

# ME6010 Introducción a la turbulencia

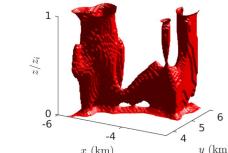
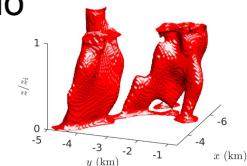
## Clase 1 - Introducción a la introducción

¿Quién soy (turbulencia)?

LES de nubes estratocúmulo



Mónica Zamora Z.  
[mzamora@uchile.cl](mailto:mzamora@uchile.cl)  
851 Poniente Of. 4-06(?)



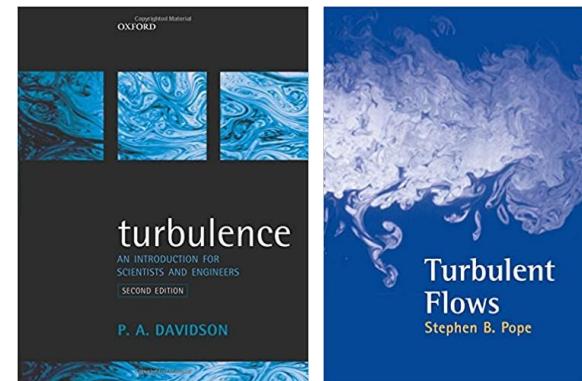
# Estructura general del curso

## Introducción a la turbulencia

- Tema sumamente amplio y complejo
  - Adquirir herramientas *conceptuales* básicas (teoría clásica)
  - Acercamiento a problemas reales (lo que se sale de la teoría clásica)
  - Acercamiento a nuevos métodos de análisis (lo que está en boga)
- Va a ser un curso fácil o difícil? No lo sé. Podría ser más difícil sin duda

## Contenidos

1. Teoría clásica de turbulencia (~7 semanas)
2. Modelos de turbulencia
3. Flujos turbulentos no canónicos
4. Nuevos métodos en turbulencia



# Evaluaciones propuestas

- N Tareas (N a definir)
  - Conceptuales (preparan / apoyan el material de cátedra), incluyendo lecturas / vídeos
  - Análisis estadístico (programar en python / matlab)
  - La idea es trabajar en las tareas durante la hora de auxiliar (se fomenta el trabajo colaborativo, pero entregas son individuales). Se insta a liderar / participar en esta sesión
- 2 Controles
  - 1 control de teoría clásica, 1 control con todo lo demás
- Proyecto grupal (vamos a ver cómo resulta, alcances pueden variar)
  - Replicar *un análisis* de turbulencia de un paper, tema de interés para ustedes
  - Esencial: que haya datos disponibles!
  - 2 presentaciones *cortas*: temprana y final (se decidirá al azar en el momento quién presenta)
  - 1 reporte final *breve* en formato *paper* (artículo científico)
- Nota final: 30% tareas, 40% controles, 30% proyecto

# Integridad académica y otros

- Copia y plagio: no me gustaría tener que lidiar con nada de esto. Principios: equidad y honestidad
- Comunicarse conmigo ante cualquier problema o dificultad: feedback sobre contenidos o evaluaciones, situaciones personales
- La idea del curso es aprender y nos toca evaluar ese aprendizaje porque son las reglas actuales, no es la idea generar sufrimiento o estrés innecesario
- La clase es un espacio seguro y de respeto (no por eso ultra serio y sin humor)

## Horario

- Clase: Ma,Vi 2:30-4pm +hora de consultas: Ma 4-5pm
- Hora “auxiliar”: según el coordinador no habría ningún módulo ... 2 horas de consulta mejor?

## Segunda introducción ¿Quién eres tú?

- (por qué hay tanta gente en este curso?)
- especialidad / año / programa?
- por qué estás tomando este curso? / qué quieras aprender?
- futuro laboral / académico / otro?
- cuéntanos algo random de ti: ej: empecé a comer aceitunas este año

Mientras tanto: 3 encuestas en [mentimeter.com](https://mentimeter.com)

- **6701 1015:** primera palabra que se te viene a la mente con “turbulencia”?
- **8394 8034:** helado favorito?
- **7357 4970:** pizza con/sin piña?

# Preguntas antes de seguir?

# Ahora sí, turbulencia (Cap. 1 Davidson)



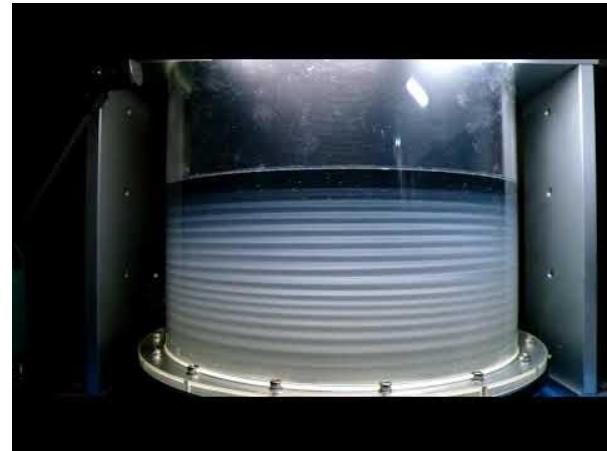
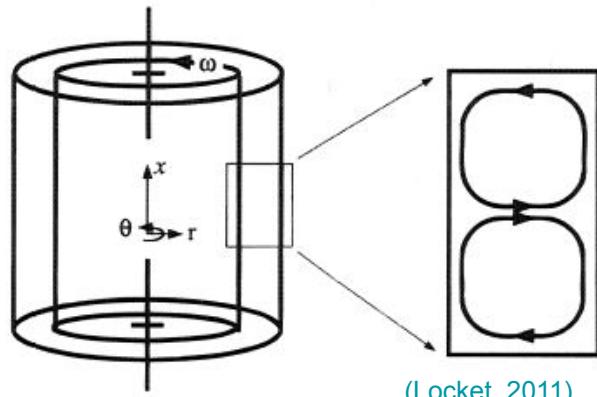
¿Qué ocurre?

- Movimiento caótico
- Mezcla de té y leche
- La turbulencia decae
  - qué tan rápido? gran punto
  - aún es materia de estudio

¿Otros ejemplos?

- Turbulencia en todos lados
- Veamos ejemplos clásicos

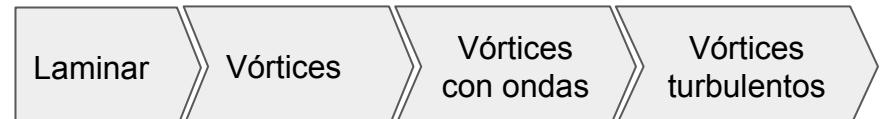
# Experimento clásico 1: Couette - Taylor



- Inestabilidad nace de perturbaciones de fuerzas centrípetas / gradiente de presión
- Parámetro clave: número de Taylor

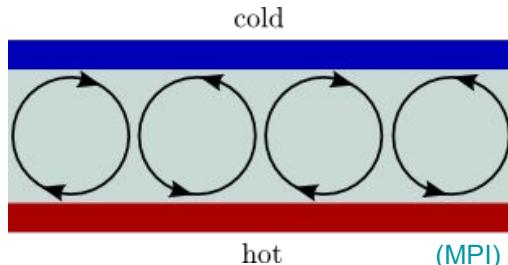
$$Ta = \frac{\omega^2 d^3 R}{\nu^2}, \quad d/R, \quad L/R$$

- Vórtices se forman para  $Ta > Ta_c$
- $> Ta$  configuraciones más complejas



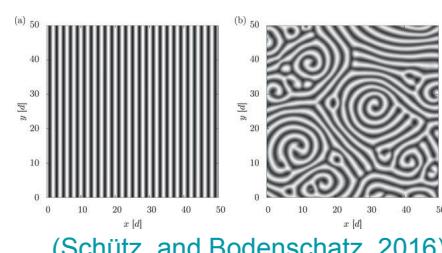
En el último régimen aún hay estructura

# Experimento clásico 2: Rayleigh - Bénard



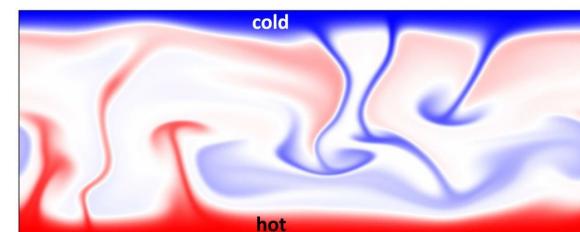
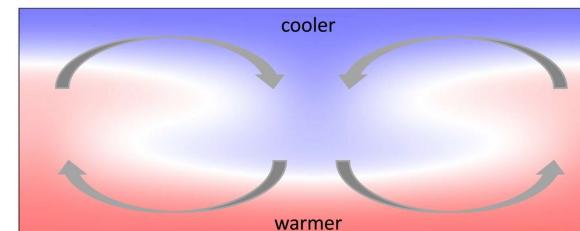
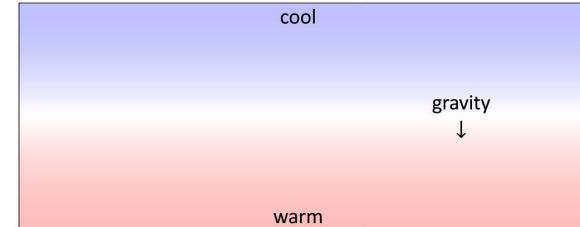
Parámetro crítico:  $Ra = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu\alpha_{\text{difusividad térmica}}}$

Configuraciones en 3D:



(Schütz and Bodenschatz, 2016)

\*fuera del mundo de transferencia de calor, en general convección se refiere a este tipo de organización



(Doering, 2020)

Estacionario  
(conducción molecular)

Celdas de  
convección\*

Celdas  
turbulentas

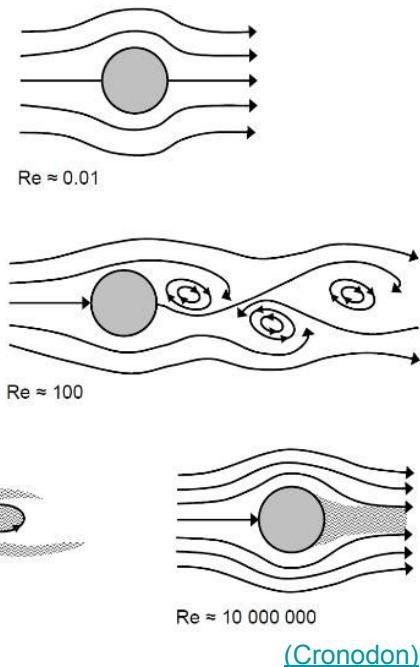
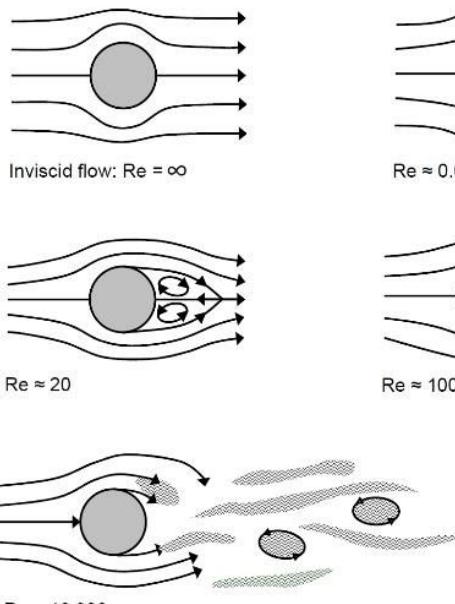
# Qué tienen en común Taylor-Couette y Rayleigh-Bénard?

- Problemas análogos: fuerza centrífuga ~ empuje (buoyancy)
- De hecho, los números críticos son CASI idénticos (1,700, 0.7% diferencia)
- Existencia de un número crítico a partir del cual se generan inestabilidades
  - Esto se conoce como bifurcación
- Aumentando la velocidad angular o la diferencia de temperatura, estamos aumentando la velocidad del fluido / disminuyendo efectos viscosos
- Mayores cambios generan nuevas bifurcaciones, hasta llegar a un régimen con turbulencia

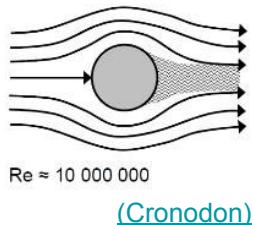
Ver más: [F. Busse, 2012, The twins of turbulence research](#)

\* GRAN libro sobre inestabilidades hidrodinámicas es [Drazin \(2002\)](#)

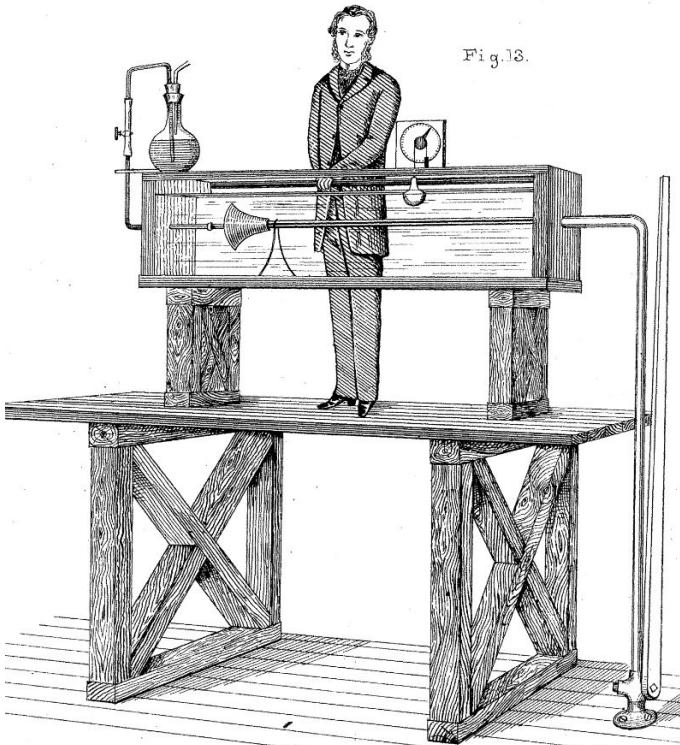
# Experimento clásico 3: flujo sobre un cilindro



- Parámetro clave:  $Re$
- Separación de capa límite induce vorticidad
- Progresivamente se desprenden vórtices (von Kármán street)
- Estela turbulenta con vórtices
- Estela eventualmente decrece en tamaño, sin desprender grandes vórtices
- (Número de Strouhal~ frecuencia de desprendimiento de vórtices)

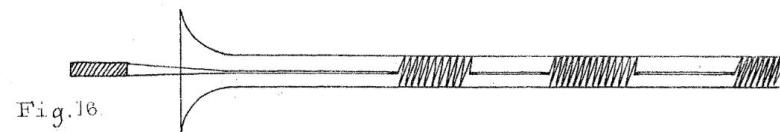


# Experimento clásico 4: Reynolds



(Reynolds, 1833)

- Flujo en tuberías lisas, parámetro:  $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$
- Muy sensible a perturbaciones iniciales, impacta el Re crítico
- Pero para  $Re < 2000$ , no hay turbulencia
- Transición también a lo largo de la tubería:
  - Se inicia en la pared, se desprenden porciones de flujo turbulento
  - A veces se observa intermitencia: zonas con menor turbulencia



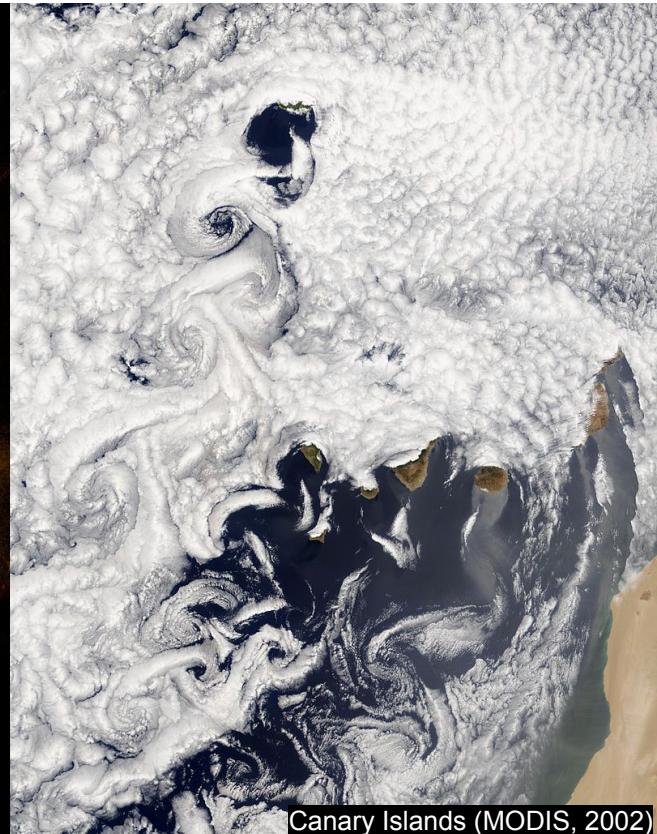
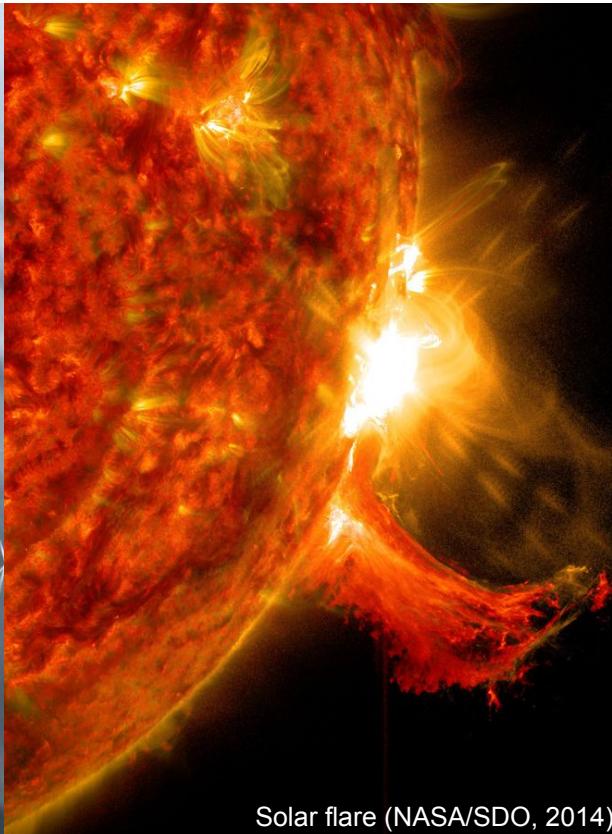
# Vemos dos rutas hacia la turbulencia

1. Pequeñas zonas con turbulencia se desarrollan y crecen (pared en el caso de tuberías)
2. Se sobrepasa un parámetro crítico y se llega a un estado de caos uniforme, puede ser por medio de una inestabilidad

## Características de flujos turbulentos

- Fluctuaciones aleatorias de velocidad, desorden espacial
- No se puede predecir (pero sí sus estadísticas!)
  - Fuerte dependencia de condiciones iniciales en su desarrollo
- Complementar esta lista en Tarea 1

# Más ejemplos: por doquier



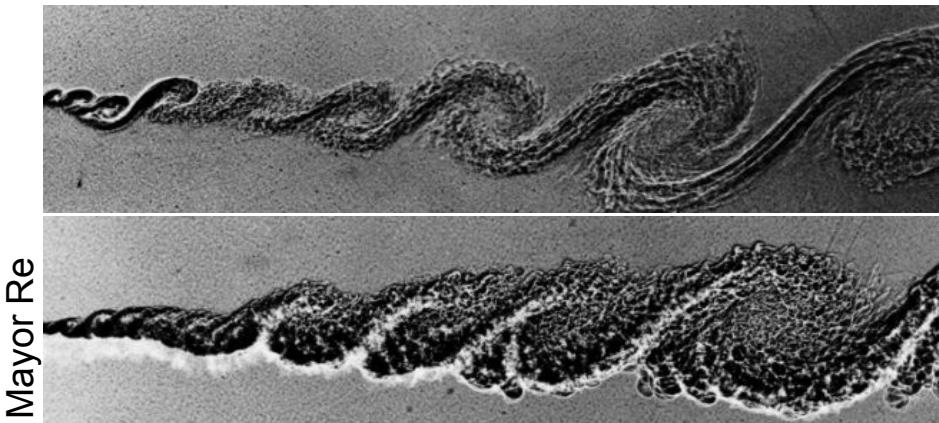
Horns Rev offshore wind farm (Hasager et al., 2017)

Solar flare (NASA/SDO, 2014)

Canary Islands (MODIS, 2002)

# Turbulencia como un conjunto aleatorio de *eddies*

- ¿Qué es un *eddy*? “masa” de vorticidad
- Hay eddies grandes (tamaño característico del problema) y eddies pequeños. Los tamaños más pequeños dependen de Re



[An album of fluid motion \(van Dyke, 1982\)](#)



[van Gogh, 1889](#)



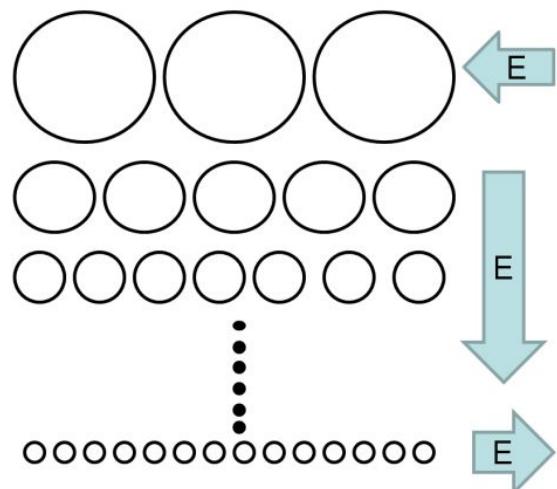
[da Vinci, 1510](#)

# Diferentes escalas y cascada de energía (intro)

- Cascada de energía de Richardson: Los eddies grandes se rompen en eddies pequeños, llevándose la energía eventualmente a las escalas más pequeñas, donde los efectos viscosos dominan y la energía es disipada (fricción)

“Big whirls have little whirls  
that feed on their velocity,  
And little whirls have lesser whirls  
and so on to viscosity”

—Lewis F. Richardson, 1922



(Flowvision blog)

# ¿Tamaño de las escalas pequeñas?

Tasa de energía transmitida en cada escala:

Escalas grandes:  $l, u, Re = ul/\nu$

$$\Pi \sim u^2/\tau, \tau = u/l, \Rightarrow \Pi \sim u^3/l$$

Escalas pequeñas:  $\eta, v, Re = \eta v/\nu \approx 1$

$$\varepsilon \sim \nu S_{ij} S_{ji}, S \sim v/\eta \Rightarrow \varepsilon \sim \nu v^2/\eta^2$$

- Toda la energía de gran escala se disipa, lo que puede ser cierto si el flujo es estadísticamente estable. Haciendo este balance:

$$\Pi \sim \varepsilon \Rightarrow \eta \sim l Re^{-3/4}$$

- A mayor  $Re$ , menores son las escalas pequeñas (o de Kolmogorov)
  - Ej: túnel de viento con  $Re \sim 1000, l \sim 1 \text{ cm} \Rightarrow \eta \sim 0.06 \text{ mm}$
- A las escalas grandes les llamamos escala integral

# Navier Stokes y el problema de clausura (intro)

Si partimos de Navier Stokes (NS) y continuidad para flujo no compresible,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} = F_1(\mathbf{u}, p)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

y luego tomamos la divergencia de NS, llegamos a que  $p$  depende de  $\mathbf{u}$

$$\nabla^2 \left( \frac{p}{\rho} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \Rightarrow p = f(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = F_2(\mathbf{u})$$

por lo tanto, la ecuación para  $\mathbf{u}$  debería ser fácil de resolver numéricamente. Pero para ello debemos resolvérla a todas las escalas en el flujo (esto es DNS), y tiene un costo computacional altísimo. Por esto es que despejamos ecuaciones para las estadísticas de  $\mathbf{u}$ : promedio y varianza, por ejemplo...

# Navier Stokes y el problema de clausura (intro)

Idea:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{estadísticas de } \mathbf{u}] = F[\text{otras estadísticas de } \mathbf{u}]$$

- Resulta que este sistema de ecuaciones no es cerrado ( $\#\text{incógnitas} > \#\text{ecuaciones}$ )
- Este es el problema de clausura, característico de turbulencia, y lo que motiva modelos de turbulencia (modelamos el término que “falta” determinar)
- Hasta ahora no hay una teoría unificada (sobre cómo se transmite la energía entre escalas y cómo decae). Hay muchos modelos separados
- De las pocas cosas en común que casi siempre tienen los flujos turbulentos están las pequeñas escalas de Kolmogorov y los efectos de pared
- Más detalles después. DNS es costoso, solo geometrías sencillas, por esto modelos como  $k-\varepsilon$  son los más usados en ingeniería

# Tarea 1

1. Ver 3 vídeos y completar la lista “características de flujos turbulentos”
2. Estudiar 2 EDPs: Ec. advección-difusión y Ec. de Burgers
  - a. Qué modelan estas EDPs? Qué representa cada término? Cómo son las soluciones?
  - b. En qué se parecen a Navier-Stokes?

# ME 6010 - Introducción a la turbulencia

Evaluaciones : controles : S8 , S14  
 proyecto : inicial S7 , final Exámenes.

## Clase 2

### Ecuaciones de Mecánica de fluidos (Cap 2. Davidson)

Antes de empezar, revisaremos notación indicial: "comprime las sumas"

vector  $\vec{x} \rightarrow x_i$  (tiene un índice libre)  $i = 1, 2, 3$

tensor matriz  $\underline{\underline{A}} \rightarrow a_{ij}$  (2 índices libres) tensor ~ sistema de referencia

operaciones : se repiten los índices  $\downarrow$   $\rightarrow$  se expande la suma

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Símbolos especiales

Delta de Kronecker  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$   $\delta_{ij} = \underline{\underline{I}}$

$$\delta_{11} = 1, \delta_{12} = 0$$

ojo:  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

Levi-Civita  $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : ijk, jki, kij \\ -1 & : ikj, kji, jik \\ 0 & : i=j, j=k, k=i \end{cases}$

Más operaciones:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \times b_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j = c_k \leftarrow 1 \text{ índice libre}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \times u_j = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = c_k$$

Volviendo a mecánica de fluidos,

3 principios físicos forman nuestras ecuaciones básicas :

1. - Segunda ley de Newton

2. - Ecuaciones constitutivas (ley de viscosidad de Newton)

3. - Conservación de masa

Balance de (1) en un volumen de control  $\delta V$

$$\int_{\text{masa}} \delta V \frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt} = (-\nabla p) \delta V + \underbrace{\text{fuerzas viscosas}}_{\vec{F}} \quad \begin{array}{l} \text{en un cubo} \\ \text{diferencial:} \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta V \end{array}$$

Llegando a una ecuación diferencial

$$\int \frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad //$$

$$(3) \rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial t} : \text{para flujo no compresible} \rightarrow \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(viene de  $\frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) = 0$ )

$$(2) \rightarrow \tau_{ij} = f(\vec{u}) \quad \text{La ley de viscosidad de Newton}$$

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}$$

Esfuerzos son proporcionales a la tasa de cambio de  $u_i$ , y la constante de proporcionalidad es  $\mu = \rho \nu$   
 $\mu$ : viscosidad dinámica,  $\nu$ : visc. cinemática.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] : \text{tensor esfuerzo-tasa de deformación}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = 2\rho \nu S_{ij}$$

Finalmente, nos queda

$$\frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad \boxed{\text{Ec. de Navier-Stokes (N-S)}}$$

¿Qué es  $\frac{\vec{D}\vec{u}}{Dt}$ ? Derivada total, material, convectiva  
Es la derivada de un elemento de fluido que se move en el espacio  $\neq \frac{\partial}{\partial t}$ : fija en el espacio

$$\text{Veamos } T(\vec{x}, t) \rightarrow \delta T \approx \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \dots \quad / \cdot \frac{1}{\delta t}$$

$$\frac{Dt}{Dt} \approx \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot u_x + \dots$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \sim u_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

advección

$$\text{Para } \vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{Lagrangiano}} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{en un sistema de referencia Euleriano}}$$

Lagrangiano: siguiendo al elemento de fluido en un sistema de referencia Euleriano

$$N-S \text{ final: } \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{término no lineal}} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{u}}_{\text{difusión}}$$

advección

Nota:  $\frac{D\vec{u}}{Dt}$  puede ser confuso:  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$  y  $\frac{D\vec{u}}{Dt} \neq 0$  puede darse en casos donde el sistema de referencia genera "cambios en  $\vec{u}$ ".

Versiónes integrales de N-S

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV = - \oint_S u_i (\rho \vec{u} \cdot d\vec{S}) - \oint_S \rho d\vec{S} + (\text{término viscoso})$$

Puede interpretarse como un balance de momentum lineal en el volumen de fluido  $V$ : éste puede cambiar por transporte a través de  $S$  (advección), o bien por fuerzas de presión o viscosas.

Tasa de disipación de energía

¿A qué tasa se convierte la energía mecánica en calor por fricción?

Para un volumen  $V$  con bordes  $S$ , tenemos esfuerzos  $\tau_{ij} = 2\rho v S_{ij}$

$$\underbrace{\dot{W}}_{\text{tasa de trabajo de las fuerzas viscosas}} = \oint_S u_i (\tau_{ij} dS_j) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] dV$$

La tasa de trabajo por elemento de volumen es

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \tau_{ij}] = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} u_i + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$f_i$ : fuerza viscosa

truco:  
 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$   
 $S_{ij} = S_{ji}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

cambiando los índices

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\tau}_{ij} + \tilde{\tau}_{ji} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[ \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \tau_{ij} S_{ij}$$

reescriviendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) = f_i u_i + \underbrace{\tau_{ij} S_{ij}}_{\substack{\text{trabajo} \\ \text{viscoso} \\ \text{neto}}} \quad \underbrace{\tau_{ij} S_{ij}}_{\substack{\text{cambio de} \\ \text{energía interna}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tasa de aumento de la energía interna por unidad de masa} \\ \left. \varepsilon = \frac{\tau_{ij} S_{ij}}{\rho} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dissipación} \\ \tau_{ij} S_{ij} = 2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \end{array}$$

Hay otra manera de llegar a este resultado e. cinética

$$\left\{ \frac{D \vec{u}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \right\} \cdot \vec{u} \rightarrow \vec{u} \cdot \frac{D \vec{u}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right) = -\nabla \left( \frac{P \vec{u}}{2} \right) + \nu \vec{u} (\nabla^2 \vec{u})$$

$$\text{El término viscosa } \nu \vec{u} (\nabla^2 \vec{u}) = u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tau_{ij}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_i \tau_{ij}}{\rho} \right) - 2 \nu S_{ij} S_{ij}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right) = \underbrace{-\nabla \left( \frac{(\vec{u}^2)}{2} \vec{u} \right)}_{\text{I}} - \underbrace{\nabla \left( \frac{(P \vec{u})}{2} \vec{u} \right)}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_i \tau_{ij}}{\rho} \right)}_{\text{III}} - \underbrace{2 \nu S_{ij} S_{ij}}_{\text{IV}}$$

Si integrarmos en un volumen  $V$ ,

I : transferencia/transporte advecivo de e.cinética a través de  $S$

II : fuerzas de presión sobre  $S$

III : fuerzas viscósas sobre  $S$

IV : debe ser dissipación : pérdida de e.cinética por fricción.

Se concluye de igual manera que la tasa de dissipación de e.mecánica por unidad de masa es  $\varepsilon = 2 \nu S_{ij} S_{ij}$

Nota: La ecuación para  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right)$  se puede reescribir como

$$\nabla \vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{u}) = -\nu (\nabla \times \vec{u})^2 + \nabla \cdot (\nu \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left( \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} + \nu (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} \right) - \nu (\nabla \times \vec{u})^2$$

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{u} \quad , \quad \frac{w^2}{2} : \text{enstrofa}$$

verticidad

En un dominio cerrado  $V$ , varios términos se simplifican y

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{u^2}{2} \right) dV = -\nu \int (\nabla \times \vec{u})^2 dV = \int \varepsilon dV$$

debe serlo. esto solo se cumple  
para un régimen/ fronteras "estacionarias"

Presión y velocidad

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} & \nabla \cdot \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Tomando la divergencia de N-S,  $\nabla^2 \left( \frac{p}{\rho} \right) = -\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})$

tenemos una relación más directa  $\Rightarrow "p = f(\vec{u})"$

Para dominio infinito, ley de Biot Savart:

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{[\nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})]'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = f(\vec{u})$$

Tenemos una expresión para  $p$ ! Importante porque:

- 1) Sistema cerrado de ecuaciones ✓
- 2)  $p(\vec{x})$  es una ecuación no-local:  $p$  se ve afectado por cómo se comporta  $\vec{u}$  en todo el espacio.  
Eddies lejanos pueden afectarse mediante  $p$ .

24 Agosto 2021

Presión y velocidad

$$p(\vec{x}) = f(\vec{u}(\vec{x}))$$

ecuación no-local : todo el espacio afecta a  $p$   
y éste a  $\vec{u}$  : "eddies lejanos pueden afectarse".  
¿  $p$  afecta de igual manera a  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$  ?

Dinámica de vorticidad

vorticidad  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$  : qué es físicamente ?

Ej: fluido 2D  $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$ ,  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$

Elemento circular, radio  $r$  y vel. angular  $\Omega$

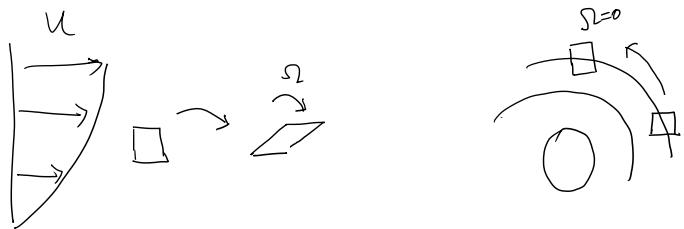
$$\int_S \underbrace{\nabla \times \vec{u}}_{\vec{\omega}} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$\omega_z \pi r^2 = \Omega r \cdot 2\pi r$$

$$\omega_z = \frac{\Omega}{2}$$

Se puede generalizar a 3D :  $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$

Rotación "≠" vorticidad



Los gradientes de velocidad  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla \vec{u}$  se

pueden descomponer como una suma de deformación y vorticidad.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= S_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_k\end{aligned}$$

Son procesos diferentes pero no independientes

$$\nabla^2 u_i = 2 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = -[\nabla \times \vec{w}]_i$$

Ambos gradientes están relacionados aunque podemos tener solo contribuciones del uno o del otro.

¿A qué contribuyen más?

$$\text{Tomenos } Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} (S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} \vec{w}^2)$$

$$\text{Normalizando, } \Lambda = \frac{S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} w^2}{S_{ij} S_{ij} + \frac{1}{2} w^2} \quad \begin{cases} > 0 : \text{domina la deformación} \\ < 0 : \text{domina la vorticidad} \end{cases}$$

Otra invariante:

$$R = \frac{1}{3} (S_{ij} S_{jk} S_{ki} + \frac{3}{4} w_i w_j S_{ij})$$

con R y Q se pueden clasificar las contribuciones.

## Ecuación de vorticidad

$$\text{identidad : } \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) - \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$(N-S) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \times \vec{\omega} - \nabla \left( \underbrace{\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}}_{\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} / \cancel{\nabla \times (\cdot)}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \underbrace{\nabla \times \vec{u} \times \vec{\omega}}_{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega}} - \nabla \times \cancel{\nabla C}^0 + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \frac{D \vec{\omega}}{Dt} = \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}}_? + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad //$$

No hay un término con  $p$ !

La presión no actúa de la misma manera que sobre  $\vec{u}$ .

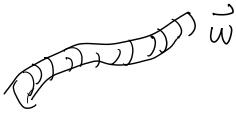
Para entender el significado de  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$ , consideran un espacio de fluido con  $\vec{\omega} = 2 \vec{z}$   
 $\Rightarrow$  momentum angular  $\vec{H} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}$

Despreciando las fuerzas de presión (ej: dominio esférico)

$$\frac{DH}{Dt} = \text{torque viscoso} \Leftrightarrow I \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = - \vec{\omega} \frac{DI}{Dt} + 2 \text{ torque viscoso}$$

si la viscosidad es despreciable,  $\frac{D}{Dt}(I \vec{\omega}) = 0$

$I \vec{\omega}$  se conserva ~analogía bailarina

eddy :  tambien se comporta así  
 "Vortex Stretching"  
 estiramiento de vórtices

esto es lo que representa  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$

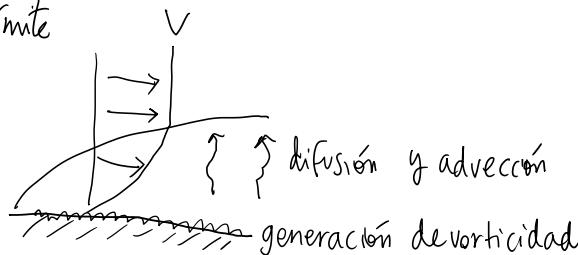
Caso particular : 2D       $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$  ,  $\vec{w} = (0, 0, w_z)$   
 $\Rightarrow \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} = 0$

Ecuación de vorticidad :  $\frac{D\vec{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{w}$  : ecuación advección/difusión !

No hay término fuente/sumidero: solo se desplaza y difunde en el espacio.

De dónde viene la vorticidad entonces?

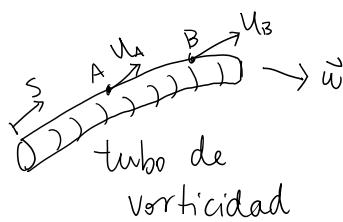
Ej. capa límite



escalas : difusión  $\delta \sim \sqrt{2\nu t}$  }  $\delta \sim \sqrt{\nu x}$   
advección  $x \sim Vt$  }  $V$   
espesor capa límite

Volvamos al caso 3D

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{w}$$



$$u_{||} = \vec{u} \cdot \hat{s}$$

$$\vec{w} = w \hat{s}$$

$$\vec{w} \cdot \nabla u = |\vec{w}| \frac{du_{||}}{ds}$$

Si  $\frac{du_{||}}{ds} > 0$  hay estiramiento

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} > 0 \rightarrow \vec{w} \text{ crece}$$

Otra manera de ver esta contribución es en la ec. de enstofría :  $\frac{w^2}{2}$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{w^2}{2} \right) = \underbrace{w_i w_j S_{ij}}_{\text{estiramiento de vértices}} - \nu \underbrace{(\nabla \times \vec{w})^2}_{\text{destrucción viscosa}} + \nu \underbrace{\nabla \cdot [\vec{w} \times (\nabla \times \vec{w})]}_{\text{despreciable}}$$

## Teorema de Kelvin

- para flujo no viscoso
- "líneas de vorticidad se mueven como si estuvieran congeladas"

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \text{constante}$$

Circulación

$$\text{Stokes} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{en una superficie material} \\ \text{el flujo de vorticidad a través de ella es constante} \end{array} \right\}$$

## Discusión

- ecuaciones para  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$
- importancia de la presión en NS pero no en la ec. de vorticidad
- finalmente,  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  se afectan porque  $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$

Antes de cerrar, revisemos las ecuaciones en una forma más general:

$$1) \text{ Continuidad} : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

fuerzas externas  
(e):  $\vec{g}$ )

$$2) \text{ Navier-Stokes}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\zeta}$$

$$3) \text{ Ec. vorticidad}$$

$$\text{usando } \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) + \vec{w} \times \vec{u}$$

$$\nabla \times (N-S)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) + \vec{w} \times \vec{u} \right) = -\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)$$

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$

$$\nabla \times \vec{w} \times \vec{u} = \vec{u} \cdot \nabla \vec{w} - \cancel{\vec{u}(\nabla \cdot \vec{w})} + \vec{w}(\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{w} \cdot \nabla \vec{u}$$

$-\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$

\* Notamos que  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{w}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\vec{w}}{Dt} - \frac{1}{\rho^2} \vec{w} \frac{D\rho}{Dt}$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \cancel{\nabla p} - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p$$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{w}}_{\frac{D\vec{w}}{Dt}} - \underbrace{\frac{\vec{w}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\frac{\vec{w}}{\rho} \frac{Dp}{Dt}} = \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p + \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{w}}{\rho} \right) = \underbrace{\vec{w} \cdot \nabla \vec{u}}_A + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p}_B + \underbrace{\nabla \times \vec{f}}_C + \underbrace{\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)}_D$$

A : estiramiento de vórtices

B : efectos barocéntricos / no barotrópicos : importante en el caso atmosférico

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \times \nabla p \neq 0$$

C : fuerzas no conservativas

D : efectos viscosos

2021 08 27

## Naturaleza del caos : introducción (Capítulo 3; Davidson)

- Comportamiento caótico y ecs. no lineales
- Transición al caos
- "Flecha del tiempo" (arrow of time)

### No-linealidad y caos

Experimentos clásicos (Taylor y Reynolds)

✓ ↘ → aumenta la complejidad

varios valores críticos de  $R$  que determinan nuevos estados, eventualmente llegando a un régimen turbulento.

Mencionamos que esta complejidad tiene relación con el término no lineal, sin explicar por qué.

Ejemplo: ecuación logística: (Verhulst, 1845)  $x_n \in (0, 1)$

$$x_{n+1} = F(x_n) = ax_n(1-x_n), \quad 1 < a \leq 4$$

modela el crecimiento poblacional de una especie biológica

$$x_{n+1} = F(x_n) \Leftrightarrow \text{EDO: } \dot{x} = G(x)$$

Puntos de equilibrio (fixed points):  $x_{n+1} = x_n$

(pueden ser estables o inestables)

para esta ecuación son  $x=0, x=(a-1)/a$

estabilidad  $\rightarrow$  segunda derivada:  $\nearrow$   $\nwarrow$

$\searrow$  perturbaciones

base del análisis de estabilidad lineal

$x=0$  : inestable para  $a > 1$

$x=(a-1)/a$  : estable para  $1 < a \leq 3$   
inestable para  $a > 3$

Para  $a > 3$  ocurre algo interesante, aparece una nueva solución: "dos ciclos de F"

$$x_2 = F(x_1) \quad x_2 = (a + 1 \pm ((a+1)(a-3))^{1/2}) / 2a$$
$$x_1 = F(x_2)$$

Tenemos una solución donde hay 2 puntos de estabilidad y nuestro resultado "oscila" entre ellos. Para sistemas de mayores dimensiones, esto se podría interpretar como un atractor.

Este cambio para  $a=3$  se conoce como bifurcación.

Punto en el cual la organización del sistema cambia

Posteriormente hay otra bifurcación a un 4-ciclo para  $a = 3.449$ , luego otra  $a = 3.544$  (8-ciclos) y así... la secuencia de doblar los ciclos es infinita

Llegamos a varios puntos donde hay tantos estados posibles que podemos interpretar a  $x$  como una variable aleatoria.

Para  $a=4$  hay una solución analítica:  $x_n = \sin^2(2\pi\theta_0)$

Conceptos importantes:

- Sensibilidad a las condiciones iniciales es algo importante en caos.
- De una ecuación no lineal tan simple llegamos a sistemas caóticos que podemos interpretar como aleatorios.
- Podemos describir a  $x_n$  mediante sus estadísticas, sintetizando todos estos resultados.

Bifurcaciones / transición a la turbulencia

Landau, 1944: estudiando flujos de Poiseuille

pequeñas perturbaciones: Análisis de estabilidad lineal  $\sim Ae^{j\omega t}$

$$A(t) = A_0 \exp((\sigma + j\omega)t) \quad j = \sqrt{-1}$$

$\sim$  frecuencia

Variando  $R$  cerca de  $R_c$  (parámetro crítico):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma < 0 & \text{para } R < R_c : \text{inestabilidad} \\ \text{exp decae} & \text{muere} \\ \sigma > 0 & \text{para } R > R_c : \text{inestabilidad} \\ \text{exp crece} & \text{crece} \end{array} \right.$$

Usualmente tenemos una ecuación del estilo:  $\sigma^2 = c^2 (R - R_c) + \theta((R - R_c)^2)$ ,  $|R - R_c| \ll R_c$

Cuando las perturbaciones crecen, este análisis ya no es válido.

Landau sugirió que la magnitud de la perturbación  $|A|$  (promediado sobre varios ciclos) está dada por

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - \alpha|A|^4 - \beta|A|^6 + \dots$$

Si  $|A|$  es pequeño:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - \alpha|A|^4 \quad \begin{matrix} \text{ec. de Landau} \\ \uparrow \quad \swarrow \quad (\text{Stuart-Landau}) \end{matrix}$$

constante de Landau

Según Landau  $\alpha$  ↘

$\alpha > 0$	: flujo externo
$\alpha < 0$	: tuberías
$\alpha = 0$	: análisis lineal ( $\sim  A ^4$ se va)

La ec. de Landau es similar a la ec. logística

$$\frac{dx}{dt} = \delta x(1 - \varepsilon x)$$

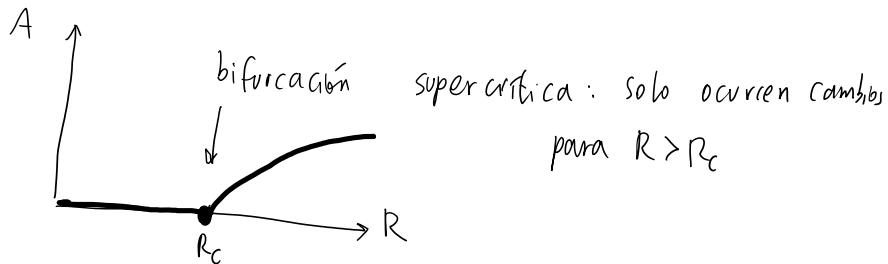
Tiene una solución exacta:

$$\frac{|A|^2}{A_0^2} = \frac{e^{2\sigma t}}{1 + \lambda(e^{2\sigma t} - 1)}, \quad \lambda = \frac{\alpha A_0^2}{2\sigma}$$

Cómo se comporta?: puntos de equilibrio?

$$\alpha > 0 \quad R < R_c : |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

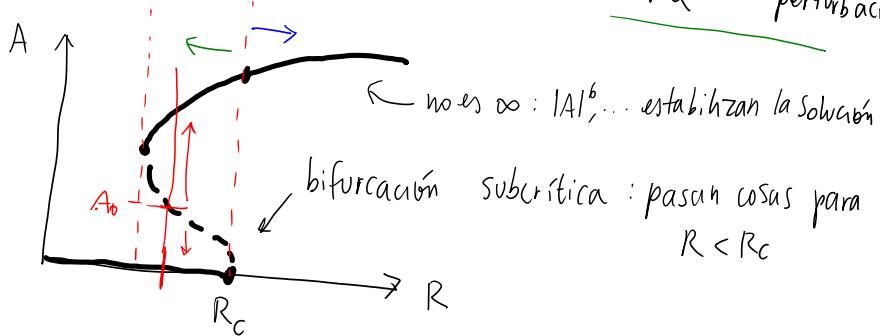
$$R > R_c : |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} = A_\infty \sim (R - R_c)^{\frac{1}{\alpha}}$$



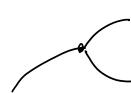
$\alpha < 0$        $R > R_c, |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ : ec de Landau deja de ser válida, los términos  $|A|^6, \dots$  pueden reestabilizar el sistema

$$R < R_c \quad |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si } A_0 < \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} : \text{pequeña perturbación}$$

$$|A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \quad \text{si } A_0 > \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} : \text{gran perturbación}$$



Hay otros tipos de bifurcaciones



Pitchfork

estados oscilatorios

Hopf

Análisis de estabilidad lineal y bifurcaciones  
ver Drazin (2002)

## Flecha de tiempo (arrow of time)

Es el término no lineal en N-S la causa de el caos y mezcla?

Qué pasa con la ec. de Euler:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

termino no lineal!

Las ecs. de Euler son reversibles: no intuitivo

matemáticamente, si invertimos el tiempo en la ecuación, nos queda la misma

En flujos reales, la viscosidad toma importancia y causa efectos como la mezcla turbulenta. En combinación con los efectos del término no lineal son la causa de la irreversibilidad de N-S.

Haciendo una analogía con física estadística, no es imposible volver de un estado mezclado y desordenado, pero la probabilidad de que eso ocurra es muy baja.

N-S no es reversible  $\xrightarrow{\text{arrow of time}}$  en el tiempo. Aunque las fuerzas viscosas sean pequeñas, tienen una importancia fundamental: esfuerzos viscosos.

2021 08 27

## Naturaleza del caos : introducción (Capítulo 3; Davidson)

- Comportamiento caótico y ecs. no lineales
- Transición al caos
- "Flecha del tiempo" (arrow of time)

### No-linealidad y caos

Experimentos clásicos (Taylor y Reynolds)

$\nu \rightarrow$  aumenta la complejidad

varios valores críticos de  $R$  que determinan nuevos estados, eventualmente llegando a un régimen turbulento.

Mencionamos que esta complejidad tiene relación con el término no lineal, sin explicar por qué.

Ejemplo: ecuación logística: (Verhulst, 1845)  $x_n \in (0, 1)$

$$x_{n+1} = F(x_n) = ax_n(1-x_n), \quad 1 < a \leq 4$$

modela el crecimiento poblacional de una especie biológica

$$x_{n+1} = F(x_n) \Leftrightarrow EDO: \dot{x} = G(x)$$

Puntos de equilibrio (fixed points):  $x_{n+1} = x_n$

(pueden ser estables o inestables)

para esta ecuación son  $x=0, x=(a-1)/a$

estabilidad  $\rightarrow$  segunda derivada:  $\uparrow$   $\nwarrow$

$\searrow$  perturbaciones

base del análisis de estabilidad lineal

$x=0$  : inestable para  $a > 1$

$x=(a-1)/a$  : estable para  $1 < a \leq 3$   
inestable para  $a > 3$

Para  $a > 3$  ocurre algo interesante, aparece una nueva solución: "dos ciclos de F"

$$x_2 = F(x_1) \quad x_2 = (a + 1 \pm ((a+1)(a-3))^{1/2}) / 2a$$
$$x_1 = F(x_2)$$

Tenemos una solución donde hay 2 puntos de estabilidad y nuestro resultado "oscila" entre ellos. Para sistemas de mayores dimensiones, esto se podría interpretar como un atractor. Ver interpretación espacial.

Este cambio para  $a=3$  se conoce como bifurcación:

punto en el cual la organización del sistema cambia

Posteriormente hay otra bifurcación a un 4-ciclo para  $a = 3.449$ , luego otra  $a = 3.544$  (8-ciclos) y así... la secuencia de doblar los ciclos es infinita

Llegamos a varios puntos donde hay tantos estados posibles que podemos interpretar a  $x$  como una variable aleatoria. Ver mapa logístico.

Para  $a=4$  hay una solución analítica:  $x_n = \sin^2(2\pi\theta_0)$

Conceptos importantes:

- Sensibilidad a las condiciones iniciales es algo importante en caos.
- De una ecuación no lineal tan simple llegamos a sistemas caóticos que podemos interpretar como aleatorios.
- Podemos describir a  $x_n$  mediante sus estadísticas, sintetizando todos estos resultados.

Bifurcaciones / transición a la turbulencia

Landau, 1944: estudiando flujos de Poiseuille

pequeñas perturbaciones: Análisis de estabilidad lineal  $\sim Ae^{j\omega t}$

$$A(t) = A_0 \exp((\sigma + j\omega)t) \quad j = \sqrt{-1}$$

$\sim$  frecuencia

Variando  $R$  cerca de  $R_c$  (parámetro crítico):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma < 0 \text{ para } R < R_c : \text{ inestabilidad muere} \\ \quad \text{exp decae} \\ \sigma > 0 \text{ para } R > R_c : \text{ inestabilidad crece} \\ \quad \text{exp crece} \end{array} \right.$$

Usualmente tenemos una ecuación del estilo:  $\sigma^2 = c^2 (R - R_c) + \theta((R - R_c)^2)$ ,  $|R - R_c| \ll R_c$

Cuando las perturbaciones crecen, este análisis ya no es válido.

Landau sugirió que la magnitud de la perturbación  $|A|$  (promediado sobre varios ciclos) está dada por

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - \alpha|A|^4 - \beta|A|^6 + \dots$$

Si  $|A|$  es pequeño:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - \alpha|A|^4 \quad \text{ec. de Landau}$$

$\uparrow \quad \swarrow$  (Stuart - Landau)  
constante de Landau

según Landau  $\alpha \begin{cases} \alpha > 0 : \text{ flujo esterno} \\ \alpha < 0 : \text{ tuberías} \\ \alpha = 0 : \text{ análisis lineal} \quad (\sim |A|^4 \text{ se va}) \end{cases}$

La ec. de Landau es similar a la ec. logística

$$\frac{dx}{dt} = \delta x(1 - \varepsilon x)$$

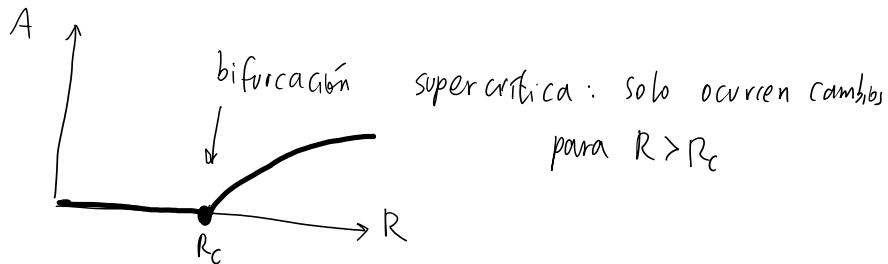
Tiene una solución exacta:

$$\frac{|A|^2}{A_0^2} = \frac{e^{2\sigma t}}{1 + \lambda(e^{2\sigma t} - 1)}, \quad \lambda = \frac{\alpha A_0^2}{2\sigma}$$

¿Cómo se comporta?: puntos de equilibrio?

$$\alpha > 0 \quad R < R_c : |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$R > R_c : |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} = A_\infty \sim (R - R_c)^{\frac{1}{\alpha}}$$

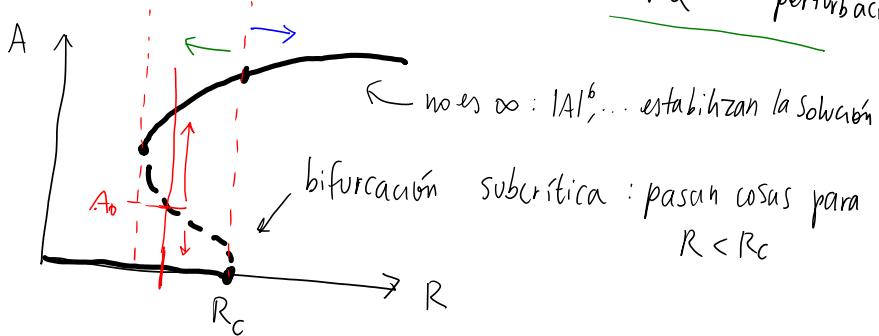


$\alpha < 0$

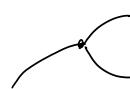
$R > R_c, |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ : ec de Landau deja de ser válida, los términos  $|A|^b, \dots$  pueden reestabilizar el sistema

$$R < R_c \quad |A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si } A_0 < \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} : \text{pequeña perturbación}$$

$$|A| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \quad \text{si } A_0 > \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} : \text{gran perturbación}$$



Hay otros tipos de bifurcaciones



Pitchfork

estados oscilatorios

Hopf

Análisis de estabilidad lineal y bifurcaciones  
ver Drazin (2002)

## Flecha de tiempo (arrow of time)

Es el término no lineal en N-S la causa de el caos y mezcla?

Qué pasa con la ec. de Euler:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

termino no lineal!

Las ecs. de Euler son reversibles: no intuitivo

matemáticamente, si invertimos el tiempo en la ecuación, nos queda la misma

En flujos reales, la viscosidad toma importancia y causa efectos como la mezcla turbulenta. En combinación con los efectos del término no lineal son la causa de la irreversibilidad de N-S.

Haciendo una analogía con física estadística, no es imposible volver de un estado mezclado y desordenado, pero la probabilidad de que eso ocurra es muy baja.

N-S no es reversible → arrow of time.  
en el tiempo. Aunque las fuerzas viscosas sean pequeñas, tienen una importancia fundamental: esfuerzos viscosos.

31 Agosto 2021

$$\text{Notación: } \overline{\underline{u}} \circ \underline{\underline{u}}, \quad \overline{\overline{\underline{u}}} = \overline{\underline{u}}$$

$$\text{Descomposición de Reynolds: } \underline{\underline{u}} = \overline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}'} \Leftrightarrow \underline{u}_i = \overline{\underline{u}_i} + \underline{\underline{u}'_i}$$

$$\text{Propiedades: } \overline{(\underline{u}_i)} = \overline{\overline{\underline{u}_i} + \underline{\underline{u}'_i}} = \overline{\underline{u}_i} + \overline{\underline{\underline{u}'_i}} \Rightarrow \overline{\underline{\underline{u}'_i}} = 0$$

$$\overline{c \underline{u}_i} = c \overline{\underline{u}_i}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_0 = 0 \xrightarrow{(1)} \nabla \cdot \overline{\underline{u}} = 0 \quad \circ$$

$$\nabla \cdot (\overline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}'}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \overline{\underline{u}} + \nabla \cdot \underline{\underline{u}'} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{\underline{u}'} = 0$$

Existe otra descomposición: de Favre ~ promedio basado en la masa útil en combustión

$$\underline{u}_i = \widetilde{\underline{u}}_i + \underline{\underline{u}''_i} \rightarrow \overline{\rho \underline{\underline{u}''_i}} = 0, \quad \widetilde{\underline{u}}_i = \frac{\overline{\rho \underline{u}_i}}{\overline{\rho}} \neq \overline{(\underline{u}_i')}$$

Ecuaciones RANS: Reynolds Averaged Navier Stokes

$$N-S: \rho \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} + \rho (\underline{\underline{u}} \cdot \nabla) \underline{u}_i = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} / (1)$$

$$\rho \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial t} + \rho \underbrace{(\underline{u}_j \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j})}_{\text{expandamos este término}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

expandamos este término

$$(\overline{\underline{u}_j} + \underline{\underline{u}'_j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\underline{u}_i} + \underline{\underline{u}'_i}) = \underbrace{\overline{\underline{u}_j} \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j}}_{\text{queda}} + \underline{\underline{u}'_j} \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j} + \overline{\underline{u}_j} \frac{\partial \underline{\underline{u}'_i}}{\partial x_j} + \underline{\underline{u}'_j} \frac{\partial \underline{\underline{u}'_i}}{\partial x_j} \xrightarrow{\nabla \cdot \underline{\underline{u}'} = 0} \underbrace{\underline{\underline{u}'_j} \frac{\partial \underline{\underline{u}'_i}}{\partial x_j}}_{\text{queda}} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\underline{u}'_i} \underline{\underline{u}'_j})$$

Luego

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial t} + \rho \overline{\underline{u}_j} \frac{\partial \overline{\underline{u}_i}}{\partial x_j}}_{\rho \frac{D \overline{\underline{u}_i}}{Dt}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{\underline{u}'_i \underline{\underline{u}'_j}}) \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \swarrow \end{matrix} \quad \text{Ecuación RANS}$$

Esfuerzos de Reynolds

Tensor de Esfuerzos de Reynolds  $\overline{T}_{ij}^R = -\rho \overline{u_i' u_j'}$

nombre porque entra a la ecuación en el mismo término  $\overline{T}_{ij}$

Forma integral :  $\oint_S -\rho \overline{u_i' u_j'} ds$  : flujo de momentum turbulent  
No es un esfuerzo real

Nota: Davidson usa el supuesto de que el flujo es estadísticamente estacionario  $\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = 0$ . no es cierto siempre.

Para resolver RANS necesitamos saber qué es  $\overline{T}_{ij}^R$ , obtengamos una ecuación  $\frac{\partial \overline{T}_{ij}^R}{\partial t} \approx \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t}$  Tenemos  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \rightarrow$  obtener  $\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + \dots &= \dots \\ \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial t} + \dots &= \dots \end{aligned} \right\} \times \bar{u}_j' \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i' \bar{u}_j') + \dots &= \dots \end{aligned} \right\} / ()$$

Haciendo esto, queda:

$$\frac{\bar{D}}{Dt} [\rho \overline{u_i' u_j'}] = \overline{T}_{ik}^R \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{T}_{jk}^R \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} [-\rho \overline{u_i' u_j' u_k}] + \dots$$

Aparecen nuevos términos (+ incógnitas) de mayor orden

Podemos seguir

$$\frac{\bar{D}}{Dt} [\overline{u_i' u_j' u_k}] = \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} [\overline{u_i' u_j' u_k u_m}] + \dots$$

Siempre tenemos más incógnitas que ecuaciones, no podemos resolverlo. Este es el problema de clausura. (closure)

Qué hacemos? Se requiere información adicional y modelos para representar los esfuerzos de Reynolds.

Igual que con  $\bar{u}$ , se puede construir una ecuación media para un escalar  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$  cte difusiva

$$\text{adv-difusión : } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \Gamma \nabla^2 \phi \quad / ()$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \nabla \bar{\phi} - \overline{u_i \phi'} \right)$$

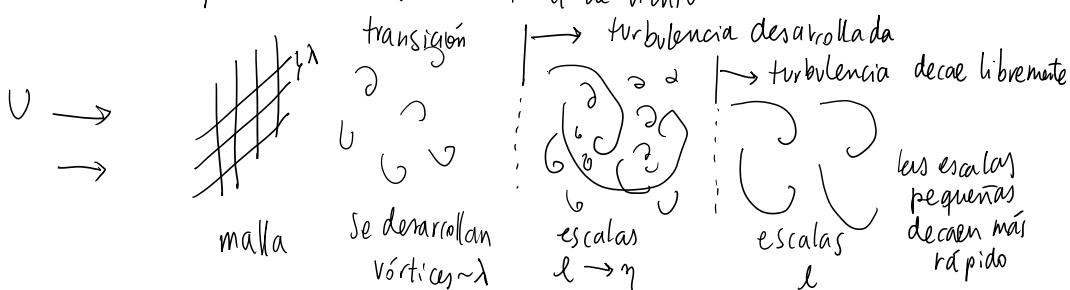
flujo turbulento de  $\phi$   
también tendremos que modelarlo  
y obtener información adicional.

## Métodos estadísticos

En turbulencia inevitablemente necesitamos métodos estadísticos

$$\text{covarianza} \leftarrow T_{ij}^k \quad \downarrow \quad \rightarrow \frac{1}{2}\langle u'^2 \rangle \\ u = \bar{u} + u' \quad \text{varianza} \\ \text{qué promedio?}$$

Caso base para nuestro estudio: túnel de viento

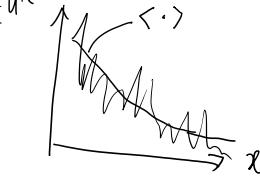


$$\text{Destrucción de energía: } \underbrace{\frac{du^2}{dt}}_{\text{empírica para } Re \gg 1} = -A \frac{u^3}{l} \quad A \sim 1$$

$$\frac{u^2}{\tau} = \frac{l}{u} \approx \frac{u^3}{l} \quad \text{dimensionalmente hace sentido}$$

$\rightarrow$  turnover time: tiempo de un ciclo  $\sim$  eddy.

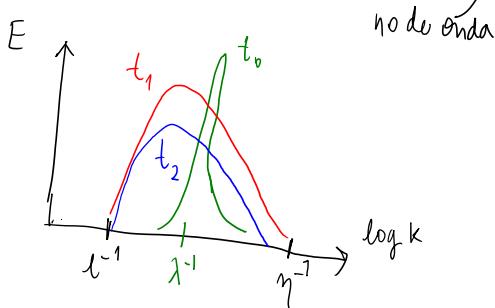
En este caso,  $u = \bar{u} + u'$   $\rightarrow \langle \frac{1}{2} u'^2 \rangle$  promedio sobre muchas realizaciones



venimos el decaimiento de la energía pero perdemos la información energética en cada escala; podemos hacer un análisis espectral

Transformada de Fourier  $x \rightarrow k \sim \frac{\pi}{r}$   $r \leftarrow$  tamaño de un eddy

no de onda



La visión espectral nos permite mantener la información energética en las diferentes escalas presentes en el flujo. Complementan nuestros análisis estadísticos.

Enfoque estadístico y métodos para promediar

Medimos  $\bar{u}$ : puede parecer aleatorio, pero sus estadísticas, por ejemplo su pdf va a ser similar si repetimos el experimento.

Además  $\langle u'_i u'_j \rangle$ : esto es una covarianza!. Correlaciones son muy importantes para interpretar



$$\overline{U_A U_B} \neq 0 : \text{deberían ser "similares"}$$

$$\overline{U_A U_C} \approx 0 : \text{no variarán al mismo tiempo}$$

Qué tipo de promedio usar?

$\bar{u}$  - tiempo/temporal  $\rightarrow$  sobre un tiempo largo  $T$  si es estadísticamente estable. Si no, a veces se puede usar una ventana de tiempo  $\Delta t \approx T$  adecuada

$\langle u \rangle$  - ensemble/conjunto  $\rightarrow$  Serie de experimentos

- volumen/espaciales: sobre todo el volumen o. en alguna dirección: x, y, o z. Depende del problema.

Elección ligada a  $\rightarrow$  problema: estadísticamente estable?

isotrópico?

experimento y mediciones

- no de sensores?  $\rightarrow \bar{u} \circ \langle u \rangle$  solamente

- simulación 3D quizás no llega a  $T$

- lab?  $\rightarrow \langle u \rangle$ , midiendo la naturaleza: no siempre son fenómenos que se repiten.

Funciones estadísticas útiles

$\rightarrow$  Promedio

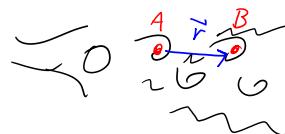
$\rightarrow$  Varianza y covarianza  $\sim \overline{U^2}$ ,  $\overline{U_i U_j}$ ,  $\overline{U_i \phi}$   
correlación

$\rightarrow S$ : skewness  $\sim \overline{U^3}$ : asimetría de la pdf:

$\rightarrow \delta$ : kurtosis  $\sim \overline{U^4}$ : importancia de los valores extremos

3 Septiembre 2021

continuación - métodos estadísticos



Correlación de velocidades (entre 2 puntos)

Roll factor (Salesky, 2017)

$$Q_{ij}(\vec{x}, \vec{r}, t) = \langle u_i^j(\vec{x}) u_j^i(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$$

Nota:

$R_{ij}$  en Pope

si es estadísticamente estacionario  $\rightarrow$  no depende de  $t$

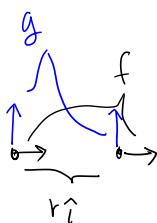
si es homogéneo  $\rightarrow$  no depende de  $\vec{x}$

Caso isotrópico: independiente de la dirección: estadísticas

Son "inmunes" al sistema de referencia. No siempre ocurre, pero es una idealización muy útil.

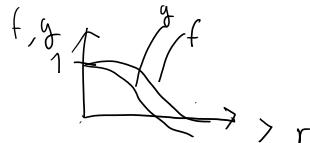
Asumir  $\bar{u} = 0$  ( $\rightarrow u = u'$ ).  $u^2 = \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle$

$u \sim$  vel. típica de eddies grandes



$$Q_{xx}(r_i) = u^2 f(r_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ son funciones de} \\ \text{correlación longitudinal} \end{array} \right.$$

$$Q_{yy}(r_i) = u^2 g(r_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{y lateral} \\ f(0) = g(0) = 1 \end{array} \right.$$



Podemos construir una medida de la escala integral

$$l = \int_0^\infty f(r) dr : \text{"región donde las velocidades (longitudinales) están bien correlacionadas."}$$

Nota: Pope  $\rightarrow L_1$  (longitudinal), análogamente se puede definir  $L_{22}$  (transversal/lateral)  $\sim g(r) \circ Q_{yy}$

Función estructura longitudinal de 2do orden

$\rightarrow$  importante en teoría de turb. isotrópica

$$\text{con } \Delta v = u_x(\vec{x} + \vec{r}) - u_x(\vec{x})$$

Nota: Pope  $\rightarrow D_{ij}$

$$\text{la función } \langle [\Delta v]^2 \rangle = \langle (u_x(\vec{x} + \vec{r}) - u_x(\vec{x}))^2 \rangle$$

$\sim$  "energía a la escala de tamaño  $r^{\parallel}$ "

Es una interpretación similar a  $E(k)$  pero espacial

En el caso espectral hacemos algo similar, pero en vez de enfocarnos en el tamaño "r" del eddy, tomamos la transformada de Fourier y vemos el espacio de manera espectral en "K" (número de onda)

Energía espectral  $E(K) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(r) Kr \sin(kr) dr$

$$R(r) = \int_0^{\infty} E(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dr$$

$$R(r) = \frac{1}{2} \left\langle \vec{u}(x) \cdot \vec{u}(x + \vec{r}) \right\rangle = u^2 \left( g + \frac{f}{2} \right)$$

Propiedades :

- $E(K) \geq 0$
- Para un conjunto de eddies que parecen Gaussianos de tamaño r  $\rightarrow E(K)$  es máx'mo para  $K \approx \pi/r$
- Cuando  $r \rightarrow 0$  :  $\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \int_0^{\infty} E(k) dk$

$E(k)$  : se interpreta como la contribución energética de eddies en el rango  $(k, k + dk)$

también  $E$  se relaciona con la enstofía:

$$\frac{1}{2} \langle \vec{w}^2 \rangle = \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk$$

Hipótesis de Taylor

usada en mediciones de campo

Tenemos un sensor; por ej. de temperatura alejado de donde queremos medir.

Hipótesis : "turbulencia está congelada" : eddie se mueve sin evolucionar mucho  $\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \approx -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \rightarrow$  entonces yo puedo asumir que a cierta distancia  $x$  del sensor la misma medida es válida, pero con un retraso  $t \approx \frac{x}{u}$

Válido solo si la intensidad de la turbulencia  $I = \frac{u'}{u} \ll 1$

## Transferencia de energía

El flujo medio ( $\bar{u}$ ) y la turbulencia ( $u'$ ) interactúan a través de los esfuerzos de Reynolds ( $\sim \bar{u}_i u_j'$ )

Tasa de trabajo de los esfuerzos viscosos  $\underbrace{\text{trabajo viscoso}}_{\text{trabajo viscoso}} + \underbrace{\text{energía interna}}_{\text{energía interna}}$

$$\text{general: } \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}^k \bar{u}_i] = \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j} + \tau_{ij}^k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{u}_i f_i + \tau_{ij}^k S_{ij}$$

En el caso turbulento:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij}^k \bar{u}_i] = \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j} + \tau_{ij}^k \bar{S}_{ij}$$

$\uparrow$   
no es un esfuerzo real  $\Rightarrow$  no es un trabajo real  $\Rightarrow$  no puede ser energía interna  
De hecho,  $\sim$  energía turbulenta.

Integrando en vol. de control (ej: tubería)

$$\cancel{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} [\tau_{ij}^k \bar{u}_i] dV} = \underbrace{\int_V \left( \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j} \right) dV}_{\text{"trabajo" de } \tau_{ij}^k} + \int_V \tau_{ij}^k \bar{S}_{ij} dV$$

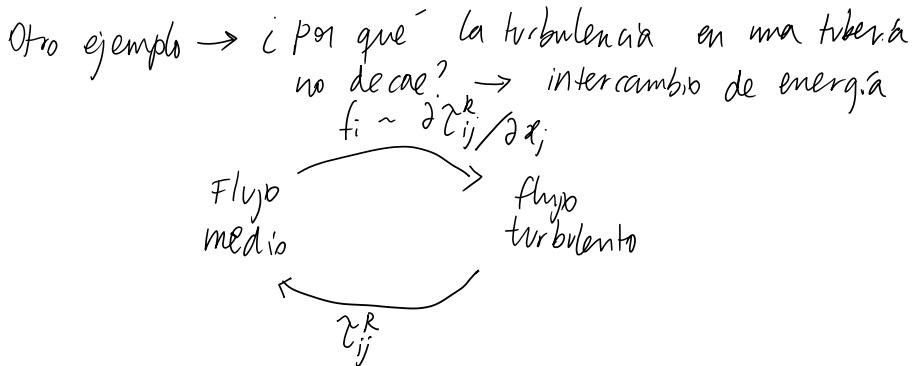
$\cancel{x_0}$  asumido  
 $\bar{u}_{in} = \bar{u}_{out}$  y  $\tau_{ij}^k = 0$  en la pared  
"pérdida de energía del flujo medio"

Balance: tasa de pérdida de e. cinética en el flujo medio = tasa de ganancia de e. cinética para turbulencia

Ej. de la transferencia entre  $\bar{u}$  y  $u'$



tubos de vorticidad se elongan en la dirección de corte máximo por efecto del flujo medio.  
 $\Rightarrow$  Aumenta su vorticidad y e. cinética/energía



Otro modo de verlo: podemos separar la energía cinética

$$\frac{1}{2} \bar{U}^2 \quad \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \bar{U}^2 : MKE \text{ e. cinética media} \\ \rightarrow \frac{1}{2} \bar{U}^T 2 : TKE \text{ e. cinética turbulenta} \end{cases}$$

Vamos a ver las ecuaciones de MKE y TKE y en ellas la transferencia de energía es evidente mediante un término idéntico pero de signo opuesto,

$$\underline{MKE} \quad \underline{\bar{U}} = \vec{U}$$

$$\text{Partimos de } \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}) + \bar{U} \cdot \nabla (\rho \bar{U}) = \sum \underline{F} : \text{presión y viscosas}$$

$$\text{E. cinética} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \bar{U}^2}{2} \right) + \bar{U} \cdot \nabla \left( \frac{\rho \bar{U}^2}{2} \right) = \sum \underline{F} \cdot \bar{U}$$

$$\text{Promedio temporal} \rightarrow \bar{U} \cdot \nabla \left( \frac{\rho \bar{U}^2}{2} + \rho \bar{U}^{12} \right) + \overline{\bar{U}^1 \cdot \nabla \left( \frac{\rho \bar{U}^2}{2} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{U}_i \bar{U}_{ij}^k \right] + \sum \overline{\underline{F}} \cdot \bar{U}$$

OJO:  
Davidson  $\frac{d}{dt} \rightarrow 0$

$\underbrace{\text{transporte de e. cinética}}_{\times \text{vel media}}$

$\underbrace{\text{flujos/transp.}}_{\sim \text{turbulento}} \underbrace{\text{tasa de "trabajo" de}}_{\sim \text{turbulenta}} \underbrace{\gamma_{ij}^R}_{\text{de F}}$

$\underbrace{\text{trabajo de F}}_{\sim \text{F}}$

7 Septiembre 2021

## Ecuaciones de e. cinética media y turbulenta

$$MKE = \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \quad , \quad k = TKE = \frac{1}{2} \bar{u}^2$$

$$\bar{T}_{ij} = 2\rho v \bar{S}_{ij}$$

Ecuación de MKE:

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}_i^2 \right) = \bar{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\bar{u}_k \bar{p} + \bar{u}_i (\bar{T}_{ik}^R) \right] + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}_{ik}^R}{\partial x_k} - 2\rho v \bar{S}_{ik} \bar{S}_{ik}$$

omitiendo  $\frac{\partial}{\partial t}$   
 (Davidson)  
 Cambio material de MKE

Se puede reescribir como

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\bar{u}_k \bar{p} + \bar{u}_i (\bar{T}_{ik}^R + \bar{T}_{ik}^L) \right) - \bar{T}_{ik}^R \bar{S}_{ik} - 2\rho v \bar{S}_{ik} \bar{S}_{ik}$$

flujo de MKE  
 ganancia de MKE por turbulencia

~ trabajo hecho por  $\bar{p}$ , fuerzas viscosas y "efuerzas" de Reynolds

Ecuación para TKE

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = \bar{T}_{ik}^R \bar{S}_{ik} - \rho v \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\bar{p} \bar{u}_j + v \nabla \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) \right) - \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \bar{u}_i$$

lo reescribimos

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\bar{p} \bar{u}_k + \bar{u}_i \bar{T}_{ik}^R - \frac{1}{2} \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k \right) + \bar{T}_{ik}^R \bar{S}_{ik} - 2\rho v \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$$

flujo o transporte de TKE  
 presión, fuerzas viscosas, trans. turb.  
 generación de TKE  
 de la MKE

disipación de TKE

En general, escribimos la ec de TKE de manera más conceptual como

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Dt}} k = -\nabla \cdot \bar{T} + G - \varepsilon$$

transporte  
 generación  
 disipación

$$\text{generación de TKE } G = -\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{S}_{ij}$$

$$\text{dissipación de TKE} \quad \varepsilon = 2 \sqrt{\overline{S_{ij}^T S_{ij}}}$$

$$\text{transporte} \quad \rho T_i = \frac{1}{2} \rho \overline{u_i^T u_i u_j^T} + \overline{\rho u_i^T} - 2 \rho \nu \overline{u_i^T S_{ij}}$$

Cuando la turbulencia es estadísticamente homogénea,  $\nabla \cdot (\vec{v}') \rightarrow 0$   
quedan  $G = \varepsilon$ : balance entre generación y dissipación

$$\text{En la cascada de energía } G = \Pi = \varepsilon$$

ingresa  $\overbrace{\text{TKE}}^{\text{fluido de energía en la cascada}}$   $\overbrace{\text{disipación a escalas pequeñas}}$   
 $\overbrace{\text{disipación a escalas grandes}}$

$$\text{Vemos que } \Pi \sim \frac{u^3}{l} \Rightarrow [G \approx \Pi \approx \varepsilon] \sim u^3/l$$

Esto no es cierto para otros flujos ...

Nota: Hay otras versiones de las ecs. de MKE y TKE.

1)  $T_{ij}^k$  pueden ser definidos ligeramente diferentes

$$\text{Davidson: } T_{ij}^k = -\rho \overline{u_i^T u_j^T}, \text{ Pope: } \overline{u_i^T u_j^T}$$

2) Se consideran otras fuerzas ( $\vec{g}$ )  $\rightarrow$  Aproximación de Boussinesq

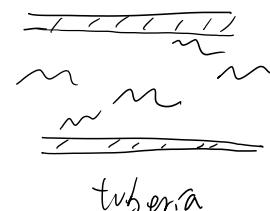
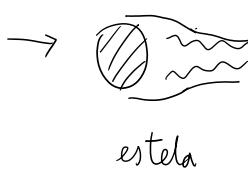
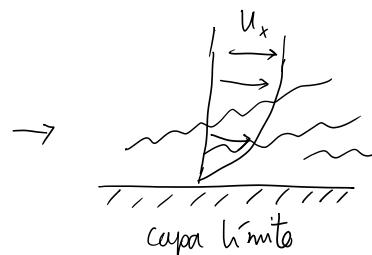
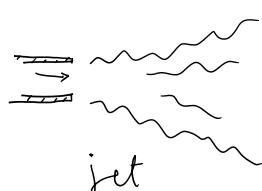
para N-S  $\rightarrow$  ecs. TKE y MKE  
con un término extra  $\rightarrow \underline{g \overline{w^T T}}$

producción/destrucción de e. interna o buoyancy

Shear flows  $\rightarrow$  Flujos con esfuerzos de corte de viento  $\sim \frac{\partial u}{\partial x}$

- Predominantemente 1D:

estelas (waves), capa límite (boundary layer), jets  
fluido en tuberías



- hay una interfaz marcada entre zona laminar y zona turbulenta
- vorticidad se genera en una pared y luego evoluciona

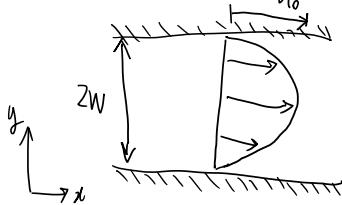
Preguntas:

- A qué tasa se dispersa la vorticidad?
- ¿Cuál es la intensidad de la turbulencia en diferentes lugares?
- ¿Cuál es la distribución espacial de  $\vec{u}$ ?

Efectos de pared  $\rightarrow$  flujo interno (tubería)  $\rightarrow$  flujo externo (capa límite)

Pantamos analizando un caso de flujo interno

Flujo de canal



Flujo entre placas paralelas, con turbulencia completamente desarrollada

$$\bar{u} = (\bar{u}_x(y), 0, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \bar{u}_x \bar{u}_y \right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial}{\partial y} \left( - \bar{u}_y \bar{u}_y \right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$\text{Sea } \bar{P}_w = \bar{p} + \rho \underbrace{\bar{u}_y \bar{u}_y^+}_{\text{independiente de } x} \Rightarrow \bar{P}_w(x)$$

$$\bar{u}'(y=0) = 0 \Rightarrow \bar{u}_y(y=0) = 0$$

En la pared  $\bar{u}'(y=0) = 0 \Rightarrow \bar{P}_w = \bar{p} (y=0)$  : presión de pared

$$\text{Rescribimos} \quad \underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \bar{u}_x \bar{u}_y^+ \right)}_{\neq f(x)} = \frac{d \bar{p}_w}{dx} \quad \gamma \neq f(y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dy} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \bar{u}_x \bar{u}_y^+ \right)}_{-K} = -K \quad : \text{Nota: } \rho k \sim \text{gradiente de presión en la tubería}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xy}^R \sim \alpha y + \beta \quad \text{lineal c/r a } y$$

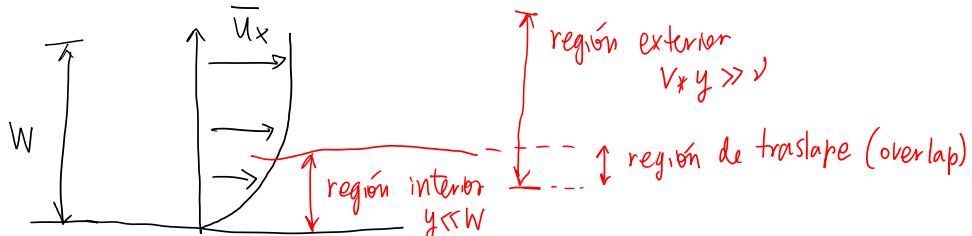
usando simetría en  $y=W$

$$\tau = \bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^R = \rho K (W-y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{W}\right)$$

Notación:  $V_*^2 = \frac{\tau_w}{\rho}$  =  $\frac{K}{W}$   $V_*$ : velocidad de fricción  
 tambien  $U_*$

Luego  $\frac{\tau}{\rho} = \sqrt{\frac{d\bar{u}_x}{dy}} - \overline{U_x' U_y'} = V_*^2 - Ky$   
 no lo tenemos

Cómo seguir? → Análisis dimensional en diferentes zonas



En la región interior (cerca de la pared)  $y \ll W$

$$\tau \approx \text{cte} = \tau_w$$

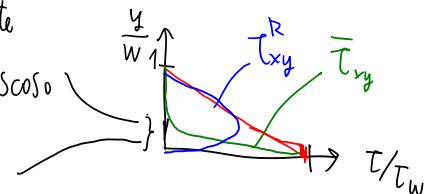
$$\Rightarrow \frac{\tau}{\rho} = \sqrt{\frac{d\bar{u}_x}{dy}} - \overline{U_x' U_y'} = V_*^2, \frac{y}{W} \ll 1$$

En la pared  $\underline{U}' \rightarrow 0$ : laminar!  $\rightarrow \tau = \text{cte}$

$\bar{\tau}_{xy}$  y  $\bar{\tau}_{xy}^R$  varían rápidamente

$y=0$ :  $\tau$  es puramente viscoso

$y > 0$ :  $\tau = \bar{\tau}_{xy}^R$



En la región exterior: el esfuerzo viscoso es despreciable

$$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{U_x' U_y'} = V_*^2 - Ky, \underbrace{\frac{V_* y}{\nu}}_{\text{distancia normalizada } y^+} \gg 1$$

$y^+$

Luego,

R. Interior:  $\bar{u}_x(V_*, y, \nu)$ ,  $y/W \ll 1$ , <sup>supuesto:</sup>  $W$  no es tan importante

R. Exterior:  $\bar{u}_0 - \bar{u}_x = \Delta \bar{u}_x(y, W, V_*)$ ,  $y^+ \gg 1$

Resumiendo

$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = f(y^+) \quad , \quad \eta \ll 1 \quad \begin{cases} \text{ley de la pared} \\ y/W \end{cases}$$

$$\frac{\Delta \bar{U}_x}{V_*} = g(\eta) \quad , \quad y^+ > 1 \quad \begin{cases} \text{ley de "defecto"} \\ \text{de velocidad} \\ (\text{velocity defect law}) \end{cases}$$

Si  $Re = \frac{W V_*}{\nu} \gg 1 \rightarrow$  hay una región de traslape / overlap

- subcapa inercial ( $\eta$  es pequeño,  $y^+$  es grande)
- Ambas ecuaciones son válidas

$$y \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} = V_* y^+ f'(y^+) = -V_* \eta g'(\eta)$$

depende de  $y^+$       depende de  $\eta$ ,  $\eta, y^+$  son independientes

$$\Rightarrow y^+ f'(y^+) = -\eta g'(\eta) = \text{cte} = \frac{1}{K}$$

Integrando,

$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad , \quad \frac{U_0 - \bar{U}_x}{V_*} = \frac{-1}{K} \ln \eta + B$$

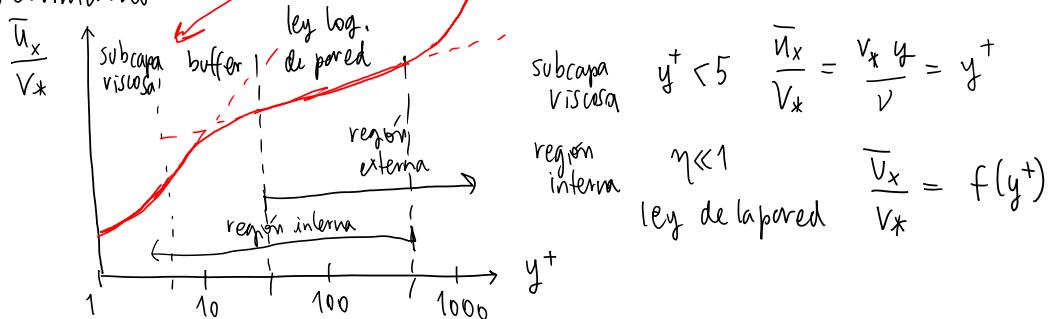
Famosa ley logarítmica de la pared,  $K$ : constante de von Kármán

experimentalmente  $K \sim 0.38 - 0.43$   
usualmente  $K = 0.4$

Con  $A = 5.5$  y  $B = 1 \rightarrow$  buen fit para  $y^+ > 60$ ,  $\eta < 0.2$

En  $y^+ < 5$  es parcialmente laminar y  $\frac{\bar{U}_x}{V_*} \sim \frac{V_* y}{\nu}$

Resumiendo



reg.  
traslape

$$y^+ \gg 1, \eta < 1 \quad \frac{\bar{U}_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln y^+ + A$$

ley log. de la parada

reg.  
exterior

$$y^+ \gg 1 \quad \frac{\bar{U}_o - \bar{U}_x}{V_*} = g(\eta)$$

ley del defecto de  
la velocidad

también se escribe como  $\frac{\bar{U}_o - \bar{U}_x}{V_*} = -\frac{1}{k} \ln \eta + B - \Pi_w(\eta)$

$\Pi_w(\eta)$  : función estela (wake function)  $\rightarrow$  Tenneker y Lumley, 1972  
Cap 4



## Comentario sobre efectos de pared

- Región interior: supuesto clave: independencia de  $W$   
Esto no es 100% cierto pues las escalas grandes inciden en las escalas pequeñas. ¿Por qué el modelo de ley de la pared funciona bien?
- Escalas más grandes ~ tiempos mayores ~ "son procesos más lentos"  
Estadísticamente tienen un efecto menor en  $\bar{t}_x^*$  → las escalas pequeñas evolucionan más rápido cerca de la pared.
- Idea desarrollada por Townsend, 1976: "Inactive motion"  
lento movimiento de eddies grandes sobre la pared

Si se promedia sobre un tiempo  $T^* \sim$  escala de tiempo de los eddies grandes, llega a una ecuación un poco diferente

$$\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} = \frac{V_0}{k g} \quad \text{pero } \bar{t}_x^* = T_0 + \bar{t}_x^1 = T_0 \left( 1 + \frac{\bar{U}_x^{12}}{\bar{U}_x^{12}} + \frac{\bar{U}_z^{12}}{2\bar{U}_z^{12}} + o(\bar{U}^{13}) \right) \\ \text{aumentan en } \bar{t}_x^1$$

⇒ el valor medido de  $V_* \neq V_0$ :  $V_* = \gamma V_0$

$$K_{\text{eff}} = \gamma K$$

la medición de  $K$  es siempre un poco mayor a lo esperado

Dado que la ley de pared no es perfecta (aunque funciona muy bien), hay otra alternativa?

- Ley de potencia (power law)  $\frac{\bar{U}_x}{V_*} = a(y^+)^n$   
a y n dependen de  $Re$ . Por esto, se prefiere el uso de la ley de pared.

Pared rugosa?



$\hat{k}$ : rugosidad rms (root mean square)  $\sim SD(k)$

si  $\hat{k} > \text{subcapa viscosa } (y^+ < 5) \rightarrow$  es importante!

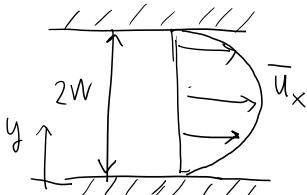
$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = f\left(\frac{y}{\hat{k}}, \frac{V_* y}{\nu}\right) \quad , \quad \frac{y}{W} \ll 1$$

para  $\frac{V_* k}{\nu}$  grandes, efectos viscosos no importan  
 $\Rightarrow$  solo  $\frac{\bar{U}_x}{V_*} = f\left(\frac{y}{k}\right)$

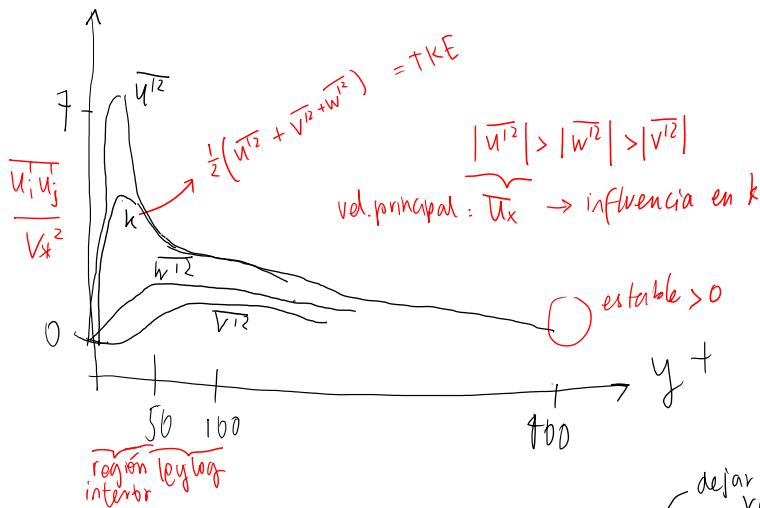
Ley log. de pared modificada

$$\frac{\bar{U}_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{k} + \text{cte} = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right)$$

Flujo de canal



estadísticas dependen de  $y$



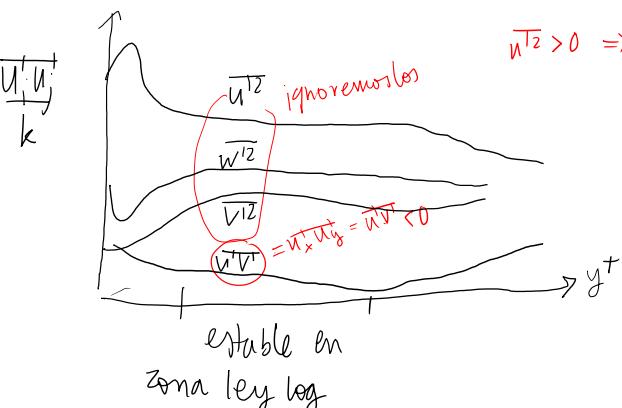
Nota: teniendo datos

3D  $u, v, w(x, y, z, t) \rightarrow$

cómo se calcula?

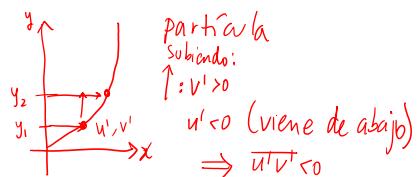
$u(x, y, z, t) \rightarrow \bar{u} \rightarrow u^i \rightarrow u^{i2} \rightarrow \bar{u}^{i2}$

operaciones promedio  $\rightarrow t \rightarrow x-z \rightarrow \bar{u}(y)$



$$\bar{u}^{i2} > 0 \Rightarrow k > 0$$

por qué  $\bar{u}^{i1} < 0$ ?



Existe relación entre  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  y  $\bar{u}^{i1}$

Gradiente difusivo:  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -K \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}$  (k theory)

## Características

$\overline{U_x^{1/2}}$  es máximo para  $y^+ \sim 15$

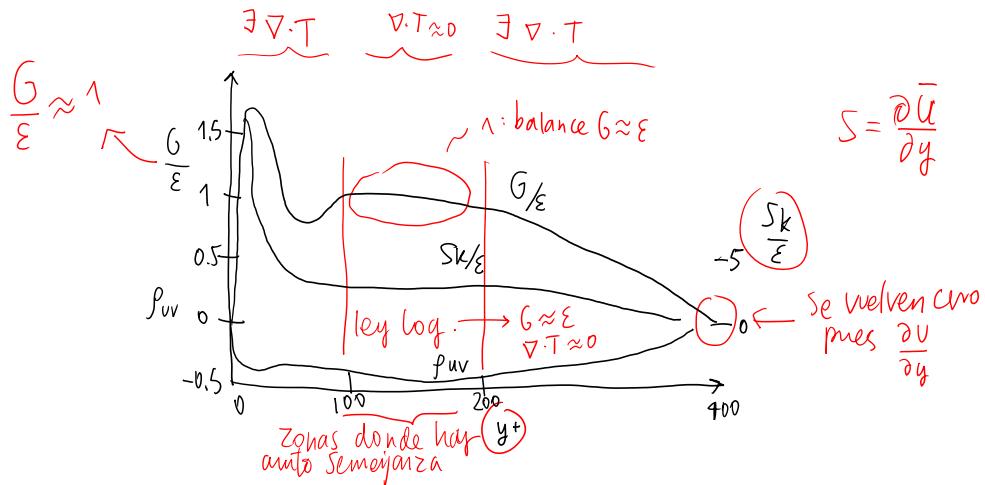
$y^+ \sim 60$  las estadísticas son más constantes

$$\frac{\overline{U_x^{1/2}}}{k} \sim 1.1, \quad \frac{\overline{U_y^{1/2}}}{k} \sim 0.3, \quad \frac{\overline{U_z^{1/2}}}{k} \sim 0.6, \quad \frac{T_{xy}^R}{k} \sim 0.28$$

En la zona de traspaso/overlap donde usamos la ley log. de pared, también se puede usar la hipótesis del eddy adjunto (Turbogend)

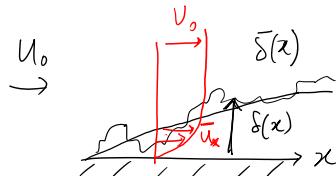
$$\frac{\overline{U_i^{1/2}}}{V_*^2} = C_i + d_i \ln\left(\frac{y}{y_0}\right): \text{explica mejor esa región donde la razón de } \frac{\overline{U_i^{1/2}}}{k} \text{ no es constante.}$$

Qué pasa con TKE?



cálculo :  $G, \epsilon, S \rightarrow \text{promedio tiene que ser indep. de } y$

## Capa límite turbulenta



Existe una zona cerca de la pared donde el flujo no siente los detalles del flujo exterior  $\rightarrow$  propiedades universales:

$$V_k, y^+, \nu (\hat{k})$$

Esperamos encontrar una ley log. y subcapa viscosa al lado de cualquier pared con un flujo con  $\frac{\partial U}{\partial y}$

Para ello:  $Re \gg 1$ ,  $\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \bar{U}_x \bar{U}_y}{\partial x}$  pequeños

Es exactamente lo que ocurre.

turbina ( $R$ )

capa límite turbulenta

región interna

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = f(y^+), \quad y \ll R$$

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = f(y^+) \quad , \quad y \ll \delta$$

región externa

$$\frac{\bar{U}_0 - \bar{U}_x}{V_k} = g\left(\frac{y}{R}\right), \quad y^+ \gg 1$$

$$\frac{\Delta U_x}{V_k} = g\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad y^+ \gg 1$$

región traslape

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad y^+ \gg 1, \quad y \ll R$$

$$\frac{\bar{U}_x}{V_k} = \frac{1}{K} \ln y^+ + A \quad y^+ \gg 1, \quad y \ll \delta$$

$\delta$ : espesor de la capa límite : (cuál?)

vel exterior

$$\delta(x) = y \text{ tal que } \bar{U}_x(x, y) = 0.99 U_\infty(x)$$

No es la mejor definición ~ fluctuaciones

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{U}_x}{U_\infty}\right) dy : \text{espesor de desplazamiento}$$

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{U}_x}{U_\infty} \left(1 - \frac{\bar{U}_x}{U_\infty}\right) dy : \text{espesor de momentum}$$

Existen por lo tanto varias definiciones de  $Re$  en base a diferentes escalas de longitud:  $Re_x, Re_\delta, Re_{\delta^*}, Re_\theta$

la ley log aplica para  $y^+ > 60$ ,  $\frac{y}{\delta} < 0.2$

"Ley universal" cerca de la pared, pero el flujo fuera de la capa límite no es universal:  $\nabla p$  puede variar

$$N-S \rightarrow \bar{p} + \rho \bar{u}_y^2 = \bar{p}_o(x)$$

en  $y=0 \rightarrow \bar{u}_y^2 = 0 \Rightarrow p_o(x) = p_w(x)$

ec. capa límite turbulenta

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{u}_x \bar{u}_y}{\partial y} - \frac{l}{f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (*)$$

Integrando (\*)  $\rightarrow$  ec. momentum integral de von Kármán

caso  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  : zero-pressure gradient (ZPG)

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \left( \rho \bar{U}_o^2 \theta \right) = \rho \bar{U}_o^2 \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{total } \tau = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \rho \bar{u}_x \bar{u}_y$$

aumento/disminución del "cambio" de momentum  
por las fuerzas de pared