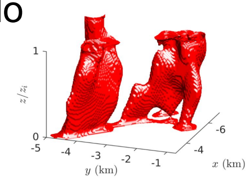
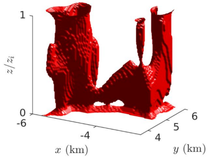
ME6010 Introducción a la turbulencia

Clase 1 - Introducción a la introducción

¿Quién soy (turbulencia)?

LES de nubes estratocúmulo





Mónica Zamora Z.
mzamora@uchile.cl
851 Poniente Of. 4-06(?)

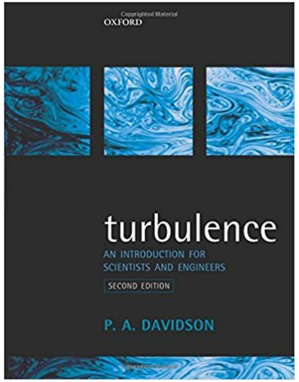
Estructura general del curso

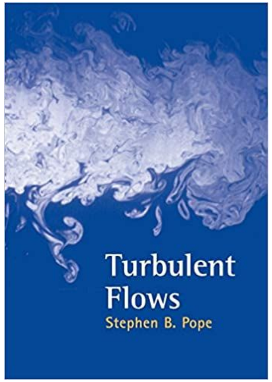
Introducción a la turbulencia

- Tema sumamente amplio y complejo
    - Adquirir herramientas *conceptuales* básicas (teoría clásica)
    - Acercamiento a problemas reales (lo que se sale de la teoría clásica)
    - Acercamiento a nuevos métodos de análisis (lo que está en boga)
- Va a ser un curso fácil o difícil? No lo sé. Podría ser más difícil sin duda

Contenidos

1. Teoría clásica de turbulencia (~7 semanas)
2. Modelos de turbulencia
3. Flujos turbulentos no canónicos
4. Nuevos métodos en turbulencia





Evaluaciones propuestas

- N Tareas (N a definir)
    - Conceptuales (preparan / apoyan el material de cátedra), incluyendo lecturas / vídeos
    - Análisis estadístico (programar en python / matlab)
    - La idea es trabajar en las tareas durante la hora de auxiliar (se fomenta el trabajo colaborativo, pero entregas son individuales). Se insta a liderar / participar en esta sesión
- 2 Controles
    - 1 control de teoría clásica, 1 control con todo lo demás
- Proyecto grupal (vamos a ver cómo resulta, alcances pueden variar)
    - Replicar *un análisis* de turbulencia de un paper, tema de interés para ustedes
    - Esencial: que haya datos disponibles!
    - 2 presentaciones *cortas*: temprana y final (se decidirá al azar en el momento quién presenta)
    - 1 reporte final *breve* en formato *paper* (artículo científico)
- Nota final: 30% tareas, 40% controles, 30% proyecto

Integridad académica y otros

- Copia y plagio: no me gustaría tener que lidiar con nada de esto. Principios: equidad y honestidad
- Comunicarse conmigo ante cualquier problema o dificultad: feedback sobre contenidos o evaluaciones, situaciones personales
- La idea del curso es aprender y nos toca evaluar ese aprendizaje porque son las reglas actuales, no es la idea generar sufrimiento o estrés innecesario
- La clase es un espacio seguro y de respeto (no por eso ultra serio y sin humor)

Horario

- Clase: Ma,Vi 2:30-4pm +hora de consultas: Ma 4-5pm
- Hora “auxiliar”: según el coordinador no habría ningún módulo … 2 horas de consulta mejor?

Segunda introducción ¿Quién eres tú?

- (por qué hay tanta gente en este curso?)
- especialidad / año / programa?
- por qué estás tomando este curso? / qué quieres aprender?
- futuro laboral / académico / otro?
- cuéntanos algo random de ti: ej: empecé a comer aceitunas este año

Mientras tanto: 3 encuestas en mentimeter.com

- 6701 1015: primera palabra que se te viene a la mente con “turbulencia”?
- 8394 8034: helado favorito?
- 7357 4970: pizza con/sin piña?

Preguntas antes de seguir?

Ahora sí, turbulencia (Cap. 1 Davidson)

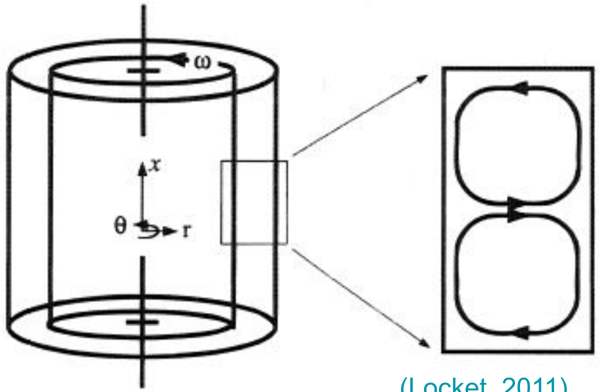
¿Qué ocurre?

- Movimiento caótico
- Mezcla de té y leche
- La turbulencia decae
    - qué tan rápido? gran punto
    - aún es materia de estudio

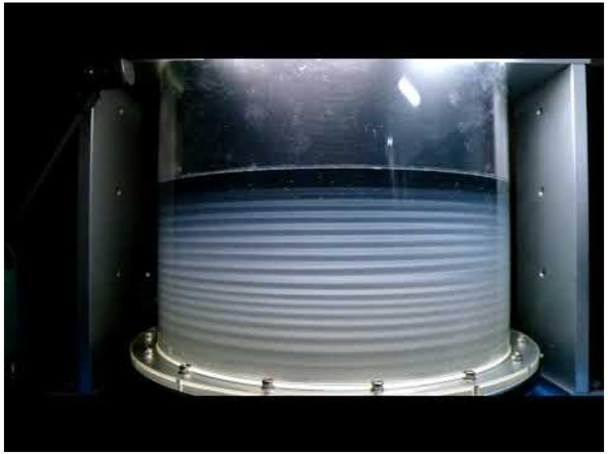
¿Otros ejemplos?

- Turbulencia en todos lados
- Veamos ejemplos clásicos

Experimento clásico 1: Couette - Taylor



(Locket, 2011)



- Inestabilidad nace de perturbaciones de fuerzas centrípetas / gradiente de presión
- Parámetro clave: número de Taylor

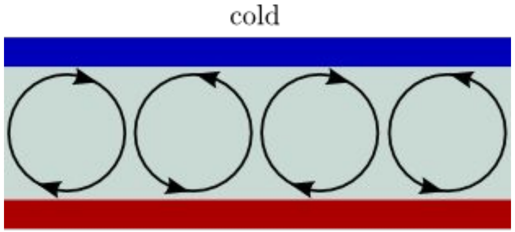
$$Ta = \frac{\omega^2 d^3 R}{\nu^2}, \ d/R, \ L/R$$

- Vórtices se forman para $Ta > Ta_c$
- >*Ta* configuraciones más complejas

Laminar → Vórtices → Vórtices con ondas → Vórtices turbulentos

En el último régimen aún hay estructura

Experimento clásico 2: Rayleigh - Bénard



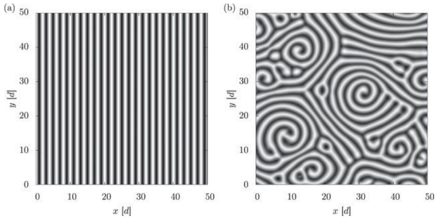
(MPI)

coef. expansión térmica

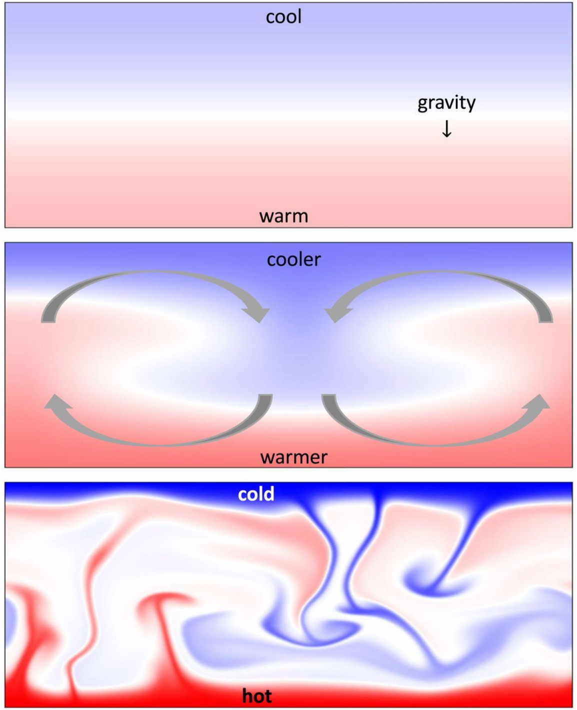
Parámetro crítico: $$Ra = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu\alpha}$$

difusividad térmica

Configuraciones en 3D:



(Schütz and Bodenschatz, 2016)



(Doering, 2020)

Estacionario (conducción molecular) → Celdas de convección* → Celdas turbulentas

*fuera del mundo de transferencia de calor, en general convección se refiere a este tipo de organización

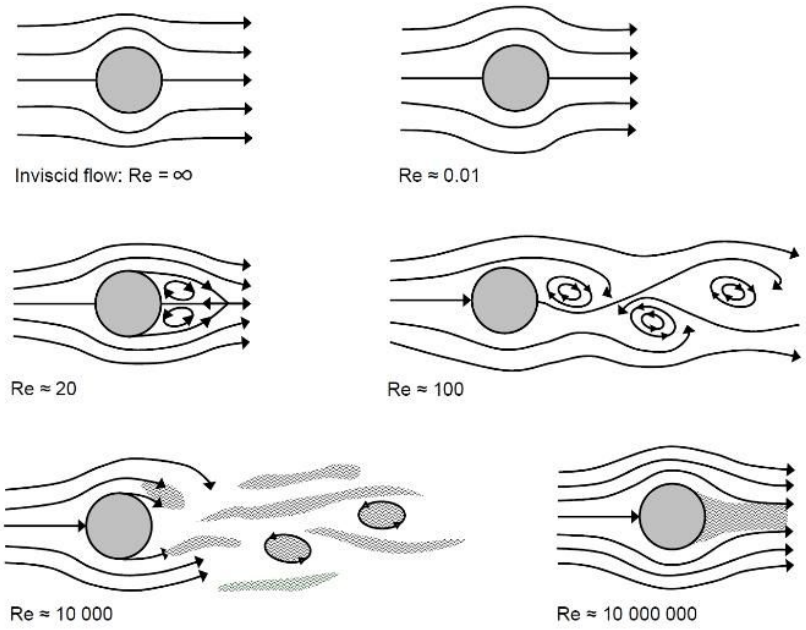
Qué tienen en común Taylor-Couette y Rayleigh-Bénard?

- Problemas análogos: fuerza centrífuga ~ empuje (buoyancy)
- De hecho, los números críticos son CASI idénticos (1,700, 0.7% diferencia)
- Existencia de un número crítico a partir del cual se generan inestabilidades
  - Esto se conoce como bifurcación
- Aumentando la velocidad angular o la diferencia de temperatura, estamos aumentando la velocidad del fluido / disminuyendo efectos viscosos
- Mayores cambios generan nuevas bifurcaciones, hasta llegar a un régimen con turbulencia

Ver más: F. Busse, 2012, The twins of turbulence research

* GRAN libro sobre inestabilidades hidrodinámicas es Drazin (2002)

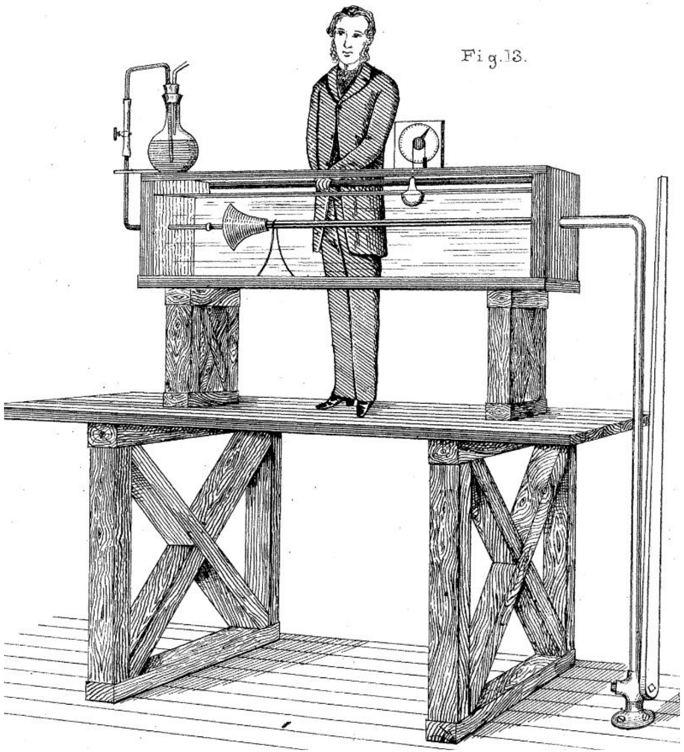
Experimento clásico 3: flujo sobre un cilindro



[(Cronodon)]

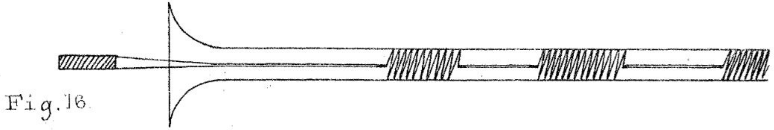
- Parámetro clave: Re
- Separación de capa límite induce vorticidad
- Progresivamente se desprenden vórtices (von Kármán street)
- Estela turbulenta con vórtices
- Estela eventualmente decrece en tamaño, sin desprender grandes vórtices
- (Número de Strouhal~ frecuencia de desprendimiento de vórtices)

Experimento clásico 4: Reynolds



(Reynolds, 1833)

- Flujo en tuberías lisas, parámetro: $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$
- Muy sensible a perturbaciones iniciales, impacta el Re crítico
- Pero para Re<2000, no hay turbulencia
- Transición también a lo largo de la tubería:
  - Se inicia en la pared, se desprenden porciones de flujo turbulento
  - A veces se observa intermitencia: zonas con menor turbulencia



Vemos dos rutas hacia la turbulencia

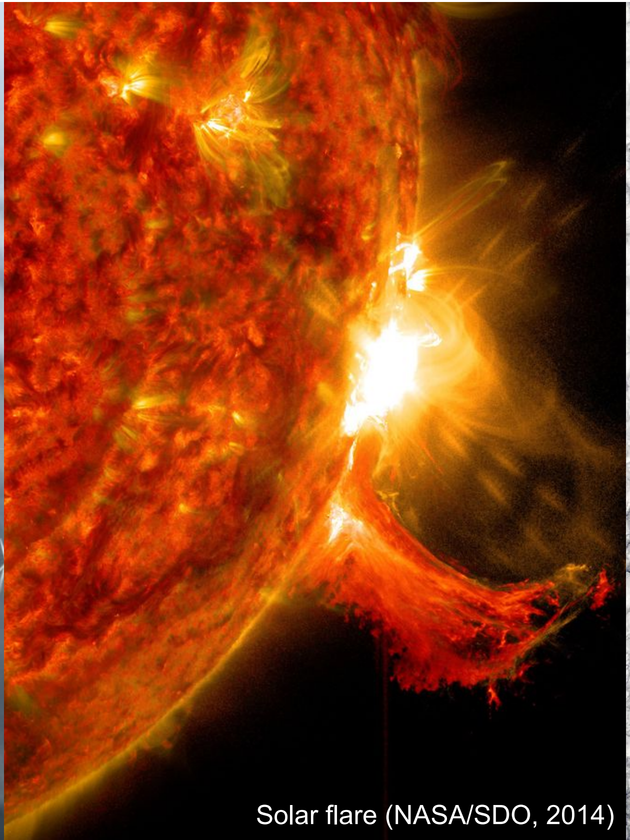
1. Pequeñas zonas con turbulencia se desarrollan y crecen (pared en el caso de tuberías)
2. Se sobrepasa un parámetro crítico y se llega a un estado de caos uniforme, puede ser por medio de una inestabilidad

Características de flujos turbulentos

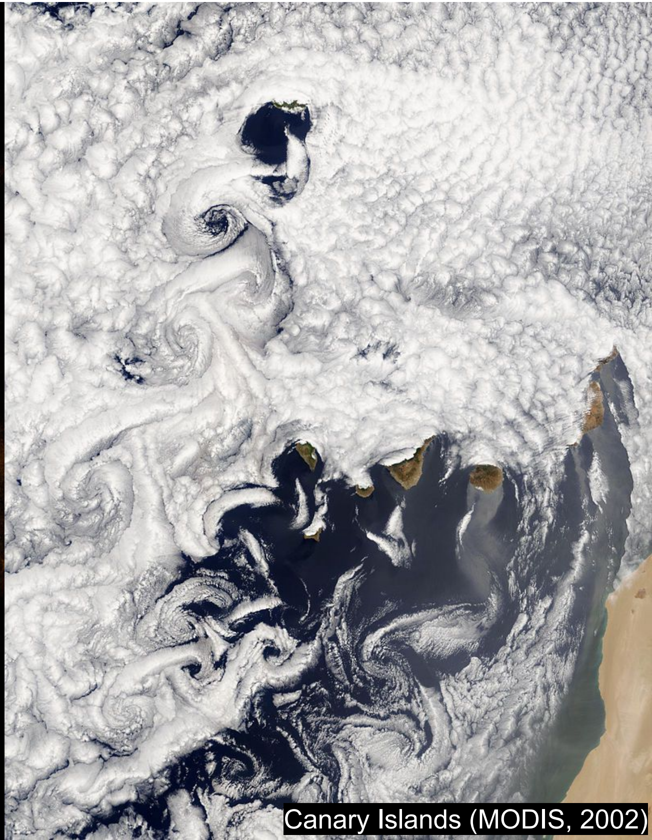
- Fluctuaciones aleatorias de velocidad, desorden espacial
- No se puede predecir (pero sí sus estadísticas!)
  - Fuerte dependencia de condiciones iniciales en su desarrollo
- Complementar esta lista en Tarea 1

Más ejemplos: por doquier

Horns Rev offshore wind farm (Hasager et al., 2017)



Solar flare (NASA/SDO, 2014)

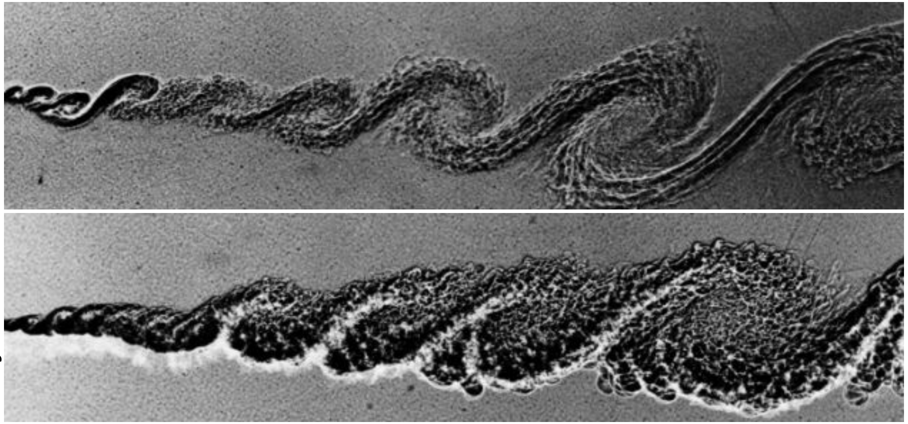


Canary Islands (MODIS, 2002)

Turbulencia como un conjunto aleatorio de *eddies*

- ¿Qué es un *eddy*? "masa" de vorticidad
- Hay eddies grandes (tamaño característico del problema) y eddies pequeños. Los tamaños más pequeños dependen de Re

Mayor Re



An album of fluid motion (van Dyke, 1982)

van Gogh, 1889

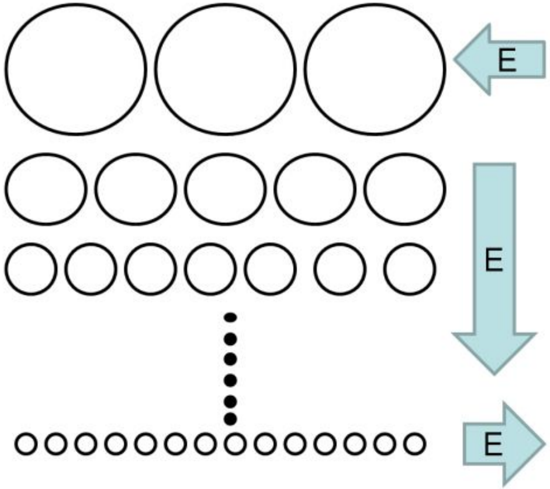
da Vinci, 1510

Diferentes escalas y cascada de energía (intro)

- Cascada de energía de Richardson: Los eddies grandes se rompen en eddies pequeños, llevándose la energía eventualmente a las escalas *más* pequeñas, donde los efectos viscosos dominan y la energía es disipada (fricción)

  “Big whirls have little whirls
  that feed on their velocity,
  And little whirls have lesser whirls
  and so on to viscosity”

  —Lewis F. Richardson, 1922



(Flowvision blog)

¿Tamaño de las escalas pequeñas?

Escalas grandes: $l,\ u,\ Re = ul/\nu$

Escalas pequeñas: $\eta,\ v,\ Re = \eta v/\nu \approx 1$

Tasa de energía transmitida en cada escala:

$$\Pi \sim u^2/\tau,\ \ \tau = u/l, \Rightarrow \Pi \sim u^3/l$$

$$\varepsilon \sim \nu S_{ij} S_{ji},\ \ S \sim v/\eta \Rightarrow \varepsilon \sim \nu v^2/\eta^2$$

- Toda la energía de gran escala se disipa, lo que puede ser cierto si el flujo es estadísticamente estable. Haciendo este balance:

$$\Pi \sim \varepsilon \Rightarrow \eta \sim l Re^{-3/4}$$

- A mayor Re, menores son las escalas pequeñas (o de Kolmogorov)

Ej: túnel de viento con $Re \sim 1000, l \sim 1$ cm $\Rightarrow \eta \sim 0.06$ mm

- A las escalas grandes les llamamos escala integral

Navier Stokes y el problema de clausura (intro)

Si partimos de Navier Stokes (NS) y continuidad para flujo no compresible,

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} = F_1(\mathbf{u}, p)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

y luego tomamos la divergencia de NS, llegamos a que p depende de u

$$\nabla^2\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\nabla\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) \Rightarrow p = f(\mathbf{u}) \qquad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = F_2(\mathbf{u})$$

por lo tanto, la ecuación para u debería ser fácil de resolver numéricamente. Pero para ello debemos resolverla a todas las escalas en el flujo (esto es DNS), y tiene un costo computacional altísimo. Por esto es que despejamos ecuaciones para las estadísticas de u: promedio y varianza, por ejemplo…

Navier Stokes y el problema de clausura (intro)

Idea:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\text{estadísticas de } \mathbf{u}] = \mathrm{F}[\text{otras estadísticas de } \mathbf{u}]$$

- Resulta que este sistema de ecuaciones no es cerrado (#incógnitas > #ecs.)
- Este es el problema de clausura, característico de turbulencia, y lo que motiva modelos de turbulencia (modelamos el término que “falta” determinar)
- Hasta ahora no hay una teoría unificada (sobre cómo se transmite la energía entre escalas y cómo decae). Hay muchos modelos separados
- De las pocas cosas en común que casi siempre tienen los flujos turbulentos están las pequeñas escalas de Kolmogorov y los efectos de pared
- Más detalles después. DNS es costoso, solo geometrías sencillas, por esto modelos como k-ε son los más usados en ingeniería

Tarea 1

1. Ver 3 vídeos y completar la lista “características de flujos turbulentos”
2. Estudiar 2 EDPs: Ec. advección-difusión y Ec. de Burgers
    a. Qué modelan estas EDPs? Qué representa cada término? Cómo son las soluciones?
    b. En qué se parecen a Navier-Stokes?

2021/8/20

ME6010 - Introducción a la turbulencia

Evaluaciones : controles : S8 , S14
proyecto : inicial S7 , final Exámenes.

Clase 2

Ecuaciones de Mecánica de fluidos (Cap 2. Davidson)

Antes de empezar, revisaremos notación indicial: "comprime las sumas"

vector $\vec{x} \rightarrow x_i$ (tiene un índice libre) $\quad i = \underset{x}{1}, \underset{y}{2}, \underset{z}{3}$

tensor/matriz $\underline{\underline{A}} \rightarrow a_{ij}$ (2 índices libres) $\quad$ tensor ~ sistema de referencia

operaciones :

se repiten los índices → se expande la suma

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Símbolos especiales

Delta de Kronecker $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases} \qquad \delta_{ij} = \underline{\underline{I}}$

$$\delta_{11} = 1 , \quad \delta_{12} = 0$$

ojo : $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

Levi-Civita $\quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : ijk, jki, kij \\ -1 & : ikj, kji, jik \\ 0 & : i=j, j=k, k=i \end{cases}$

Más operaciones:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \times b_j = \varepsilon_{ijk} a_i b_j = C_k \leftarrow 1 \text{ índice libre}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \times u_j = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = C_k$$

Volviendo a mecánica de fluidos,

3 principios físicos forman nuestras ecuaciones básicas :

1. - Segunda ley de Newton
2. - Ecuaciones constitutivas (ley de viscosidad de Newton)
3. - Conservación de masa

Balance de (1) en un volumen de control δV

$$\underbrace{\rho\,\delta V}_{\text{masa}} \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\vec{a}} = \underbrace{(-\nabla p)\,\delta V + \overbrace{\text{fuerzas viscosas}}}_{\vec{F}}$$

en un cubo diferencial: $\dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\,\delta V$

Llegando a una ecuación diferencial

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad //$$

(3) $\rightarrow$ $\nabla\cdot(\rho\vec{u}) = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$: para flujo no compresible $\rightarrow \nabla\cdot\vec{u} = 0$

(viene de $\frac{D}{Dt}(\rho\vec{u}) = 0$)

(2) $\rightarrow$ $\tau_{ij} = f(\vec{u})$ La ley de viscosidad de Newton

$$\tau_{ij} = \rho\nu \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}$$

Esfuerzos son proporcionales a la tasa de cambio de u_i, y la constante de proporcionalidad es $\mu = \rho\nu$

μ: viscosidad dinámica, ν: visc. cinemática.

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$: tensor esfuerzo-tasa de deformación

$$\Rightarrow \tau_{ij} = 2\rho\nu S_{ij}$$

Finalmente, nos queda

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Ec. de Navier-Stokes (N-S)

¿Qué es $\dfrac{D\vec{u}}{Dt}$? Derivada total, material, convectiva

Es la derivada de un elemento de fluido que se mueve en el espacio $\neq \dfrac{\partial}{\partial t}$: fija en el espacio

Veamos $T(\vec{x},t) \rightarrow \delta T \approx \dfrac{\partial T}{\partial t}\delta t + \dfrac{\partial T}{\partial x}\delta x + \ldots \quad / \cdot \dfrac{1}{\delta t}$

$$\frac{Dt}{Dt} \approx \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_x + \ldots$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\nabla)T}_{\text{advección}} \sim u_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

Para $\vec{u}(\vec{x},t) \rightarrow \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{Lagrangiano: Siguiendo al elemento de fluido}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overbrace{(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}}^{\text{advección}}}_{\text{en un sistema de referencia : Euleriano}}$

N-S final : $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}}_{\substack{\text{término no lineal}\\ \text{advección}}} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{u}}_{\text{difusión}}$$

Nota: $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ puede ser confuso : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ y $\frac{D\vec{u}}{Dt} \neq 0$ puede darse en casos donde el sistema de referencia genera "cambios en $\vec{u}$".

Versiones integrales de N-S

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i \, dV = -\oint_S u_i(\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}) - \oint_S p \, d\vec{S} + \left(\begin{matrix}\text{término}\\ \text{viscoso}\end{matrix}\right)$$

Puede interpretarse como un balance de momentum lineal en el volumen de fluido V : éste puede cambiar por transporte a través de S (advección), o bien por fuerzas de presión o viscosas.

Tasa de disipación de energía

¿A que tasa se convierte la energía mecánica en calor por fricción?

Para un volumen V con bordes S, tenemos esfuerzos $\tau_{ij} = 2\rho\nu S_{ij}$

$$\underbrace{\dot{W}}_{\text{tasa de trabajo de las fuerzas viscosas}} = \oint_S u_i(\tau_{ij}\, dS_j) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}[u_i \tau_{ij}]\, dV$$

La tasa de trabajo por elemento de volumen es

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[u_i\tau_{ij}] = \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{f_i \text{ : fuerza viscosa}} u_i + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

truco:
$\tau_{ij} = \tau_{ji}$
$S_{ij} = S_{ji}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

cambiando los índices

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\tau_{ij} + \tau_{ji}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

$$= \tau_{ij} S_{ij}$$

reescribiendo

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \tau_{ij})}_{\text{tasa de trabajo viscosa}} = \underbrace{f_i u_i}_{\text{trabajo viscoso neto}} + \underbrace{\tau_{ij} S_{ij}}_{\text{cambio de energía interna}}$$

Tasa de aumento de la energía interna por unidad de masa $\Big\}$ $\varepsilon = \dfrac{\tau_{ij} S_{ij}}{\rho} = 2\nu S_{ij} S_{ij}$

disipación

Hay otra manera de llegar a este resultado

e. cinética

$$\left\{ \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\vec{u} \right\} \cdot \vec{u} \rightarrow \vec{u}\cdot\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{p\vec{u}}{2}\right) + \nu\vec{u}(\nabla^2\vec{u})$$

El término viscoso $\nu\vec{u}(\nabla^2\vec{u}) = u_i \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\tau_{ij}}{\rho}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{u_i \tau_{ij}}{\rho}\right) - 2\nu S_{ij} S_{ij}$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\underbrace{\nabla\left(\left(\frac{u^2}{2}\right)\vec{u}\right)}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\nabla\left(\left(\frac{p}{\rho}\right)\vec{u}\right)}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i \tau_{ij}}{\rho}\right)}_{\mathrm{III}} - \underbrace{2\nu S_{ij} S_{ij}}_{\mathrm{IV}}$$

Si integramos en un volumen V,

- I : transferencia/transporte advectivo de e. cinética a través de S
- II : fuerzas de presión sobre S
- III : fuerzas viscosas sobre S
- IV : debe ser disipación : pérdida de e. cinética por fricción.

Se concluye de igual manera que la tasa de disipación de e. mecánica por unidad de masa es $\varepsilon = 2\nu S_{ij} S_{ij}$

Nota: La ecuación para $\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right)$ se puede reescribir como

$$\nu \vec{u}\cdot(\nabla^2\vec{u}) = -\nu(\nabla\times\vec{u})^2 + \nabla\cdot(\nu\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) = -\nabla\cdot\left(\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\vec{u} + \nu(\nabla\times\vec{u})\times\vec{u}\right) - \nu(\nabla\times\vec{u})^2$$

$\vec{\omega} = \nabla\times\vec{u}$, $\frac{\omega^2}{2}$: enstrofía

vorticidad

En un dominio cerrado V, varios términos se simplifican y

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{u^2}{2}\right)dV = -\nu\int(\nabla\times\vec{u})^2 dV = \int \varepsilon \, dV$$

debe serlo. esto solo se cumple para un régimen/fronteras "estacionarias"

Presión y velocidad

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\vec{u} & /\cdot\nabla(\cdot) \\ \nabla\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$$

Tomando la divergencia de N-S, $\nabla^2\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\nabla\cdot(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})$

tenemos una relación más directa $\Rightarrow$ " $p = f(\vec{u})$ "

Para dominio infinito, ley de Biot Savart:

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho}{4\pi}\int \frac{[\nabla\cdot(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})]'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}' = f(\vec{u})$$

Tenemos una expresión para p! Importante porque:

1) Sistema cerrado de ecuaciones ✓

2) $p(\vec{x})$ es una ecuación no-local: p se ve afectado por cómo se comporta $\vec{u}$ en todo el espacio. Eddies lejanos pueden afectarse mediante p.

24 Agosto 2021

Presión y velocidad

$$p(\vec{x}) = f(\vec{u}(\vec{x}))$$

ecuación no-local : todo el espacio afecta a p y éste a $\vec{u}$: "eddies lejanos pueden afectarse".

¿p afecta de igual manera a $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$?

Dinámica de vorticidad

vorticidad $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$: qué es físicamente?

Ej: Fluido 2D $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, w_z)$

Elemento circular, radio r y vel. angular Ω

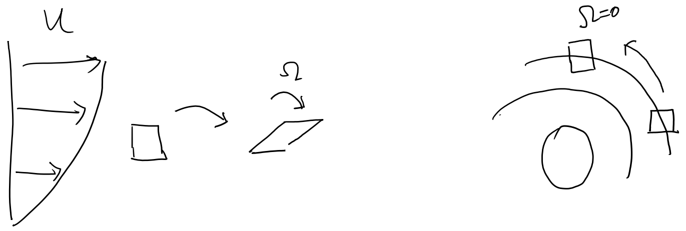
$$\int_S \underbrace{\nabla \times \vec{u}}_{\vec{w}} \, ds = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$w_z \pi r^2 = \Omega r \cdot 2\pi r$$

$$w_z = \frac{\Omega}{2}$$

Se puede generalizar a 3D : $\vec{w} = 2\vec{\Omega}$

Rotación "$\neq$" vorticidad



Los gradientes de velocidad $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla \vec{u}$ se pueden descomponer como una suma de deformación y vorticidad.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= S_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\omega_k$$

Son procesos diferentes pero no independientes

$$\nabla^2 u_i = 2\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = -[\nabla \times \vec{\omega}]_i$$

Ambos gradientes están relacionados aunque podemos tener solo contribuciones del uno o del otro.

¿A qué contribuyen más?

Tomemos $Q = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\left(S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{2}\vec{\omega}^2\right)$

Normalizando, $\Lambda = \dfrac{S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{2}\omega^2}{S_{ij}S_{ij} + \frac{1}{2}\omega^2}$ $\begin{cases} >0 : & \text{domina la deformación} \\ <0 : & \text{domina la vorticidad} \end{cases}$

otra invariante:

$$R = \frac{1}{3}\left(S_{ij}S_{jk}S_{ki} + \frac{3}{4}\omega_i\omega_j S_{ij}\right)$$

con R y Q se pueden clasificar las contribuciones.

Ecuación de vorticidad

identidad : $\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) - \vec{w}\times\vec{u}$

(N-S) $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u}\times\vec{w} - \nabla\overbrace{\left(\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)}^{C} + \nu\nabla^2\vec{u} \quad /\nabla\times(\cdot)$$

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial t} = \underbrace{\nabla\times\vec{u}\times\vec{w}}_{\vec{w}\cdot\nabla\vec{u} - \underbrace{\vec{u}\cdot\nabla\vec{w}}} - \cancelto{0}{\nabla\times\nabla C} + \nu\nabla^2\vec{w}$$

$\nabla\cdot\vec{u} = 0$

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt} = \underbrace{\vec{w}\cdot\nabla\vec{u}}_{?} + \nu\nabla^2\vec{w}$$

//

No hay un término con p!
La presión no actúa de la misma manera que sobre $\vec{u}$.

Para entender el significado de $\vec{w}\cdot\nabla\vec{u}$, considerar un espacio de fluido con $\vec{w} = 2\vec{\Omega}$

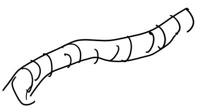
$\Rightarrow$ momentum angular $\vec{H} = \frac{1}{2}I\vec{w}$

Despreciando las fuerzas de presión (ej: dominio esférico)

$$\frac{DH}{Dt} = \text{torque viscoso} \Leftrightarrow I\frac{D\vec{w}}{Dt} = -\vec{w}\frac{DI}{Dt} + 2\,\text{torque viscoso}$$

si la viscosidad es despreciable, $\frac{D}{Dt}(I\vec{w}) = 0$

$I\vec{w}$ se conserva ~ analogía bailarina

eddy :  $\vec{w}$ también se comporta así
"vortex stretching"
estiramiento de vórtices

esto es lo que representa $\vec{w}\cdot\nabla\vec{u}$

Caso particular: 2D $\quad \vec{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$

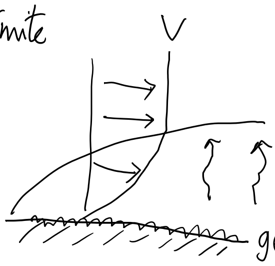
$$\Rightarrow \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = 0$$

Ec. vorticidad: $\dfrac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$: ec. advección difusión!

No hay término fuente/sumidero: solo se desplaza y difunde en el espacio.

De dónde viene la vorticidad entonces?

Ej. capa límite



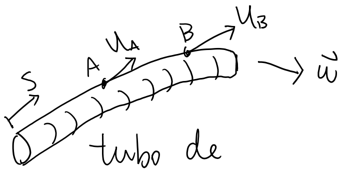
escalas: difusión $\delta \sim \sqrt{2\nu t}$
advección $x \sim V t$

$$\left.\begin{matrix} \delta \sim \sqrt{2\nu t} \\ x \sim Vt \end{matrix}\right\} \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

espesor capa límite

Volvamos al caso 3D

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \omega$$



$$u_\parallel = \vec{u} \cdot \hat{s}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{s}$$

$$\vec{\omega} \cdot \nabla u = |\vec{\omega}| \frac{du_\parallel}{ds}$$

Si $\dfrac{du_\parallel}{ds} > 0$ hay estiramiento

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} > 0 \rightarrow \vec{\omega} \text{ crece}$$

Otra manera de ver esta contibución es en la ec. de enstrofía: $\dfrac{\omega^2}{2}$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = \underbrace{\omega_i \omega_j S_{ij}}_{\text{estiramiento de vórtices}} - \underbrace{\nu (\nabla \times \vec{\omega})^2}_{\text{destrucción viscosa}} + \underbrace{\nu \nabla \cdot [\vec{\omega} \times (\nabla \times \vec{\omega})]}_{\text{despreciable}}$$

Teorema de Kelvin

- para flujo no viscoso
- "líneas de vorticidad se mueven como si estuvieran congeladas"

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \text{constante}$$

circulación

Stokes $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$ } en una superficie material el flujo de vorticidad a través de ella es constante

Discusión

- ecuaciones para $\vec{u}$ y $\vec{\omega}$
- importancia de la presión en N-S pero no en la ec. de vorticidad
- finalmente, $\vec{u}$ y $\vec{\omega}$ se afectan porque $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$

Antes de cerrar, revisemos las ecuaciones en una forma más general:

1) Continuidad : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

2) Navier-Stokes

fuerzas externas (ej: $\vec{g}$)

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}\right) = -\nabla p + \rho \cdot \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

3) Ec. vorticidad

usando $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla\left(\dfrac{u^2}{2}\right) + \vec{\omega} \times \vec{u}$

$\nabla \times (N-S)$

$$\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\cancel{\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)}+\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{u}}_{?}\right)=-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nabla\times\vec{f}+\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})=0$$

$$\nabla\times\vec{\omega}\times\vec{u}=\vec{u}\cdot\nabla\vec{\omega}-\cancel{\vec{u}(\nabla\cdot\vec{\omega})}+\vec{\omega}\underbrace{(\nabla\cdot\vec{u})}_{-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}}-\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{u}$$

* Notamos que $\displaystyle\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{D\vec{\omega}}{Dt}-\frac{1}{\rho^2}\vec{\omega}\frac{D\rho}{Dt}$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\frac{1}{\rho}\cancelto{0}{\nabla\times\nabla p}-\frac{1}{\rho^2}\nabla p\times\nabla\rho$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{\omega}}_{\frac{D\vec{\omega}}{Dt}}-\frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}}=\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{u}+\frac{1}{\rho^2}\nabla p\times\nabla\rho+\nabla\times\vec{f}+\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right)=\underbrace{\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{u}}_{A}+\underbrace{\frac{1}{\rho^2}\nabla p\times\nabla\rho}_{B}+\underbrace{\nabla\times\vec{f}}_{C}+\underbrace{\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right)}_{D}$$

A : estiramiento de vórtices

B : efectos baroclínicos/ no barotrópicos : importante en el caso atmosférico

: $\nabla p\times\nabla\rho\neq 0$

C : fuerzas no conservativas

D : efectos viscosos