

ME6010 Introducción a la turbulencia

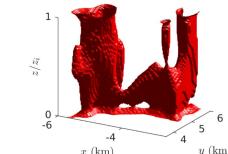
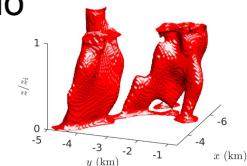
Clase 1 - Introducción a la introducción

¿Quién soy (turbulencia)?

LES de nubes estratocúmulo



Mónica Zamora Z.
mzamora@uchile.cl
851 Poniente Of. 4-06(?)



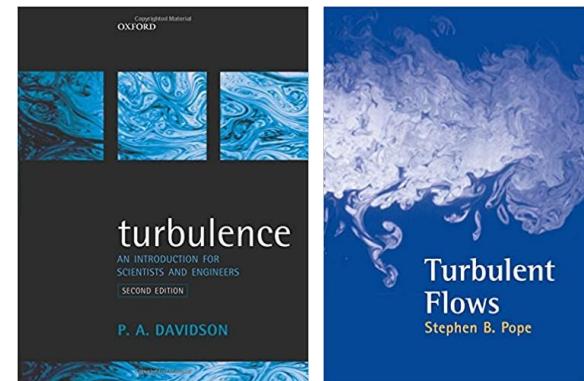
Estructura general del curso

Introducción a la turbulencia

- Tema sumamente amplio y complejo
 - Adquirir herramientas *conceptuales* básicas (teoría clásica)
 - Acercamiento a problemas reales (lo que se sale de la teoría clásica)
 - Acercamiento a nuevos métodos de análisis (lo que está en boga)
- Va a ser un curso fácil o difícil? No lo sé. Podría ser más difícil sin duda

Contenidos

1. Teoría clásica de turbulencia (~7 semanas)
2. Modelos de turbulencia
3. Flujos turbulentos no canónicos
4. Nuevos métodos en turbulencia



Evaluaciones propuestas

- N Tareas (N a definir)
 - Conceptuales (preparan / apoyan el material de cátedra), incluyendo lecturas / vídeos
 - Análisis estadístico (programar en python / matlab)
 - La idea es trabajar en las tareas durante la hora de auxiliar (se fomenta el trabajo colaborativo, pero entregas son individuales). Se insta a liderar / participar en esta sesión
- 2 Controles
 - 1 control de teoría clásica, 1 control con todo lo demás
- Proyecto grupal (vamos a ver cómo resulta, alcances pueden variar)
 - Replicar *un análisis* de turbulencia de un paper, tema de interés para ustedes
 - Esencial: que haya datos disponibles!
 - 2 presentaciones *cortas*: temprana y final (se decidirá al azar en el momento quién presenta)
 - 1 reporte final *breve* en formato *paper* (artículo científico)
- Nota final: 30% tareas, 40% controles, 30% proyecto

Integridad académica y otros

- Copia y plagio: no me gustaría tener que lidiar con nada de esto. Principios: equidad y honestidad
- Comunicarse conmigo ante cualquier problema o dificultad: feedback sobre contenidos o evaluaciones, situaciones personales
- La idea del curso es aprender y nos toca evaluar ese aprendizaje porque son las reglas actuales, no es la idea generar sufrimiento o estrés innecesario
- La clase es un espacio seguro y de respeto (no por eso ultra serio y sin humor)

Horario

- Clase: Ma,Vi 2:30-4pm +hora de consultas: Ma 4-5pm
- Hora “auxiliar”: según el coordinador no habría ningún módulo ... 2 horas de consulta mejor?

Segunda introducción ¿Quién eres tú?

- (por qué hay tanta gente en este curso?)
- especialidad / año / programa?
- por qué estás tomando este curso? / qué quieras aprender?
- futuro laboral / académico / otro?
- cuéntanos algo random de ti: ej: empecé a comer aceitunas este año

Mientras tanto: 3 encuestas en mentimeter.com

- **6701 1015:** primera palabra que se te viene a la mente con “turbulencia”?
- **8394 8034:** helado favorito?
- **7357 4970:** pizza con/sin piña?

Preguntas antes de seguir?

Ahora sí, turbulencia (Cap. 1 Davidson)



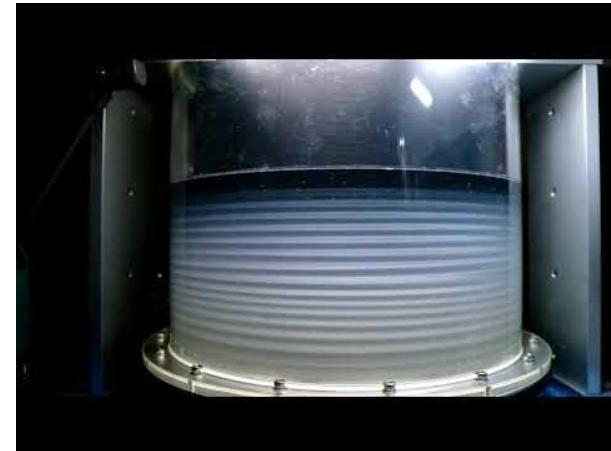
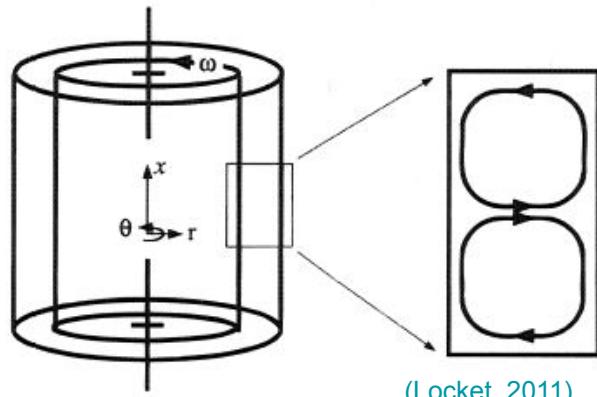
¿Qué ocurre?

- Movimiento caótico
- Mezcla de té y leche
- La turbulencia decae
 - qué tan rápido? gran punto
 - aún es materia de estudio

¿Otros ejemplos?

- Turbulencia en todos lados
- Veamos ejemplos clásicos

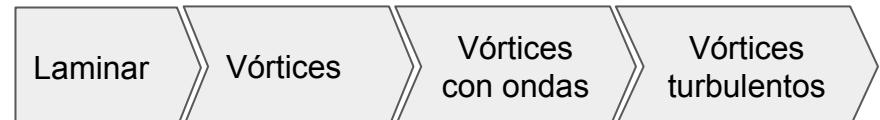
Experimento clásico 1: Couette - Taylor



- Inestabilidad nace de perturbaciones de fuerzas centrípetas / gradiente de presión
- Parámetro clave: número de Taylor

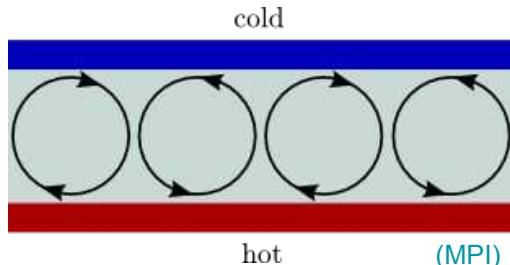
$$Ta = \frac{\omega^2 d^3 R}{\nu^2}, \quad d/R, \quad L/R$$

- Vórtices se forman para $Ta > Ta_c$
- $> Ta$ configuraciones más complejas



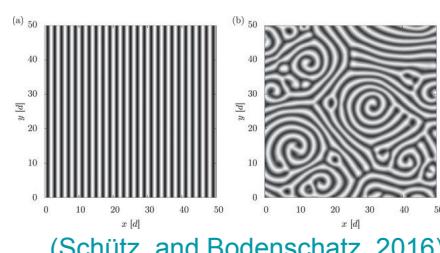
En el último régimen aún hay estructura

Experimento clásico 2: Rayleigh - Bénard



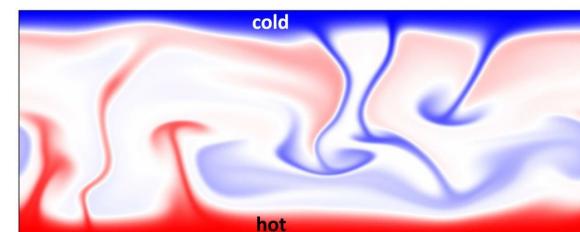
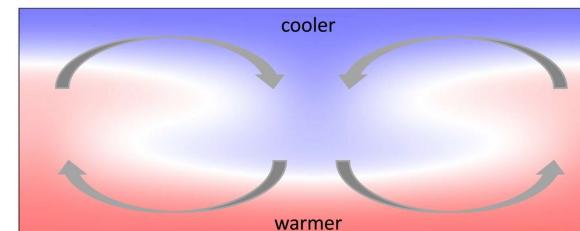
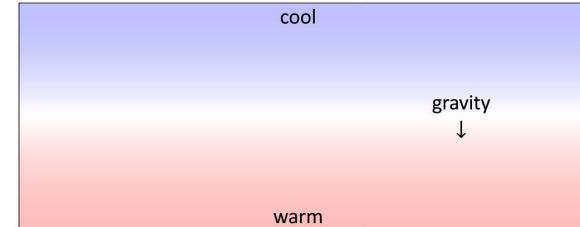
Parámetro crítico: $Ra = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu\alpha_{\text{difusividad térmica}}}$

Configuraciones en 3D:



(Schütz and Bodenschatz, 2016)

*fuera del mundo de transferencia de calor, en general convección se refiere a este tipo de organización



(Doering, 2020)

Estacionario
(conducción
molecular)

Celdas de
convección*

Celdas
turbulentas

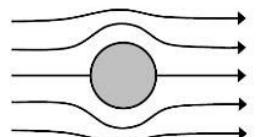
Qué tienen en común Taylor-Couette y Rayleigh-Bénard?

- Problemas análogos: fuerza centrífuga ~ empuje (buoyancy)
- De hecho, los números críticos son CASI idénticos (1,700, 0.7% diferencia)
- Existencia de un número crítico a partir del cual se generan inestabilidades
 - Esto se conoce como bifurcación
- Aumentando la velocidad angular o la diferencia de temperatura, estamos aumentando la velocidad del fluido / disminuyendo efectos viscosos
- Mayores cambios generan nuevas bifurcaciones, hasta llegar a un régimen con turbulencia

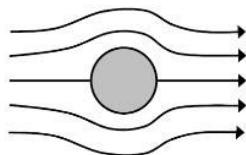
Ver más: [F. Busse, 2012, The twins of turbulence research](#)

* GRAN libro sobre inestabilidades hidrodinámicas es [Drazin \(2002\)](#)

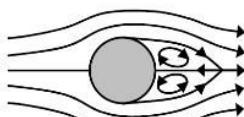
Experimento clásico 3: flujo sobre un cilindro



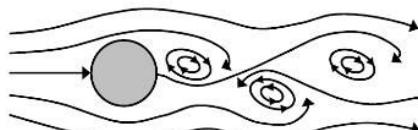
Inviscid flow: $Re = \infty$



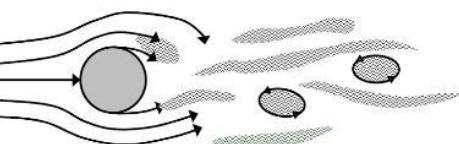
$Re \approx 0.01$



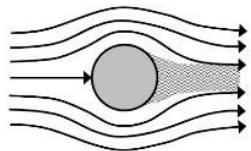
$Re \approx 20$



$Re \approx 100$



$Re \approx 10\,000$

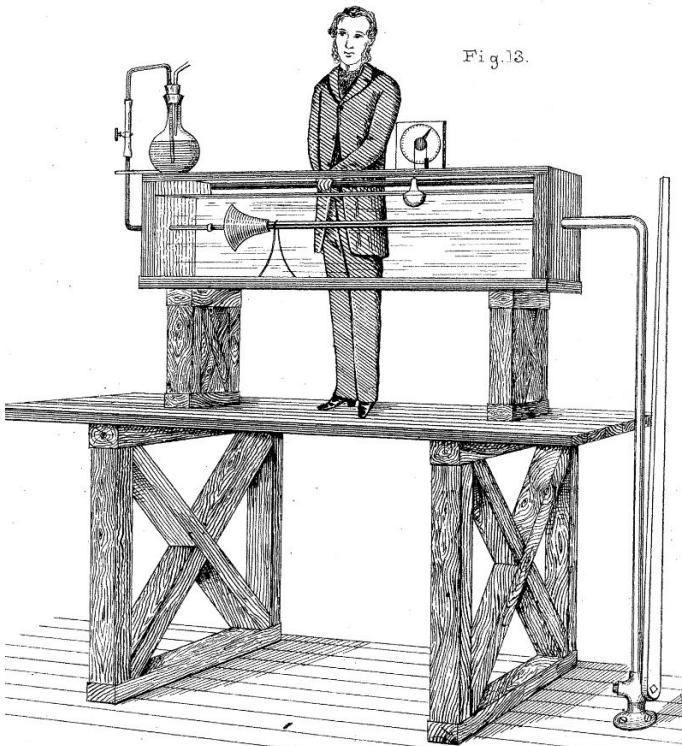


$Re \approx 10\,000\,000$

(Cronodon)

- Parámetro clave: Re
- Separación de capa límite induce vorticidad
- Progresivamente se desprenden vórtices (von Kármán street)
- Estela turbulenta con vórtices
- Estela eventualmente decrece en tamaño, sin desprender grandes vórtices
- (Número de Strouhal~ frecuencia de desprendimiento de vórtices)

Experimento clásico 4: Reynolds



(Reynolds, 1833)

- Flujo en tuberías lisas, parámetro: $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$
- Muy sensible a perturbaciones iniciales, impacta el Re crítico
- Pero para $Re < 2000$, no hay turbulencia
- Transición también a lo largo de la tubería:
 - Se inicia en la pared, se desprenden porciones de flujo turbulento
 - A veces se observa intermitencia: zonas con menor turbulencia

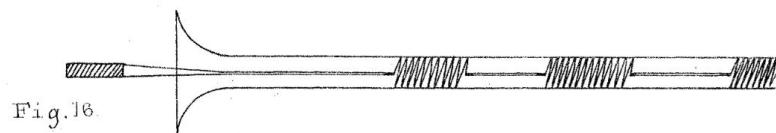


Fig. 16

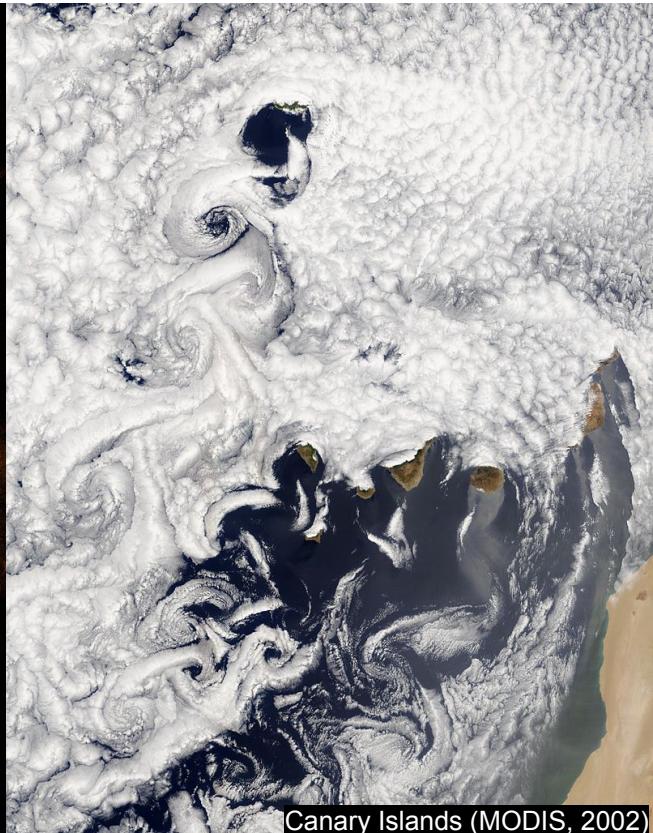
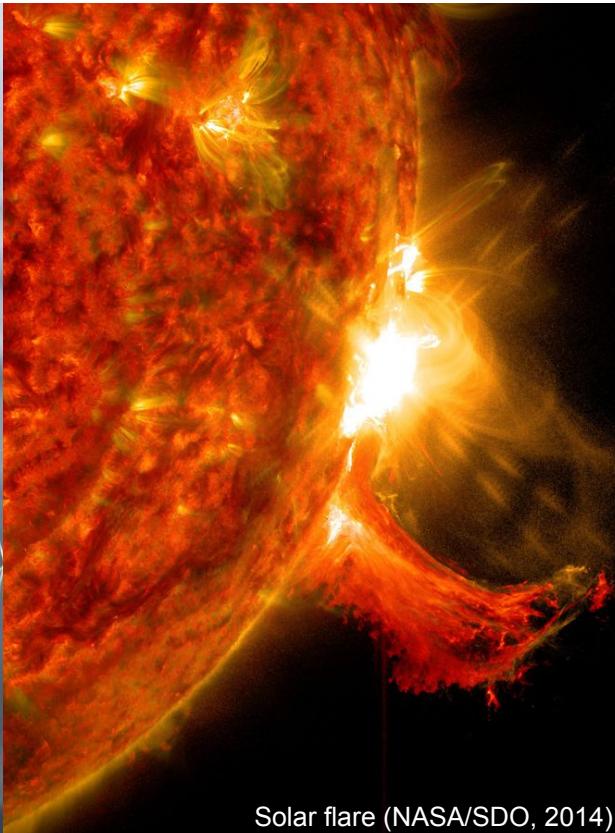
Vemos dos rutas hacia la turbulencia

1. Pequeñas zonas con turbulencia se desarrollan y crecen (pared en el caso de tuberías)
2. Se sobrepasa un parámetro crítico y se llega a un estado de caos uniforme, puede ser por medio de una inestabilidad

Características de flujos turbulentos

- Fluctuaciones aleatorias de velocidad, desorden espacial
- No se puede predecir (pero sí sus estadísticas!)
 - Fuerte dependencia de condiciones iniciales en su desarrollo
- Complementar esta lista en Tarea 1

Más ejemplos: por doquier



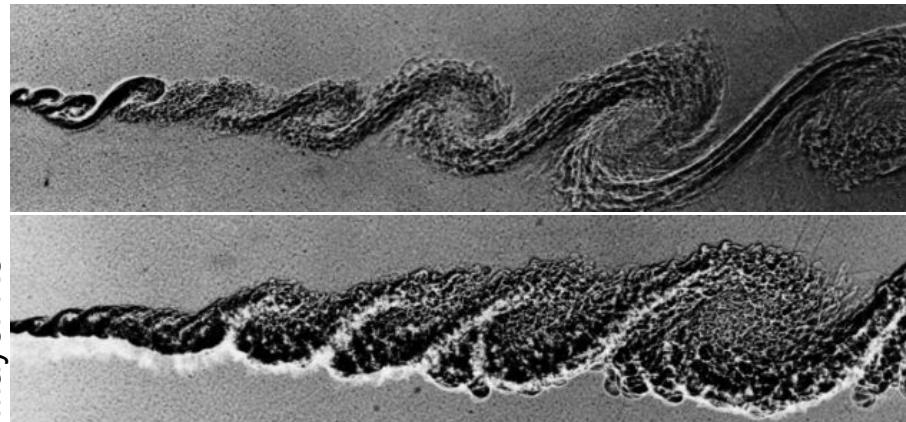
Horns Rev offshore wind farm (Hasager et al., 2017)

Solar flare (NASA/SDO, 2014)

Canary Islands (MODIS, 2002)

Turbulencia como un conjunto aleatorio de *eddies*

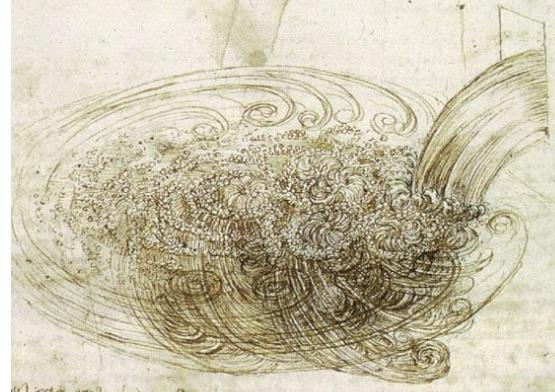
- ¿Qué es un *eddy*? “masa” de vorticidad
- Hay eddies grandes (tamaño característico del problema) y eddies pequeños. Los tamaños más pequeños dependen de Re



[An album of fluid motion \(van Dyke, 1982\)](#)



[van Gogh, 1889](#)



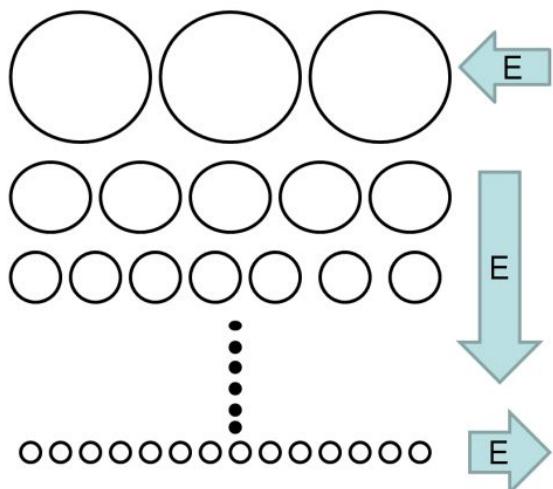
[da Vinci, 1510](#)

Diferentes escalas y cascada de energía (intro)

- Cascada de energía de Richardson: Los eddies grandes se rompen en eddies pequeños, llevándose la energía eventualmente a las escalas *más* pequeñas, donde los efectos viscosos dominan y la energía es disipada (fricción)

“Big whirls have little whirls
that feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls
and so on to viscosity”

—Lewis F. Richardson, 1922



(Flowvision blog)

¿Tamaño de las escalas pequeñas?

Tasa de energía transmitida en cada escala:

Escalas grandes: $l, u, Re = ul/\nu$

$$\Pi \sim u^2/\tau, \tau = u/l, \Rightarrow \Pi \sim u^3/l$$

Escalas pequeñas: $\eta, v, Re = \eta v/\nu \approx 1$

$$\varepsilon \sim \nu S_{ij} S_{ji}, S \sim v/\eta \Rightarrow \varepsilon \sim \nu v^2/\eta^2$$

- Toda la energía de gran escala se disipa, lo que puede ser cierto si el flujo es estadísticamente estable. Haciendo este balance:

$$\Pi \sim \varepsilon \Rightarrow \eta \sim l Re^{-3/4}$$

- A mayor Re , menores son las escalas pequeñas (o de Kolmogorov)
 - Ej: túnel de viento con $Re \sim 1000, l \sim 1 \text{ cm} \Rightarrow \eta \sim 0.06 \text{ mm}$
- A las escalas grandes les llamamos escala integral

Navier Stokes y el problema de clausura (intro)

Si partimos de Navier Stokes (NS) y continuidad para flujo no compresible,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} = F_1(\mathbf{u}, p)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

y luego tomamos la divergencia de NS, llegamos a que p depende de \mathbf{u}

$$\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \Rightarrow p = f(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = F_2(\mathbf{u})$$

por lo tanto, la ecuación para \mathbf{u} debería ser fácil de resolver numéricamente. Pero para ello debemos resolvérla a todas las escalas en el flujo (esto es DNS), y tiene un costo computacional altísimo. Por esto es que despejamos ecuaciones para las estadísticas de \mathbf{u} : promedio y varianza, por ejemplo...

Navier Stokes y el problema de clausura (intro)

Idea:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{estadísticas de } \mathbf{u}] = F[\text{otras estadísticas de } \mathbf{u}]$$

- Resulta que este sistema de ecuaciones no es cerrado ($\#\text{incógnitas} > \#\text{ecuaciones}$)
- Este es el problema de clausura, característico de turbulencia, y lo que motiva modelos de turbulencia (modelamos el término que “falta” determinar)
- Hasta ahora no hay una teoría unificada (sobre cómo se transmite la energía entre escalas y cómo decae). Hay muchos modelos separados
- De las pocas cosas en común que casi siempre tienen los flujos turbulentos están las pequeñas escalas de Kolmogorov y los efectos de pared
- Más detalles después. DNS es costoso, solo geometrías sencillas, por esto modelos como $k-\varepsilon$ son los más usados en ingeniería

Tarea 1

1. Ver 3 vídeos y completar la lista “características de flujos turbulentos”
2. Estudiar 2 EDPs: Ec. advección-difusión y Ec. de Burgers
 - a. Qué modelan estas EDPs? Qué representa cada término? Cómo son las soluciones?
 - b. En qué se parecen a Navier-Stokes?

ME 6010 - Introducción a la turbulencia

Evaluaciones : controles : S8 , S14
 proyecto : inicial S7 , final Exámenes.

Clase 2

Ecuaciones de Mecánica de fluidos (Cap 2. Davidson)

Antes de empezar, revisaremos notación indicial: "comprime las sumas"

vector $\vec{x} \rightarrow x_i$ (tiene un índice libre) $i = 1, 2, 3$

tensor matriz $\underline{\underline{A}} \rightarrow a_{ij}$ (2 índices libres) tensor ~ sistema de referencia

operaciones : se repiten los índices \downarrow \rightarrow se expande la suma

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Símbolos especiales

Delta de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ $\delta_{ij} = \underline{\underline{I}}$

$$\delta_{11} = 1, \delta_{12} = 0$$

ojo: $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

Levi-Civita $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : ijk, jki, kij \\ -1 & : ikj, kji, jik \\ 0 & : i=j, j=k, k=i \end{cases}$

Más operaciones:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \times b_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j = c_k \leftarrow 1 \text{ índice libre}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \times u_j = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = c_k$$

Volviendo a mecánica de fluidos,

3 principios físicos forman nuestras ecuaciones básicas :

1. - Segunda ley de Newton

2. - Ecuaciones constitutivas (ley de viscosidad de Newton)

3. - Conservación de masa

Balance de (1) en un volumen de control δV

$$\int_{\text{masa}} \delta V \frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt} = (-\nabla p) \delta V + \underbrace{\text{fuerzas viscosas}}_{\vec{F}} \quad \begin{array}{l} \text{en un cubo} \\ \text{diferencial:} \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta V \end{array}$$

Llegando a una ecuación diferencial

$$\int \frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad //$$

$$(3) \rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial t} : \text{para flujo no compresible} \rightarrow \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(viene de $\frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) = 0$)

$$(2) \rightarrow \tau_{ij} = f(\vec{u}) \quad \text{La ley de viscosidad de Newton}$$

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}$$

Esfuerzos son proporcionales a la tasa de cambio de u_i , y la constante de proporcionalidad es $\mu = \rho \nu$
 μ : viscosidad dinámica, ν : visc. cinemática.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] : \text{tensor esfuerzo-tasa de deformación}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = 2\rho \nu S_{ij}$$

Finalmente, nos queda

$$\frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad \boxed{\text{Ec. de Navier-Stokes (N-S)}}$$

¿Qué es $\frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt}$? Derivada total, material, convectiva
Es la derivada de un elemento de fluido que se move en el espacio $\neq \frac{\partial}{\partial t}$: fija en el espacio

$$\text{Veamos } T(\vec{x}, t) \rightarrow \delta T \approx \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \dots \quad / \cdot \frac{1}{\delta t}$$

$$\frac{Dt}{Dt} \approx \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot u_x + \dots$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \sim u_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

advección

$$\text{Para } \vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{Lagrangiano}} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{en un sistema de referencia Euleriano}}$$

Lagrangiano: siguiendo al elemento de fluido en un sistema de referencia Euleriano

$$N-S \text{ final: } \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{término no lineal}} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{u}}_{\text{difusión}}$$

advección

Nota: $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ puede ser confuso: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ y $\frac{D\vec{u}}{Dt} \neq 0$ puede darse en casos donde el sistema de referencia genera "cambios en \vec{u} ".

Versiónes integrales de N-S

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV = - \oint_S u_i (\rho \vec{u} \cdot d\vec{S}) - \oint_S \rho d\vec{S} + (\text{término viscoso})$$

Puede interpretarse como un balance de momentum lineal en el volumen de fluido V : éste puede cambiar por transporte a través de S (advección), o bien por fuerzas de presión o viscosas.

Tasa de disipación de energía

¿A qué tasa se convierte la energía mecánica en calor por fricción?

Para un volumen V con bordes S , tenemos esfuerzos $\tau_{ij} = 2\rho v S_{ij}$

$$\underbrace{\dot{W}}_{\text{tasa de trabajo de las fuerzas viscosas}} = \oint_S u_i (\tau_{ij} dS_j) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] dV$$

La tasa de trabajo por elemento de volumen es

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} u_i + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

f_i : fuerza viscosa

truco:
 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$
 $S_{ij} = S_{ji}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

cambiando los índices

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\tau}_{ij} + \tilde{\tau}_{ji} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

$$= \tau_{ij} S_{ij}$$

reescriviendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) = f_i u_i + \underbrace{\tau_{ij} S_{ij}}_{\substack{\text{trabajo} \\ \text{viscoso} \\ \text{neto}}} \quad \underbrace{\tau_{ij}}_{\substack{\text{tasa de trabajo} \\ \text{viscosa}}} \quad \underbrace{S_{ij}}_{\substack{\text{cambio de} \\ \text{energía interna}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tasa de aumento de la energía interna por unidad de masa} \\ \left. \varepsilon = \frac{\tau_{ij} S_{ij}}{\rho} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\tau_{ij} S_{ij}}{\rho} = 2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \\ \text{dissipación} \end{array}$$

Hay otra manera de llegar a este resultado e. cinética

$$\left\{ \frac{D \vec{u}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \right\} \cdot \vec{u} \rightarrow \vec{u} \cdot \frac{D \vec{u}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{P \vec{u}}{2} \right) + \nu \vec{u} (\nabla^2 \vec{u})$$

$$\text{El término viscosa } \nu \vec{u} (\nabla^2 \vec{u}) = u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i \tau_{ij}}{\rho} \right) - 2 \nu S_{ij} S_{ij}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = \underbrace{-\nabla \left(\frac{(\vec{u}^2)}{2} \vec{u} \right)}_{\text{I}} - \underbrace{\nabla \left(\frac{(P \vec{u})}{2} \vec{u} \right)}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i \tau_{ij}}{\rho} \right)}_{\text{III}} - \underbrace{2 \nu S_{ij} S_{ij}}_{\text{IV}}$$

Si integrarmos en un volumen V ,

I : transferencia/transporte advecivo de e.cinética a través de S

II : fuerzas de presión sobre S

III : fuerzas viscósas sobre S

IV : debe ser dissipación : pérdida de e.cinética por fricción.

Se concluye de igual manera que la tasa de dissipación de e.mecánica por unidad de masa es $\varepsilon = 2 \nu S_{ij} S_{ij}$

Nota: La ecuación para $\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right)$ se puede reescribir como

$$\nabla \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u}) = -\nu (\nabla \times \vec{u})^2 + \nabla \cdot (\nu \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left(\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} + \nu (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} \right) - \nu (\nabla \times \vec{u})^2$$

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{u} \quad , \quad \frac{w^2}{2} : \text{enstrofa}$$

verticidad

En un dominio cerrado V , varios términos se simplifican y

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{u^2}{2} \right) dV = -\nu \int (\nabla \times \vec{u})^2 dV = \int \varepsilon dV$$

debe serlo. esto solo se cumple
para un régimen/ fronteras "estacionarias"

Presión y velocidad

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} & \nabla \cdot \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Tomando la divergencia de N-S, $\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho} \right) = -\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})$

tenemos una relación más directa $\Rightarrow "p = f(\vec{u})"$

Para dominio infinito, ley de Biot Savart:

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{[\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})]'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = f(\vec{u})$$

Tenemos una expresión para p ! Importante porque:

- 1) Sistema cerrado de ecuaciones ✓
- 2) $p(\vec{x})$ es una ecuación no-local: p se ve afectado por cómo se comporta \vec{u} en todo el espacio.
Eddies lejanos pueden afectarse mediante p .

24 Agosto 2021

Presión y velocidad

$$p(\vec{x}) = f(\vec{u}(\vec{x}))$$

ecuación no-local : todo el espacio afecta a \vec{u}
y éste a \vec{u} : "eddies lejanos pueden afectarse".
¿ p afecta de igual manera a $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$?

Dinámica de vorticidad

vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$: qué es físicamente ?

Ej: fluido 2D $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$

Elemento circular, radio r y vel. angular Ω

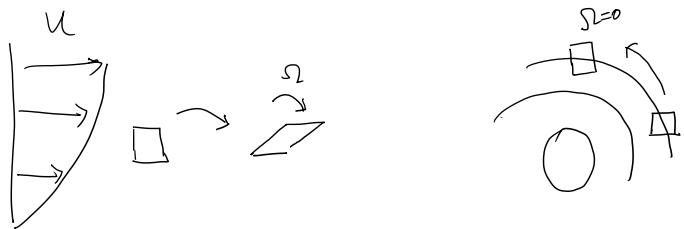
$$\int_S \underbrace{\nabla \times \vec{u}}_{\vec{\omega}} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$\omega_z \pi r^2 = \Omega r \cdot 2\pi r$$

$$\omega_z = \frac{\Omega}{2}$$

Se puede generalizar a 3D : $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$

Rotación "≠" vorticidad



Los gradientes de velocidad $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla \vec{u}$ se

pueden descomponer como una suma de deformación y vorticidad.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= S_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_k\end{aligned}$$

Son procesos diferentes pero no independientes

$$\nabla^2 u_i = 2 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = -[\nabla \times \vec{w}]_i$$

Ambos gradientes están relacionados aunque podemos tener solo contribuciones del uno o del otro.

¿ A qué contribuyen más ?

$$\text{Tomenos } Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} (S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} \vec{w}^2)$$

$$\text{Normalizando, } \Lambda = \frac{S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} w^2}{S_{ij} S_{ij} + \frac{1}{2} w^2} \quad \begin{cases} > 0 : \text{domina la deformación} \\ < 0 : \text{domina la vorticidad} \end{cases}$$

Otra invariante :

$$R = \frac{1}{3} (S_{ij} S_{jk} S_{ki} + \frac{3}{4} w_i w_j S_{ij})$$

con R y Q se pueden clasificar las contribuciones.

Ecuación de vorticidad

$$\text{identidad : } \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$(N-S) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \times \vec{\omega} - \nabla \left(\underbrace{\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}}_{\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} / \cancel{\nabla \times (\cdot)}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \underbrace{\nabla \times \vec{u} \times \vec{\omega}}_{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega}} - \nabla \times \cancel{\nabla C}^0 + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \frac{D \vec{\omega}}{Dt} = \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}}_? + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad //$$

No hay un término con p !

La presión no actúa de la misma manera que sobre \vec{u} .

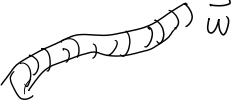
Para entender el significado de $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$, consideran un espacio de fluido con $\vec{\omega} = 2 \vec{z}$
 \Rightarrow momentum angular $\vec{H} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}$

Despreciando las fuerzas de presión (ej: dominio esférico)

$$\frac{DH}{Dt} = \text{torque viscoso} \Leftrightarrow I \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = - \vec{\omega} \frac{DI}{Dt} + 2 \text{ torque viscoso}$$

si la viscosidad es despreciable, $\frac{D}{Dt}(I \vec{\omega}) = 0$

$I \vec{\omega}$ se conserva ~analogía bailarina

eddy :  tambien se comporta así
 "vortex stretching"
 estiramiento de vórtices

esto es lo que representa $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$

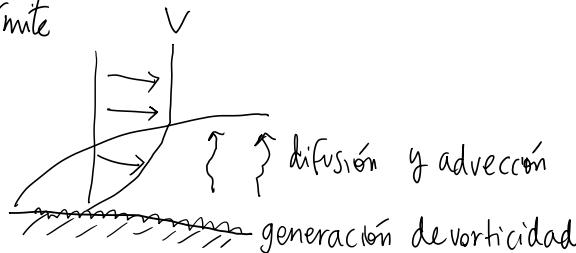
Caso particular : 2D $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, w_z)$
 $\Rightarrow \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} = 0$

Ecuación de vorticidad : $\frac{D\vec{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{w}$: ecuación advección/difusión !

No hay término fuente/sumidero: solo se desplaza y difunde en el espacio.

De dónde viene la vorticidad entonces?

Ej. capa límite



escalas : difusión $\delta \sim \sqrt{2\nu t}$ } $\delta \sim \sqrt{\nu x}$
advección $x \sim Vt$ } V
espesor capa límite

Volvamos al caso 3D

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{w}$$

Si $\frac{du_{||}}{ds} > 0$ hay estiramiento

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} > 0 \rightarrow \vec{w} \text{ crece}$$

Otra manera de ver esta contribución es en la ec. de enstofría : $\frac{D}{Dt} \left(\frac{w^2}{2} \right)$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{w^2}{2} \right) = \underbrace{w_i w_j S_{ij}}_{\text{estiramiento de vértices}} - \underbrace{\nu (\nabla \times \vec{w})^2}_{\text{destrucción viscosa}} + \underbrace{\nu \nabla \cdot [\vec{w} \times (\nabla \times \vec{w})]}_{\text{despreciable}}$$

Teorema de Kelvin

- para flujo no viscoso

- "líneas de vorticidad se mueven como si estuvieran congeladas"

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \text{constante}$$

Circulación

$$\text{Stokes} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{en una superficie material} \\ \text{el flujo de vorticidad a través de ella es constante} \end{array} \right\}$$

Discusión

- ecuaciones para \vec{u} y \vec{w}

- importancia de la presión en NS pero no en la ec. de vorticidad

- finalmente, \vec{u} y \vec{w} se afectan porque $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$

Antes de cerrar, revisemos las ecuaciones en una forma más general:

$$1) \text{ Continuidad} : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$2) \text{ Navier-Stokes}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\zeta}$$

$$3) \text{ Ec. vorticidad}$$

$$\text{usando } \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \vec{w} \times \vec{u}$$

$$\nabla \times (N-S)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{v} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \vec{w} \times \vec{u} \right) = -\nabla_x \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) + \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F} \right)$$

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$

$$\nabla \times \vec{w} \times \vec{u} = \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} - \cancel{\vec{u}(\nabla \cdot \vec{w})} + \vec{w}(\underbrace{\nabla \cdot \vec{u}}_{-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}) - \vec{w} \cdot \nabla \vec{u}$$

* Notamos que $\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{w}}{p} \right) = \frac{1}{p} \frac{D\vec{w}}{Dt} - \frac{1}{p^2} \vec{w} \frac{Dp}{Dt}$

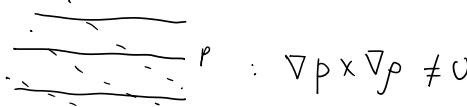
$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \phi \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \cancel{\phi} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \phi \times \nabla \phi$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} - \frac{\vec{w}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla \rho + \nabla \times \vec{f}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\begin{matrix} \vec{w} \\ p \end{matrix} \right) = \underbrace{\vec{w} \cdot \nabla \vec{u}}_A + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p}_B + \underbrace{\nabla \times \vec{f}}_C + \underbrace{\vec{V} \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{t} \right)}_D$$

A : estiramiento de vórtices

B : efectos barocéntricos / no barotrópicos : importante en el
cambio atmosférico



C : fuerzas no conservadoras

D : efectos viscosos

2021 08 27

Naturaleza del caos : introducción (Capítulo 3; Davidson)

- Comportamiento caótico y ecs. no lineales
- Transición al caos
- "Flecha del tiempo" (arrow of time)

No-linealidad y caos

Experimentos clásicos (Taylor y Reynolds)

✓ ↘ → aumenta la complejidad

varios valores críticos de R que determinan nuevos estados, eventualmente llegando a un régimen turbulento.

Mencionamos que esta complejidad tiene relación con el término no lineal, sin explicar por qué.

Ejemplo: ecuación logística: (Verhulst, 1845) $x_n \in (0, 1)$

$$x_{n+1} = F(x_n) = ax_n(1-x_n), \quad 1 < a \leq 4$$

modela el crecimiento poblacional de una especie biológica

$$x_{n+1} = F(x_n) \Leftrightarrow \text{EDO: } \dot{x} = G(x)$$

Puntos de equilibrio (fixed points): $x_{n+1} = x_n$

(pueden ser estables o inestables)

para esta ecuación son $x=0, x=(a-1)/a$

estabilidad \rightarrow segunda derivada: \nearrow \nwarrow

\searrow perturbaciones

base del análisis de estabilidad lineal

$x=0$: inestable para $a > 1$

$x=(a-1)/a$: estable para $1 < a \leq 3$
inestable para $a > 3$

Para $a > 3$ ocurre algo interesante, aparece una nueva solución: "dos ciclos de F"

$$x_2 = F(x_1) \quad x_2 = (a + 1 \pm ((a+1)(a-3))^{1/2}) / 2a$$
$$x_1 = F(x_2)$$

Tenemos una solución donde hay 2 puntos de estabilidad y nuestro resultado "oscila" entre ellos. Para sistemas de mayores dimensiones, esto se podría interpretar como un atractor.

Este cambio para $a=3$ se conoce como bifurcación.

Punto en el cual la organización del sistema cambia

Posteriormente hay otra bifurcación a un 4-ciclo para $a = 3.449$, luego otra $a = 3.544$ (8 ciclos) y así... la secuencia de doblar los ciclos es infinita

Llegamos a varios puntos donde hay tantos estados posibles que podemos interpretar a x como una variable aleatoria.

Para $a=4$ hay una solución analítica: $x_n = \sin^2(2\pi\theta_0)$

Conceptos importantes:

- Sensibilidad a las condiciones iniciales es algo importante en caos.
- De una ecuación no lineal tan simple llegamos a sistemas caóticos que podemos interpretar como aleatorios.
- Podemos describir a x_n mediante sus estadísticas, sintetizando todos estos resultados.

Bifurcaciones / transición a la turbulencia

Landau, 1944: estudiando flujos de Poiseuille

pequeñas perturbaciones: Análisis de estabilidad lineal $\sim Ae^{j\omega t}$

$$A(t) = A_0 \exp((\sigma + j\omega)t) \quad j = \sqrt{-1}$$

\uparrow frecuencia

Variando R cerca de R_c (parámetro crítico):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma < 0 \text{ para } R < R_c : \text{ inestabilidad muere} \\ \quad \text{exp decae} \\ \sigma > 0 \text{ para } R > R_c : \text{ inestabilidad crece} \\ \quad \text{exp crece} \end{array} \right.$$

usualmente

$$\sigma^2 = c^2 (R - R_c) + \theta ((R - R_c)^2), \quad |R - R_c| \ll R_c$$

cuando las perturbaciones crecen, este análisis ya no es válido.

Landau sugirió que la magnitud de la perturbación $|A|$ (promediado sobre varios ciclos) está dada por

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - \alpha|A|^4 - \beta|A|^6 + \dots$$

Si $|A|$ es pequeño:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - \alpha|A|^4 \quad \begin{array}{l} \text{ec. de Landau} \\ \uparrow \quad \swarrow \quad (\text{Stuart-Landau}) \end{array}$$

constante de Landau

según Landau $\alpha \begin{cases} \alpha > 0 : \text{fijo externo} \\ \alpha < 0 : \text{tuberías} \\ \alpha = 0 : \text{análisis lineal} \quad (\sim |A|^4 \text{ se va}) \end{cases}$

La ec. de Landau es similar a la ec. logística

$$\frac{dx}{dt} = dx(1 - ex)$$

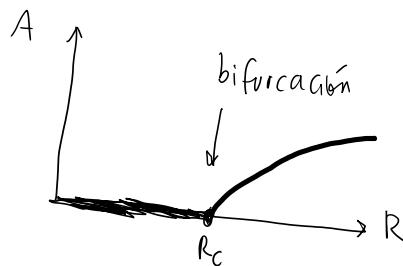
tiene una solución exacta:

$$\frac{|A|^2}{A_0^2} = \frac{e^{2\sigma t}}{1 + \lambda(e^{2\sigma t} - 1)}, \quad \lambda = \frac{\alpha A_0^2}{2\sigma}$$

Cómo se comporta?: puntos de equilibrio?

$$\alpha > 0 \quad R < R_c : |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$R > R_c : |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} = A_\infty \sim (R - R_c)^{\frac{1}{2}}$$

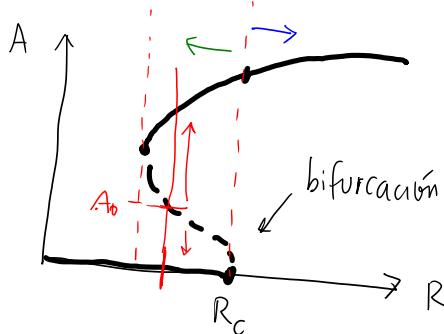


super crítica: solo ocurren cambios para $R > R_c$

$\alpha < 0$ $R > R_c, |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$: ec de Landau deja de ser válida, los términos $|A|^6, \dots$ pueden reestabilizar el sistema

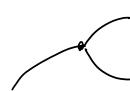
$$R < R_c \quad |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si } A_0 < \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} : \text{pequeña perturbación}$$

$$|A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \quad \text{si } A_0 > \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} : \text{gran perturbación}$$



subcrítica: pasan cosas para $R < R_c$

Hay otros tipos de bifurcaciones



Pitchfork

estados oscilatorios

Hopf

Análisis de estabilidad lineal y bifurcaciones
ver Drazin (2002)

Flecha de tiempo (arrow of time)

Es el término no lineal en N-S la causa de el caos y mezcla?

Qué pasa con la ec. de Euler:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

termino no lineal!

Las ecs. de Euler son reversibles: no intuitivo

matemáticamente, si invertimos el tiempo en la ecuación, nos queda la misma

En flujos reales, la viscosidad toma importancia y causa efectos como la mezcla turbulenta. En combinación con los efectos del término no lineal son la causa de la irreversibilidad de N-S.

Haciendo una analogía con física estadística, no es imposible volver de un estado mezclado y desordenado, pero la probabilidad de que eso ocurra es muy baja.

N-S no es reversible → arrow of time.
en el tiempo. Aunque las fuerzas viscosas sean pequeñas, tienen una importancia fundamental: esfuerzos viscosos.

31 Agosto 2021

$$\text{Notación: } \overline{\underline{u}} \circ \underline{\underline{u}}, \quad \overline{\overline{\underline{u}}} = \overline{\underline{u}}$$

$$\text{Descomposición de Reynolds: } \underline{\underline{u}} = \overline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}'} \Leftrightarrow \underline{u}_i = \overline{\underline{u}_i} + \underline{\underline{u}'_i}$$

$$\text{Propiedades: } \overline{(\underline{u}_i)} = \overline{\overline{\underline{u}_i} + \underline{\underline{u}'_i}} = \overline{\underline{u}_i} + \overline{\underline{\underline{u}'_i}} \Rightarrow \overline{\underline{\underline{u}'_i}} = 0$$

$$\overline{c \underline{u}_i} = c \overline{\underline{u}_i}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_0 = 0 \xrightarrow{(1)} \nabla \cdot \overline{\underline{u}} = 0 \checkmark$$

$$\nabla \cdot (\overline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}'}) = 0 \Leftrightarrow \overline{\nabla \cdot \underline{u}} + \nabla \cdot \underline{\underline{u}'} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{\underline{u}'} = 0$$

Existe otra descomposición: de Favre ~ promedio basado en la masa útil en combustión

$$\underline{u}_i = \widetilde{\underline{u}}_i + \underline{\underline{u}''_i} \rightarrow \overline{\rho \underline{\underline{u}''_i}} = 0, \quad \widetilde{\underline{u}}_i = \frac{\overline{\rho \underline{u}_i}}{\overline{\rho}} \neq \overline{(\underline{u}_i')}$$

Ecuaciones RANS: Reynolds Averaged Navier Stokes

$$N-S: \rho \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} + \rho (\underline{\underline{u}} \cdot \nabla) \underline{u}_i = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} / (1)$$

$$\rho \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial t} + \rho \underbrace{(\underline{u}_j \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j})}_{\text{expandamos este término}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

expandamos este término

$$(\overline{\underline{u}_j} + \underline{\underline{u}'_j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\underline{u}_i} + \underline{\underline{u}'_i}) = \underbrace{\overline{\underline{u}_j} \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j}}_{\text{queda}} + \underline{\underline{u}'_j} \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j} + \overline{\underline{u}_j} \frac{\partial \underline{\underline{u}'_i}}{\partial x_j} + \underline{\underline{u}'_j} \frac{\partial \underline{\underline{u}'_i}}{\partial x_j} \xrightarrow{\nabla \cdot \underline{\underline{u}'} = 0} \underbrace{\underline{\underline{u}'_j} \frac{\partial \underline{\underline{u}'_i}}{\partial x_j}}_{\text{queda}} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\underline{u}'_i} \underline{\underline{u}'_j})$$

Luego

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial t} + \rho \overline{\underline{u}_j} \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j}}_{\rho \frac{D \overline{\underline{u}_i}}{Dt}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{\underline{u}'_i \underline{\underline{u}'_j}}) \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \text{Ecuación RANS}$$

Esfuerzos de Reynolds

Tensor de Esfuerzos de Reynolds $\overline{T}_{ij}^R = -\rho \overline{u_i' u_j'}$

nombre porque entra a la ecuación en el mismo término \overline{T}_{ij}

Forma integral : $\oint_S -\rho \overline{u_i' u_j'} ds$: flujo de momentum turbulent
No es un esfuerzo real

Nota: Davidson usa el supuesto de que el flujo es estadísticamente estacionario $\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$. no es cierto siempre.

Para resolver RANS necesitamos saber qué es \overline{T}_{ij}^R , obtengamos una ecuación $\frac{\partial \overline{T}_{ij}^R}{\partial t} \approx \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t}$ Tenemos $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \rightarrow$ obtener $\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \dots &= \dots \\ \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \dots &= \dots \end{aligned} \right\} \times \bar{u}_j' \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i' \bar{u}_j') + \dots &= \dots \end{aligned} \right\} / (1)$$

Haciendo esto, queda:

$$\frac{\bar{D}}{Dt} [\rho \overline{u_i' u_j'}] = \overline{T}_{ik}^R \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{T}_{jk}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} [-\rho \overline{u_i' u_j' u_k}] + \dots$$

Aparecen nuevos términos (+ incógnitas) de mayor orden

Podemos seguir

$$\frac{\bar{D}}{Dt} [\overline{u_i' u_j' u_k}] = \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} [\overline{u_i' u_j' u_k u_m}] + \dots$$

Siempre tenemos más incógnitas que ecuaciones, no podemos resolverlo. Este es el problema de clausura. (closure)

Qué hacemos? Se requiere información adicional y modelos para representar los esfuerzos de Reynolds.

Igual que con \bar{u} , se puede construir una ecuación media para un escalar $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ cte difusiva

$$\text{adv-difusión : } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \Gamma \nabla^2 \phi \quad / (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \nabla \bar{\phi} - \overline{u_i \phi'} \right)$$

flujo turbulento de ϕ
también tendremos que modelarlo
y obtener información adicional.

Métodos estadísticos

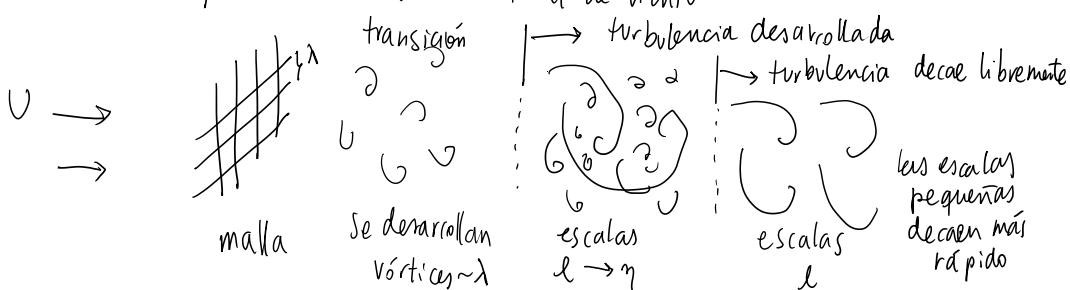
En turbulencia inevitablemente necesitamos métodos estadísticos

$$\text{covarianza} \leftarrow T_{ij}^k \leftarrow \downarrow \rightarrow \frac{1}{2}\langle u'^2 \rangle$$

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{varianza}$$

qué promedio?

Caso base para nuestro estudio: túnel de viento



$$\text{Destrucción de energía: } \underbrace{\frac{du^2}{dt}}_{\text{empírica para } Re \gg 1} = -A \frac{u^3}{\lambda} \quad A \sim 1$$

$$\frac{u^2}{\lambda} = \frac{u^3}{\lambda} \approx \frac{u^3}{l} \quad \text{dimensionalmente hace sentido}$$

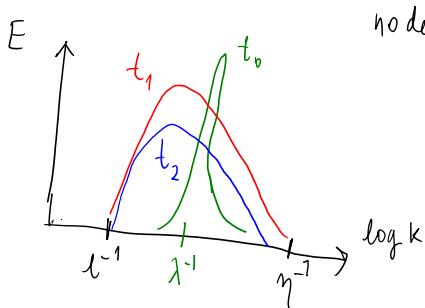
\hookrightarrow turnover time: tiempo de un ciclo \sim eddy.

En este caso, $u = \bar{u} + u' \rightarrow \langle \frac{1}{2} u'^2 \rangle$

$\frac{1}{2} u'^2$ \downarrow $\langle \cdot \rangle$ x \nearrow promedio sobre muchas realizaciones

venimos el decaimiento de la energía pero perdemos la información energética en cada escala; podemos hacer un análisis espectral

Transformada de Fourier $x \rightarrow k \sim \frac{\pi}{r} \leftarrow$ tamaño de un eddy
 no de onda



La visión espectral nos permite mantener la información energética en las diferentes escalas presentes en el flujo. Complementan nuestros análisis estadísticos.

Enfoque estadístico y métodos para promediar

Medimos \bar{u} : puede parecer aleatorio, pero sus estadísticas, por ejemplo su pdf va a ser similar si repetimos el experimento.

Además $\langle u' u' \rangle$: esto es una covarianza!. Correlaciones son muy importantes para interpretar



$$\overline{u_A u_B} \neq 0 : \text{deberían ser "similares"}$$

$$\overline{u_A u_C} \approx 0 : \text{no variarán al mismo tiempo}$$

Qué tipo de promedio usar?

\bar{u} - tiempo/temporal \rightarrow sobre un tiempo largo T si es estadísticamente estable. Si no, a veces se puede usar una ventana de tiempo $\Delta t \approx T$ adecuada

$\langle u \rangle$ - ensemble/conjunto \rightarrow Serie de experimentos

- volumen/espaciales: sobre todo el volumen o. en alguna dirección: x, y, o z. Depende del problema.

Elección ligada a \rightarrow problema: estadísticamente estable?
isotrópico?

experimento y mediciones

- no de sensores? $\rightarrow \bar{u} \circ \langle u \rangle$ solamente

- simulación 3D quizás no llega a T

- lab? $\rightarrow \langle u \rangle$, midiendo la naturaleza: no siempre son fenómenos que se repiten.

Funciones estadísticas útiles

\rightarrow Promedio

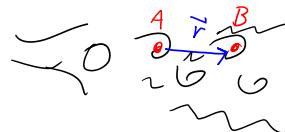
\rightarrow Varianza y covarianza $\sim \overline{u^2}, \overline{u_i u_j}, \overline{u_i \phi}$
correlación

$\rightarrow S$: skewness $\sim \overline{u^3}$: asimetría de la pdf:

$\rightarrow \delta$: kurtosis $\sim \overline{u^4}$: importancia de los valores extremos

3 Septiembre 2021

continuación - métodos estadísticos



Correlación de velocidades (entre 2 puntos)

Roll factor (Salesky, 2017)

$$Q_{ij}(\vec{x}, \vec{r}, t) = \langle u_i^j(\vec{x}) u_j^i(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$$

Nota:

R_{ij} en Pope

si es estadísticamente estacionario \rightarrow no depende de t

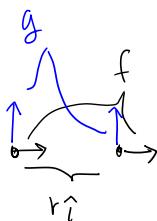
si es homogéneo \rightarrow no depende de \vec{x}

Caso isotrópico: independiente de la dirección: estadísticas

Son "inmunes" al sistema de referencia. No siempre ocurre, pero es una idealización muy útil.

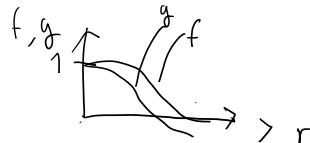
Asumir $\bar{u} = 0$ ($\rightarrow u = u'$). $u^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle$

$u \sim$ vel. típica de eddies grandes



$$Q_{xx}(r_i) = u^2 f(r_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ son funciones de} \\ \text{correlación longitudinal} \end{array} \right.$$

$$Q_{yy}(r_i) = u^2 g(r_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{y lateral} \\ f(0) = g(0) = 1 \end{array} \right.$$



Podemos construir una medida de la escala integral

$$l = \int_0^\infty f(r) dr : \text{"región donde las velocidades (longitudinales) están bien correlacionadas."}$$

Nota: Pope $\rightarrow L_1$ (longitudinal), análogamente se puede definir L_{22} (transversal/lateral) $\sim g(r) \circ Q_{yy}$

Función estructura longitudinal de 2do orden

\rightarrow importante en teoría de turb. isotrópica

$$\text{con } \Delta v = u_x(\vec{x} + \vec{r}) - u_x(\vec{x})$$

Nota: Pope $\rightarrow D_{ij}$

$$\text{la función } \langle [\Delta v]^2 \rangle = \langle (u_x(\vec{x} + \vec{r}) - u_x(\vec{x}))^2 \rangle$$

\sim "energía a la escala de tamaño r^{\parallel} "

Es una interpretación similar a $E(k)$ pero espacial

En el caso espectral hacemos algo similar, pero en vez de enfocarnos en el tamaño "r" del eddy, tomamos la transformada de Fourier y vemos el espacio de manera espectral en "K" (número de onda)

Energía espectral $E(K) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(r) Kr \sin(kr) dr$

$$R(r) = \int_0^{\infty} E(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dr$$

$$R(r) = \frac{1}{2} \left\langle \vec{u}(x) \cdot \vec{u}(x + \vec{r}) \right\rangle = u^2 \left(g + \frac{f}{2} \right)$$

Propiedades :

- $E(K) \geq 0$
- Para un conjunto de eddies que parecen Gaussianos de tamaño r $\rightarrow E(K)$ es máx'mo para $K \approx \pi/r$
- Cuando $r \rightarrow 0$: $\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \int_0^{\infty} E(k) dk$

$E(k)$: se interpreta como la contribución energética de eddies en el rango $(k, k + dk)$

también E se relaciona con la enstofía:

$$\frac{1}{2} \langle \vec{w}^2 \rangle = \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk$$

Hipótesis de Taylor

usada en mediciones de campo

Tenemos un sensor; por ej. de temperatura alejado de donde queremos medir.

Hipótesis : "turbulencia está congelada" : eddie se mueve sin evolucionar mucho $\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \approx -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \rightarrow$ entonces yo puedo asumir que a cierta distancia x del sensor la misma medida es válida, pero con un retraso $t \approx \frac{x}{u}$

Válido solo si la intensidad de la turbulencia $I = \frac{u'}{u} \ll 1$

Transferencia de energía

El flujo medio (\bar{u}) y la turbulencia (u') interactúan a través de los esfuerzos de Reynolds ($\sim \bar{u}_i' u_j'$)

Tasa de trabajo de los esfuerzos viscosos $\underbrace{\text{trabajo viscoso}}_{\text{trabajo viscoso}} + \underbrace{\text{energía interna}}_{\text{energía interna}}$

$$\text{general: } \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}^k \bar{u}_i] = \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j} + \tau_{ij}^k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{u}_i f_i + \tau_{ij}^k S_{ij}$$

En el caso turbulento:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}^k \bar{u}_i] = \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j} + \tau_{ij}^k \bar{S}_{ij}$$

↑
 no es un
esfuerzo real

⇒ no es un trabajo
real

no puede ser
energía interna

De hecho, \sim energía turbulenta.

Integrando en vol. de control (ej: tubería)

$$\cancel{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} [\tau_{ij}^k \bar{u}_i] dV} = \int_V \left(\bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j} \right) dV + \int_V \tau_{ij}^k \bar{S}_{ij} dV$$

→
 x_0 asumido
 in = out y $\tau_{ij}^k = 0$ en
 la pared

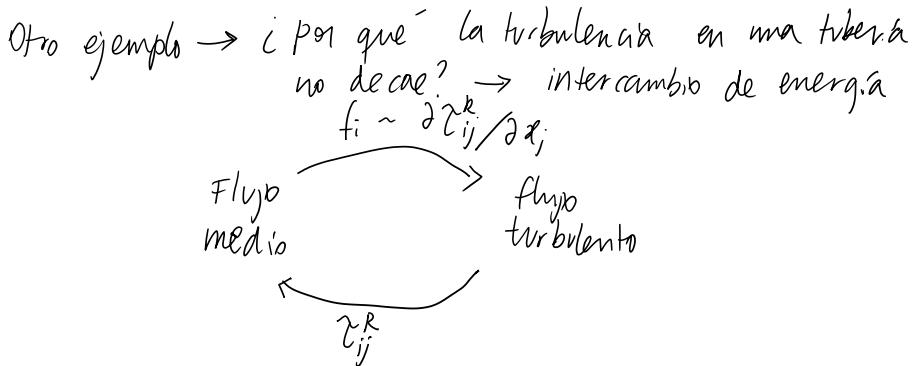
"trabajo" de τ_{ij}^k
 es una transferencia de momentum
 "pérdida de energía del flujo medio"

Balance: tasa de pérdida de e. cinética en el flujo medio = tasa de ganancia de e. cinética para turbulencia

Ej. de la transferencia entre \bar{u} y u'



tubos de vorticidad se elongan en la dirección de corte máximo por efecto del flujo medio.
 ⇒ Aumenta su vorticidad y e. cinética/energía



Otro modo de verlo: podemos separar la energía cinética

$$\frac{1}{2} \bar{U}^2 \quad \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \bar{U}^2 : MKE \text{ e. cinética media} \\ \rightarrow \frac{1}{2} \bar{U}^T 2 : TKE \text{ e. cinética turbulenta} \end{cases}$$

Vamos a ver las ecuaciones de MKE y TKE y en ellas la transferencia de energía es evidente mediante un término idéntico pero de signo opuesto,

$$\underline{MKE} \quad \underline{\bar{U}} = \vec{U}$$

$$\text{Partimos de } \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}) + \bar{U} \cdot \nabla (\rho \bar{U}) = \sum \underline{F} : \begin{matrix} \text{presión y} \\ \text{viscosas} \end{matrix}$$

$$\text{E. cinética} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \bar{U}^2}{2} \right) + \bar{U} \cdot \nabla \left(\frac{\rho \bar{U}^2}{2} \right) = \sum \underline{F} \cdot \underline{\bar{U}}$$

$$\text{Promedio temporal} \rightarrow \bar{U} \cdot \nabla \left(\frac{\rho \bar{U}^2}{2} + \rho \bar{U}^{12} \right) + \overline{\bar{U}^1 \cdot \nabla \left(\frac{\rho \bar{U}^2}{2} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{U}_i \bar{U}_{ij}^k \right] + \sum \overline{\underline{F} \cdot \bar{U}}$$

OJO:

$$\text{Davidson} \quad \frac{d}{dt} \rightarrow 0$$

$\underbrace{\quad}_{\text{transporte de e. cinética} \times \text{vel media}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{fluj/o/transp. turbulento de e. cinética} \sim \text{turbulenta}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{tasa de "trabajo" de } \gamma_{ij}^R}$

$\underbrace{\quad}_{\text{trabajo de } \underline{F}}$

7 Septiembre 2021

Ecuaciones de e. cinética media y turbulenta

$$MKE = \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \quad , \quad k = TKE = \frac{1}{2} \bar{u}^2$$

$$\bar{T}_{ij} = 2\rho v \bar{S}_{ij}$$

Ecuación de MKE:

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left(\frac{1}{2} \rho \bar{u}_i^2 \right) = \bar{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho \bar{u}_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\bar{u}_k \bar{p} + \bar{u}_i (\bar{T}_{ik}^R) \right] + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}_{ik}^R}{\partial x_k} - 2\rho v \bar{S}_{ik} \bar{S}_{ik}$$

omitiendo $\frac{\partial}{\partial t}$
 (Davidson)
 Cambio material de MKE

flujo de MKE
 pérdida de MKE por turbulencia
 disipación de MKE

Se puede reescribir como

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left(\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\bar{u}_k \bar{p} + \bar{u}_i (\bar{T}_{ik}^R + \bar{T}_{ik}^L) \right) - \bar{T}_{ik}^R \bar{S}_{ik} - 2\rho v \bar{S}_{ik} \bar{S}_{ik}$$

flujo de MKE
 ganancia de MKE por turbulencia

~trabajo hecho por \bar{p} , fuerzas viscosas y "efuerzas" de Reynolds

Ecuación para TKE

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left(\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = \bar{T}_{ik}^R \bar{S}_{ik} - \rho v \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\bar{p} \bar{u}_j + v \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) \right) - \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \bar{u}_i$$

lo reescribimos

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left(\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\bar{p} \bar{u}_k + \bar{u}_i \bar{T}_{ik}^R - \frac{1}{2} \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k \right) + \bar{T}_{ik}^R \bar{S}_{ik} - 2\rho v \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$$

flujo o transporte de TKE
 presión, fuerzas viscosas, trans. turb.
 generación de TKE des de la MKE
 disipación de TKE

En general, escribimos la ec de TKE de manera más conceptual como

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} k = -\nabla \cdot \bar{T} + G - \varepsilon$$

transporte
 generación
 disipación

$$\text{generación de TKE } G = -\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{S}_{ij}$$

$$\text{dissipación de TKE} \quad \varepsilon = 2 \sqrt{\overline{S_{ij}^T S_{ij}}}$$

$$\text{transporte} \quad \rho T_i = \frac{1}{2} \rho \overline{u_i^T u_i u_j^T} + \overline{\rho u_i^T} - 2 \rho \nu \overline{u_i^T S_{ij}}$$

Cuando la turbulencia es estadísticamente homogénea, $\nabla \cdot (\vec{v}') \rightarrow 0$
quedan $G = \varepsilon$: balance entre generación y dissipación

En la cascada de energía $G = \Pi = \varepsilon$

ingresa $\overbrace{\text{TKE}}^{\text{fluxo de energia en la cascada}}$ $\overbrace{\text{disipación a escalas pequenas}}$
 $\overbrace{\text{fluxo de energia en la cascada}}$

Vemos que $\Pi \sim \frac{u^3}{l} \Rightarrow [G \approx \Pi \approx \varepsilon] \sim u^3/l$

Esto no es cierto para otros flujos ...

Nota: Hay otras versiones de las ecs. de MKE y TKE.

1) T_{ij}^k pueden ser definidos ligeramente diferentes

Davidsen: $T_{ij}^k = -\rho \overline{u_i^T u_j^T}$, Pope: $\overline{u_i^T u_j}$

2) Se consideran otras fuerzas (\vec{g}) \rightarrow Aproximación de Boussinesq

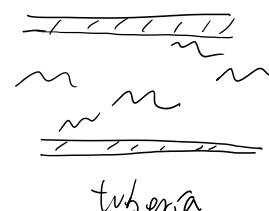
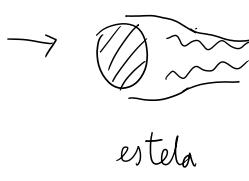
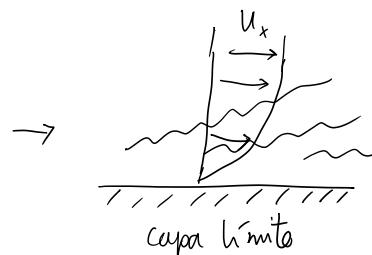
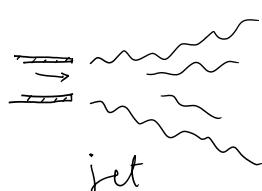
para N-S \rightarrow ecs. TKE y MKE
con un término extra $\rightarrow \underline{g \overline{w^T T}}$

producción/destrucción de e. interna o buoyancy

Shear flows \rightarrow Flujos con esfuerzos de corte de viento $\sim \frac{\partial u}{\partial x}$

- Predominantemente 1D:

estelas (waves), capa límite (boundary layer), jets
fluido en tuberías



- hay una interfaz marcada entre zona laminar y zona turbulenta
- vorticidad se genera en una pared y luego evoluciona

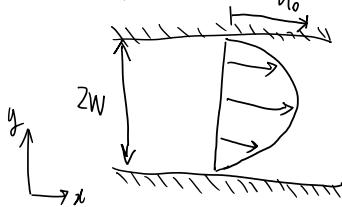
Preguntas:

- A qué tasa se dispersa la vorticidad?
- ¿Cuál es la intensidad de la turbulencia en diferentes lugares?
- ¿Cuál es la distribución espacial de \vec{u} ?

Efectos de pared \rightarrow flujo interno (tubería) \rightarrow flujo externo (capa límite)

Pantamos analizando un caso de flujo interno

Flujo de canal



Flujo entre placas paralelas, con turbulencia completamente desarrollada

$$\vec{u} = (\bar{u}_x(y), 0, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \bar{u}_x' \bar{u}_y' \right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(- \bar{u}_y' \bar{u}_y' \right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$\text{Sea } \bar{P}_w = \bar{p} + \rho \underbrace{\bar{u}_y' \bar{u}_y'}_{\text{independiente de } x} \Rightarrow \bar{P}_w(x)$$

$$\bar{u}'(y=0) = 0 \Rightarrow \bar{u}_y'(y=0) = 0$$

En la pared $\bar{u}'(y=0) = 0 \Rightarrow \bar{P}_w = \bar{p} (y=0)$: presión de pared

$$\text{Rescribimos} \quad \underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \bar{u}_x' \bar{u}_y' \right)}_{\neq f(x)} = \frac{d \bar{P}_w}{dx} \quad \gamma \neq f(y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dy} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \bar{u}_x' \bar{u}_y' \right)}_{-K} = -K \quad \text{: Nota: } \rho k \sim \text{gradiente de presión en la tubería}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xy}^R \sim \alpha y + \beta \quad \text{lineal c/r a } y$$

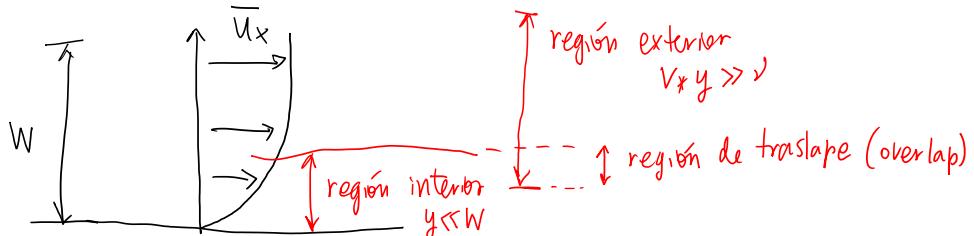
usando simetría en $y=W$

$$\tau = \bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^R = \rho K (W-y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{W}\right)$$

Notación: $V_*^2 = \frac{\tau_w}{\rho}$ = $\frac{K}{W}$ V_* : velocidad de fricción
 tambien U_*

Luego $\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{U_x' U_y'} = V_*^2 - Ky$
 no lo tenemos

Cómo seguir? → Análisis dimensional en diferentes zonas



En la región interior (cerca de la pared) $y \ll W$

$$\tau \approx \text{cte} = \tau_w$$

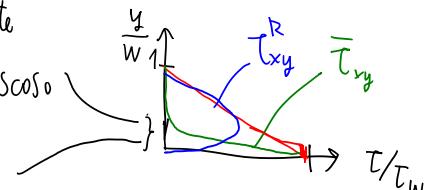
$$\Rightarrow \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{U_x' U_y'} = V_*^2, \frac{y}{W} \ll 1$$

En la pared $\underline{U}' \rightarrow 0$: laminar! $\rightarrow \tau = \text{cte}$

$\bar{\tau}_{xy}$ y $\bar{\tau}_{xy}^R$ varían rápidamente

$y=0$: τ es puramente viscoso

$y>0$: $\tau = \bar{\tau}_{xy}^R$



En la región exterior: el esfuerzo viscoso es despreciable

$$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{U_x' U_y'} = V_*^2 - Ky, \underbrace{\frac{V_* y}{\nu}}_{\text{distancia normalizada } y^+} \gg 1$$

y^+

Luego,

R. Interior: $\bar{u}_x(V_*, y, \nu)$, $y/W \ll 1$, supuesto:
W no están importantes

R. Exterior: $\bar{u}_0 - \bar{u}_x = \Delta \bar{u}_x(y, W, V_*)$, $y^+ \gg 1$

Resumiendo

$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = f(y^+) \quad , \quad \eta \ll 1 \quad \begin{cases} \text{ley de la pared} \\ y/W \end{cases}$$

$$\frac{\Delta \bar{U}_x}{V_*} = g(\eta) \quad , \quad y^+ > 1 \quad \begin{cases} \text{ley de "defecto"} \\ \text{de velocidad} \\ (\text{velocity defect law}) \end{cases}$$

Si $Re = \frac{W V_*}{\nu} \gg 1 \rightarrow$ hay una región de traslape / overlap

- subcapa inercial (η es pequeño, y^+ es grande)
- Ambas ecuaciones son válidas

$$y \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} = V_* y^+ f'(y^+) = -V_* \eta g'(\eta)$$

depende de y^+ depende de η , η, y^+ son independientes

$$\Rightarrow y^+ f'(y^+) = -\eta g'(\eta) = \text{cte} = \frac{1}{K}$$

Integrando,

$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad , \quad \frac{U_0 - \bar{U}_x}{V_*} = \frac{-1}{K} \ln \eta + B$$

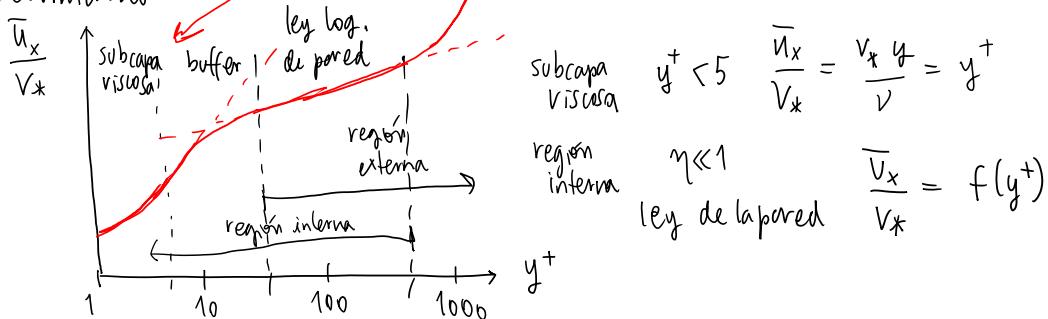
Famosa ley logarítmica de la pared, K : constante de von Kármán

experimentalmente $K \sim 0.38 - 0.43$
usualmente $K = 0.4$

Con $A = 5.5$ y $B = 1 \rightarrow$ buen fit para $y^+ > 60$, $\eta < 0.2$

En $y^+ < 5$ es parcialmente laminar y $\frac{\bar{U}_x}{V_*} \sim \frac{V_* y}{\nu}$

Resumiendo



reg.
traslape

$$y^+ \gg 1, \eta < 1 \quad \frac{\bar{U}_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln y^+ + A$$

ley log. de la parada

reg.
exterior

$$y^+ \gg 1 \quad \frac{\bar{U}_o - \bar{U}_x}{V_*} = g(\eta)$$

ley del defecto de
la velocidad

también se escribe como

$$\frac{\bar{U}_o - \bar{U}_x}{V_*} = -\frac{1}{k} \ln \eta + B - \Pi_w(\eta)$$

$\Pi_w(\eta)$: función estela (wake function) \rightarrow Tenneker y Lumley, 1972
Cap 4



Comentario sobre efectos de pared

- Región interior: supuesto clave: independencia de W
Esto no es 100% cierto pues las escalas grandes inciden en las escalas pequeñas. ¿Por qué el modelo de ley de la pared funciona bien?
- Escalas más grandes ~ tiempos mayores ~ "son procesos más lentos"
Estadísticamente tienen un efecto menor en \bar{t}_x^* → las escalas pequeñas evolucionan más rápido cerca de la pared.
- Idea desarrollada por Townsend, 1976: "Inactive motion"
lento movimiento de eddies grandes sobre la pared

Si se promedia sobre un tiempo $T^* \sim$ escala de tiempo de los eddies grandes, llega a una ecuación un poco diferente

$$\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} = \frac{V_0}{k g} \quad \text{pero } \bar{t}_x^* = T_0 + \bar{t}_x^1 = T_0 \left(1 + \frac{\bar{U}_x^{12}}{\bar{U}_x^{12}} + \frac{\bar{U}_z^{12}}{2\bar{U}_z^{12}} + o(\bar{U}^{13}) \right) \\ \text{aumentan en } \bar{t}_x^1$$

⇒ el valor medido de $V_x \neq V_0$: $V_x = \gamma V_0$

$$K_{\text{eff}} = \gamma K$$

la medición de K es siempre un poco mayor a lo esperado

Dado que la ley de pared no es perfecta (aunque funciona muy bien), hay otra alternativa?

- Ley de potencia (power law) $\frac{\bar{U}_x}{V_x} = a(y^+)^n$
a y n dependen de Re . Por esto, se prefiere el uso de la ley de pared.

Pared rugosa?



\hat{k} : rugosidad rms (root mean square) $\sim SD(k)$

si $\hat{k} > \text{subcapa viscosa } (y^+ < 5) \rightarrow$ es importante!

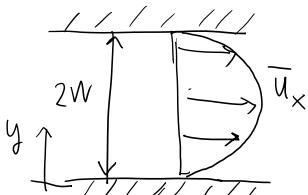
$$\frac{\bar{U}_x}{V_x} = f\left(\frac{y}{\hat{k}}, \frac{V_x y}{\nu}\right) \quad , \quad \frac{y}{W} \ll 1$$

para $\frac{V_* k}{\nu}$ grandes, efectos viscosos no importan
 \Rightarrow solo $\frac{\bar{U}_x}{V_*} = f\left(\frac{y}{k}\right)$

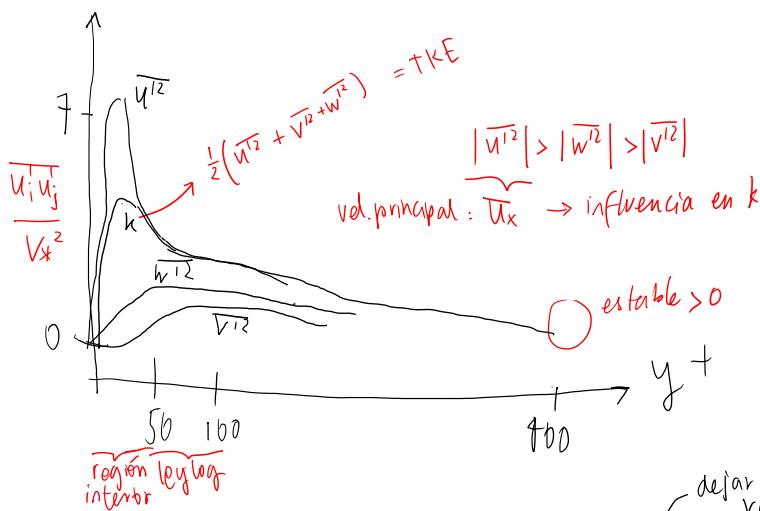
Ley log. de pared modificada

$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{k} + \text{cte} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

Flujo de canal



estadísticas dependen de y



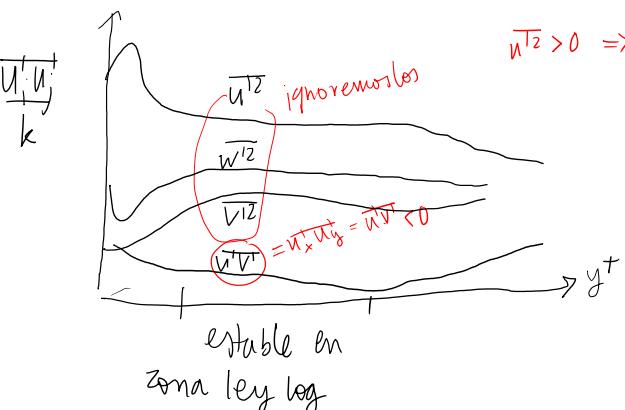
Nota: teniendo datos

3D $u, v, w(x, y, z, t) \rightarrow$

cómo se calcula?

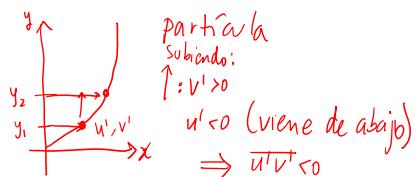
$u(x, y, z, t) \rightarrow \bar{u} \rightarrow u' \rightarrow u'^2 \rightarrow \bar{u}'^2$

operaciones promedio $\rightarrow t \rightarrow x-z \rightarrow \bar{u}(y)$



$$\bar{u}'^2 > 0 \Rightarrow k > 0$$

por qué $\bar{u}'^2 < 0$?



\exists relación entre $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ y \bar{u}'^2

Gradiente difusivo : $\bar{w}' \phi' = -K \frac{\partial \phi}{\partial z}$ (k theory)

Características

$\overline{U_x^{1/2}}$ es máximo para $y^+ \sim 15$

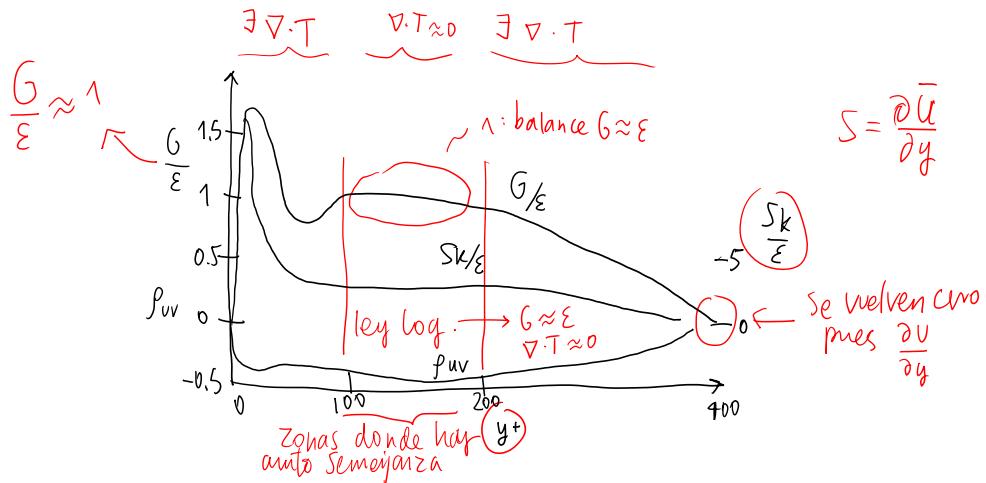
$y^+ \sim 60$ las estadísticas son más constantes

$$\frac{\overline{U_x^{1/2}}}{k} \sim 1.1, \quad \frac{\overline{U_y^{1/2}}}{k} \sim 0.3, \quad \frac{\overline{U_z^{1/2}}}{k} \sim 0.6, \quad \frac{\overline{C_{xy}^R}}{k} \sim 0.28$$

En la zona de traspaso/overlap donde usamos la ley log. de pared, también se puede usar la hipótesis del eddy adjunto (Turbogend)

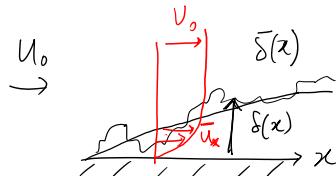
$$\frac{\overline{U_i^{1/2}}}{V_*^2} = C_i + d_i \ln\left(\frac{y}{y_0}\right): \text{explica mejor esa región donde la razón de } \frac{\overline{U_i^{1/2}}}{k} \text{ no es constante.}$$

Qué pasa con TKE?



cálculo : $G, \varepsilon, S \rightarrow \text{promedio tiene que ser indep. de } y$

Capa límite turbulenta



Existe una zona cerca de la pared donde el flujo no siente los detalles del flujo exterior \rightarrow propiedades universales:

$$V_k, y^+, \nu (\hat{k})$$

Esperamos encontrar una ley log. y subcapa viscosa al lado de cualquier pared con un flujo con $\frac{\partial U}{\partial y}$

Para ello: $Re \gg 1$, $\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{U}_x \bar{U}_y}{\partial x}$ pequeños

Es exactamente lo que ocurre.

turbina (R)

capa límite turbulenta

región interna

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = f(y^+), \quad y \ll R$$

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = f(y^+) \quad , \quad y \ll \delta$$

región externa

$$\frac{\bar{U}_0 - \bar{U}_x}{V_k} = g\left(\frac{y}{R}\right), \quad y^+ \gg 1$$

$$\frac{\Delta U_x}{V_k} = g\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad y^+ \gg 1$$

región traslape

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad y^+ \gg 1, \quad y \ll R$$

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad y^+ \gg 1, \quad y \ll \delta$$

δ : espesor de la capa límite : (cuál?)

vel exterior

$$\delta(x) = y \text{ tal que } \bar{U}_x(x, y) = 0.99 U_\infty(x)$$

No es la mejor definición ~ fluctuaciones

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{U}_x}{U_\infty}\right) dy : \text{espesor de desplazamiento}$$

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{U}_x}{U_\infty} \left(1 - \frac{\bar{U}_x}{U_\infty}\right) dy : \text{espesor de momentum}$$

Existen por lo tanto varias definiciones de Re en base a diferentes escalas de longitud: $Re_x, Re_\delta, Re_{\delta^*}, Re_\theta$

la ley log aplica para $y^+ > 60$, $\frac{y}{\delta} < 0.2$

"Ley universal" cerca de la pared, pero el flujo fuera de la capa límite no es universal: ∇p puede variar

$$N-S \rightarrow \bar{p} + \rho \bar{u}_y^2 = \bar{p}_o(x)$$

en $y=0 \rightarrow \bar{u}_y^2 = 0 \Rightarrow p_o(x) = p_w(x)$

ec. capa límite turbulenta

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{u}_x \bar{u}_y}{\partial y} - \frac{l}{f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (*)$$

Integrando (*) \rightarrow ec. momentum integral de von Kármán

caso $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$: zero-pressure gradient (ZPG)

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \left(\rho \bar{u}_o^2 \theta \right) = \rho \bar{u}_o^2 \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{total } \tau = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \rho \bar{u}_x \bar{u}_y$$

aumento/disminución del "cambio" de momentum
por las fuerzas de pared

Capa límite turbulenta

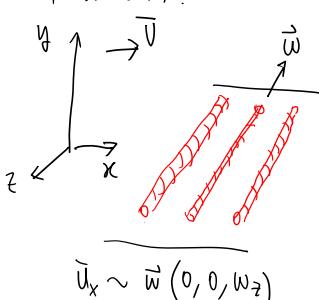
- Subcapa viscosa (la más cerca a la pared) es principalmente laminar, pero hay liberación explosiva de vorticidad de manera intermitente. El resto del tiempo hay difusión lenta de vorticidad.
- Fuera de la capa límite igual hay algo de fluctuaciones pero no es turbulenta: es irrotacional y no hay cascada de energía

En la capa límite se forman estructuras coherentes

qué son? definición vaga pero son estructuras con vorticidad que se mantienen en el flujo por un largo tiempo y pueden ser importantes en el transporte de momentum aparecen regularmente con un patrón similar

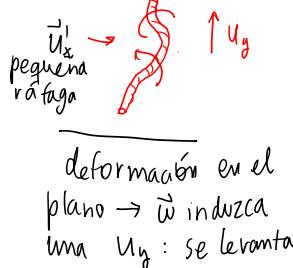
hairpin vortex → tubos de vorticidad arqueados $\sim 45^\circ$
 (pinche de pelo) $L_{\text{max}} \sim \delta$, Diámetro $\sim 5\sqrt{\nu_*}$ (muy pequeño)

Formación:

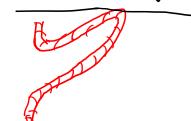


$y^+ < 15$: subcapa viscosa

$Re \gg 1$: tubos se mueven congelados pero se deforman



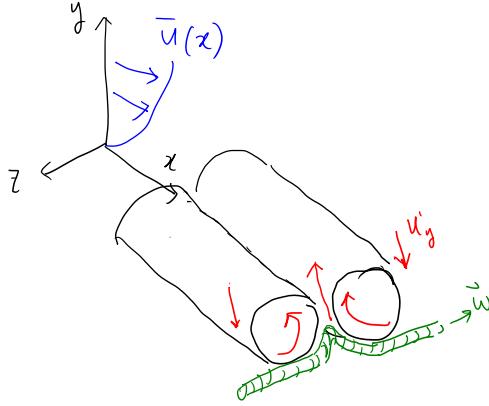
MKE \rightarrow TKE cuando el flujo medio deforma y estira los vórtices



se sigue deformando porque $\frac{\partial U_x(y)}{\partial y} > 0$

- eventualmente el tubo se puede romper por interacciones con vórtices aledaños.
- no son perfectos y la similitud puede perderse un poco

Otra estructura: rolos ($y^+ < 50$) dominantes según algunos

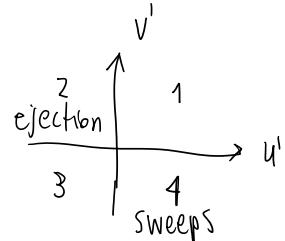


- rolos ~ parecido al movimiento convectivo, pero acá no hay calor!
- se forman zonas de convergencia y divergencia \rightarrow estiran a los vórtices hacia arriba, luego se siguen deformando por el flujo medio
- son subidas explosivas / intermitentes "ejections"

- son temas complejos y hay muchas teorías al respecto pero las estructuras parecen estar relacionadas.

Como hay ejections, también hay estructuras que bajan "sweeps" ambos transportan momentum.

Se pueden detectar usando análisis de cuadrantes:

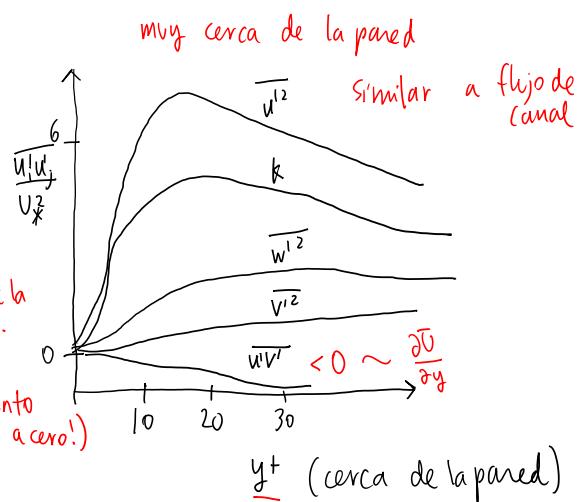
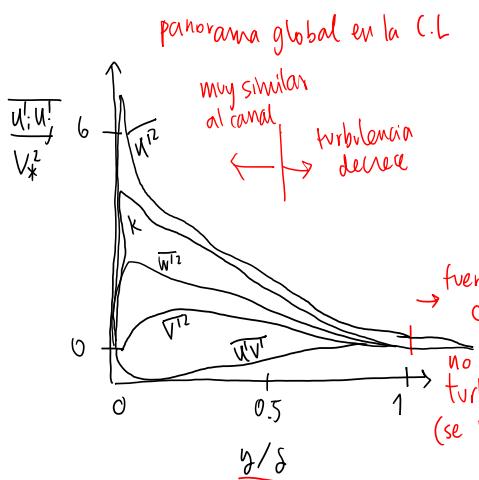


Recordar que en el caso laminar, la capa límite tiene la solución de Blasius $\frac{\bar{u}}{\bar{U}_0} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$, $\delta = \sqrt{\frac{x}{\text{Re}}} = \frac{x}{\sqrt{\text{Re}}}$

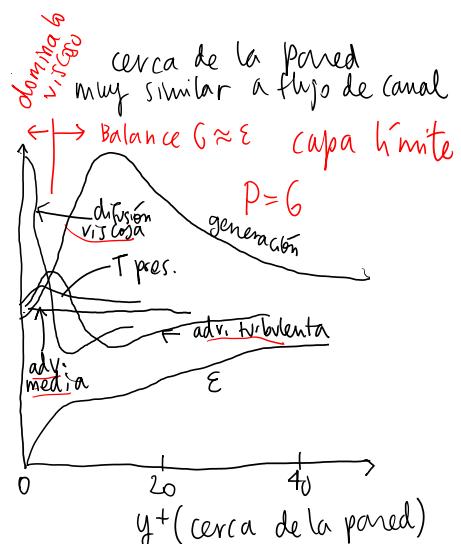
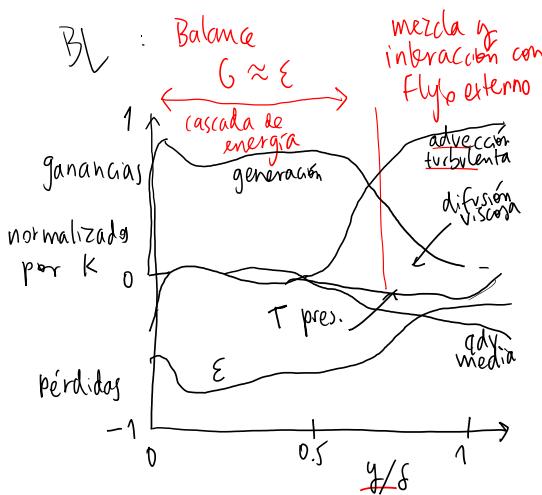
$$\text{experimentalmente } \frac{\delta}{x} = \frac{4.9}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{laminar})$$

$$\text{caso turbulento } \frac{\delta}{x} \sim 0.16 \text{ } \text{Re}_x^{-1/7}, \text{ así que cambia.}$$

Cómo son los esfuerzos de Reynolds?



Como son las contribuciones al TKE?



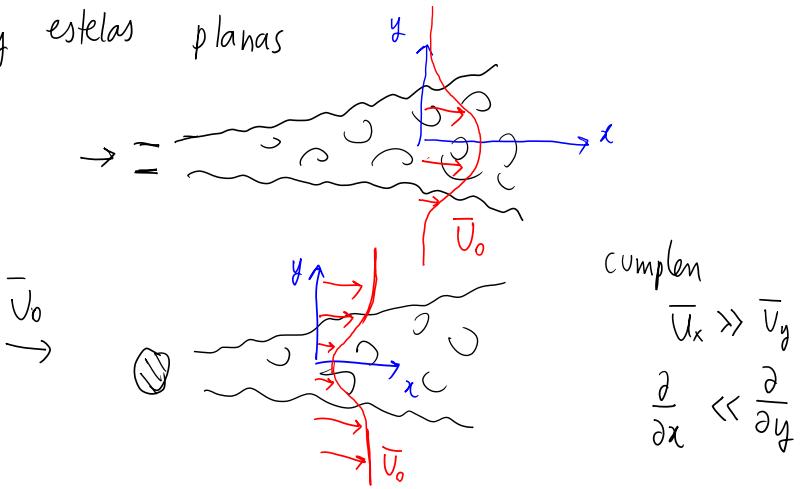
- Términos TKE \rightarrow muy similares al flujo de canal cerca de la pared, igual los T_{ij}^k
 - $y^+ \sim 40 - \frac{y}{\delta} \sim 0.4$: balance $G \approx \epsilon$
 - \rightarrow luego, los términos de transporte ganan importancia

Uno puede analizar las contribuciones $\bar{u'^2}$, $\bar{v'^2}$, $\bar{w'^2}$

$\bar{u'^2}$: concentra la producción (P)

$\bar{v'^2}$ y $\bar{w'^2}$: transporte por presión \rightarrow redistribuye energía en las otras direcciones

Jets y estelas planas



- hay una frontera muy clara pero irregular entre el jet / estela y flujo exterior
- la interfaz cambia a $Re > 10^4 \rightarrow$ se generan escalas más pequeñas. Aún no se entiende bien por qué.
- el jet / la estela crean al mezclar aire exterior por turbulencia : "entrainment"

Ecaciones que gobernan estos casos:

supuestos:

- 1) $\frac{\partial}{\partial x} T_{ij}^R \ll \frac{\partial}{\partial y} T_{ij}^R$
- 2) $\bar{T}_{ij} \ll T_{ij}^R$
- 3) $(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{U}_y \sim \frac{\bar{u}^2}{\rho_{\text{streamlines}}} \ll 1$

RANS \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \rho \cdot (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{U}_x &= \frac{\partial}{\partial y} T_{xy}^R - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} T_{yy}^R - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad \left. \right\} \bar{p} + \rho \bar{U}_y^2 = \bar{p}_{\infty}(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{U}_y^2}{\partial x} \text{ son pequeños} \Rightarrow \bar{p} \neq f(x)$$

$$\text{We go} \quad \rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{U}_x = \frac{\partial}{\partial y} T_{xy}^R \quad y \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0$$

$$\text{jet: } \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{U}_x \bar{U}_y) = \frac{\partial}{\partial y} T_{xy}^R$$

$$\text{estela: } \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}_x (\bar{V} - \bar{U}_x)) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{U}_y (\bar{V} - \bar{U}_x)) = - \frac{\partial T_{xy}^R}{\partial y}$$

24 septiembre 2021

$$\text{jet: } \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{U}_x \bar{U}_y) = \frac{\partial}{\partial y} T_{xy}^R$$

$$\text{estela: } \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}_x (V - \bar{U}_x)) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{U}_y (V - \bar{U}_x)) = - \frac{\partial T_{xy}^R}{\partial y}$$

Integrando en y de $-\infty$ a ∞

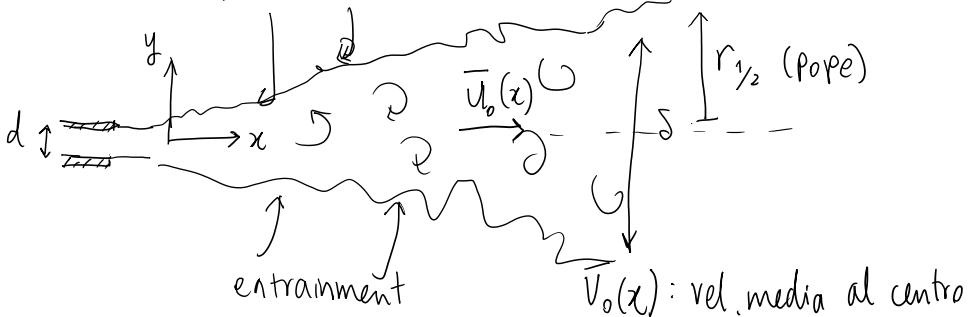
- $\rightarrow \bar{U}_x \rightarrow 0, T_{xy}^R \rightarrow 0$
- $\rightarrow V - \bar{U}_x \rightarrow 0, T_{xy}^R \rightarrow 0$

$$\text{jet: } M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{U}_x^2 dy = \text{cte}$$

Flujo de momentum "se conserva" (independiente de x)

$$\text{estela: } D = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{U}_x (V - \bar{U}_x)$$

V : rel. externa . Deficit de momentum "se conserva"



Empíricamente, a $x \sim 30 d$ el jet se vuelve auto-similar (self-similar), olvida su condición inicial, y la estructura va a depender de $\bar{U}_0(x)$ y $\delta(x)$

$$\bar{U}_x(x, y) = f(y, \delta(x), \bar{U}_0(x))$$

De análisis dimensional, proponemos una solución auto similar

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_0(x)} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) = f(\eta)$$

$\left[\begin{array}{l} \text{EDP} \sim \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - f(\eta) \text{ nos permite transformar } \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \text{Nos va a quedar una EDO. Resolver la EDO} \rightarrow \text{solución } \eta \\ \rightarrow \text{solución para } \bar{U}_x \end{array} \right]$

Podemos reescribir con $f(\eta)$:

para x grande

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{U}_x^2 dy = \rho \bar{U}_0^2 S \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\eta) d\eta = cte$$

$$\dot{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{U}_x dy = \rho \bar{U}_0 S \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \sim \rho \bar{U}_0 S$$

→ no es constante porque hay entrainment

lo que entra al jet $\propto U' \propto \bar{U}$

entonces postulamos

$$\frac{d}{dx} \dot{m} = \alpha \uparrow \rho \bar{U}_0 \int_{-\infty}^{\infty} f d\eta$$

coeficiente de entrainment

\Rightarrow

$$\bar{U}_0^2 S = cte \quad , \quad \frac{d}{dx} (\bar{U}_0 f) = \frac{1}{2} \alpha \bar{U}_0$$

Si α es constante (resulta cierto a posteriori, en experimentos)

$$\frac{S}{S_0} = 1 + \frac{\alpha x}{S_0} \quad , \quad \frac{\bar{U}_0}{V_0} = \left(1 + \frac{\alpha x}{S_0}\right)^{-1/2}$$

S_0, V_0 son tomados al inicio de la región auto similar (30d)

Con experimentos, estas expresiones resultan muy útiles, y $\alpha \approx 0.42$, con un semi ángulo de 12° .

Caso laminar, podemos llegar a una solución para $f(\eta)$

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_0} = f\left(\frac{y}{S}\right) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{y}{\lambda S}\right)$$

λ : coeficiente relacionado a S . Si S es tal que $\frac{\bar{U}_x}{V_0}$ decrece 10%, $y = \pm \frac{S}{2} \Rightarrow \lambda = 0.275$

$$\alpha = \frac{dS}{dx} = \frac{4b}{\lambda^2} \Rightarrow b = 8 \cdot 10^{-3}$$

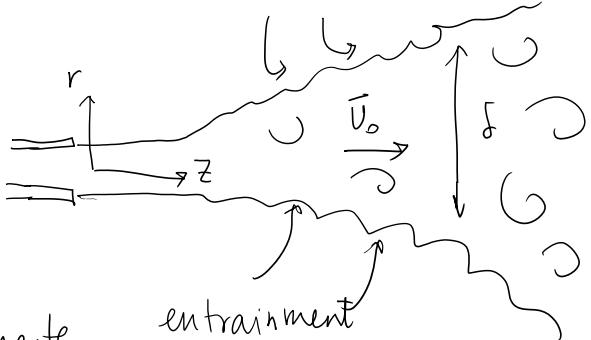
Jet redondo

coordenadas cilíndricas

$$\bar{u}_z > \bar{u}_r$$

axisimétrico: estadísticamente no depende de θ

$$\frac{\partial}{\partial z} \ll \frac{\partial}{\partial r}$$



A medida que el jet crece (con z), $\bar{u}_0 \downarrow$, $\delta \uparrow$
Frontera irregular, tiene que ver con el movimiento de los eddies

Hay entrainment $\rightarrow \dot{m}$ crece con z

Para $z > 30d$ hay una región auto similar

$$\frac{\bar{u}_z(r, z)}{\bar{u}_0(z)} = f\left(\frac{r}{\delta(z)}\right), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_z(0, z)$$

Ecuaciones y supuestos: 1) $\frac{\partial}{\partial z} T_{ij}^R \ll \frac{\partial}{\partial r} T_{ij}^R$

2) esfuerzos laminares son pequeños

$$3) (\bar{u} \cdot \nabla \bar{u})_r \text{ es pequeño}$$

RANS quedan:

$$\rho \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}_z = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}^R) \quad (1)$$

$$0 = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rr}^R) - \frac{T_{\theta\theta}^R}{r} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \bar{p} = T_{rr}^R - \int_r^\infty \underline{T_{rr}^R - T_{\theta\theta}^R} dr$$

$$\text{como } \frac{\partial}{\partial z} \ll \frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \approx 0$$

Reescribimos (1)

$$\rho \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \int \bar{u}_r \bar{u}_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{u}_z^2) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}^R)$$

Integrando en r de 0 a ∞

$$M = \int_0^\infty \rho \bar{U}_z^2 2\pi r dr = cte$$

Momentum se conserva (independiente de x)

con $\bar{U}_z = f \bar{U}_0$ y $\eta = r/\delta$

$$\dot{m} = \rho \bar{U}_0 \delta^2 \int_0^\infty 2\pi \eta f(\eta) d\eta \neq cte$$

$$M = \int \bar{U}_0^2 \delta^2 \int_0^\infty 2\pi \eta f^2(\eta) d\eta = cte$$

\dot{m} crece por entrainment

$$\frac{d\dot{m}}{dz} = \alpha \rho \bar{U}_0 \delta \int_0^\infty 2\pi \eta f(\eta) d\eta$$

\uparrow cte. entrainment

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} (\bar{U}_0 \delta^2) = \alpha \bar{U}_0 \delta , \quad \bar{U}_0^2 \delta^2 = cte$$

Integrando $\frac{\delta}{\delta_0} = 1 + \frac{\alpha z^*}{\delta_0} , \quad \frac{\bar{U}_0}{V_0} = \left(1 + \frac{\alpha z^*}{\delta_0}\right)^{-1}$

z^* se mide desde la zona auto similar ($30d$)

δ_0, V_0 son en $z^* = 0$.

Acá también $\frac{d\delta}{dz} = \alpha = \text{constante} \sim 0.43$

Metiendo f a la EDP $\rightarrow f = \frac{1}{(1 + a\eta^2)^2}$

$$a = \frac{\alpha}{8b} , \quad a = 8.65 , \quad b = 6.2 \cdot 10^{-3}$$

$\eta = \frac{r}{\delta}$

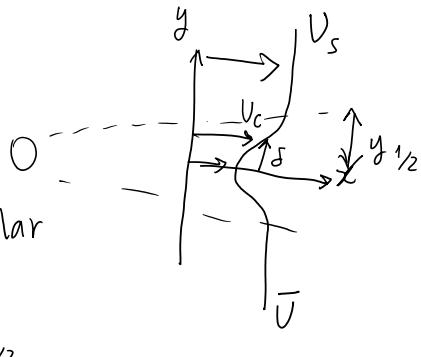
28 Septiembre 2021

continuación : estelas y jets

Estela plana (Pope)

construir una solución auto similar

$$f(\xi) = \frac{U_c - U}{U_s}, \quad \xi = \frac{y}{y_{1/2}}$$



la estela crece linealmente ~ entrainment

$$S = \frac{U_c}{U_s} \frac{dy_{1/2}}{dx} = \text{cte} \Rightarrow U_s \sim x^{1/2} \\ y_{1/2} \sim x^{1/2}$$

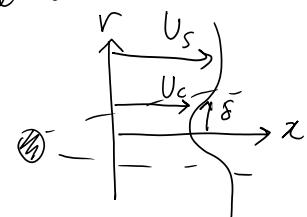
$$f(\xi) = \exp(-\alpha \xi)^2, \quad \alpha = \ln 2 //$$

Estela axisimétrica

- se forman tras objetos como esferas, esferoide, discos
- está distínicamente independiente de Θ

- Déficit de velocidad

- Ancho medio de la estela $r_{1/2}$



$$\underline{\text{Solución auto similar}}, \quad f(\xi) = \frac{U_c - U}{U_s}, \quad \xi = \frac{r}{r_{1/2}}$$

$$\text{la estela crece linealmente} \quad S = \frac{U_c}{U_s} \frac{dr_{1/2}}{dx} = \text{cte}$$

$$\begin{aligned} \text{Déficit de vel.} &\sim x^{-2/3} \\ r_{1/2} &\sim x^{1/3} \end{aligned}$$

Se da para un rango de x :

$$\frac{x}{d} \in (50, 150)$$

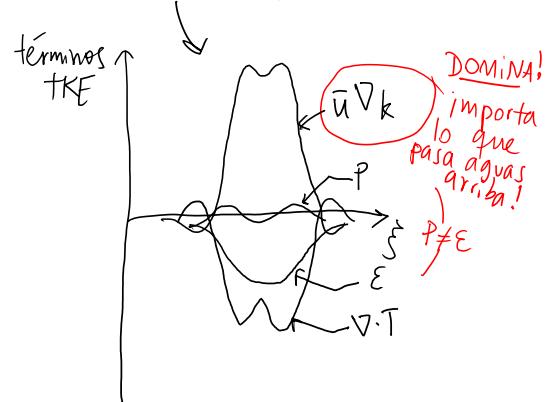
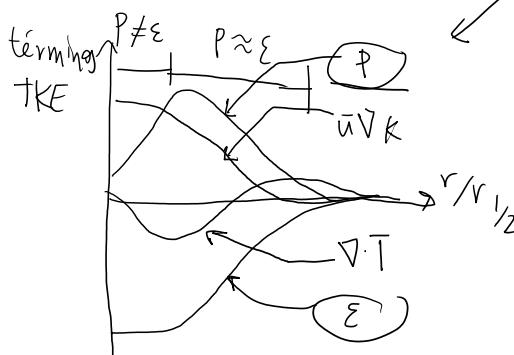
$$\left. \begin{aligned} Re &\sim t^{-1/3} \\ &\text{decrece!} \end{aligned} \right.$$

estela deja de ser turbulentia y se relaminariza

$$S_{\text{axisimétrica}} \sim 0.51 \quad \gg S_{\text{estela plana}} \sim 0.1$$

hay rangos de valores y no son universales, dependen del objeto que generó la estela : retienen info.

Última cosa: TKE jet vs estela (axisimétricos)



Capa de mezcla plana (mixing layer)

$$- U_h > U_e \geq 0$$

- Ocurre en el borde inicial de un jet plomo

- Se puede recrear en túnel de viento

Supuestos:

- $U_x \gg U_y$, estadísticas son independientes de z
- flujo depende $U_e < U_h$

podemos definir 2 velocidades características

$$U_c = \frac{U_h + U_e}{2}$$

$$U_s = U_h - U_e$$

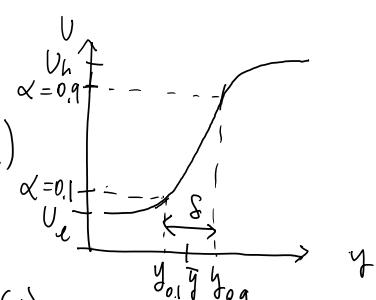
Ancho característico: $\delta(x)$

$$\bar{U}(x, y_{\alpha}(x)) = U_e + \alpha(U_h - U_e)$$

$$\delta(x) = y_{0.9}(x) - y_{0.1}(x)$$

uma definición usada para $\delta(x)$

$$\bar{y}(x) = \frac{y_{0.9}(x) + y_{0.1}(x)}{2}$$



Hay también una solución auto similar

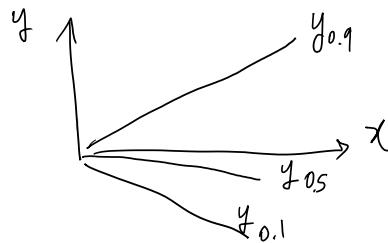
$$\hat{x} = \frac{y - \bar{y}}{\delta}, \quad f(\hat{x}) = \frac{\bar{U} - U_c}{U_s}$$

se confirma experimentalmente

La capa de mezcla crece linealmente con x :

$$S = \frac{U_c}{U_s} \frac{ds}{dx} = \text{cte}$$

$$S = 0.06 - 0.11$$



$$f(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\nu_T}{S} \leftarrow \begin{array}{l} \text{viscosidad} \\ \text{turbulenta} \\ (\text{lo veremos}) \end{array}$$

HASTA ACÁ ENTRA EN EL Control 1

Martes 12 de Octubre

PRIMERAS PRESENTACIONES : IDEA PROYECTO

Viernes 15 de Octubre

$\underbrace{2-3 \text{ personas}}$
1 análisis de turbulencia

Escalas, cascada de energía, análisis espectral

Hay muchas escalas de longitud en un flujo turbulento

L (escala del flujo medio) - - - ℓ_ε (pequeñas escalas)

Hay una transferencia de energía del flujo medio al flujo turbulento $\sim \tau_{ij}^k \bar{S}_{ij}$, k

Richardson (1922) : cascada de energía

$\tau_{ij}^k \bar{S}_{ij}$

- E. cinética entra al flujo mediante producción
- se transfiere a escalas más pequeñas
- eventualmente se disipa por efectos viscosos

** 2D : se tiene una cascada invertida **

Consideremos un flujo turbulento con U y L escalas características del flujo medio, tal que

$$Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1 \quad \text{muy grande}$$

Turbulencia: conjunto de eddies de diferentes tamaños

Para un eddy de tamaño $l \rightarrow u(l) : \text{escala velocidad}$
 $\tau(l) = l/u(l) : \text{escala de tiempo}$

De dónde nacen los eddies grandes?

- Instabilidades o anomalías que crecen y se deforman por acción del flujo medio.
- Escala asociada: $l_0 \lesssim L \rightarrow U_0 = u(l_0)$ $\tau_0 = l_0/U_0 \quad \left. \begin{array}{l} Re = \frac{U_0 l_0}{\nu} \\ \end{array} \right\}$

Tasa de transferencia de energía

$$\frac{U_0^2}{\tau_0} = \frac{U_0^3}{l_0} \quad \text{idea de la cascada} \Rightarrow \epsilon = \frac{U_0^3}{l_0}$$

Nota: Cuando $P \approx \epsilon$ lo que estamos interpretando es que estamos en un estado estadísticamente estacionario en k ($+KE$), y se puede establecer una cascada

Muchos experimentos confirman la cascada grid turbulence

$$\Pi = \frac{3}{2} A U^3 / l, \quad A: 1.1 \pm 0.2 \quad (\text{Batchelor 1953})$$

para Re mayores $A \rightarrow 0.3$ (Pearson 2004, Kaneda 2003)

Hipótesis de Kolmogorov (1941)

- Tamaño de los eddies más pequeños?
- cómo cambian $u(l)$, $\tau(l)$ para eddies más pequeños? Esperamos $Re \downarrow$, pero no nos dice nada de u y τ

1. Hipótesis de isotropía local

En flujos turbulentos con Re muy grandes, el movimiento de las pequeñas escalas ($l < l_0 \sim L$) es estadísticamente isotrópico.

independiente de la dirección

los movimientos grandes $\overbrace{\text{grandes}}$ pueden no ser isotrópicos.

Sea $l_{EI} (\sim \frac{1}{6} l_0)$ $\overbrace{l > l_{EI}}$ escalas pequeñas: $l < l_{EI}$

Esta hipótesis sugiere que la información espacial de las escalas grandes se pierde, llegando a un estado universal en las escalas pequeñas.

$\overbrace{\text{de qué depende?}}$ \rightarrow tasa de transf. energía $T \approx \varepsilon$
 \rightarrow viscosidad ν

2. Primera hipótesis de similaridad

En un flujo turbulento con Re muy grande, las estadísticas de las escalas pequeñas ($l < l_{EI}$) tienen una forma universal determinada por ε y ν .

$l < l_{IE}$: rango universal de equilibrio

ν y ε permiten construir las escalas de Kolmogorov

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad u_\eta = (\varepsilon \nu)^{1/4}, \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$\text{con } Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$$

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{u_\eta}{\eta}\right)^2 = \nu / \tau_\eta^2$$

Estamos diciendo que a escalas pequeñas, las velocidades son estadísticamente similares, cuando son normalizadas por las escalas de Kolmogorov.

$$\text{con } \varepsilon \sim U_0^3/l_0 \rightarrow \frac{\eta}{l_0} = Re^{-3/4}, \quad \frac{u_\eta}{U_0} \sim Re^{-1/4}, \quad \frac{\tau_\eta}{T_0} \sim Re^{-1/2}$$

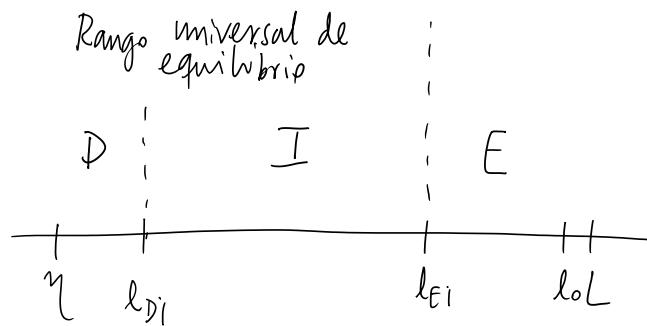
todas decaden pero a tasas diferentes

¿Qué pasa con las escalas intermedias ($\eta \ll l \ll l_0$)?

3. Segunda hipótesis de similitud

En flujos turbulentos con Re muy grandes, las estadísticas del movimiento a escalas l en el rango $\eta \ll l \ll l_0$ tienen una forma universal que solo depende de ε , no de v .

Sea l_{DI} ($\sim 60\eta$) $\rightarrow l_{DI} < l < l_{EI}$: rango buscado



D: rango de disipación $\sim v, \varepsilon$

I: subrango inercial $\sim \varepsilon$

E: rango que contiene energía

1 de octubre

2da hipótesis de similaridad de Kolmogorov

→ Hay una forma universal para las escalas intermedias que depende de ε

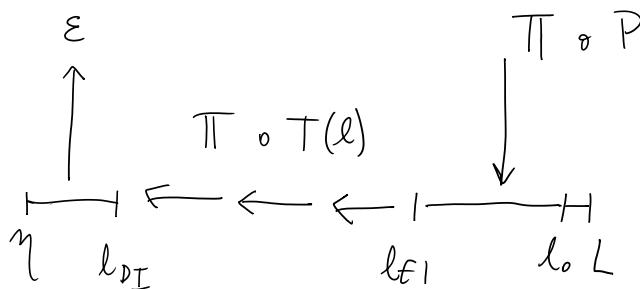
→ ε no es suficiente para construir escalas apropiadas: para un eddy de tamaño l

$$\Rightarrow u(l) = (\varepsilon l)^{1/3} \sim u_\eta (l/\eta)^{1/3} \sim u_0 (l/l_0)^{1/3}$$
$$\tau(l) = (l^2/\varepsilon)^{1/3} \sim \tau_\eta (l/\eta)^{2/3} \sim \tau_0 (l/l_0)^{2/3}$$

se cumple que $\Pi = T(l) \sim u(l)^2/\tau(l) = \varepsilon$

la tasa de transferencia de energía para l es independiente de l

Ecuatoriamente, la cascada de energía queda:



Hemos mencionado que también se puede representar la cascada en el espectro de energía $\sim E(k)$

escala $l \longleftrightarrow$ no de onda $k = \frac{2\pi}{l}$

energía en el rango (k_A, k_B) :

$$TKE \rightarrow k_{(k_A, k_B)} = \int_{k_A}^{k_B} E(k) dk$$

nos permite conocer la energía \sim tamaño de eddies

Se puede negar a que la contribución a E es

$$E(x_a, x_b) = \int_{x_a}^{x_b} 2\nu k^2 E(k) dk$$

la 1era hipótesis de similitud:

para $k > k_{E1} = \frac{2\pi}{l_{E1}}$ el espectro es universal y depende de ε y ✓

la 2da hipótesis de similitud:

en el rango inercial ($k_{E1} < k < k_{D1}$) el espectro es universal y depende de ε y se puede probar que ↴ cte. universal

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

espectro de los $-5/3$ de Kolmogorov

¿Esto tiene sentido? → Tomemos $E(k) = A k^{-p}$

contribuciones a k y ε en función de k

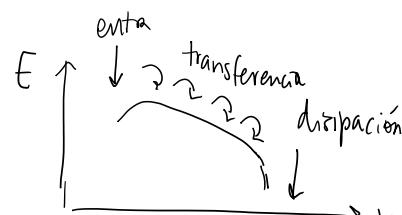
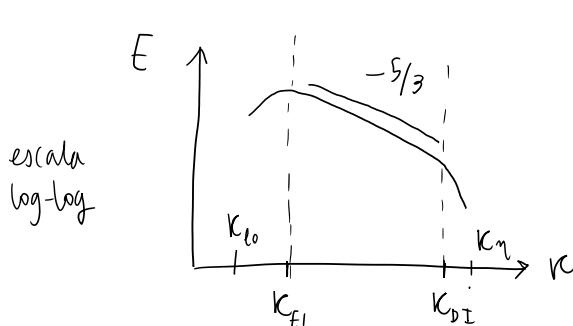
$$k(k, \infty) = \int_k^\infty E(k') dk' = \frac{A}{p-1} k^{-(p-1)}, \text{ converge para } p > 1$$

$$\varepsilon(0, k) = \int_0^k 2\nu k'^2 E(k') dk' = \frac{2\nu}{3-p} k^{3-p}, \text{ converge para } p < 3$$

$5/3$ están en medio del rango de convergencia

⇒ tiene sentido

Espectro $-5/3$ solo aplica en el rango inercial es respaldado por muchos experimentos.



Consideremos una distribución de N puntos en el espacio \vec{x} y algún tiempo t en un dominio G :
 $\vec{x}^{(0)}, \dots, \vec{x}^{(N)}$. Sean

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}^{(0)} , \quad \vec{v} = \vec{U}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{x}^{(0)}, t)$$

y sea la f.distribución de probabilidad conjunta (en varias variables), f_N de \vec{v} en $\vec{y}^{(0)}, \dots, \vec{y}^{(N)}$

definición de homogeneidad local:

$\forall N, \forall \vec{y}^{(n)}, n=0, \dots, N, f_N$ es independiente de $\vec{x}^{(0)}$
 y $\vec{U}(\vec{x}^{(0)}, t)$

def. de isotropía local: el flujo sea homogéneo y
 f_N invariante a rotaciones y reflexiones del sistema
 de coordenadas

hipótesis de isotropía local: \forall flujo turbulento con $Re = \frac{UL}{\nu}$
 suficientemente grande, la turbulencia es localmente
 isotrópica si G es suficientemente pequeño ($|\vec{y}^{(n)}| \ll L, \forall n$)
 y no está cerca de las fronteras del flujo u otras
 singularidades.

1era hipótesis de similitud: para turbulencia local isotrópica,
 f_N está únicamente determinada por ϵ y v

2da hipótesis de similitud: si $|\vec{y}^{(m)}|$ y $|\vec{y}^{(m)} - \vec{y}^{(n)}|$, $m \neq n$
 son grandes comparados con η , entonces f_N está
 únicamente determinada por ϵ y no depende de v .

Notar que podemos trabajar matemáticamente con f_N , y que
 éste se relaciona con un Δu , así que no es sorprendente
 que la formulación se pueda vincular con $\langle [\Delta u]^2 \rangle$: función de
 estructura de 2do orden.

$\langle [\Delta u]^2 \rangle(\vec{x}, \vec{r}, t) \sim$ energía a las
 escalas menores a r
 análogo a $E(k)$

$$\langle [\Delta u]^2 \rangle = D_{ij}(\vec{r}, \vec{x}, t) = \langle [v_i(\vec{x} + \vec{r}, t) - v_i(\vec{x}, t)][v_j(\vec{x} + \vec{r}, t) - v_j(\vec{x}, t)] \rangle$$

(Davidson) (Pope)

$$D_{ij}(\vec{y}^{(2)} - \vec{y}^{(1)}, \vec{x}^{(0)} + \vec{y}^{(1)}, t) = \langle [v_i(\vec{y}^{(2)}) - v_i(\vec{y}^{(1)})][v_j(\vec{y}^{(2)}) - v_j(\vec{y}^{(1)})] \rangle$$

Turb. isotrópica local \rightarrow independiente de $\vec{x}^{(0)}$ para $r \ll L$
 $\rightarrow D_{ij}$ isotrópica con \vec{r}

los únicos tensores de 2do orden que podemos formar con \vec{r} son δ_{ij} y $r_i r_j$ $\rightarrow D_{ij} = D_{NN} \delta_{ij} + (D_{LL} - D_{NN}) \frac{r_i r_j}{r^2}$
↑ transversal ↑ longitudinal

Si \vec{r} está en la dirección x_1

$$\Rightarrow D_{11} = D_{LL}, \quad D_{22} = D_{33} = D_{NN}$$

$$D_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

$$\text{Turb. homogénea, con } \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} D_{ij} = 0 \Rightarrow D_{NN} = D_{LL} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}$$

En turb. isotrópica, D_{ij} está determinado por D_{LL} , y por ϵ y r
 $(\epsilon r)^{2/3}$ tiene dimensiones de U^2

1era hipótesis de similitudad: $D_{LL} = (\epsilon r)^{2/3} \hat{f}_{LL}\left(\frac{r}{\eta}\right)$

función universal, pero no se puede hacer un grupo adimensional entre ϵ y $r \Rightarrow$ constante

$$D_{LL} = c_2 (\epsilon r)^{2/3}$$

↑ cte universal

Davidson: $\beta \sim 2$

ley de los $2/3$
de Kolmogorov

$$D_{NN} = \frac{4}{3} D_{LL} = \frac{4}{3} C_2 (\epsilon r)^{2/3}$$

experimentos
calzan muy
bien con esta
teoría.

$$D_{ij} = C_2 (\epsilon r)^{2/3} \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \frac{r_i r_j}{r^2} \right)$$

Funciones de correlación

$$R_{ij} = R_{ij}(\vec{x}, \vec{r}, t) = \langle u_i'(\vec{x}) \cdot u_j'(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$$

(Davidson) (Pope)

lo podemos expresar en función de f y g que
son funciones escalares de correlación longitudinal y transversal

en el caso isotrópico y con $\langle U \rangle = 0$,

$$u^2 = \langle U_x^2 \rangle = \langle U_y^2 \rangle = \langle U_z^2 \rangle$$

$$Q_{xx}(r) = u^2 f(r), \quad Q_{yy}(r) = u^2 g(r)$$

Escalas integrales

$$L_1(t) = \int_0^\infty f(r,t) dr \sim \text{representa el tamaño de los eddies grandes}$$

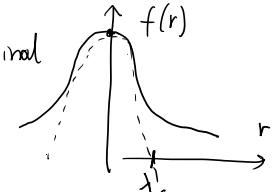
$$L_2(t) = \int_0^\infty g(r,t) dr = \frac{1}{2} L_1$$

$\begin{cases} \text{turb.} \\ \text{isotrópica} \end{cases}$

Micro escalas de Taylor, construidas a partir de f y g

$$\lambda_f(t) = \left[-\frac{1}{2} f''(0,t) \right]^{-1/2} \sim \text{longitudinal}$$

$$\lambda_g(t) = \left[-\frac{1}{2} g''(0,t) \right]^{-1/2} = \frac{\lambda_f(t)}{\sqrt{2}}$$



$$\varepsilon = 15 \sqrt{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2} = 15 \frac{u'^2}{\lambda_g^2}$$

Taylor (1935): " $\lambda_g \sim$ diámetro de los eddies pequeños que disipan energía": No es cierto porque u'

$\lambda_g > \eta$ no es la escala de velocidades pequeñas, son las escalas de Kolmogorov las que corresponden

Igual son usados en análisis,

$$Re_\lambda = \frac{u' \lambda_g}{\nu} \quad \text{se usa en turbulencia de malla}$$

$$\frac{\lambda_g}{u'} = \sqrt{15} \tau_\eta : \text{sí caracteriza el tiempo de los eddies pequeños.}$$

Ecación Kármán - Howarth

- desde las ecs. de N-S y predice la evolución de $f(r,t)$, tiene un problema de cierre

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) + \dots$$

es interesante porque

- permite obtener estadísticas como el skewness de la derivada de la velocidad
- se puede derivar la ley de $4/5$ de Kolmogorov:

$$D_{LL} = -\frac{4}{5} \varepsilon r \quad (\Rightarrow \text{la ley de los } z/3)$$

\uparrow
3er orden

Muestra consistencia entre las hipótesis de Kolmogorov y N-S.

- Integral de Loitsyanski → invariante asociada es bien discutida y comparada con la invariante de Saffman.
- Decaimiento de la turbulencia isotrópica
Re decrece y se llega al "periodo final de decaimiento" → solución autosimilar

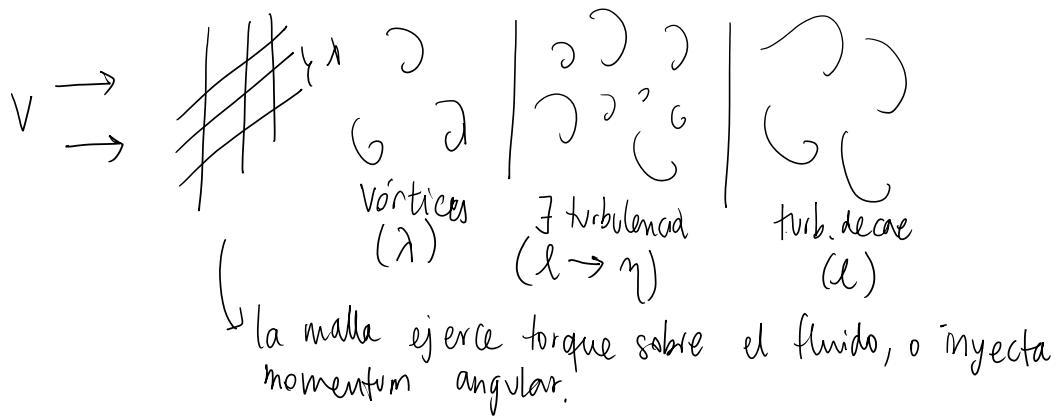
$$f(r,t) = \exp\left(-\frac{r^2}{8vt}\right) \quad \text{Batchelor y Townsend, 1948}$$

experimentalmente comprobado, para Re bajos.

5 de octubre 2021

Invariante de Boylsansky (comentario)

En métodos estadísticos, vimos la turbulencia de malla:



Sea un cubo L , volumen V ,

mom. angular $\vec{H} = \int \vec{x} \times \vec{u} dV$: más o menos se conservará

si $L \gg l$ $\frac{\vec{H}}{V} \rightarrow 0$: suma de contribuciones en todas las direcciones

pero para un cubo finito V se puede probar que $\sqrt{\langle H^2 \rangle} \gtrsim \sqrt{V}$
viene de argumentos estadísticos usando el teorema del límite central $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes con igual pdf

$f(x)$ con $\mu=0, \sigma^2 \Rightarrow$ la v.a $Y_N = \sum X_i$ tiene $\mu=0, N\sigma^2$ y pdf normal para $N \rightarrow \infty$.

Si un vórtice con $\vec{h}_N \sim$ pdf $f(x), \mu=0, \sigma^2$

$$\text{luego } H_i = \sum_n^N (h_i)_n \Rightarrow H_i \sim N(0, N\sigma^2)$$

y $N \sim V$ en este cubo (de manera estadística).

$$\vec{H}^2 \text{ no tiene } \mu=0 \quad \langle \vec{H}^2 \rangle \sim \underbrace{3N\sigma^2}_{3 \text{ componentes}} \sim V$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\langle \vec{H}^2 \rangle} \propto \sqrt{V}$$

No hay otras superficies que transfieran torque así que esperaríamos que $\langle \vec{H}^2 \rangle / V$ sea una invariante estadística.

$\langle \vec{H}^2 \rangle / V$ es una invariante de Loytsmansky

$\langle \vec{L}^2 \rangle / V$ es una invariante de Saffman-Birkhoff

hay controversia sobre la existencia de estos invariantes y su interpretación tiene relación con la "memoria" del fluido.

Estas invariantes imponen condiciones del tipo

$$\begin{aligned} \langle \vec{H}^2 \rangle / V &\sim u^2 l^5 = \text{cte} \\ \langle \vec{L}^2 \rangle / V &\sim u^3 l^3 = \text{cte} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{hay opiniones divididas} \\ \text{sobre qué ocurre más} \\ \text{DNS puede obtener una o la} \\ \text{otra } \sim \text{condiciones iniciales.} \end{array} \right.$$

Hay alguna otra teoría?

→ Batchelor, turb. homogénea: tiene poca memoria y que cuando se desarrolla por completo es independiente de las condiciones iniciales. No es 100% cierto pero permite un desarrollo matemático que es muy útil.

Análisis espectral

podemos analizar las escalas de la turbulencia, nos permite comprender mejor la cascada.

Nota: notación Pope y supuesto $\langle \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow u_i = \bar{u}_i$.

Sea $\vec{\bar{u}}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{u}(\vec{k}, t)$

\uparrow coef./modos de Fourier

$\vec{k} = 2\pi/l$: no de onda

\vec{k} : tiene componentes $\sim x, y, z$.

$$\hat{E}(\vec{k}, t) = \langle \hat{u}^*(\vec{k}, t) \cdot \hat{u}(\vec{k}, t) \rangle : \text{energía espectral}$$

implicancias \rightarrow periodicidad!

$$\vec{u}(\vec{x} + NL, t) = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

\uparrow
cubo $L \gg L_{11}$

este supuesto es menos importante con $\frac{L}{L_{11}} \rightarrow \infty$

$$\text{el menor } k_0 = 2\pi/L_0$$

y los modos cumplen en la dirección x_1

$$\cos\left(\frac{2\pi n_1 x_1}{L}\right) = \cos(k_0 n_1 x_1)$$

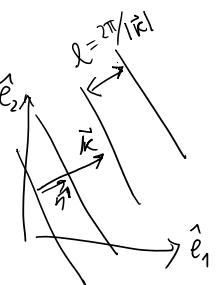
$$e^{ik_0 n_1 x_1} = \cos(k_0 n_1 x_1) + i \sin(k_0 n_1 x_1), n_1 \in \mathbb{Z}$$

para las otras direcciones es lo mismo.

Modo 3D: $\vec{k} = k_0 \hat{n} = k_0 (\hat{e}_1 n_1 + \hat{e}_2 n_2 + \hat{e}_3 n_3) \hat{e}_1$

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = e^{i k_0 n_1 x_1} e^{i k_0 n_2 x_2} e^{i k_0 n_3 x_3}$$

asociado a $k = |\vec{k}|$ y $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{k}$



Para una función periódica $g(x) = \sum_{\vec{x}} \underbrace{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}_{\hat{g}(\vec{k})} \hat{g}(\vec{x})$
 $\Rightarrow \hat{g}(\vec{k}) = \hat{g}^*(-\vec{k})$: simetría conjugada

coeficientes $\hat{g}(\vec{k}) = \langle g(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \rangle_L \equiv F_{\vec{k}} \{ g(x) \}$

promedio espacial: $\frac{1}{L^3} \iiint_{\text{o.o.o.}} g(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx_1 dx_2 dx_3$

derivadas: $F_{\vec{k}} \left\{ \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_j} \right\} = i k_j \hat{g}(\vec{k})$

velocidades: $\hat{u}_j(\vec{k}, t) = F_{\vec{k}} \{ u_j(\vec{x}, t) \}$

asumiendo $\langle \hat{u}(\vec{x}, t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \hat{u}(\vec{k}, t) \rangle = 0$ y $\hat{u}(0, t) = 0$

laplaciano: $F_{\vec{k}} \{ \nabla^2 g(\vec{x}) \} = -k^2 \hat{g}(\vec{k})$

$$\text{Vorticidad: } \vec{F}_{\vec{k}} \cdot \langle \vec{\omega}(\vec{x}) \rangle = i \vec{k} \times \hat{\vec{u}}(\vec{k})$$

$$\text{divergencia } \vec{F}_{\vec{k}} \cdot \left\langle \frac{\partial u_j(\vec{x})}{\partial x_j} \right\rangle = i \vec{k} \cdot \hat{\vec{u}}(\vec{k})$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \hat{\vec{u}}(\vec{k}) = 0 \Leftrightarrow \vec{k} \perp \hat{\vec{u}}(\vec{k})$$

podemos descomponer $\hat{G} = \hat{G}'' + \hat{G}^+$ en relación a \vec{k}

+ q. $\hat{G}^\perp \cdot \vec{k} = 0$, para lo que usamos el tensor de proyección $P_{jk} = \delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{k^2}$, $\hat{G}_j^\perp = P_{jk} \cdot \hat{G}_k$

Veamos N-5:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial(u_j u_k)}{\partial x_k} = \frac{\nu \partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

\downarrow \downarrow
 $\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} + \hat{G}_j(\vec{k}, t)$ $= -\nu k^2 \hat{u}_j - i k_j \hat{p}$
 por ahora

absorberemos p

si multiplicamos por $k_j \rightarrow k_j \hat{u}_j = 0$ ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$)

quedando $k^2 \hat{p} = i k_j \hat{G}_j \Leftrightarrow \nabla^2 p = f(\vec{u})$ ec. de Poisson

$$-i k_j \hat{p} = \frac{k_i k_j}{k^2} \hat{G}_j = \hat{G}_j'' \parallel \text{a } \vec{k}$$

la diferencia entre los dos términos es \hat{G}_j^\perp

$$\Rightarrow \frac{d \hat{u}_j}{dt} + \underbrace{\nu k^2 \hat{u}_j}_{\text{efecto visc} \sim e^{-\nu k^2 t}} = - \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{G}_k = -P_{jk} \hat{G}_k = \hat{G}_k^\perp$$

efecto visc $\sim e^{-\nu k^2 t}$: decaimiento cuando \hat{G}_k^\perp es pequeño

Ahora, $\hat{G}_j(\vec{k}, t) = \vec{F}_{\vec{k}} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k \right\rangle = i k_k \vec{F}_{\vec{k}} \cdot \langle u_j u_k \rangle$

$\sum \hat{u}_j e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}$. $\sum \hat{u}_k e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}$

$$\hat{G}_j = i k_x \sum_{\vec{k}'} \hat{u}_j(\vec{k}') \underbrace{\hat{u}_x(\vec{k} - \vec{k}')}_{\vec{k}'' + q} \quad \vec{k}' + q = \vec{k}$$

término no lineal y no local \rightarrow mezcla información de diferentes \vec{k} /tamaños

$$\widehat{N-S}: \left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) \hat{u}_j(\vec{k}, t) = -i k_x P_{jk}(\vec{k}) \sum_{\vec{k}'} \hat{u}_k(\vec{k}', t) \hat{u}_l(\vec{k} - \vec{k}', t)$$

la ecuación involucra a \vec{k} , y todos los \vec{k}' y $\vec{k}'' + q$
 $\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}$.

- métodos espirales en CFD resuelven ecuaciones de este tipo. Su uso es más eficiente pero no está libre de errores (ej: error de Gibbs, aliasing)

otras estadísticas:

$$\text{covarianza: } \langle \hat{u}_i(\vec{x}', t) \cdot \hat{u}_j(\vec{x}, t) \rangle \sim \tau_{ij}^R \\ = \frac{1}{L^6} \int_0^L \dots \int_0^L \langle u_i(\vec{x}', t) u_j(\vec{x}, t) \rangle e^{-i(\vec{x}' \cdot \vec{x} + \vec{k} \cdot \vec{x})} d\vec{x}' d\vec{x}$$

para turb. homogénea: hay correlación solo si $\vec{k}' + \vec{k} = 0 / \vec{k}' = -\vec{k}$.

$$\hat{R}_{ij}(\vec{k}, t) = F_{\vec{k}} \{ R_{ij}(\vec{x}, t) \}$$

tensor de espectro de velocidades

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, t) = \sum_{\vec{k}'} S(\vec{k} - \vec{k}') \hat{R}_{ij}(\vec{x}, t)$$

es la trans. de Fourier de R_{ij}

$$y \quad R_{ij}(0, t) = \langle u_i^! u_j^! \rangle = \sum_{\vec{k}} \hat{R}_{ij}(\vec{k}, t) = \underbrace{\iiint \Phi_{ij}(\vec{k}, t) d\vec{k}}_{\substack{\text{Contribución de} \\ \text{cada modo}}} \quad = \underbrace{\iiint \Phi_{ij}(\vec{k}, t) d\vec{k}}_{\substack{\text{Contribución de todos} \\ \text{los modos en una} \\ \text{región}}}$$

energía de 1 modo:

$$\hat{E}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\vec{k}, t) \cdot \hat{u}_i(\vec{k}, t) \rangle = \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\vec{k}, t)$$

$$\text{Wegó TKE: } k(t) = \frac{1}{2} \langle u_i^! u_i^! \rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\vec{k}, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{E}(\vec{k}, t)$$

\uparrow
contribución de 1 modo

$$K(t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_{ij}(\vec{k}, t) d\vec{k}$$

Disipación : $\varepsilon(t) = -\nu \langle u_j \nabla^2 u_j \rangle = -\nu \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} R_{jj}(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sum_{\vec{k}} 2\nu k^2 \hat{E}(\vec{k}, t) \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \nu k^2 \phi_{ij}(\vec{k}, t) d\vec{k} \end{aligned}$$

evaluación de $\hat{E}(\vec{k}, t)$ desde $(N-S)$: es conceptualmente similar a Kármán-Howarth

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(\vec{k}, t) = \hat{T}(\vec{k}, t) - 2\nu k^2 \hat{E}(\vec{k}, t)$$

no lineal \downarrow
 $k_x P_{ij}(\vec{k}) \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{\vec{k}'} \langle \hat{u}_j(\vec{k}) \hat{u}_k^*(\vec{k}') \hat{u}_k^*(\vec{k}-\vec{k}') \rangle \right\}$

Si sumamos sobre $\vec{k} \rightarrow$ solo queda $K(t)$ y $\varepsilon(t)$

para turb isotrópica : $\frac{dk}{dt} = -\varepsilon$ y $\sum_{\vec{k}} \hat{T}(\vec{k}, t) = 0$

\hat{T} es la transferencia de energía entre modos.

8 octubre 2021

Ventajas del análisis espectral

- información por modo (κ)
- derivadas $\rightarrow ik$: facilita la resolución numérica

¿qué más?

$$\phi_{ij} \text{ es muy útil} \quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{covarianzas } \sim \kappa} \\ \xrightarrow{TKE} \quad E(\kappa) \quad \xrightarrow{\epsilon} \end{cases} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} \right\rangle$$

Para turb. isotrópica ϕ_{ij} queda determinado por E

$$\phi_{ij} = A S_{ij} + B \kappa_i \kappa_j = \frac{E(\vec{\kappa})}{4\pi \kappa^2} \underbrace{\left(\delta_{ij} - \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} \right)}_{P_{ij}(\vec{\kappa})}$$

se observa que $E \sim \kappa^2 \circ \kappa^4$

Muchos experimentos tienen datos en un solo punto

\Rightarrow "medir una línea" con hipótesis de Taylor (turbulencia congelada) \rightarrow espectro unidimensional

$$R_{11}(\hat{r}_1, r_1, t) = \bar{u}_1'^2 f(r_1, t)$$

$$R_{22}(\hat{r}_2, r_2, t) = \bar{u}_2'^2 g(r_2, t)$$

$$\text{luego, } E_{ij}(\kappa_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tilde{r}_1) e^{-i\kappa_1 r_1} dr_1$$

$$R_{22} \text{ es real y par} \Rightarrow E_{22} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{22}(r_1, \hat{r}_1) \cos(\kappa_1 r_1) dr_1$$

$$\text{de manera inversa: } R_{22}(r_1, \hat{r}_1) = \int_0^{\infty} E_{22}(\kappa_1) \cos(\kappa_1 r_1) d\kappa_1$$

$$R_{22}(0) = \bar{u}_2'^2 = \int_0^{\infty} E_{22}(\kappa_1) d\kappa_1 : \text{contribución a la varianza}$$

$$\text{Mientras } E_{11}(\kappa_1) = \frac{2}{\pi} \bar{u}_1'^2 \int_0^{\infty} f(r_1) \cos(\kappa_1 r_1) dr_1$$

$$f(r_1) = \int_0^{\infty} f(r) dr = \frac{\pi E_{11}(0)}{2 \bar{u}_1'^2} \quad \text{con } \kappa_1 = 0$$

También podemos relacionar a E_{11} con E

$$E_{11}(K_1) = \iint \frac{E(k)}{2\pi k^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk_2 dk_3$$

podemos integrarlo radialmente dk_r

$$k_r^2 = k_2^2 + k_3^2 = k^2 - k_1^2, \quad k_r dk_r = 2\pi k dk$$

$$E_{11}(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk$$

$$\text{de manera inversa } E(k) = \frac{1}{2} k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{d E_{11}(k)}{dk} \right)$$

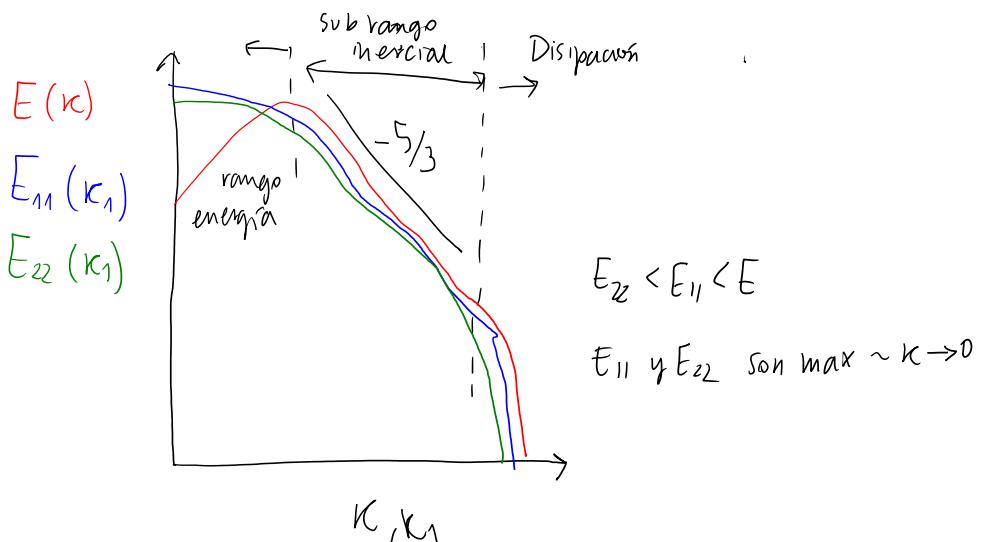
y E_{22} también es función de E_{11} (^t isotrópica)

Especro potencial:

$$\text{Nos interesan } E_{11}(k_1) = C_1 A k_1^{-p}$$

$$\Rightarrow E(k) = C A k^{-p}, \quad C = \frac{1}{2} p(2+p) C_1$$

$$\Rightarrow E_{22}(k) = C_1' A k^{-p}, \quad C_1' = \frac{1}{2} (1+p) C_1$$



$$D : I : E$$

$$\ell_D \quad \ell_E$$

Especro de Kolmogorov

para k grandes, hay formas universales

$$k > k_{E_1} = \frac{2\pi}{\ell_{E_1}}$$

isotropía local: $\phi_{ij} = f(E(k))$

E_{11}, E_{22} y E están relacionados como lo vimos

1era hip. \rightarrow forma universal (ε, ν)

$$E = (\varepsilon \nu^5)^{1/4} \Psi(k\eta) = u_\eta^2 \eta \Psi(k\eta)$$

- adimensionalizando E y k

\uparrow función universal

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \Psi(k\eta)$$

adimensionalizando E

\uparrow función espectral compensada de Kolmogorov

2da hip \rightarrow forma universal (ε, λ) : subrango inercial

A medida que $k\eta \ll 1 \leftrightarrow k_{E_1} < k < k_D$

$$\Psi \rightarrow C \sim 1.5$$

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

se desprende que $C_1 \sim 0.49 (E_m)$

$$C'_1 \sim 0.65 (E_{22})$$

relación entre E_{11} y $D_{LL}(r) = C_2 (\varepsilon r)^{2/3}$, $C_2 \sim 2$

Especro modelos

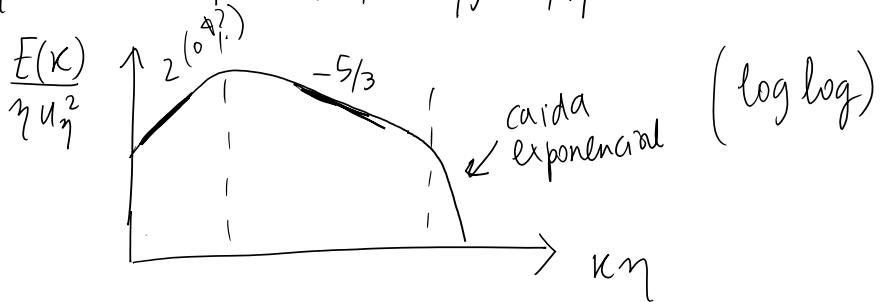
$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} f_L(kL) f_\eta(k\eta)$$

grandes escalas \uparrow pequeñas escalas

f_L y f_η son funciones adimensionales con $f_L \sim 1$ y $f_\eta \sim 1$ en subrango inercial.

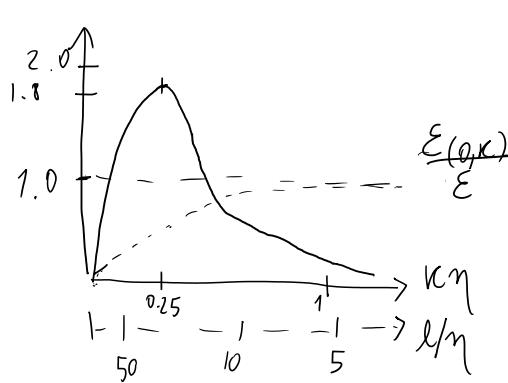
$$f_L(\kappa L) = \left(\frac{\kappa L}{((\kappa L)^2 + C_1)^{1/2}} \right)^{5/3 + p_0} \quad 2.04$$

$$f_\eta(\kappa \eta) = \exp \left\{ -\beta \left\{ ((\kappa \eta)^4 + C_\eta^4)^{1/4} - C_\eta \right\} \right\}$$



funciona muy bien!

En el rango de disipación, $D(x) = 2\sqrt{x^2 E(x)}$



$$E_{(0, \kappa)} = \int_0^\kappa D(\kappa') d\kappa'$$

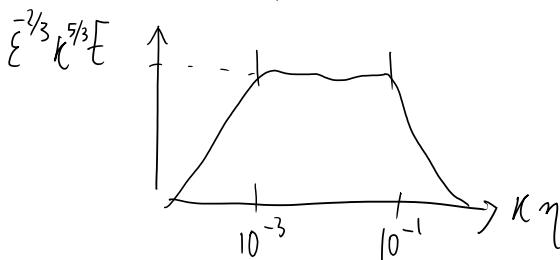
peak ocurre en $\kappa \eta \approx 0.26$
 $o \frac{l}{\eta} \approx 24$

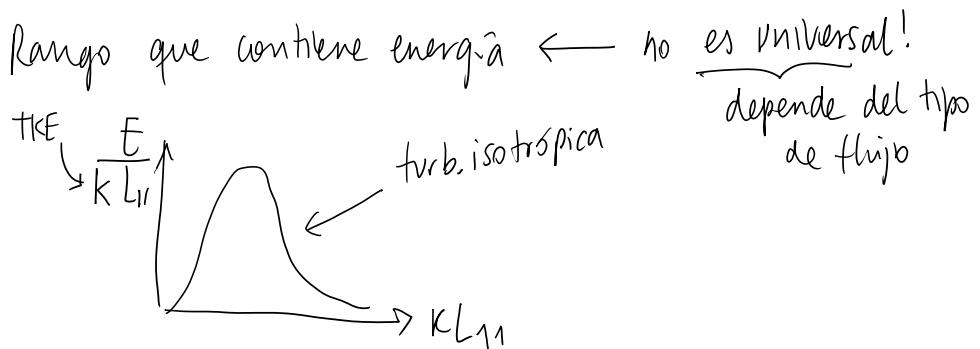
dissipación fuerte a escalas

$$60 > \frac{l}{\eta} > 8$$

$$l_{D1} = 60\eta$$

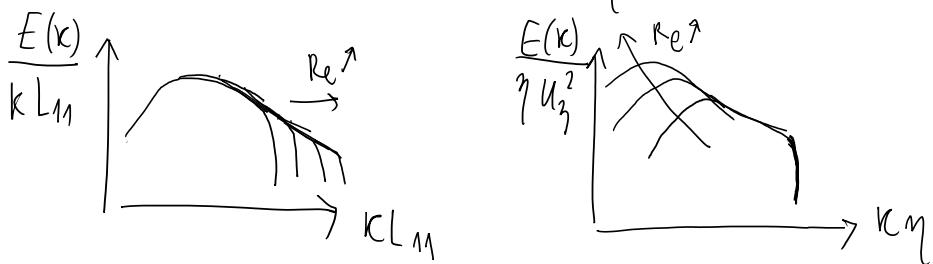
subrango inercial:





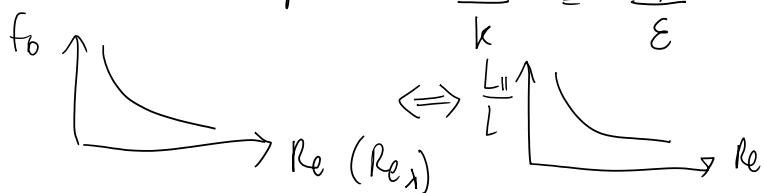
80% de la energía está entre $\frac{1}{6} L_{11} < l < 6 L_{11}$
 \downarrow
 l_{E1}

Efectos de variar Re (η es función de Re)



Para Re bajo:

- hay un traspase de energía entre regiones E y D
 "se achica el subrango inercial"
- qué es un Re suficientemente alto?
 → contribuciones $k_{(0,k)}$ y $\varepsilon_{(0,k)}$ para cada rango
 → fracción de traspase $f_0 = \frac{k_{(k, \infty)}}{k} = \frac{\varepsilon_{(0,k)}}{\varepsilon}$



- también $E \sim k^{-p} \leftarrow p(Re_\lambda)$
 $p(Re_\lambda \sim 200) \sim 1.5$
 Mydlanski & Wanhaft (198)

Turbulencia no es isotrópica?

$$\rightarrow E_{12} \neq 0, \phi_{12} \neq 0$$

"corte simple" \rightarrow  $S = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} > 0$

$S \tau(\kappa)$ escala de tiempo
caracteriza la importancia de S

condición de isotropía local: $S \tau_\eta \ll 1$ (Corrsin '58)

$$\text{Subrango inercial} \rightarrow \tau(\kappa) = (\kappa^2 \varepsilon)^{-1/3}$$

$$S\tau = S \kappa^{-2/3} \varepsilon^{-1/3} \ll 1$$

$$\text{con } L_s = \varepsilon^{1/2} S^{-3/2} \rightarrow \kappa L_s \ll 1$$

$$L_s^{-1} \ll \kappa \ll \eta^{-1} \in \text{subrango inercial}$$

$$\text{Análisis dimensional} \rightarrow E_{12} = -C_{12} S \varepsilon^{1/3} \kappa^{-7/3} \quad \text{Lumley '67}$$

$\Rightarrow E_{12}$ decréce más rápido que E_{11} ($-5/3$)

anisotropía decréce con κ_1

cuando es isotrópico? $\rightarrow \kappa_1 L_s > 3$

Sadoforghi &
Veeravalli '94

Hipótesis de Kolmogorov refinadas

Funciones universales $\sim \varepsilon$ y $\nu / \langle \Delta u^2 \rangle$

Refinado $\rightarrow \mathcal{E}_r$: ε local definida con r
 $\sim \Delta_r u$: local

"estadísticas de $\Delta_r u$ condicional a \mathcal{E}_r son universales".

Modificaciones mínimas a los resultados más importantes.

Introduce también $\mu \leftarrow$ exponente de intermitencia

Ec TKE espectral:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = P_k(k, t) - \frac{\partial}{\partial k} T_k(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t)$$

producción espectral: $P = P_{(0, \infty)} \approx P_{(0, K_{E1})}$ ← escala grande

$$\Rightarrow \frac{P(K_{E1}, \infty)}{P} \ll 1$$

transporte espectral: $T(\ell) = T_k\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)$

$$\int_{K_a}^{K_b} -\frac{\partial}{\partial k} T_k(k, t) dk = T_k(K_a) - T_k(K_b)$$

$$T_k(k \rightarrow 0) \rightarrow 0, \quad T_k(k \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

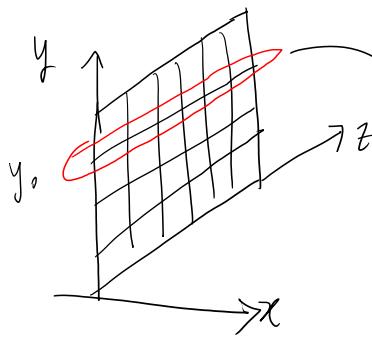
por rango

$$\left\{ \begin{array}{l} E : \frac{dk}{dt} = P - T_{E1}, \text{ no hay disipación} \\ I : 0 = T_{E1} - T_{D1}, \text{ solo transporte} \\ D : 0 = T_{D1} - \varepsilon, \text{ hay disipación} \end{array} \right.$$

Sumando $\forall k$:

$$\frac{dK}{dt} = P - \varepsilon$$

conservar tasa



$$u(z), v(z), w(z)$$

$$\overline{U'V'} = \text{covarianza}(u, v)$$

$$= \frac{1}{N_z} \sum_i \left(\underbrace{u_i(z) - \overline{u(z)}}_{U'} \right) \left(\underbrace{v_i(z) - \overline{v(z)}}_{V'} \right)$$

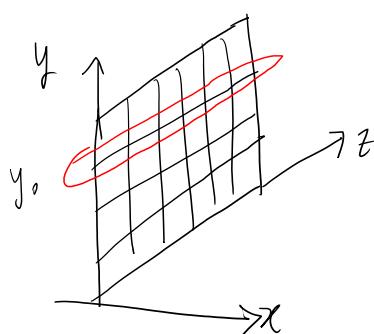
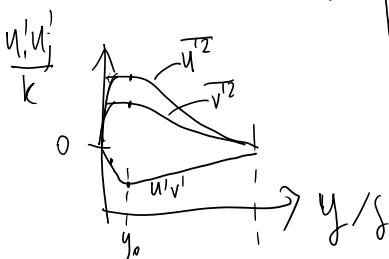
$$\overline{U'W'}$$

$$\overline{V'W'} = \text{varianza}$$

$$= \frac{1}{N} \sum \left(u_i(z) - \overline{u(z)} \right)^2$$

$$\overline{W'^2}$$

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{U'^2} + \overline{V'^2} + \overline{W'^2} \right)$$



$U' > 0 \quad V' < 0$: ejection (?)

$$u(z) \rightarrow u'(z) = u(z) - \overline{u(z)}$$

$$v(z) \quad v'(z)$$

$$u'(z) \rightarrow v^{\text{prim}} \begin{bmatrix} -0.01 & 0.02 & \dots \\ 0.5 & -0.1 & \dots \end{bmatrix}$$

dónde $\underbrace{[U' > 0 \quad \& \quad V' < 0]}_F$?

$$\sum (\text{true}) = \# \text{ puntos} / N_z : \text{fracci\'on}(y)$$

