"دکتر نوری و دکتر گلزاری" تمرین سری اول مبانی ترکیبیات

"محمد زمانی - ۹۱۰۳۹۹۱۳۵"

پاسخ سؤال 1

قسمت i:

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4}$$

برای اثبات m را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

$$A,\ m = 2q \rightarrow \frac{m}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \cancel{\frac{(-1)^{m \to m=2q}}{4}}_{+\frac{1}{4}} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

پس وقتی $m=2q$ باشد آنگاه رابطه درست است حال برای $m=2q+1$ اثبات خواهیم کرد:

$$B,\ m = 2q+1 \Rightarrow \frac{m-1}{2} < \frac{m}{2} < \frac{m+1}{2} \Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m-1}{2} \quad (I)$$

$$\frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{m \to \text{فرد}}}{4} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2} \quad (II)$$

حال با توجه به (I) و (II) اثبات شد که رابطه برای $m=2q+1$ هم برقرار است.

قسمت ii: فرم کلی جواب:

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^m}{4}$$

حال اثبات می‌کنیم این رابطه درست است، مانند مثال قبل دو حالت خواهیم داشت:

$$A,\ m = 2q \rightarrow \frac{m}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{(-1)^{m \to \text{زوج}}}{4}}^{1} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

// محمد زمانی - ۶۱۰۳۹۹۱۳۵ //

B) $m = 2q+1 \rightarrow \frac{m-1}{2} < \frac{m}{2} < \frac{m+1}{2}$

$\Rightarrow \lceil \frac{m}{2} \rceil = \frac{m+1}{2}$ (I)

$\frac{m}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{\overset{\text{فرد}}{m}}}{4} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2}$ (II)

(I) و (II) $\Leftarrow$ این تساوی برای $m=2q+1$ نیز برقرار است.

پاسخ سؤال 2:

قسمت a) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

برای حل این سؤال نیز دو حالت خواهیم داشت:

A) $\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \sqrt{x}$ (I)

از آنجایی که فرض کردیم که $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ است پس قطعاً خود x نیز عضو $\mathbb{Z}$ است:

$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \sqrt{x}$ (II)

(I) و (II) برای این حالت اثبات کردیم حال برای حالت بعدی خواهیم داشت:

B) $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow k < \sqrt{x} < k+1$

پس حالا حساب خواهیم داشت:

$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = k$ (I)

همچنین:

$k < \sqrt{x} < k+1 \rightarrow k^2 < x < (k+1)^2$

$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor = \lfloor k \rfloor = k$ (II)

(I) و (II) می‌توانیم نتیجه بگیریم که این حالت نیز درست است پس حکم را اثبات کردیم.

MAR. 2015

Sun.	Mon.	Tue.	Wed.	Thu.	Fri.	Sat.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

NOTE :

"محمد زمانی _ ۶۱۰۳۹۹۱۲۵"

$\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$ قسمت ii:

این قسمت نیز کاملاً مشابه قسمت قبل خواهد بود.

ابتدا حالت بندی خواهیم کرد:

$A, \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \lceil \sqrt{x} \rceil = \sqrt{x} \quad (I) \\ \text{اگر } \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \text{ پس می توانیم بگوییم } x \in \mathbb{Z} \text{ است پس:} \\ \lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil = \sqrt{x} \quad (II) \end{cases}$

(I) و (II) ← این حالت درست است، حال حالت دوم:

$B, \sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow k < \sqrt{x} < k+1 \Rightarrow \lceil \sqrt{x} \rceil = k+1 \quad (I)$

$k < \sqrt{x} < k+1 \rightarrow k^2 < x < (k+1)^2 \Rightarrow \lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{(k+1)^2} \rceil = k+1 \quad (II)$

(I) و (II) ← این حالت نیز درست است، پس حکم مورد نظر اثبات شد.

پاسخ سؤال ۳:

$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \dots\dots \quad y_m \quad x_{m+1}$

m عدد انتخاب شده و با x_n ها فواصل را نشان می دهیم که تعداد آن $m+1$ است.

x_n هایی که تعریف کرده ایم تعداد اعدادی که در آن جا باید قرار بگیرد را نشان خواهد داد و همچنین x_1 و x_{m+1} می تواند خالی باشد. پس:

$\left.\begin{array}{l} x_1 , x_{m+1} > -1 \\ x_2 , x_3 , \dots , x_m > 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{معادله}} x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = n-m$

$\binom{n-m-(-2)-1}{m} = \binom{n-m+1}{m}$

محمد زمانی - ۸۱۰۳۹۹۱۳۵

پاسخ سؤال ۴ :

باید حالت بندی کنیم،

A, 1 1 1 1 _ 0 0 _ ⇒ 3 حالت

(0, 1) / (1, 0) / (0, 0)

B, 0 1 1 1 1 0 0 0 ⇒ 1 حالت

C, _ _ 1 1 1 1 _ _ _ impossible

D, 0 0 0 1 1 1 1 _ (0 or 1) 2 حالت

E, _ (1 or 0) 0 0 0 1 1 1 1 2 حالت

پس تعداد کل حالت‌ها 8 تا خواهد شد.

پاسخ سؤال 5 : قسمت i : اگر $n>2$ باشد صفر حالت - همچنین اگر $n=2$ باشد 2 تابع خواهیم داشت.

قسمت ii : 2^{n-2}

قسمت iii : $(n-1).2$

Scanned by CamScanner