<u>Rappels</u> $\cdot\ L X_t = X_{t-1}$

$\cdot\ F = L^{-1}\ ,\ F X_t = X_{t+1}$

1) * X_t est un $AR(1)$ <u>si</u> stationnaire

* si $|\varphi| = 1$ on a vu en TP 4 que X_t non stationnaire.

* si $|\varphi| < 1$ on définit $a_i = \left| \begin{array}{ll} \varphi^i & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

a_i est donc absolument sommable. On peut donc écrire :

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i L^i\right)(1 - \varphi L) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i L^i\right)(1 - \varphi L)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\varphi^i L^i - \varphi^{i+1} L^{i+1}\right)$$

$$= \varphi^0 L^0$$

$$= 1$$

d'où $(1 - \varphi L)^{-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i L^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i L^i$

$\Rightarrow X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i L^i \varepsilon_t$

$$\boxed{X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}}$$

<u>Représentation moyenne mobile</u> : $\boxed{X_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\ ,\ a_i = \left| \begin{array}{ll} \varphi^i & i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.}$

* si $|\varphi| > 1$ on définit $a_i = \left| \begin{array}{ll} \varphi^{-i} & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$ $= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^i$

~~(c'est-à-dire~~ $\cancel{a_i = \left| \begin{array}{ll} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{-i} & i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.}$ ~~)~~

donc a_i est absolument sommable. On peut écrire :

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i F^i\right)(1 - \varphi L) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi^{-i} F^i\right)(1 - \varphi L)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\varphi^{-i} F^i - \varphi^{-i+1} F^{i-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\varphi^{-i} F^{i} - \varphi^{-(i-1)} F^{i-1}\right)$$

$$= -\varphi^{-0} F^{0}$$

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i F^i\right)(1-\varphi L) = -1$$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i F^i = -\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^i F^i = (1-\varphi L)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad X_t = (1-\varphi L)^{-1} \varepsilon_t$$

$$= -\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^i F^i \varepsilon_t$$

$$\boxed{X_t = -\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^i \varepsilon_{t+i}}$$

Écriture moyenne mobile $\boxed{X_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \varepsilon_{t+i} \quad a_i = \begin{cases} \varphi^{-i} & i \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

↳ dépend du futur ! non-causale

Écriture pas naturelle, bien que stationnaire.

On pourrait modifier pour se ramener à une écriture causale (dépendant uniquement du passé) mais complexe

↳ en pratique on considère donc seulement les cas $|\varphi| < 1$.

2) * $\rho(h) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\mathrm{Var}(X_t)}$

• $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right)$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^{2i} \times \sigma^2$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X_t) = \frac{1}{1-\varphi^2} \times \sigma^2}$$

- On prend ε_t centré.

Soit $h > 0$ (de toute façon c'est symétrique). On a :

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \lim_{n \to +\infty} E\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \varphi^j \varepsilon_{t+h-j}\right)\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \varphi^i \varphi^j \underbrace{E(\varepsilon_{t-i}\, \varepsilon_{t+h-j})}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } -i \neq h-j \\ \sigma^2 & \text{si } \underbrace{-i = h-j}_{\Rightarrow\, j = h+i} \end{cases}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \varphi^i \varphi^{h+i} \sigma^2$$

$$= \sigma^2 \varphi^h \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \varphi^{2i}$$

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2 \varphi^h}{1 - \varphi^2}$$

Par "parité" on a $\forall h \in \mathbb{R}$ $\underline{Cov(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2 \varphi^{|h|}}{1 - \varphi^2}}$

- finalement $\underline{\rho(h) = \varphi^{|h|}}$

* l'"autocorrélation partielle" est la "projection sur le passé" (voir cours).

$$P_{\Pi_{t-1}^h}(X_t) = \varphi X_{t-1}$$

$$\Rightarrow r(h) = \begin{cases} \varphi & h = 1 \\ 0 & h > 1 \end{cases}$$

<u>3)</u> Matrice carrée de taille $h+1$.

$$\left(\frac{\sigma^2 \varphi^{|i-j|}}{1 - \varphi^2}\right)_{\substack{i=0,\dots,h \\ j=0,\dots,h}}$$

(pour $i=j$ on retrouve bien $\frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$)

<u>Rq</u> Comme ça ne dépend que de $|i-j|$, toutes les "sous-diago" sont identiques. Seule la première ligne suffit à connaître toute la matrice.