

第二章 工作物质的增益特性

- 第一节 工作物质的光谱线型
- 第二节 工作物质的增益特性
- 第三节 增益系数与受激辐射截面的关系

第一节 工作物质的光谱线型

- 一、工作物质自发辐射光谱线加宽
- 及加宽谱线线型函数
- 二、自然加宽(或寿命加宽)
- 三、碰撞(或压力)加宽
- 四、多普勒加宽
- 五、实际加宽和综合加宽

一、工作物质自发辐射光谱线加宽 及加宽谱线线型函数

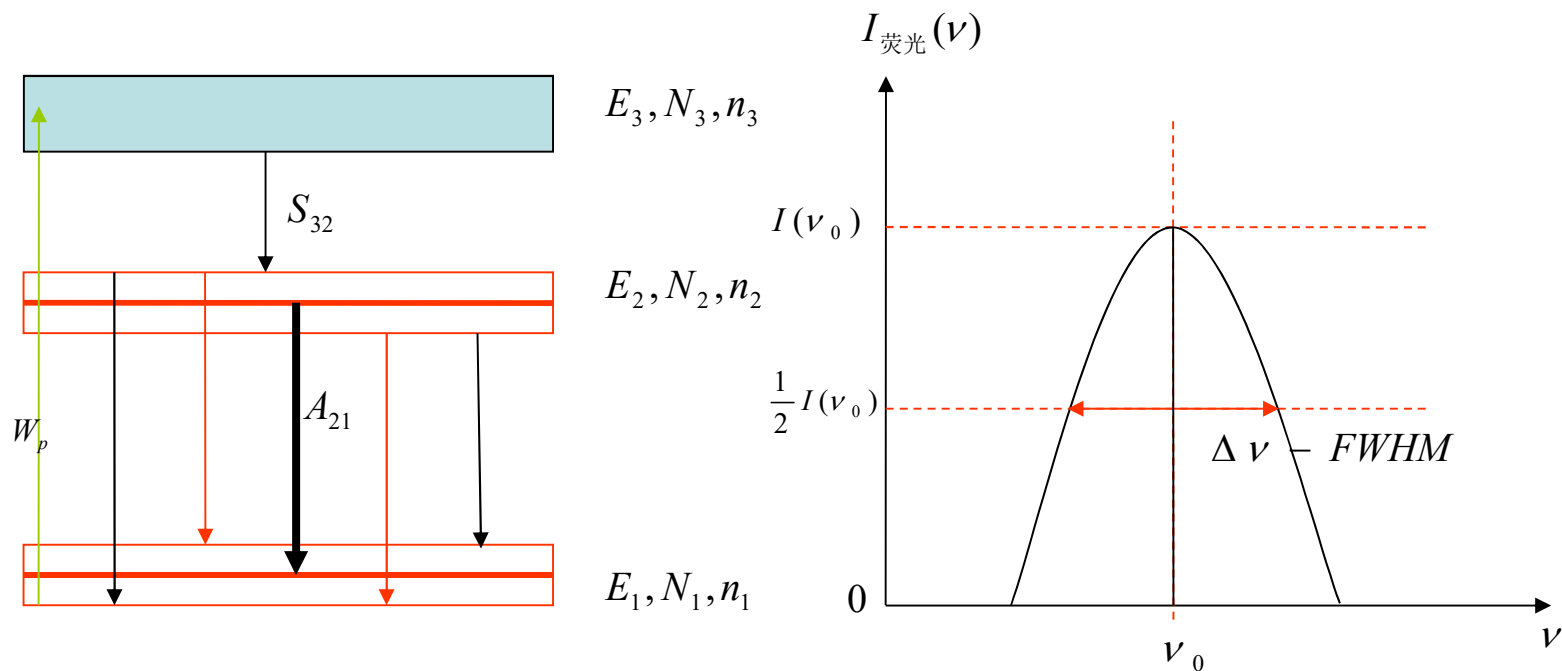
确定激光器可输出光束的频率范围和增益特性。

实际上粒子的自发辐射不可能是理想的单一频率，总是有一定宽度的。

自发辐射是分布在对应的跃迁能级玻尔频率： $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$ 为中心的一定频率范围之内。

能级寿命 \rightarrow 能级宽度 \rightarrow 谱线加宽 \rightarrow 频率宽度

$\Delta \nu$: 线宽, $FWHM$ —— 半高全宽,



粒子的运动、粒子间相互作用以及粒子周边环境的影响，可导致谱线进一步加宽。

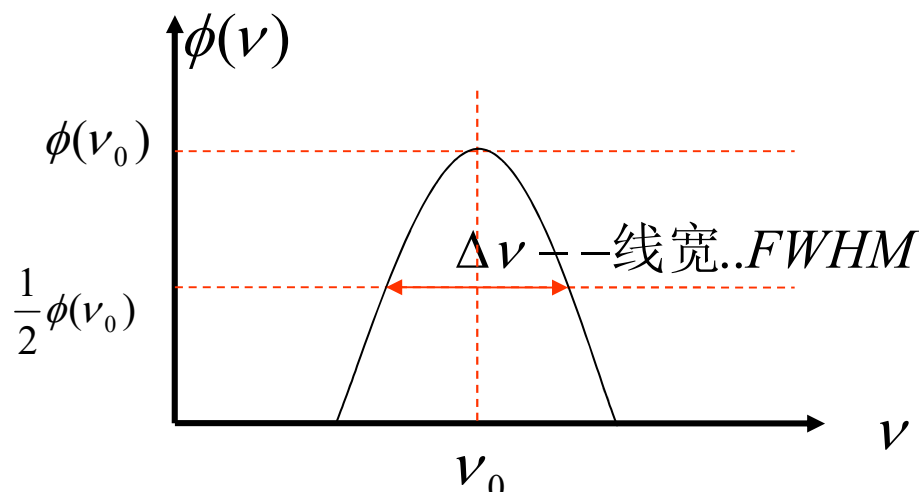
若自发辐射总光强为 I_0 ,则对应于频率分布在 $\nu \sim \nu + \Delta\nu$ 范围内光强为 $I(\nu)d\nu$;

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) d\nu; \dots I(\nu) = I_0 \phi(\nu); \dots \phi(\nu) = \frac{I(\nu)}{I_0}$$

$\phi(\nu)$ 给出了自发辐射光强随频率的分布 ----- 谱线的线型函数

$$\text{归一化条件: } I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 \phi(\nu) d\nu = I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu) d\nu$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu) d\nu = 1$$



1、考虑谱线加宽对辐射几率的修正

$$I_0 \propto A_{21} N_2 h \nu,$$

若以 $A_{21}(\nu)$ 表示分配在频率为 ν 的自发辐射几率，则：

$$I(\nu) = A_{21}(\nu) N_2 h \nu / \Delta S,$$

$$\phi(\nu) = \frac{I(\nu)}{I_0} = \frac{A_{21}(\nu)}{A_{21}}, \Rightarrow A_{21}(\nu) = A_{21} \phi(\nu);$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = D(\nu) h \nu,$$

$$B_{21} \text{ 亦作相应的修正, } B_{21}(\nu) = B_{21} \phi(\nu); \Rightarrow W_{21}(\nu) = W_{21} \phi(\nu),$$

$$B_{12} \text{ 亦作相应的修正 } B_{12}(\nu) = B_{12} \phi(\nu); \Rightarrow W_{12}(\nu) = W_{12} \phi(\nu);$$

2、两类不同的谱线加宽 机制

单位截面上, $I(\nu) = I_0\phi(\nu)$ 的来源:

a、 $A_{21}(\nu) = A_{21}\phi(\nu), \Rightarrow I(\nu) = I_0\phi(\nu) = A_{21}\phi(\nu) \cdot N_2 h\nu;$

对应于工作物质的强均匀加宽;

b、 $N_2(\nu) = N_2\phi(\nu)$,即不同 N_2 的粒子对不同的 ν 有贡献,
即: 将上能级粒子分类,

$$\Rightarrow I(\nu) = A_{21} \cdot N_2\phi(\nu) \cdot h\nu; = A_{21} \cdot N_2(\nu) \cdot h\nu,$$

对应于工作物质的强非均匀加宽;

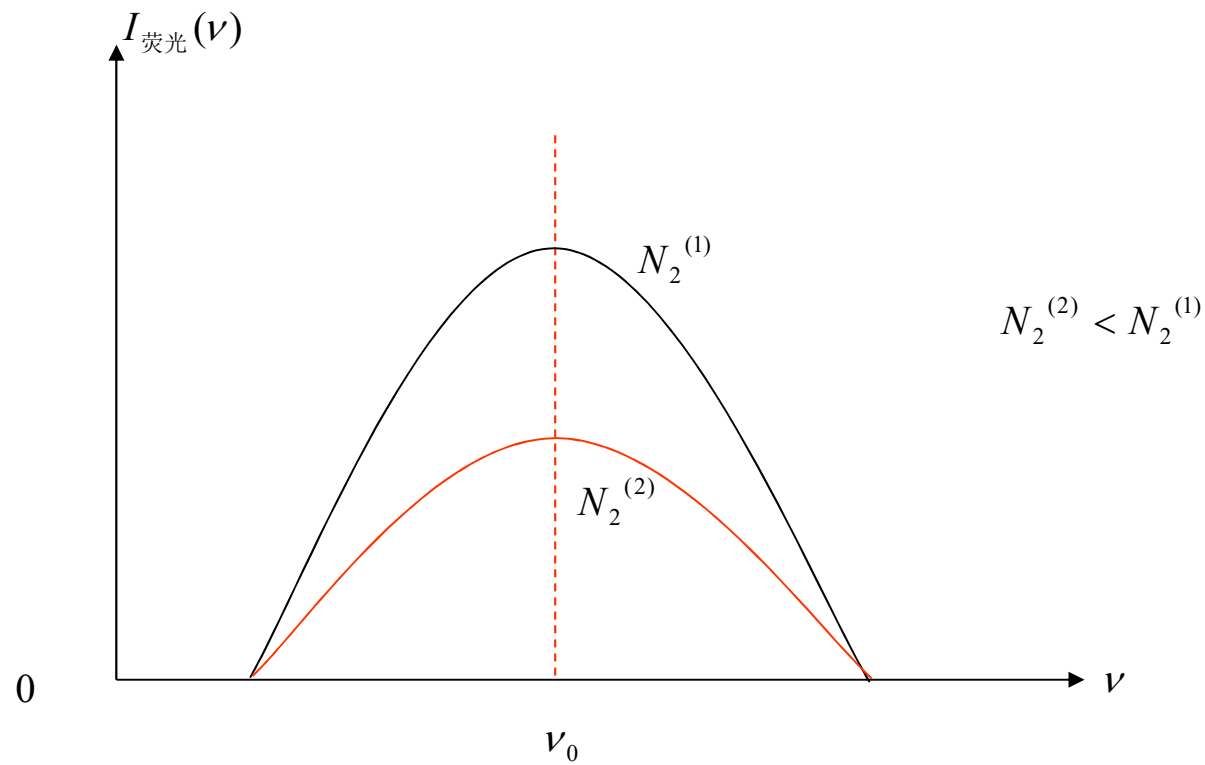
c、 $A_{21}(\nu)$, $N_2(\nu)$ 都有一个分布, 则:

$$I(\nu) = A_{21}(\nu) \cdot N_2(\nu) \cdot h\nu;$$

对应于工作物质的综合加宽;

*均匀加宽（一致加宽），对应于 $A_{21}(\nu)$ 分布

其特点：（1）、每一个 N_2 粒子，对于谱线范围内的 ν 都有贡献；
（2）、每一个 N_2 粒子发射的谱线，都具有相同的线型，
当 N_2 下降，整个谱线都要下降。

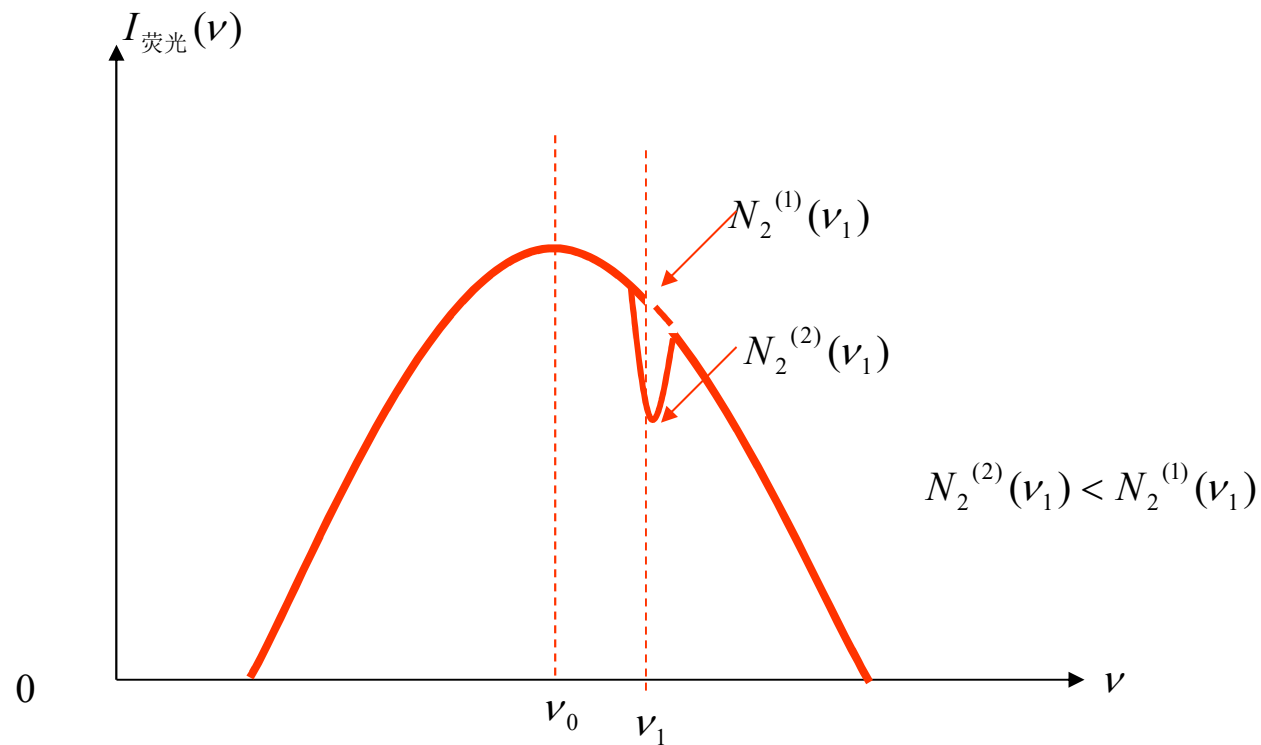


*非均匀加宽（非一致加宽），对应于 $N_2(\nu)$ 分布

不同的 N_2 粒子向相应的不同频率 发光

其特点：（1）、某一个 N_2 粒子，只对于谱线范围内的
某个相应频率 ν_1 有贡献，而对于其它频率 ν 无贡献；

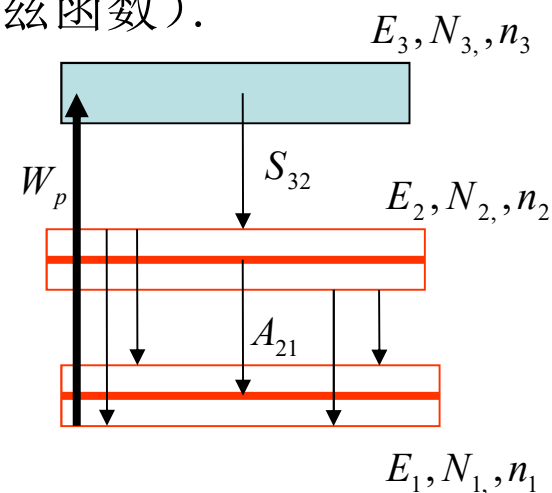
（2）、当 N_2 下降时，在谱线宽度内，只对应于某个相应频率 ν_1 处的
谱线强度要下降，而不会使整个谱线下降。--此为“频率烧孔”现象。



3、谱线的自然宽度（自然加宽）

纯自发辐射引起的谱线加宽---自然加宽。即在不考虑粒子运动、粒子间相互作用、粒子周围环境的影响，粒子处于孤立静止状态下的自发辐射几率决定的谱线宽度。

$\tau_s = \frac{1}{A_{21}}$, 属于均匀加宽，线型函数为 *Lorentz*（洛伦兹函数）。



用爱因斯坦唯象方法来处理。

不考虑 $N_2(t)$ 与 ν 的关系。

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -N_2(t)A_{21}, \Rightarrow N_2(t) = N_2(0)e^{-A_{21}t} = N_2(0)e^{-t/\tau_s},$$

$$\text{指数衰减。} \Rightarrow I(t) \propto h\nu_0 N_2(t) A_{21} = h\nu_0 N_2(0) A_{21} e^{-t/\tau_s},$$

$$\text{强度衰减 } \frac{1}{\tau_s} \Rightarrow \text{振幅衰减 } \frac{1}{2\tau_s}, \quad (I \propto |E \cdot E^*| = |E(t)|^2)$$

自发辐射光场为振幅随时间指数衰减的阻尼简谐波：

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{1}{2\tau_s}t} e^{i2\pi\nu_0 t}, \dots \text{其傅里叶变换为频谱:}$$

$$E(\nu) = F(E(t)) = \int_0^{+\infty} E(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$$= E_0 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\tau_s}t} e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = E_0 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2\tau_s}) + i2\pi(\nu_0 - \nu)},$$

$$\Rightarrow \text{光谱 } I(\nu) \propto |E(\nu)|^2 = |F(E(t))|^2 = |E_0|^2 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2\tau_s})^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2},$$

$$\text{由 } \phi(\nu) = \frac{I(\nu)}{I_0} \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu) d\nu = 1$$

$$\Rightarrow \phi_N(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\tau_s} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2\tau_s})^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}, \quad \text{或:} \quad \phi_N(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{\Delta\nu_N}{2}}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta\nu_N}{2})^2};$$

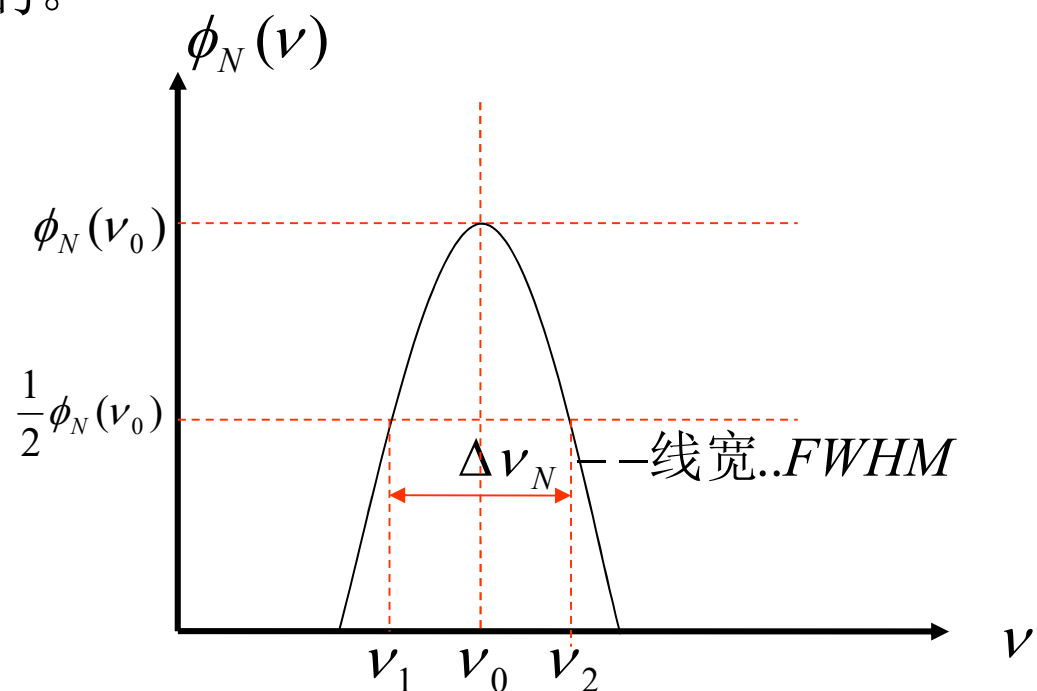
$$\text{其中: 线宽 } \Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi\tau_s}.$$

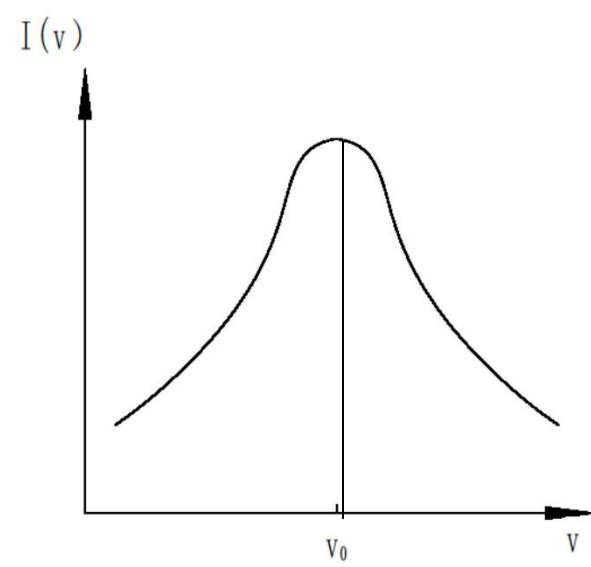
自然加宽线宽唯一地由粒子处于激发态 E_2 的平均纯自发辐射寿命 τ_s 所决定。

所有的工作物质中都存在自然加宽。--

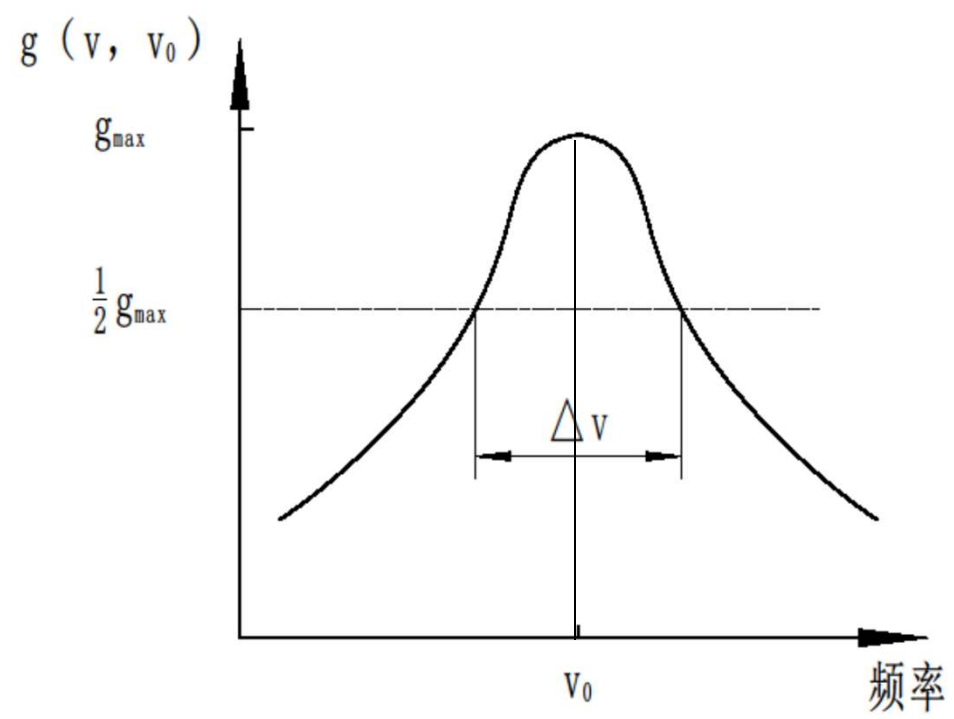
其谱线的线型函数为洛伦兹函数。

自然宽度 $\Delta\nu_N$ 是很窄的。





自发辐射的频率分布



线型函数和线宽

4、气体工作物质的谱线加宽机制

(1)、碰撞加宽（压力加宽）

碰撞 \Rightarrow 粒子能量状态改变 \Rightarrow 缩短粒子处于激发态 E_2 的平均寿命 τ
 \Rightarrow 光谱线进一步加宽。

每个粒子的地位等同 \Rightarrow 均匀加宽，

其谱线的线型函数仍然可以用洛伦兹函数来表示。

设发光粒子与其它粒子发生碰撞的平均时间间隔为 τ_c ，则：

$$\phi_c(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{\Delta\nu_c}{2}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_c}{2}\right)^2}; \text{其中: 线宽 } \Delta\nu_c = \frac{1}{2\pi\tau_c}.$$

τ_c ：与气体压强、温度、粒子间的碰撞截面等参数有关。

实验测定： $\Delta\nu_c = \alpha \cdot P$,

P ——气体压强， α ——压力加宽系数，由工作物质气体种类而定。

(2)、多普勒加宽 (Doppler) (来自光学多普勒频移)

a、光学多普勒效应



光波多普勒效应示意图

$$\nu'_0 = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_z}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}}}, \text{ 当 } \frac{v_z}{c} \ll 1, \text{ 取一级近似,}$$

$$\Rightarrow \nu'_0 = \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \text{ 或写成 } \nu_z = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}$$

实验中所记录到的光谱线实际上是气体介质中具有不同热运动速度的大量激发态粒子自发辐射所共同贡献的结果。

运动粒子较静止粒子发出的光波的多普勒频移：

$$\nu_0' - \nu_0 = \frac{v_z}{c} \cdot \nu_0, \dots \nu_0' - \text{表观中心频率。}$$

不同粒子热运动速度分量 v_z 不同, 产生的频移也不同。

b、粒子数按中心频率的分布

E_2 能级上粒子数密度 n_2 (总数)，遵从麦克斯韦统计分布规律：

在热平衡下，在温度 T ，单位体积内具有 z 方向速度

$v_z \rightarrow v_z + dv_z$ 的粒子数：

$$dn_2(v_z) = n_2(v_z)dv_z$$

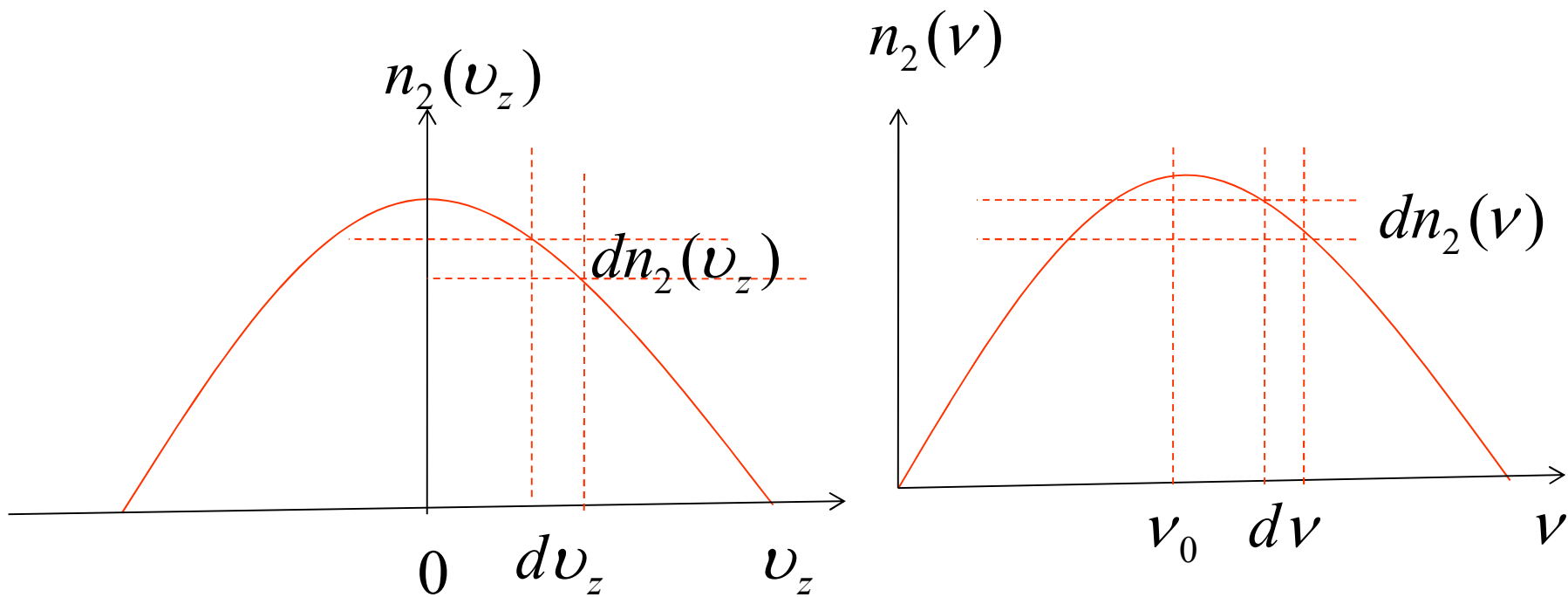
$$= n_2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z,$$

m :工作粒子质量； $k = 1.38 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ ：玻尔兹曼常数。

$$\Rightarrow \frac{n_2(v_z)}{n_2} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

$$v_z = \frac{v_0' - v_0}{v_0} \cdot c = \frac{v - v_0}{v_0} \cdot c$$

$$dv_z = \frac{c}{v_0} dv$$



$$dn_2(\nu) = n_2(\nu) d\nu = n_2(\nu_z) d\nu_z$$

$$= n_2(\nu_z) \frac{c}{\nu_0} d\nu, \text{ 利用 } (\nu_z = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \cdot c)$$

$$\Rightarrow n_2(\nu) = n_2(\nu_z) \frac{c}{\nu_0}$$

$$= n_2 \cdot \frac{c}{\nu_0} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{n_2(\nu)}{n_2} = \frac{c}{\nu_0} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}}$$

c、多普勒加宽

粒子自 E_2 能级跃迁,自发辐射某一表观频率 ν 的光功率正比于 E_2 能级上对该频率有贡献的粒子数.

$$\Rightarrow \phi_D(\nu) d\nu = \frac{I(\nu)}{I_0} d\nu = \frac{n_2(\nu)}{n_2} d\nu = \frac{n_2(\nu_z)}{n_2} d\nu_z$$

$$= \frac{c}{\nu_0} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} d\nu$$

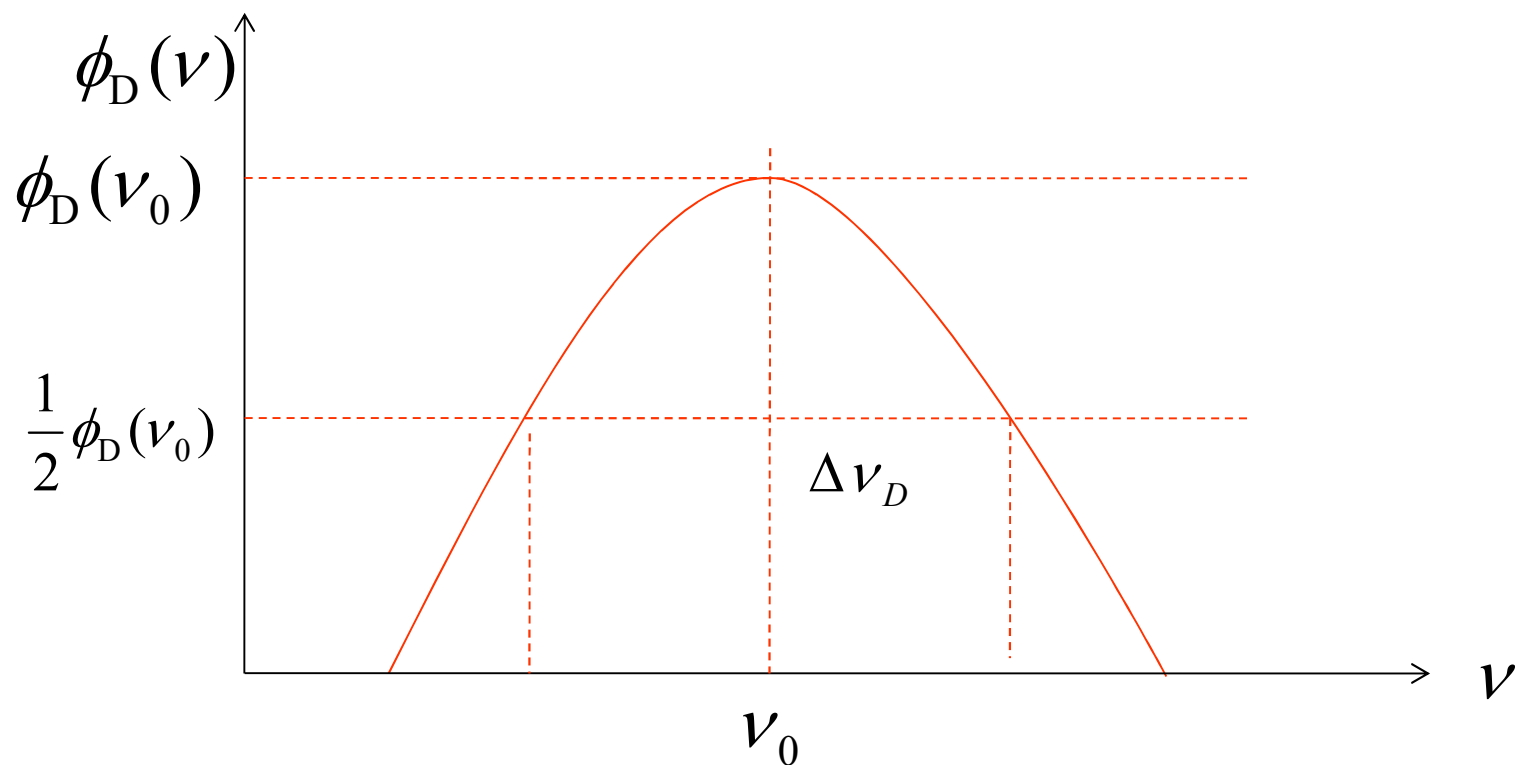
$$\Rightarrow \phi_D(\nu) = \frac{c}{\nu_0} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}}$$

高斯函数 (*gauss*) 线型, 属非均匀加宽

利用归一化条件和线宽的定义，

$$\Rightarrow \phi_D(\nu) = (\pi \ln 2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\pi \Delta \nu_D} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\frac{\Delta \nu_D}{2}} \right)^2},$$

$$\text{线宽 } \Delta \nu_D = 2\nu_0 \left(\frac{2kT}{mc^2} \cdot \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$



（3）、实际气体工作物质谱线加宽

对于实际气体工作物质而言，上述三种谱线加宽机制同时存在，属综合加宽。从理论上可以近似用洛仑兹函数和高斯函数的卷积积分来表示。

通常需要通过实验测量荧光光谱来确定其线型。

*固体工作物质谱线加宽机制：

(1)、**Stark**加宽（斯塔克加宽）

激活离子在其周围基质晶体 晶格场的作用下，其发光频率将发生改变--- **Stark**效应。

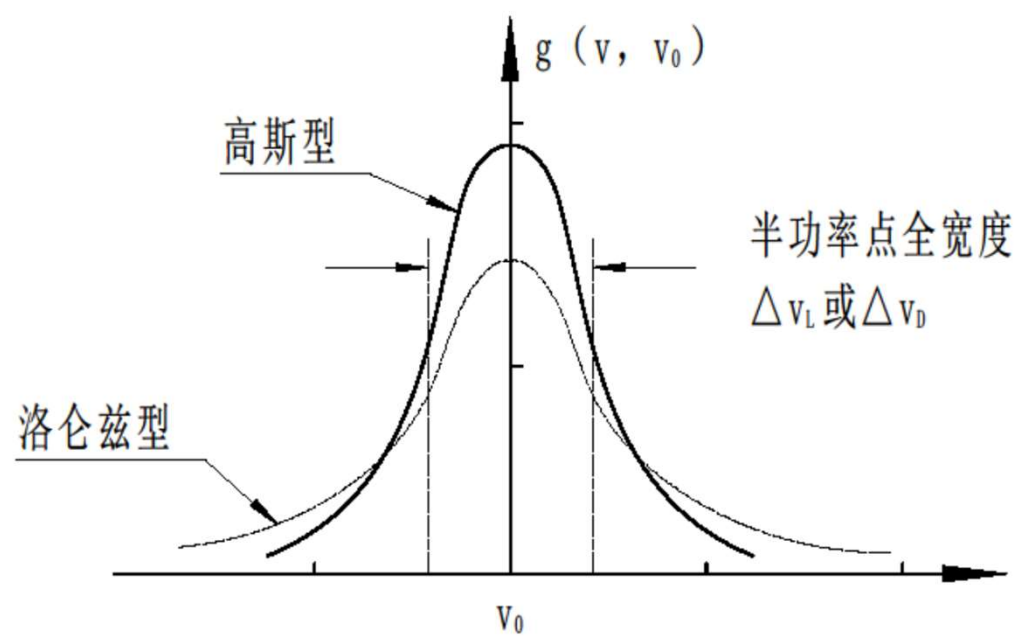
由于基质晶体 晶格热振动影响，离子自发辐射谱线将加宽—**Stark**加宽。

在基质晶体各处温度 T 相同的情况下，离子受到基质晶体晶格场的作用都是相同的，则谱线为均匀加宽，其线型函数可以近似用洛仑兹函数来表示。严格来说，其线型函数需通过实验来测定。

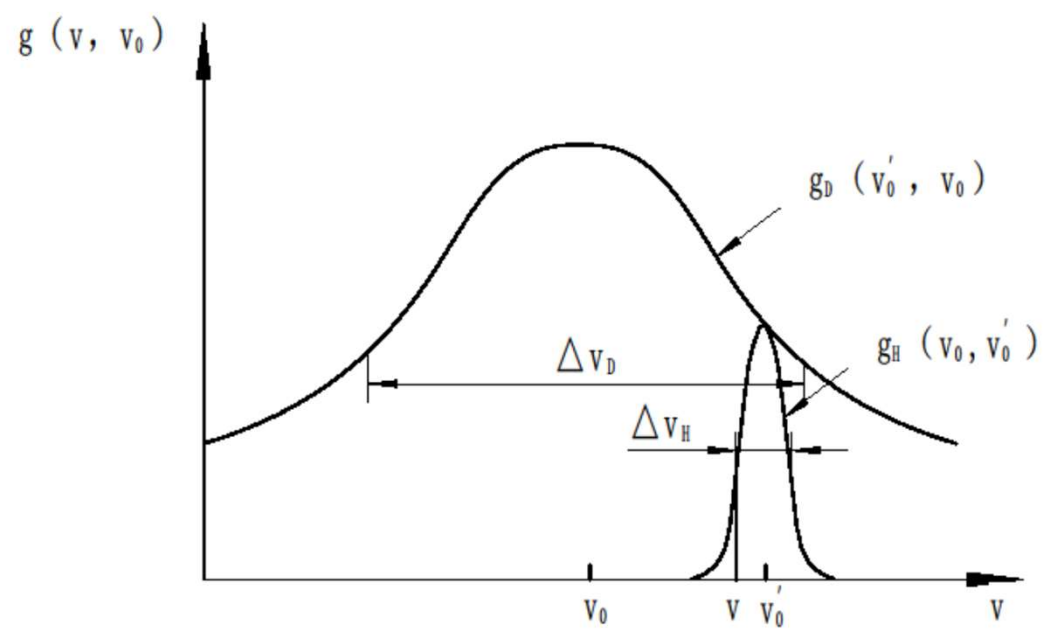
(2)、固体中不均匀性引起的加宽（掺杂不均匀加宽）

缺陷、掺杂不均等。发光离子在基质中掺入的位置不同，则受到晶格场的作用不同，而使谱线加宽。属非均匀加宽。

线型函数需通过实验来测定。



具有相同线宽的高斯线型函数与洛伦兹线型函数的比较



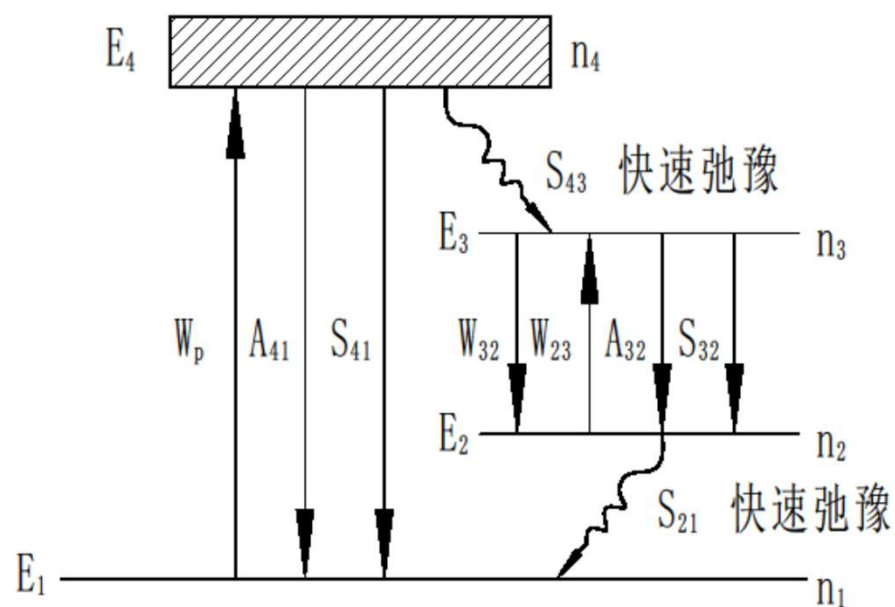
强非均匀加宽谱线示意图

- 第二节 工作物质的增益特性

- 一、增益系数表达式
- 二、小信号增益特性
- 三、大信号增益特性—增益饱和特性

一、增益系数表达式

以四能级系统工作物质为例推导、说明



四能级系统能级示意图

$$G(I, \nu, z) = \frac{dI(\nu)}{dz} \cdot \frac{1}{I(\nu)},$$

小信号情况： $I(\nu, z) = I_0 e^{G^0(\nu) \cdot z}$,

增益系数表达式：

$$G(\nu, I) = \frac{A_{32} \nu^2}{8\pi \nu_0^2} \cdot \phi(\nu, \nu_0) \cdot \Delta n(I, \nu)$$

$$= \sigma_{32}(\nu, \nu_0) \cdot \Delta n(I, \nu)$$

光子数密度 φ ,..粒子数密度 n_i ...粒子反转数密度 Δn ,
单位时间、单位体积光子数密度的变化:

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_{32}(\nu) \cdot \rho(\nu) \cdot n_3 - B_{23}(\nu) \cdot \rho(\nu) \cdot n_2 + A_{32} \cdot n_3.$$

利用 $\frac{g_2 B_{23}}{g_3 B_{32}} = 1$,

考虑起增益作用时, 可略去自发辐射的贡献。

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_{32}(\nu) \cdot \rho(\nu) \left(n_3 - \frac{g_3}{g_2} n_2 \right) = B_{32}(\nu) \cdot \rho(\nu) \cdot \Delta n,$$

$$\text{光强 } I = \varphi \cdot h \nu \cdot \nu ,$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dz} = \frac{dI}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{dI}{dt} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot h \nu$$

$$\Rightarrow G(\nu, I, z) = \frac{dI}{dz} \cdot \frac{1}{I} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot h \nu \cdot \frac{1}{\varphi \cdot h \nu \cdot \nu},$$

$$= \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\nu} = B_{32}(\nu) \cdot \rho(\nu) \cdot \Delta n \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\nu},$$

$$\rho(\nu) = \varphi \cdot h \nu ,$$

$$\Rightarrow G(\nu, I, z) = B_{32}(\nu) \cdot \Delta n \cdot \frac{h \nu}{\nu}$$

$$= B_{32} \cdot \phi(\nu) \cdot \Delta n \cdot \frac{h \nu}{\nu}, \text{ 利用: } \frac{A_{32}}{B_{32}} = \frac{8 \pi h \nu^3}{\nu^3},$$

$$\Rightarrow G(\nu, I, z) = \frac{A_{32} \nu^2}{8 \pi \nu^2} \cdot \phi(\nu) \cdot \Delta n(\nu, I)$$

由 $G(\nu, I, z) = \frac{A_{32}\nu^2}{8\pi\nu^2} \cdot \phi(\nu) \cdot \Delta n(\nu, I)$ 可得:

$$\Delta n(\nu, I) \uparrow, \Rightarrow G(\nu, I, z) \uparrow,$$

通常情况下, $\Delta n(\nu, I)$ 和时间、空间、频率、光强都有关系。

而具体与时间相关的变化规律要用速率方程来描述。

$$A_{32} \uparrow, \Rightarrow G(\nu, I, z) \uparrow;$$

$$\phi(\nu) \uparrow, \Rightarrow G(\nu, I, z) \uparrow;$$

设计一实验, 测量一台 稳态连续波 (CW) 运转的激光器工作物质中, 空间均匀分布的、小信号情况下的粒子反转数密度 Δn^0 ?

二、小信号增益特性

当 $I_0(\nu)$ 很小, ~ 0 时, $\Delta n = \Delta n^0 = \text{常数}$,

G 与 I 无关, 只与频率 ν 有关,

可记成: $G^0(\nu)$ ——小信号增益系数。

在 $\phi(\nu)$ 的频宽范围内, $\Delta\nu \ll \nu, \rightarrow \nu \sim \nu_0$,

$$\Rightarrow G^0(\nu) = \frac{A_{32}\nu^2}{8\pi\nu_0^2} \cdot \phi(\nu) \cdot \Delta n^0, \dots\dots\dots \frac{\nu^2}{\nu_0^2} \sim \lambda_0^{-2};$$

则: $G^0(\nu) \propto \phi(\nu)$,

即增益线型与谱线加宽线型具有相同的曲线（只相差一个系数）。

$G^0(\nu)$ 随 ν 的变化与自发辐射光强 $I(\nu)$ 随 ν 的变化是一致的。

(1)、对于均与加宽洛伦兹(Lorentz)线型，有：

$$\phi_L(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{\Delta\nu_L}{2}}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta\nu_L}{2})^2}; (\text{对于自然加宽} \Delta\nu_L = \frac{1}{2\pi\tau_s}, \dots \tau_s = \frac{1}{A_{32}})$$

$$G_L^0(\nu) = \frac{\nu^2 \Delta\nu_L}{(4\pi\nu)^2 \tau_s} \cdot \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta\nu_L}{2})^2} \cdot \Delta n^0;$$

可以看出， $\nu = \nu_0$ 时， $G_L^0(\nu_0)$ 最大； $\nu \neq \nu_0$ 时， $G_L^0(\nu)$ 下降；

$$G_L^0(\nu) = G_L^0(\nu_0) \frac{(\frac{\Delta\nu_L}{2})^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta\nu_L}{2})^2}$$

$$G_L^0(\nu_0) = \frac{\nu^2}{4\pi^2 \nu^2 \Delta\nu_L \tau_s} \cdot \Delta n^0; (\text{对于自然加宽} = \frac{\nu^2}{2\pi\nu^2} \cdot \Delta n^0;)$$

(2)、对于非均匀加宽高斯线型 (*Gauss*), 有:

$$\Rightarrow \phi_G(\nu) = (\pi \ln 2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\pi \Delta \nu_G} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\frac{\Delta \nu_D}{2}} \right)^2},$$

$$\text{线宽 } \Delta \nu_G = 2\nu_0 \left(\frac{2kT}{mc^2} \cdot \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$G_G^0(\nu) = \frac{A_{32}\nu^2}{8\pi\nu^2} \cdot \phi_G(\nu) \cdot \Delta n^0,$$

$$G_G^0(\nu) = G_G^0(\nu_0) \cdot e^{-4 \ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D} \right)^2},$$

$$G_G^0(\nu_0) = \frac{A_{32}\nu^2}{4\pi^2\nu^2\Delta\nu_G} \cdot (\pi \ln 2)^{\frac{1}{2}}.$$

三、大信号增益特性——增益饱和特性

当 $I_0(\nu)$ 很小, ~ 0 时, $\Delta n = \Delta n^0 = \text{常数}$,

G 与 I 无关, 只与频率 ν 有关, $G^0(\nu)$ ——小信号增益。

随着光强 $I(\nu)$ 的增加, 受激辐射使 n_3 减小的

速率 $n_3 B_{32} \rho(\nu)$ 增加, \Rightarrow 粒子反转数密度 Δn 减少,

\Rightarrow 增益系数 G 减小, --增益饱和现象。

连续波CW运转激光器, 光强不会无限增长。

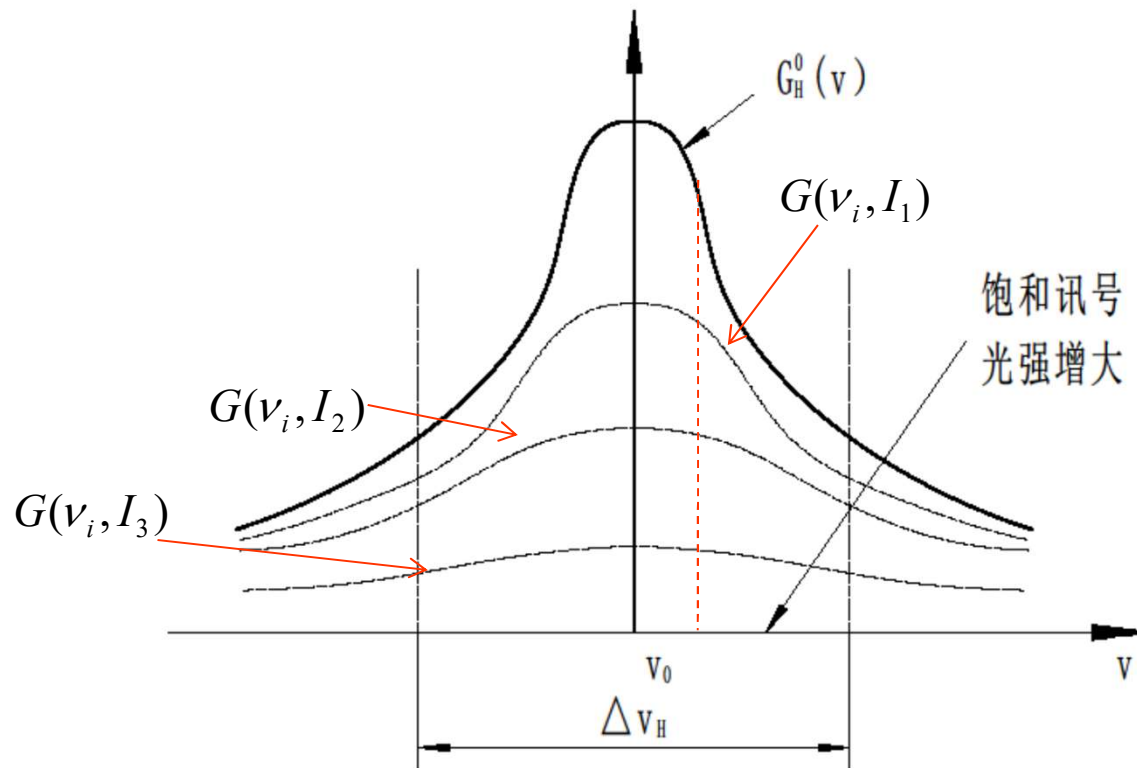
在大信号增益 --增益饱和 情况下,

无论是均匀加宽工作物 质还是

非均匀加宽工作物质, 其增益线型 $G(\nu, I)$

与谱线加宽线型 $\phi(\nu, \nu_0)$ 不再相同。

(1)、均匀加宽工作物质的 增益饱和，
对于任何频率 ν 的光，随着光强 $I(\nu)$
的增加，整个增益曲线 下降。



均匀加宽介质增益曲线的均匀饱和

关于大信号增益系数的计算,
关键在于计算出粒子反转数密度

$$\Delta n = n_3 - \frac{g_3}{g_2} n_2 \text{ 随光强 } I \text{ 增加而减小的表达式。}$$

$I \sim 0, \Delta n = \Delta n^0 \sim \text{常数}.$

$$\text{引入饱和光强: } I_s = \frac{h\nu A_{32}}{\sigma_{32}\eta_2} = \frac{h\nu}{\sigma_{32}\tau_s},$$

只与工作物质种类、能级结构等特性有关。

其中: $\sigma_{32} = \sigma_{32}(\nu, \nu_0)$ ——受激发射截面,

$\sigma_{32}(\nu_0)$ ——中心频率的受激发射截面, $I_{s0} \leftrightarrow \sigma_{32}(\nu_0)$ 。

用速率方程方法，可以推导出，对于均匀加宽工作物质有：

$$\Delta n = \frac{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_L}{2})^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_L}{2})^2 (1 + \frac{I}{I_{s0}})} \cdot \Delta n^0$$

$$\Rightarrow G_L(\nu, I) = G_L^0(\nu_0) \frac{(\frac{\Delta \nu_L}{2})^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_L}{2})^2 (1 + \frac{I}{I_{s0}})}$$

$$\text{其中: } G_L^0(\nu) = G_L^0(\nu_0) \frac{(\frac{\Delta \nu_L}{2})^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_L}{2})^2}, \text{小信号增益系数;}$$

$$G_L^0(\nu_0) = \frac{\nu^2}{4\pi^2 \nu^2 \Delta \nu_L \tau_s} \cdot \Delta n^0, \quad \nu = \nu_0 \text{ 时小信号增益系数, } = G_{\max}.$$

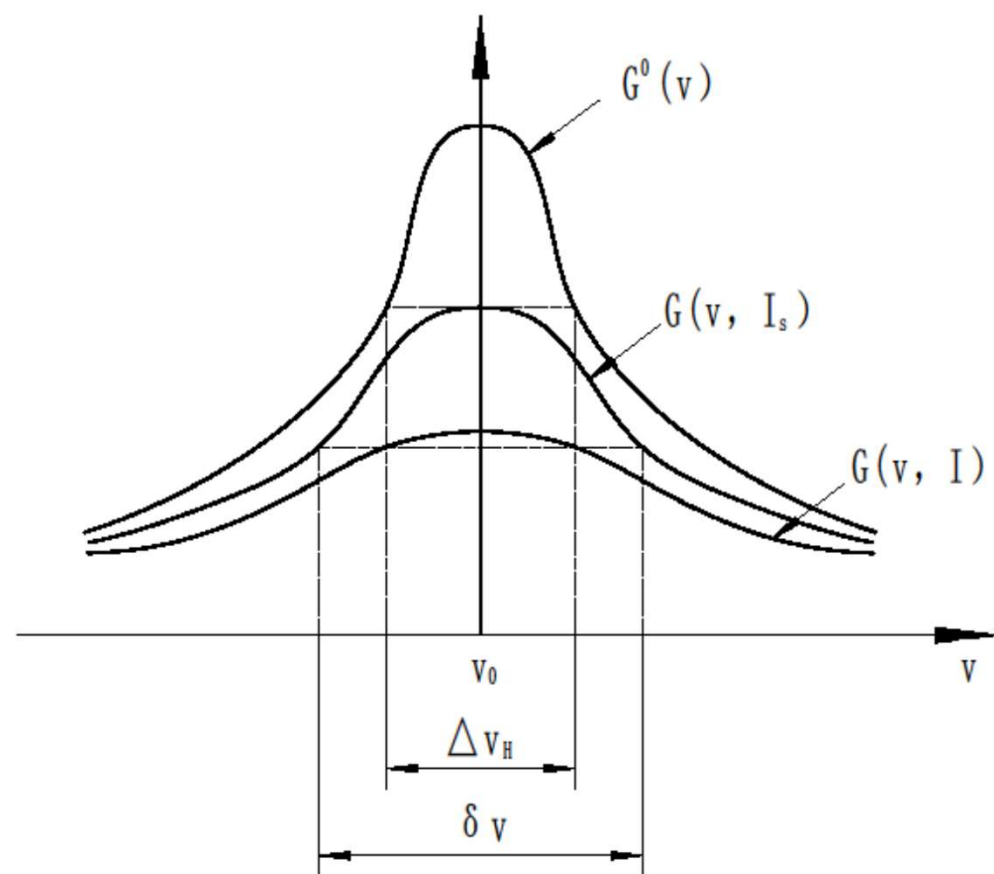
$$\phi_L(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{\Delta \nu_L}{2}}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_L}{2})^2};$$

$$G_L(\nu, I) = \frac{\nu^2 A_{32}}{8\pi \nu^2} \cdot \phi_L(\nu, \nu_0) \cdot \Delta n = \frac{G_L^0(\nu)}{1 + \frac{I(\nu)}{I_s(\nu)}} = \frac{\sigma_{32}(\nu, \nu_0) \cdot \Delta n^0}{1 + \frac{I(\nu)}{I_s(\nu)}},$$

$$\text{其中: } I_s(\nu) = I_{s0} \cdot \frac{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_L}{2})^2}{(\frac{\Delta \nu_L}{2})^2}.$$

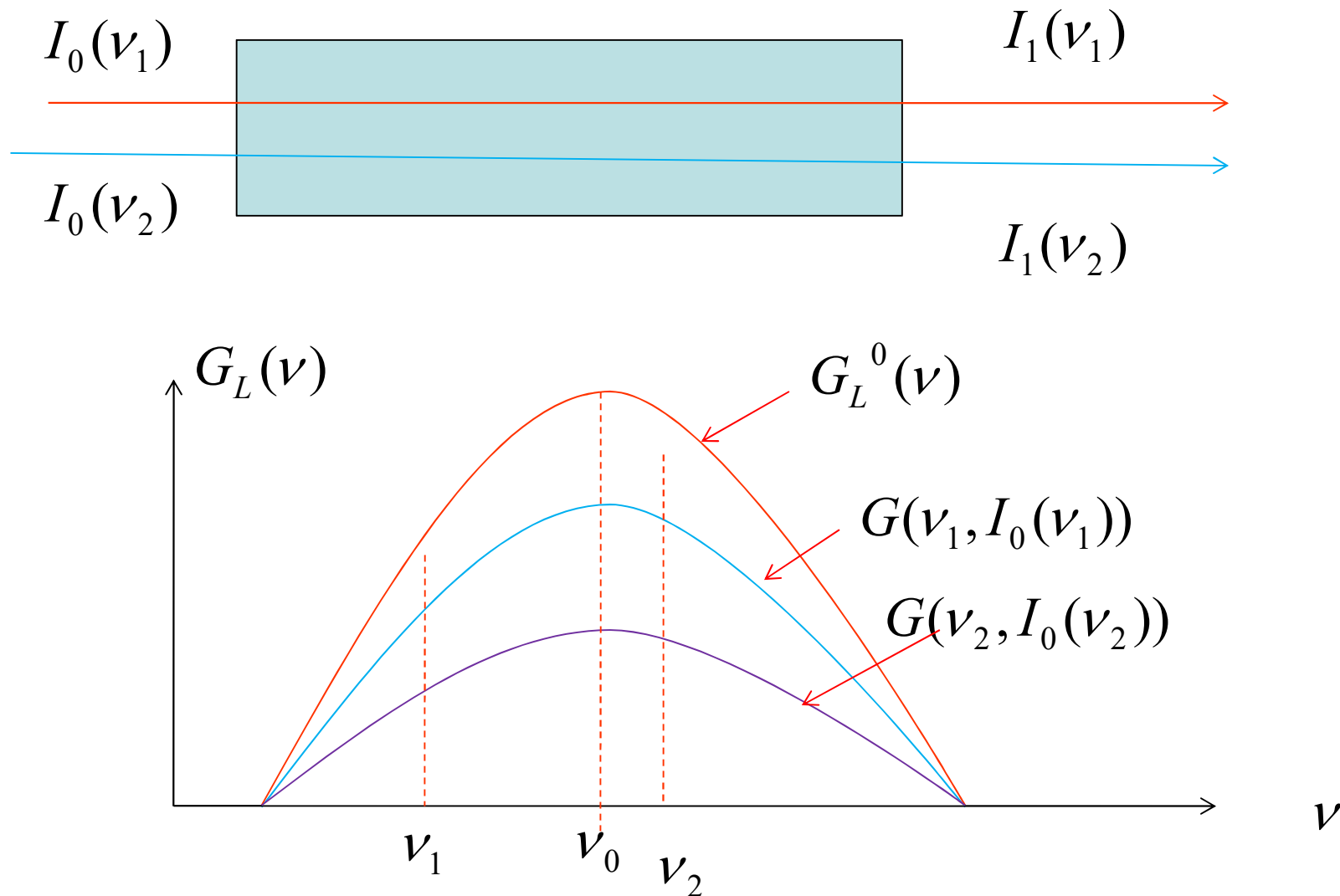
$$\text{当 } \nu = \nu_0 \text{ 时, } G_L(\nu_0, I) = \frac{G_L^0(\nu_0)}{1 + \frac{I(\nu_0)}{I_{s0}}}; \quad \text{当 } I = I_{s0} \text{ 时, } G_L(\nu_0, I_{s0}) = \frac{G_L^0(\nu_0)}{2},$$

即增益系数减小到最大值的一半。当 $\nu \neq \nu_0$ 时，增益饱和效应将下降。不同的频率，其增益饱和效应是不同的，频率 ν 越偏离中心频率 ν_0 ，增益饱和效应越小。

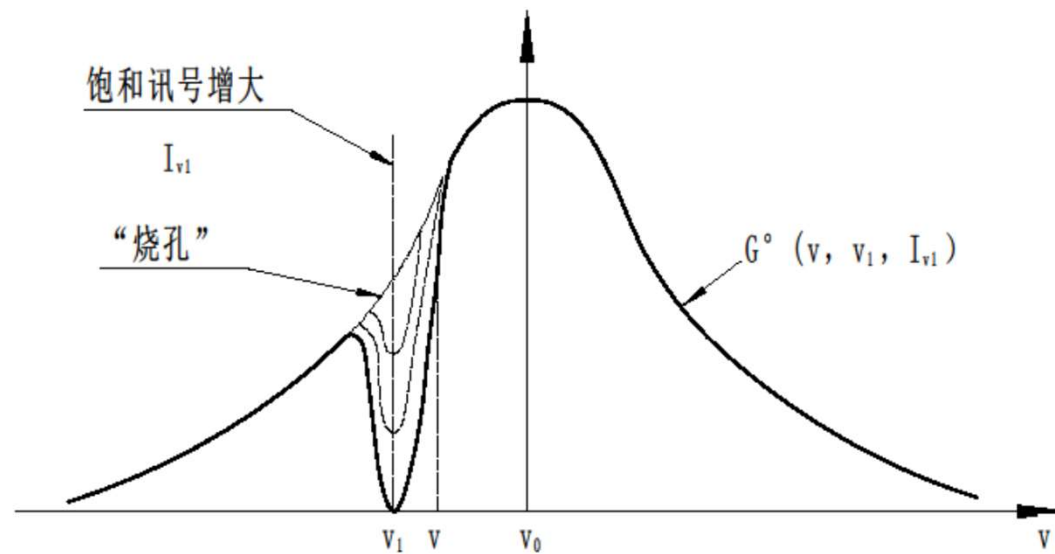


均匀加宽介质大讯号增益曲线的饱和加宽

两束不同频率 ν_1 、 ν_2 的光 $I_0(\nu_1)$ 和 $I_0(\nu_2)$ 经过均匀加宽工作物质后放大如何、增益大小？
取决于两者的强度和先后顺序。



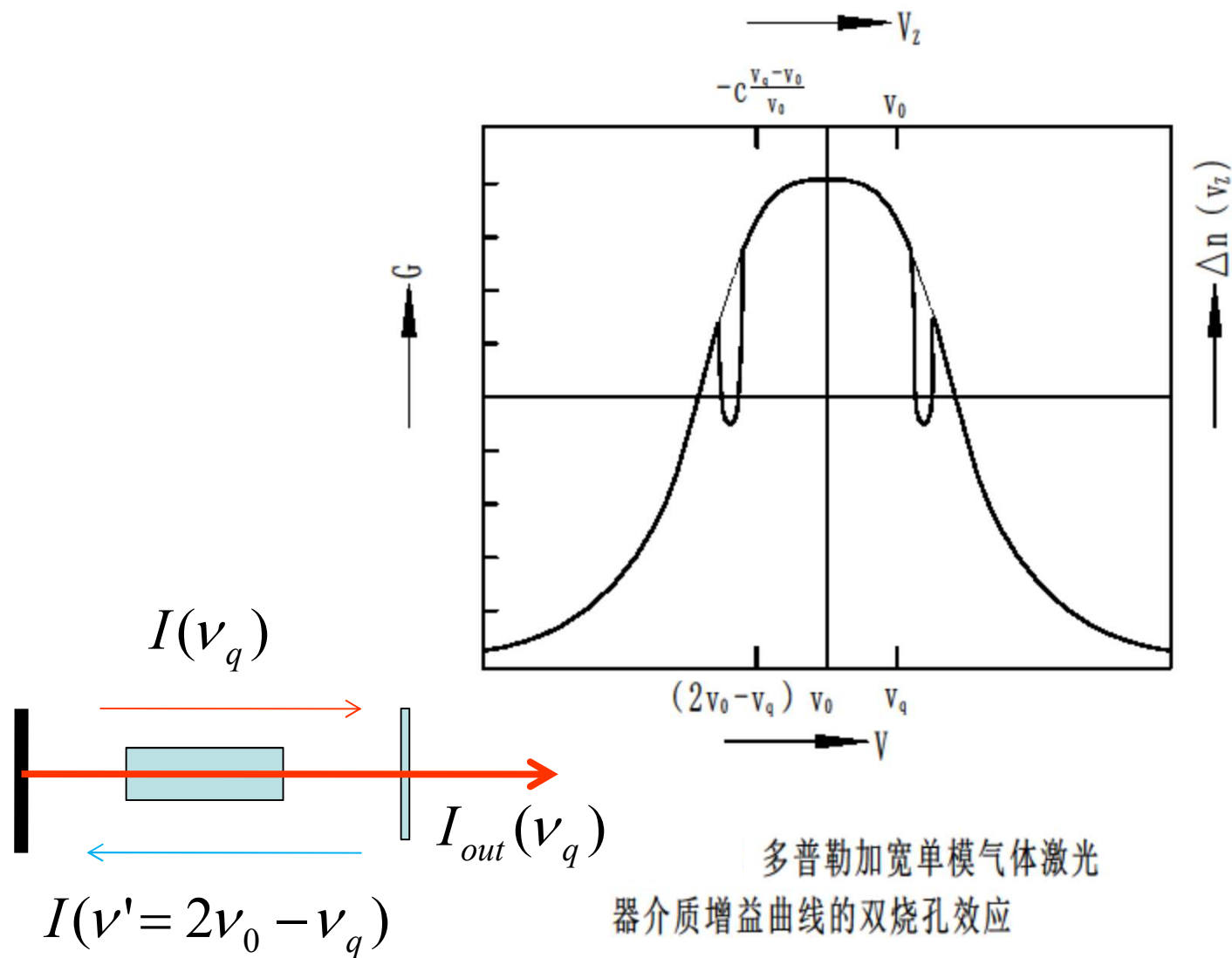
(2)、非均匀加宽工作物质 的增益饱和，
对于频率 ν 的光，随着光强 $I(\nu)$ 的增加，
在增益曲线上频率 ν 处增益下降，出现“频率烧孔”现象。

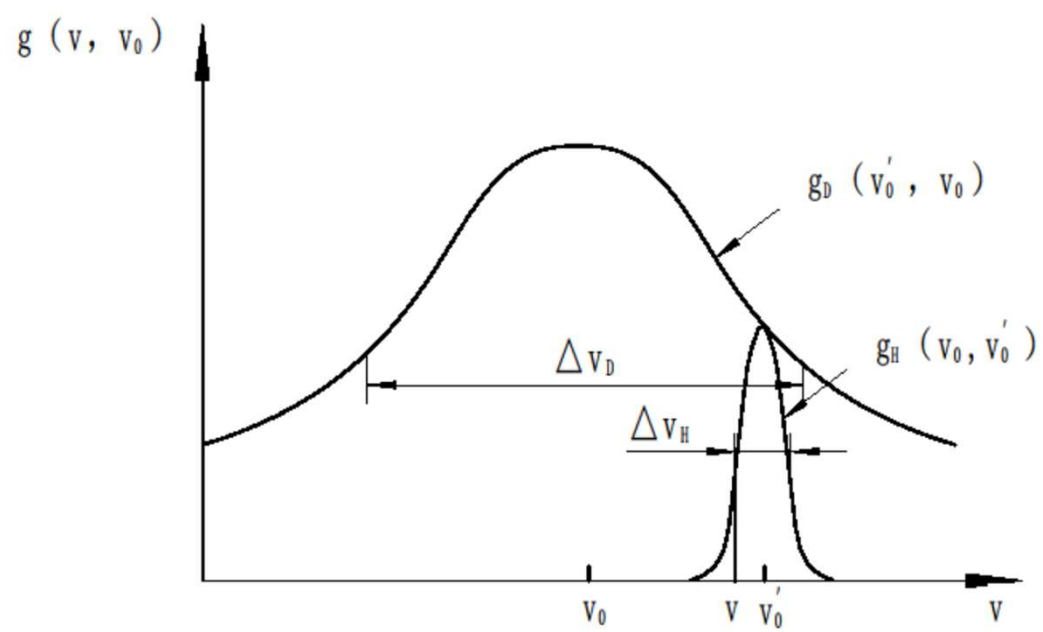


非均匀加宽介质的增益曲线“烧孔”效应

一般为双烧孔现象,

在频率 ν_q 与 $2\nu_0 - \nu_q$ 处出现对称双烧孔。





强非均匀加宽谱线示意图

对于非均匀加宽工作物质可以推导出：

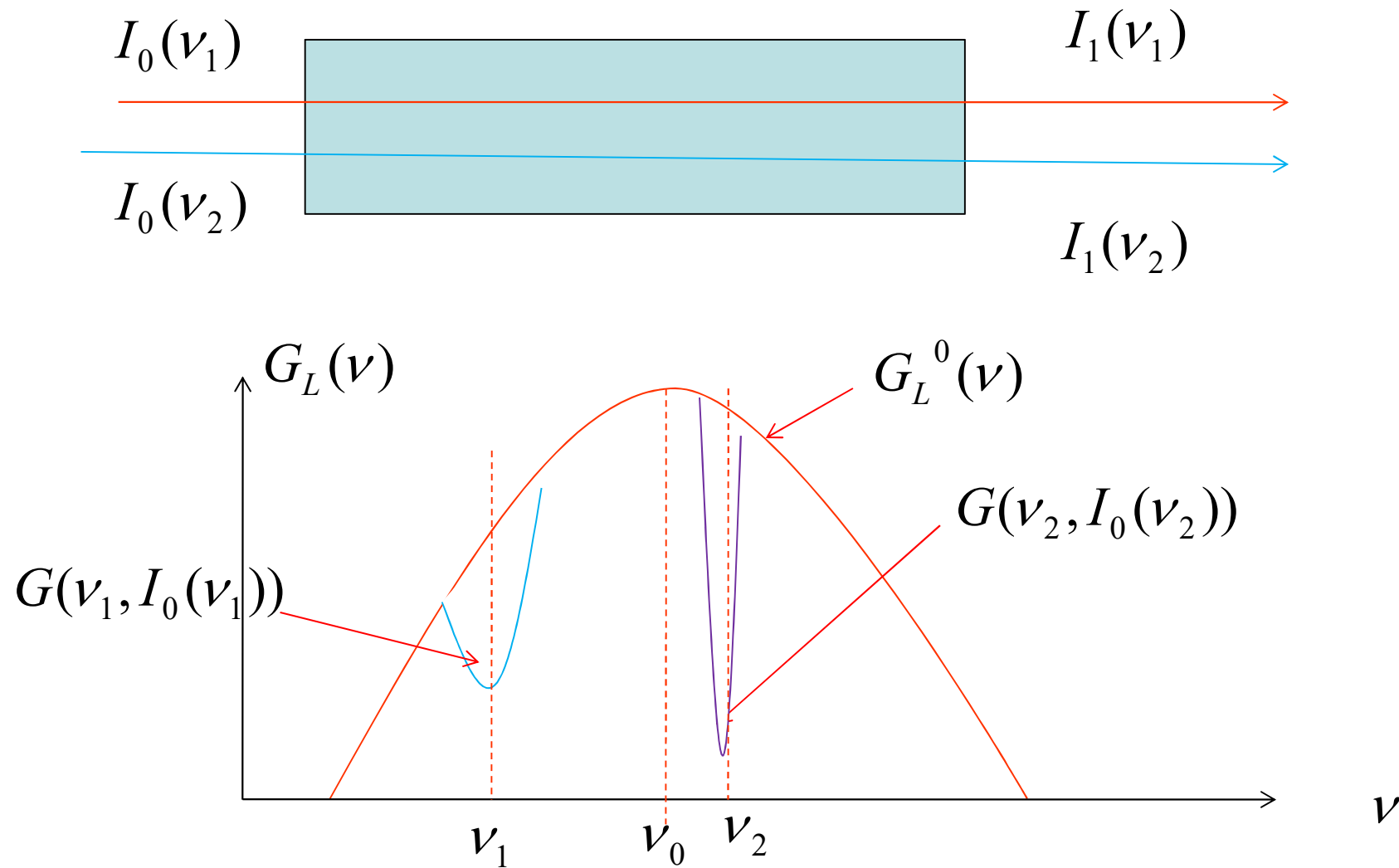
$$\phi_G(\nu) = (\pi \ln 2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\pi \Delta \nu_G} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\frac{\Delta \nu_D}{2}} \right)^2}, \text{线宽 } \Delta \nu_G = 2\nu_0 \left(\frac{2kT}{mc^2} \cdot \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$G_G(\nu, I) = \frac{1}{\left(1 + \frac{I}{I_s(\nu)}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot G_G^0(\nu); \text{由 } G_G(\nu) = \frac{A_{32}\nu^2}{8\pi\nu^2} \cdot \phi_G(\nu) \cdot \Delta n(\nu), \text{求积分得.}$$

$$G_G^0(\nu) = G_G^0(\nu_0) \cdot e^{-4\ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D} \right)^2}, G_G^0(\nu_0) = \frac{A_{32}\nu^2}{4\pi^2\nu^2 \Delta \nu_G} \cdot (\pi \ln 2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{对于任意 } \nu, I = I_s \text{ 时, } G_G(\nu, I_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot G_G^0(\nu)$$

两束不同频率 ν_1 、 ν_2 的光 $I_0(\nu_1)$ 和 $I_0(\nu_2)$ 经过非均匀加宽工作物质后 放大如何、增益大小？相互不影响，只影响自己频率的增益。



(1)、小信号增益和增益饱和两种情况，
作为两个不同的阶段，在整个激光形成
过程中是一定会经历的。

(2)、激光束好的特性的形成与增益饱和密切相关。

第三节 增益系数与受激辐射截面的关系

受激跃迁截面：

度量介质中粒子对于外来光讯号的响应大小.

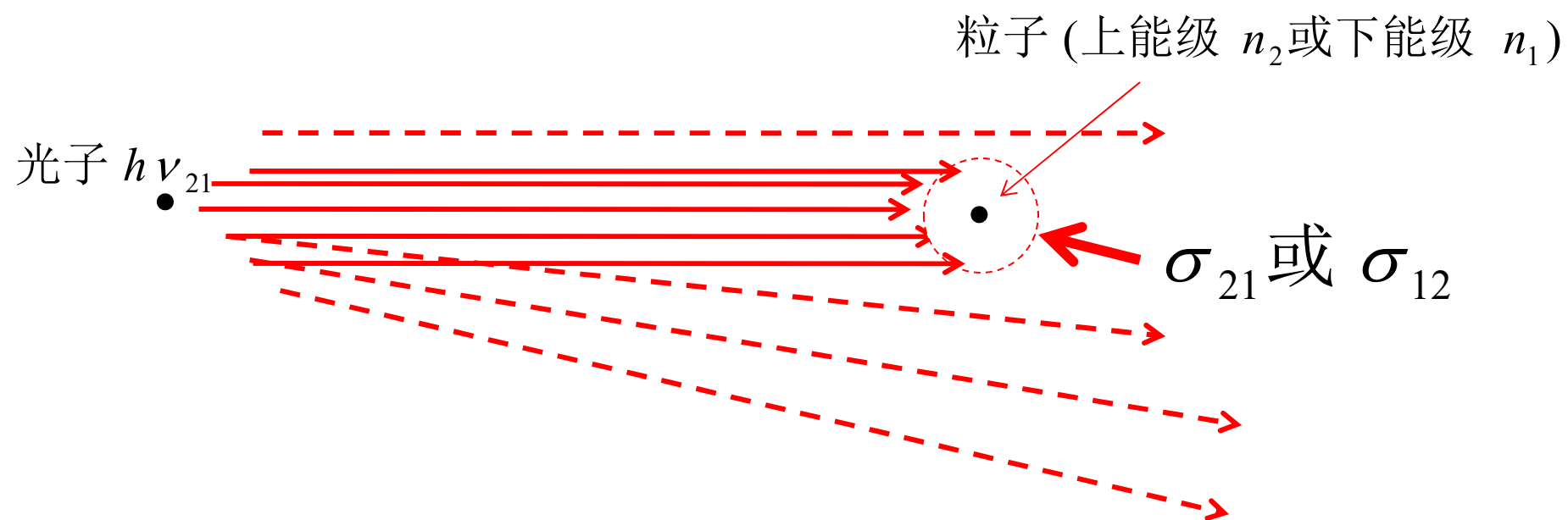
红宝石:694.3nm, $\sigma_{21} = 2.5 \times 10^{-24} m^2 = 2.5 \times 10^{-20} cm^2$;

Nd : YAG :1064nm, $\sigma_{32} = 8.8 \times 10^{-19} cm^2$;

钕玻璃*Nd : Glass* :1060nm, $\sigma_{32} = 7.7 \times 10^{-21} cm^2$;

$$G(\nu, I) = \frac{\nu^2 A}{8\pi\nu^2} \cdot \phi(\nu) \cdot \Delta n(\nu, I)$$

$$G(\nu, I) = \sigma(\nu) \cdot \Delta n(\nu, I).$$

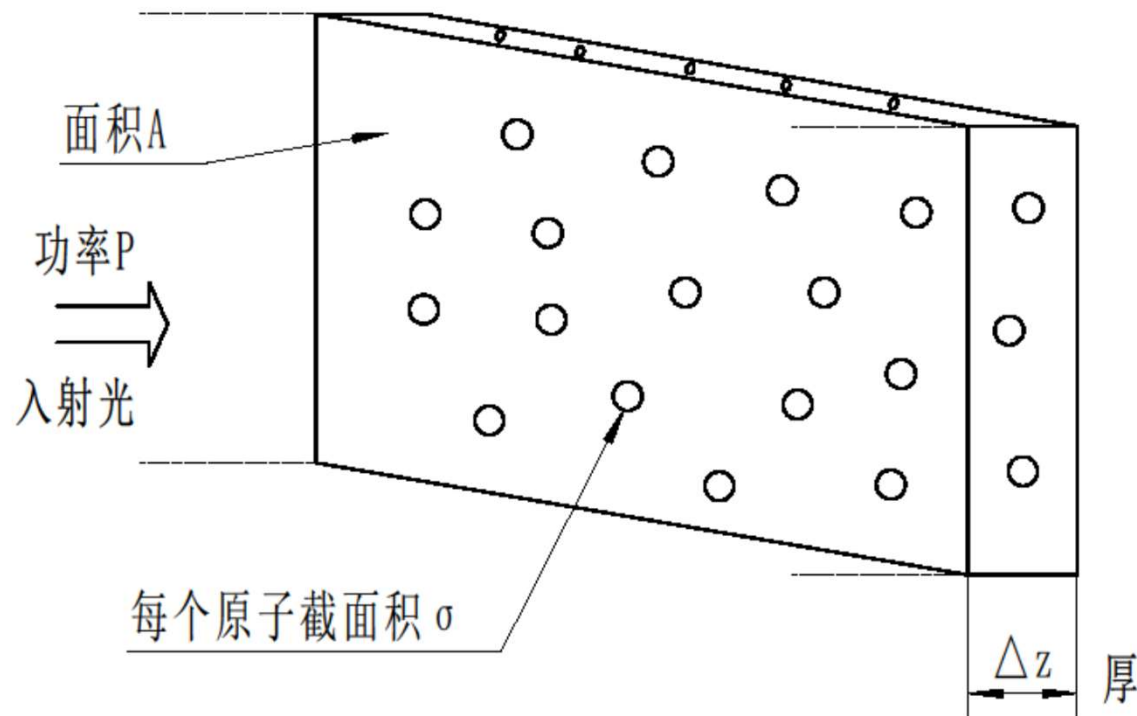


考虑图示薄层的工作物质,入射光总功率 P ,

总的受光面积 A ,

σ_{21} :处于上能级每个粒子“受激发射”所具有的有效俘获面积。

σ_{12} :处于下能级每个粒子“受激吸收”所具有的有效俘获面积。



说明受激跃迁截面的示意图

σ_{21} 或 σ_{12} : 粒子具有俘获光的截面积.

受激辐射截面和受激吸收截面.

上下能级粒子数 N_2 、 N_1 , 粒子数密度 n_2 、 n_1

总有效发射面积 : $S_{\text{发射}} = \sigma_{21} \cdot N_2 = \sigma_{21} \cdot n_2 \cdot A \cdot \Delta z$;

总有效吸收面积 : $S_{\text{吸收}} = \sigma_{12} \cdot N_1 = \sigma_{12} \cdot n_1 \cdot A \cdot \Delta z$;

均匀加宽介质薄层中粒子在总功率 P 的
入射光作用下所发射的净光功率为:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_{\text{发射}} - P_{\text{吸收}} = \frac{P}{A} \cdot S_{\text{发射}} - \frac{P}{A} \cdot S_{\text{吸收}} \\ &= \frac{P}{A} \cdot \sigma_{21} \cdot n_2 \cdot A \cdot \Delta z - \frac{P}{A} \cdot \sigma_{12} \cdot n_1 \cdot A \cdot \Delta z \\ &= (\sigma_{21} \cdot n_2 - \sigma_{12} \cdot n_1) \cdot P \cdot \Delta z\end{aligned}$$

另一方面，发射的净功率可写为：

$$\Delta P = W_{21} \cdot n_2 \cdot A \cdot \Delta z \cdot h \nu_{21} - W_{12} \cdot n_1 \cdot A \cdot \Delta z \cdot h \nu_{21}$$

利用： $W_{12} = \frac{g_2}{g_1} W_{21}$ ，

$$\Rightarrow \Delta P = W_{21} \cdot \left(n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 \right) \cdot A \cdot \Delta z \cdot h \nu_{21};$$

与上面结果比较，可得：

$$\sigma_{21} = \frac{g_1}{g_2} \sigma_{12}, W_{21} = \frac{\sigma_{21}}{h \nu_{21}} \frac{P}{A}, W_{12} = \frac{\sigma_{12}}{h \nu_{21}} \frac{P}{A},$$

增益系数：

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{I(z)} \cdot \frac{dI(z)}{dz} = \frac{1}{\frac{P}{A}} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{P}{A}\right)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{\frac{P}{A}} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(n_2 \sigma_{21} - n_1 \sigma_{12}) \cdot P \cdot \Delta z / A}{\Delta z} \\ &= (n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1) \cdot \sigma_{21} = \sigma_{21} \cdot \Delta n \end{aligned}$$

即：增益系数可以表示为受激发射截面与粒子反转数密度的乘积。