее 10.

3) Определить годовой план строительства, максимизирующий суммарную площадь при дополнительном условии, что средняя себестоимость 1 кв. м не превышает 180 р.

8. Предприятие выпускает два продукта (k = 1,2) для удовлетворения спроса $\boldsymbol{b_{jk}}$, меняющегося по полугодиям (j = 1,2). Изготовление продуктов может производиться на трёх машинах (i = 1,2,3), для которых известно время $\boldsymbol{t_{ik}}$, затрачиваемое i-й машиной на производство k-го продукта и суммарный резерв времени $\boldsymbol{a_{ij}}$, которым располагает i-я машина в j-м полугодии. Известны также затраты $\boldsymbol{c_k}$ на хранение единицы k-го продукта в течение полугодия. Все указанные величины приведены в следующей таблице:

t_{ik}			a_{ij}			b_{kj}			c_k
	I	II		I	II		I	II	
1	2	1	1	70	10	1	20	30	3
2	2	3	2	100	60	2	30	40	5
3	4	2	3	120	100				

Определить оптимальную производственную программу из условия минимизации затрат на хранение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ПРОГРАММА КУРСА

Тема 1. Основы прикладного моделирования

1.1. Понятия: “модель”, “моделирование”. Свойства моделей. Виды моделирования: физическое, геометрическое, предметно-математическое, логико-математическое. Примеры.

1.2. Понятие: “экономико-математическая модель“ (ЭММ). Типы ЭММ: балансовая, оптимизационная, эконометрическая. Этапы разработки моделей. Особенности моделирования макро(микро) экономических процессов.

1.3. Математическая структура модели. Структурное моделирование.

Тема 2. Основные типовые модели регионального использования производственных ресурсов

2.1. Производственные функции как основа разработки макроэкономических моделей. Понятие и виды производственных функций (ПФ).

2.2. Формальные свойства ПФ. Предельные и средние значения. Изокванта. ПФ в темповой записи. Эластичность замещения факторов.

2.3. Задачи оптимизации расходования ресурсов. Их классификация. Модель Новожилова. Модели экономического взаимодействия. Взаимные задачи. Модель Канторовича.

2.4. Модели оптимизации деятельности отраслевых комплексов: транспортно-производственные, транспортные, развитие и размещения производства.

2.5. Модели оптимизации деятельности производственных фирм: формирования оптимального плана, загрузки оборудования, календарного планирования.

2.6. Модели оптимизации технологических процессов: смешивания, раскроя.

Тема 3. Моделирование многоотраслевых комплексов

3.1. Схема и характеристика разделов межотраслевого баланса (МОБ). Основные балансовые соотношения модели МОБ. Методы отыскания объемов валовых выпусков.

3.2. Коэффициенты прямых затрат: понятие, способы расчета. Коэффициенты косвенных затрат. Коэффициенты полных затрат: два определения, способы расчета.

3.3. Коэффициенты прямых и полных трудовых затрат и затрат фондов. Смешанная модель МОБ. Расширенная модель МОБ.

3.4. Аналитические приемы агрегирования. Ошибка агрегирования. Равенство Хатанака.

3.5. Динамический межотраслевой баланс (ДМОБ): схема, балансовые отношения. ДМОБ как система дифференциальных уравнений. ДМОБ как система конечно-разностных уравнений.

3.6. Модель ДМОБ с учетом лага капитального строительства.

Тема 4. Экономическая динамика и ее моделирование

4.1.Экономическая динамика. Показатели экономической динамики. Понятие динамического равновесия. Примеры моделей экономической динамики.

4.2. Модель Лурье. Критерий проверки проведения ОТМ на основе модели Лурье.

4.3. Модель Харрода-Домара. Модель Солоу.

4.4. Динамические модели экономического выбора потребителя.

2. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

(основная)

1. Замков А.А., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДИС, 1998. – 364 с.
2. Математические методы в планировании отрасли и предприятия. - М.: Экономика, 1973. – 374 с.
3. Гранберг А.Г. Математические методы в социалистической экономике. – М.: Экономика, 1978. – 350 с.
4. Жак С.В. Математическая модель менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону, ЛаПо, 1997. – 307 с.
5. Коссов В.В. Межотраслевой баланс. – М.: Экономика, 1979. – 270 с.
6. Петухов А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.

(вспомогательная)

1. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для ВУЗов / Федосеев В.В., Гармаш А.Н. и др.; под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
2. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических процессах / Под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. – М.: Наука, 1986. – 196 с.
3. Математическое моделирование: Методы, описание и исследование сложных систем / Под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. – М.: Наука, 1989. – 266 с.

Составители: Баева Нина Борисовна
Замятин Игорь Викторович
Азарнова Татьяна Васильевна
Аснина Альбина Яковлевна

Редактор Тихомирова О.А.