

# 第三章 光学谐振腔及其模特性

- 第一节、光学谐振腔的损耗  $\gamma$ 、寿命  $\tau_R$ 、品质因子Q、线宽 $\Delta \nu_R$  以及菲涅耳数F
- 第二节、光学谐振腔的主要结构形式和质量指标
- 第三节、光学谐振腔的稳定性条件
- 第四节、光学谐振腔的衍射理论要点
- 第五节、方形实对称共焦球面镜光学谐振腔中光场的自洽衍射积分方程及其解
- 第六节、方形实对称共焦球面镜光学谐振腔中光场行波场
- 第七节、圆形实对称共焦球面镜光学谐振腔中光场特性
- 第八节、一般稳定球面镜腔和等价共焦腔中光场特性

几何光学  $\Rightarrow$  腔的稳定性分析, 非稳腔特性描述;

衍射光学 + 自再现模  $\Rightarrow$  所有腔型的数值求解,

实对称共焦腔的解析求解

$\Rightarrow$  等价共焦腔方法求解稳定球面镜中光场.

(1)、正反馈

(光多次通过工作物质获得足够长的受激辐射放大过程);

(2)、限制模式

(利用侧面开放式腔的选择性损耗和阈值条件来实现);

(3)、其它功能

能在腔内插入各种单元功能元件, 实现对激光束的有效控制。

无源腔: 腔内没有工作物质(激活介质)

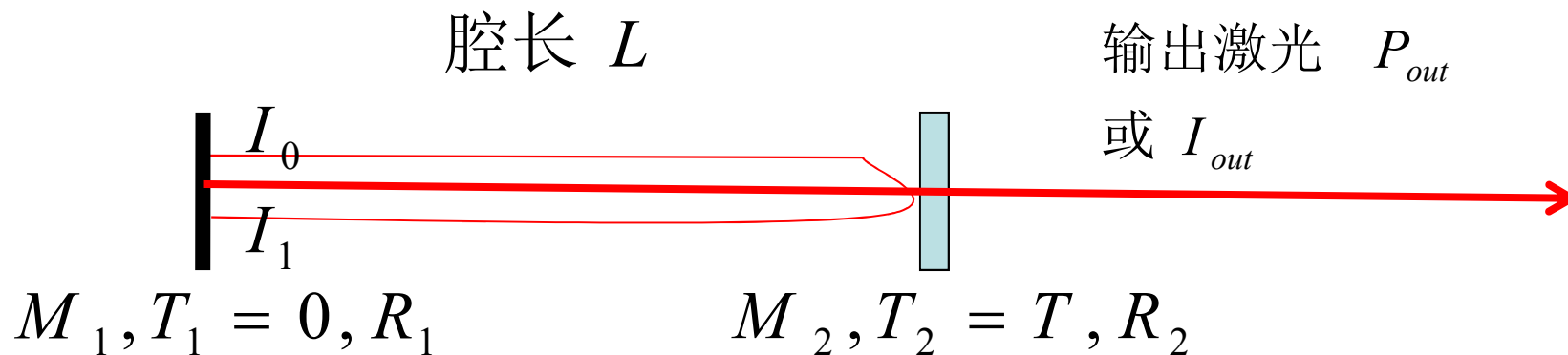
有源腔: 腔内有工作物质(激活介质)

本章针对无源腔来讨论.

- 第一节、光学谐振腔的损耗 $\gamma$ 、寿命 $\tau_R$ 、品质因子Q值、线宽 $\Delta\nu_R$ 以及菲涅耳数 F
- 一、光学谐振腔的损耗  $\gamma$
- 二、光学谐振腔的寿命  $\tau_R$
- 三、光学谐振腔的品质因子Q值
- 四、光学谐振腔的线宽  $\Delta\nu_R$
- 五、光学谐振腔的菲涅耳数 F

# 一、光学谐振腔的损耗 $\gamma$

光在腔内平均单程功率损耗



$I_0$ 光强的光束在腔内往返一周后衰减至  $I_1$ ,

则定义单程损耗因子  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{I_0}{I_1}, \text{即: } I_1 = I_0 e^{-2\gamma};$$

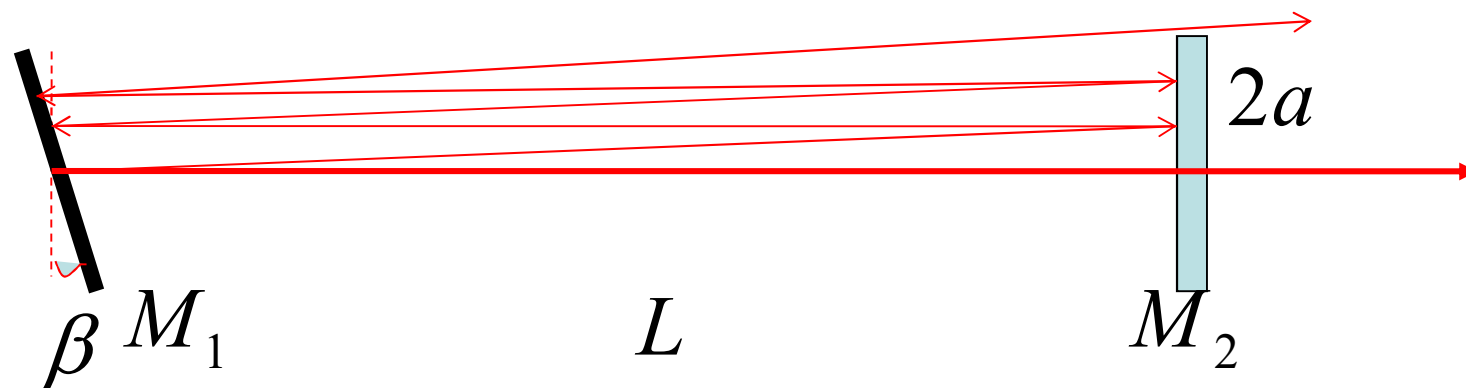
当  $\gamma \ll 1, I_1 \approx I_0(1 - 2\gamma)$ , 即:  $\gamma = \frac{I_0 - I_1}{2I_0}$ ; 代数表达式。

分为选择性损耗和非选择性损耗两类

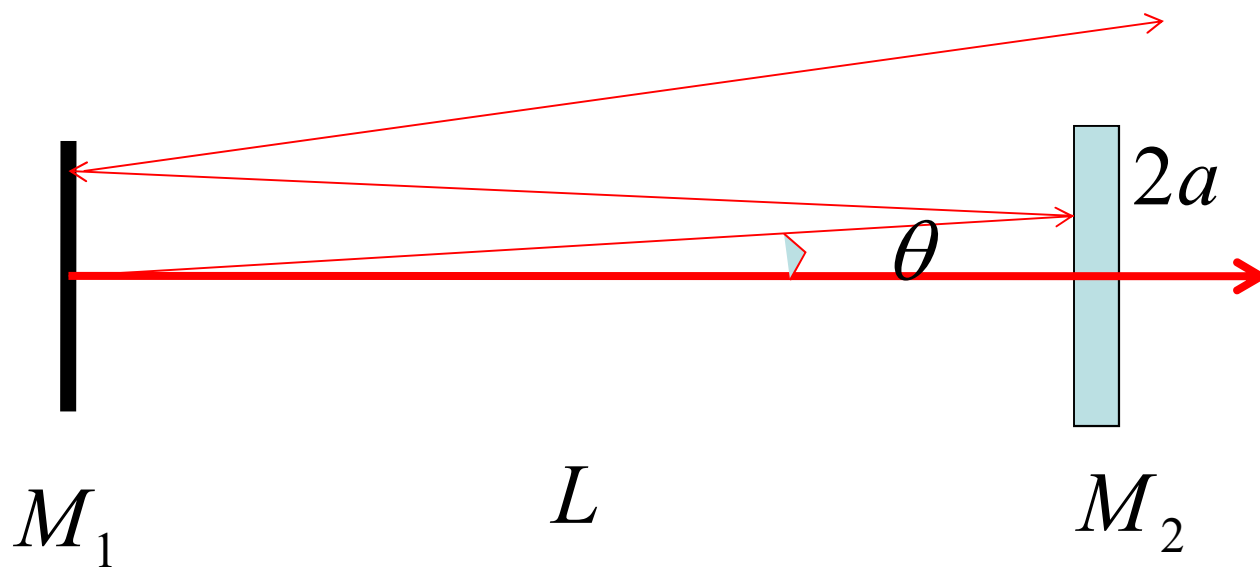
1、几何光学可以预见的横向偏出分损耗；  
光线往返 $m$ 次逸出腔外、跑光、损耗光。

$$\gamma = \frac{1}{2m}.$$

$$(1)、\gamma_{\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta L}{a} \right)^{\frac{1}{2}}, \beta \text{ 较小}$$



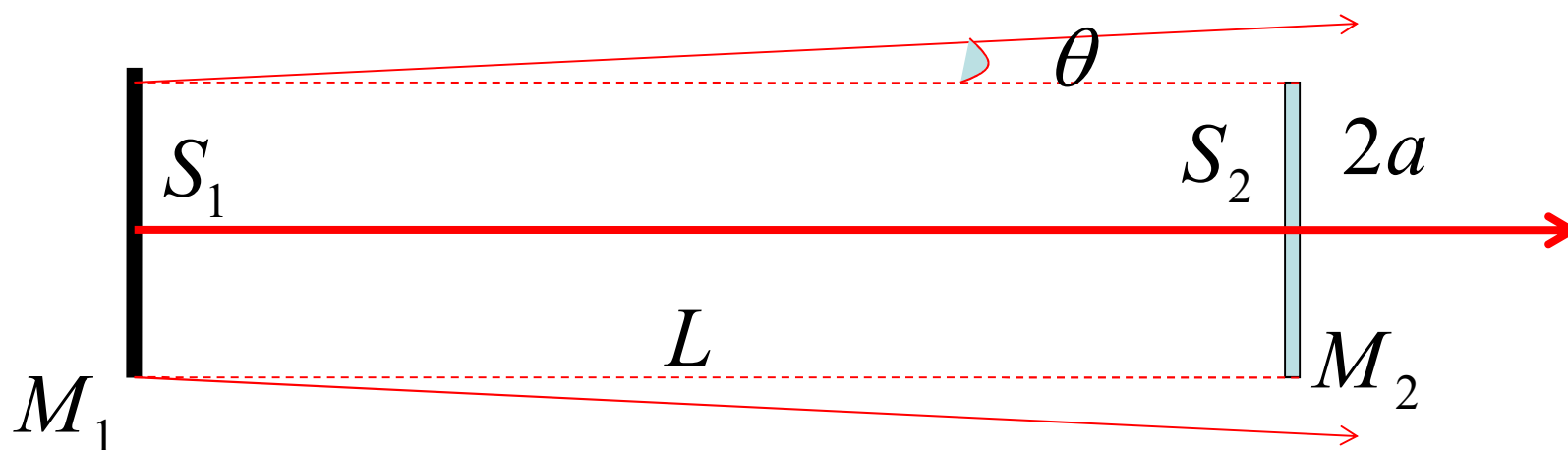
(2)、  $\gamma_{\theta} = \frac{1}{2} \frac{L \theta}{a}, \theta \text{较小}$



## 2、衍射损耗（平行光束的单程衍射损耗）

$$\gamma_d = \frac{L\lambda}{a^2}, \text{---} \gamma_d = \frac{S_2 - S_1}{S_1}, \text{光强比} \Leftrightarrow \text{面积比}$$

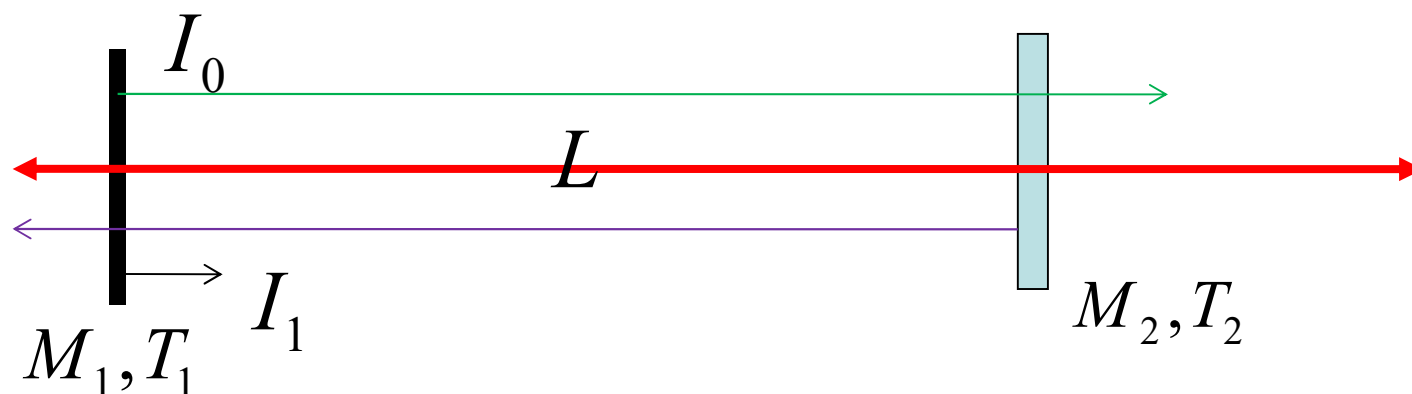
$$S_1 = \pi a^2, S_2 = \pi(a + L\theta)^2; \theta \approx \frac{\lambda}{2a} \text{ (爱里斑张角)}$$



$a \gg \lambda$ ,  $\theta$  很小. 略去  $L^2\theta^2$  项,

可得: 
$$\gamma_{d\text{平行光}} = \frac{L\lambda}{a^2}$$

### 3、透射损耗（输出耦合 损耗,有用损耗）



$$I_1 = I_0 (1 - T_1)(1 - T_2), I_1 = I_0 e^{-2\gamma_{out}}$$

$$\Rightarrow (1 - T_1)(1 - T_2) = e^{-2\gamma_{out}}$$

$$\Rightarrow \gamma_{out} = -\frac{1}{2} \ln(1 - T_1)(1 - T_2)$$



#### 4、内损耗

腔内元件 对光的散射、反射、吸收  
(杂质吸收) 等引起的损耗,  $\gamma_i$ , 由实验测定。  
几何逸出损耗、衍射损耗 --- 选择性损耗;  
透射损耗、内损耗 --- 非选择性损耗。

## 二、光学谐振腔的寿命 $\tau_R$ (腔内光子平均寿命)

腔内初始光强  $I_0$ , 由于腔损耗使光强衰减,

光强从  $I_0$  指数衰减到  $\frac{1}{e} I_0$  所用的时间  $\tau_R$ :

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}.$$

$\tau_R$ 与 $\gamma$ 有内在的关系：

$t = 0, I = I_0$ , 到 $t$ 时刻, 光在腔内往返了  $m$  次,

光强变为:  $I = I_0 e^{-2m\gamma}$ ;

而光在腔内往返的次数 可写为:  $m = \frac{t \cdot c}{2L}$

这里  $L$  为腔的光学长度  $L = \sum_j n_j \ell_j$ .

$\Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{\gamma \cdot c}{L} \cdot t}$ , 与  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}$ , 可得:

$$\tau_R = \frac{L}{\gamma \cdot c}$$

腔损耗越大, 腔寿命越短(腔内光子的平均寿命越短);

$$\gamma_{\text{总}} = \sum_j \gamma_j \Rightarrow \frac{1}{(\tau_R)_{\text{总}}} = \sum_j (\tau_R)_j$$

### 三、光学谐振腔的品质因子Q值

定义： $Q = 2\pi \cdot \nu \cdot \frac{E}{P}$ .

$E$ ：储存在腔内的总能量；

$P$ ：单位时间损耗的能量；

$\nu$ ：腔内光场的振荡频率。

$t$ 时刻, 腔内的总能量  $E(t) = \varphi(t) \cdot h\nu \cdot V$ ;  $V$  — 模体积

单位时间损耗的能量 ;  $P(t) = -\frac{dE(t)}{dt} = -h\nu \cdot V \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$ ;

$$\text{而: } \varphi(t) = \varphi_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}, \Rightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\varphi(t)}{\tau_R},$$

$$\Rightarrow P(t) = h\nu \cdot V \cdot \frac{\varphi(t)}{\tau_R},$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi\nu \frac{E}{P} = 2\pi\nu \cdot \frac{\varphi(t) \cdot h\nu \cdot V}{h\nu \cdot V \cdot \frac{\varphi(t)}{\tau_R}}$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi\nu \cdot \tau_R = 2\pi\nu \cdot \frac{L}{\gamma c}$$

#### 四、光学谐振腔的线宽 （无源腔的本征线宽） $\Delta \nu_R$

无源腔存在损耗，若开始是单色简谐波，  
经过往返后呈指数衰减，导致光谱存在线宽。

类似自然加宽线宽的推导：

由谐振腔（内光子的平均）寿命 $\tau_R$ 决定的腔内光场的线宽 $\Delta \nu_R$ ：

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}} \Rightarrow E(t) \propto e^{-\frac{t}{2\tau_R}}; \Rightarrow E(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau_R}} e^{i2\pi\nu_0 t}$$

$$\Rightarrow E(\nu) = F(E(t)) \Rightarrow I(\nu) \propto |E(\nu)|^2;$$

$$\Rightarrow \Delta \nu_R = \frac{1}{2\pi\tau_R}, = \frac{\nu}{Q} = \frac{\gamma c}{2\pi L}$$

## 五、光学谐振腔的菲涅耳数 $F$

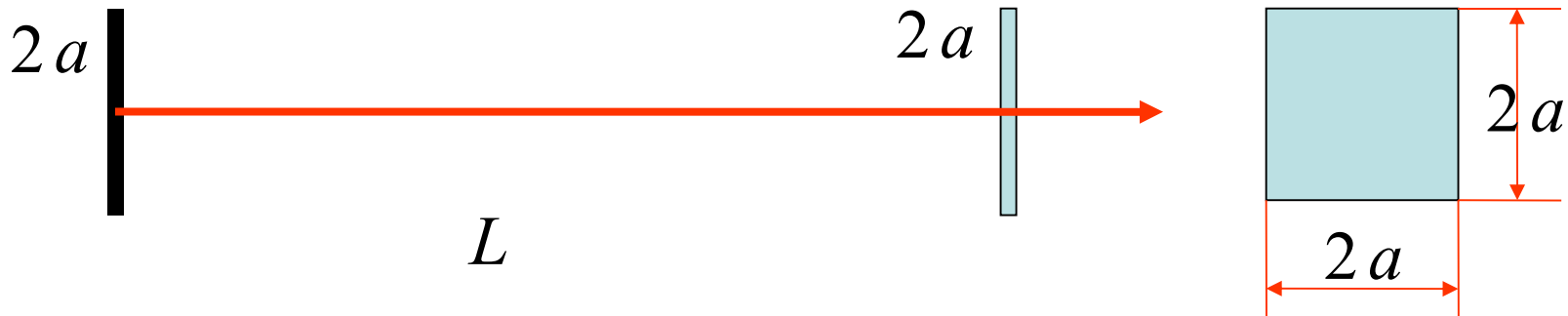
在描述光学谐振腔的工作特性时，  
经常用到光学谐振腔的菲涅耳数  $F$ ，

$F = \frac{a^2}{L\lambda}$ ，其中： $2a$  — 腔镜线度； $L$  — 腔长； $\lambda$  — 光波长。

其物理涵义：

(1)、平面波(平行光) 单程衍射损耗 的倒数：

$$F = \frac{1}{\gamma_{d\text{平面波}}} = \frac{a^2}{L\lambda},$$

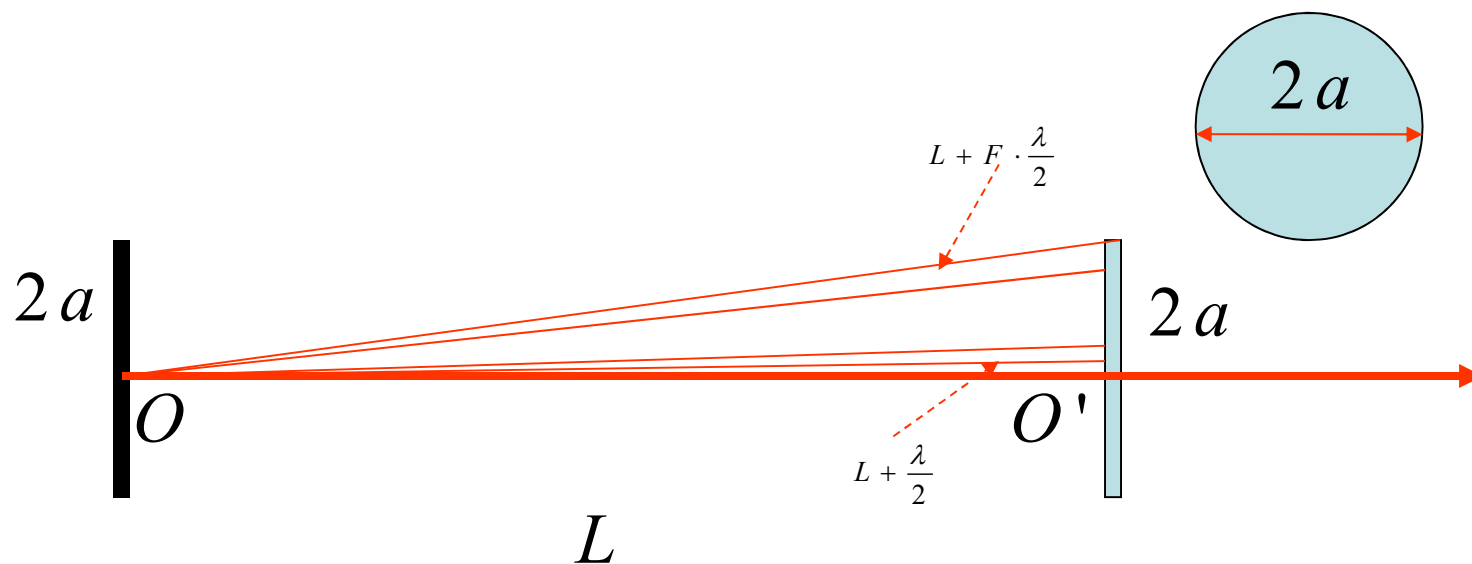


(2)、从一面镜子中心看另一面镜子所包含的菲涅尔半波带数目--原始定义：  
 设两面圆形腔镜，在 $O$ 点观察， $M_2$ 镜子所包含的菲涅尔半波带数是以  
 圆心 $O'$ 的同心圆环，各相邻环的边缘到 $O$ 点的距离彼此相差二分之一波长。

由图示的三角关系，可得：
$$L + F \cdot \frac{\lambda}{2} = \sqrt{L^2 + a^2}$$

利用 $\sqrt{L^2 + a^2} = L(1 + \frac{a^2}{2L^2}) + \dots \approx L(1 + \frac{a^2}{2L^2})$ ,

$$\Rightarrow F = \frac{a^2}{L\lambda}$$





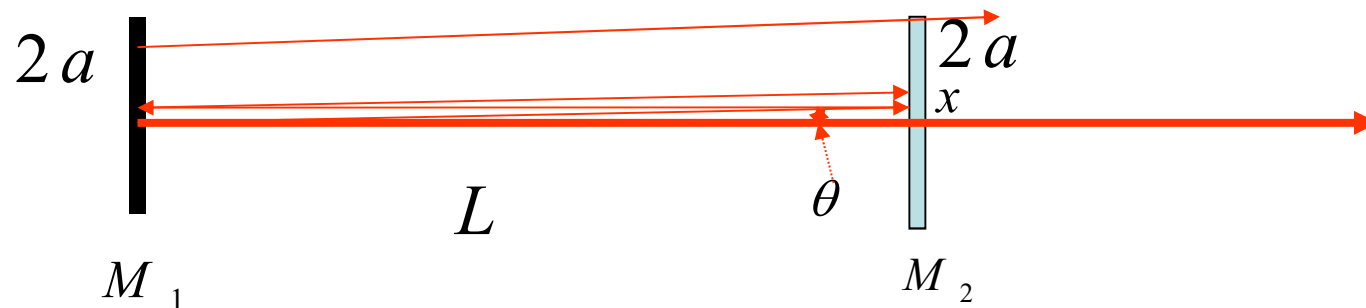
(2)、平面波衍射光在腔 内最大的往返次数

从 $M_1$ 中心发出的光，其衍射 角： $\theta \approx \frac{\lambda}{2a}$ ,

$$x = \theta \cdot L = \frac{\lambda L}{2a};$$

往返偏移量为  $2x$ , 设往返  $F$  次后逸出腔外，则：

$$2x \cdot F = a \Rightarrow F = \frac{a}{2x} = \frac{a^2}{L\lambda}.$$



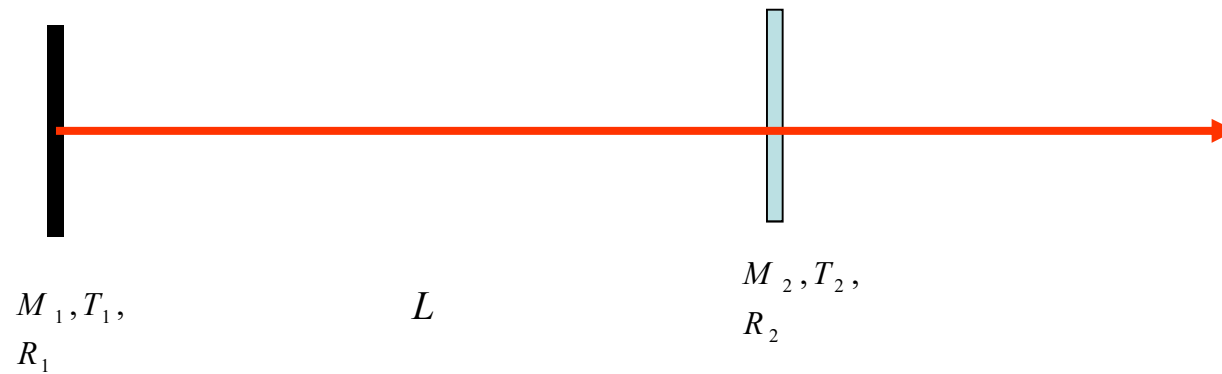
- 第二节、光学谐振腔的主要结构形式和质量指标
- 一、光学谐振腔的主要结构形式
- 光学谐振腔腔镜个数的不同、腔镜形状的不同、以及腔镜的组合方式不同，会导致腔内光场的特性不同。
- 形状：外形尺寸，镜面形状（球面镜、柱面镜、棱镜等；若是球面镜其球面是凹向腔内还是凸向腔内，球面曲率半径是多少等）；
- 组合方式：各腔镜的相对位置。
- 以常用的球面反射镜腔镜为例来说明。

# 1、双镜腔

$a$ 、平行平面镜腔

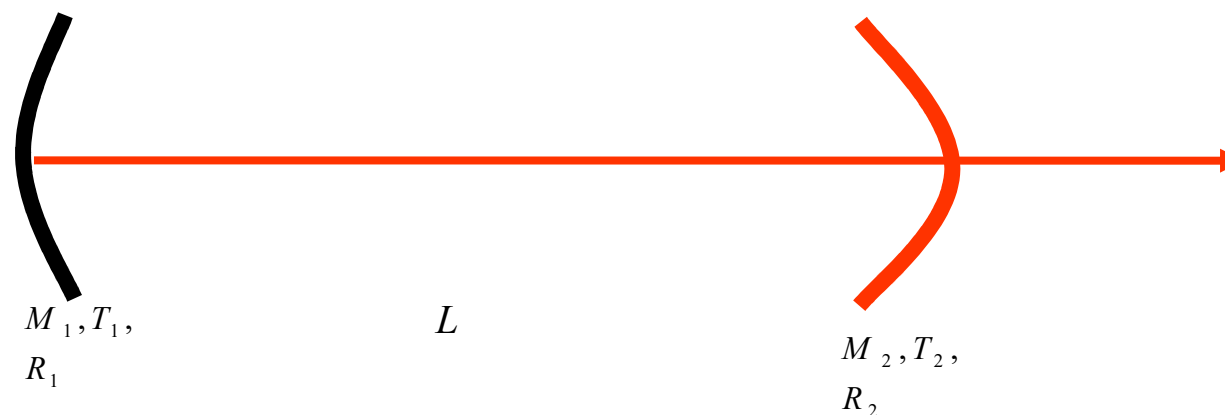
腔镜曲率半径： $R_1 = R_2 \Rightarrow \infty$ ，

$M_1$ 、 $M_2$ 相互平行



*b*、实共焦球面镜腔

腔镜曲率半径： $\frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} = L$ ， $M_1$ 、 $M_2$ 相互平行



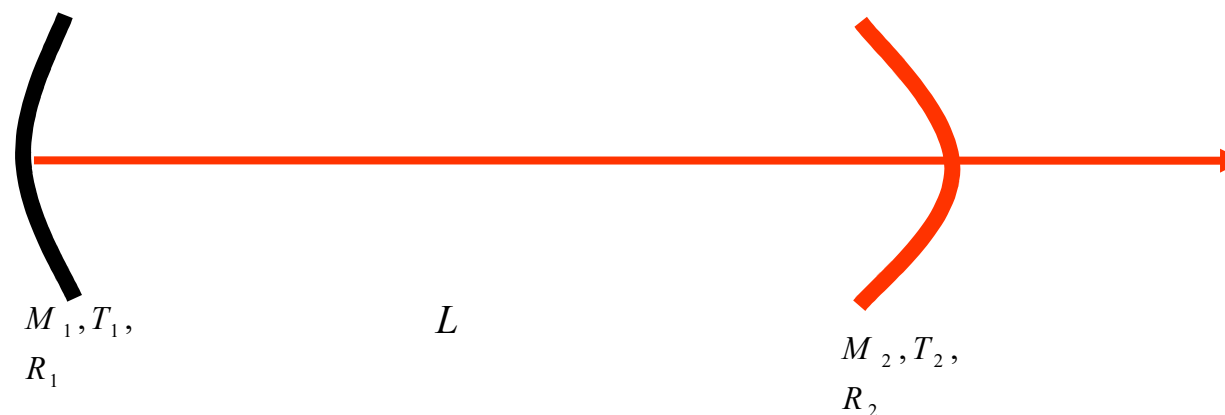
特例：实对称共焦球面镜腔：

腔镜曲率半径：

$$R_1 = R_2 = L, f_1 = f_2 = \frac{L}{2}.$$

*c*、共心球面镜腔

腔镜曲率半径： $R_1 + R_2 = L$ ， $M_1$ 、 $M_2$ 相互平行



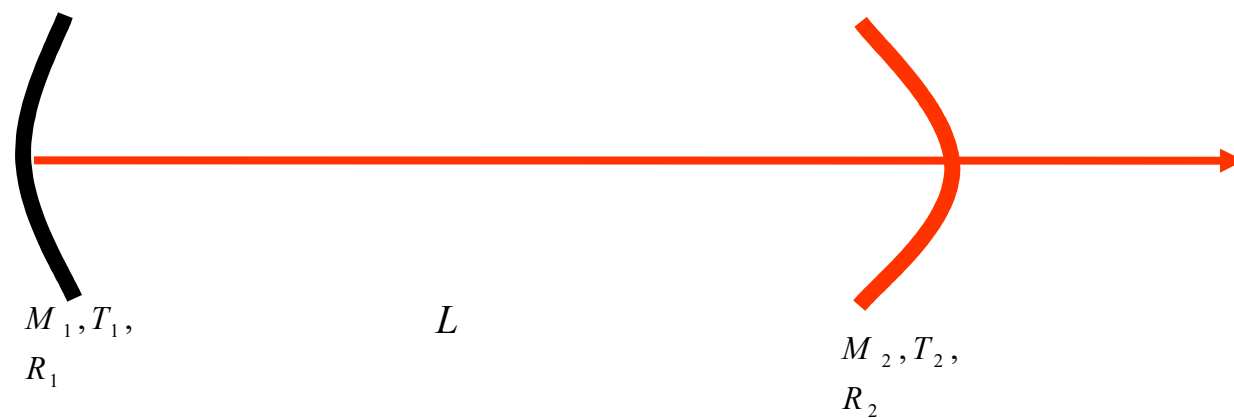
特例：对称共心球面镜腔：

腔镜曲率半径：

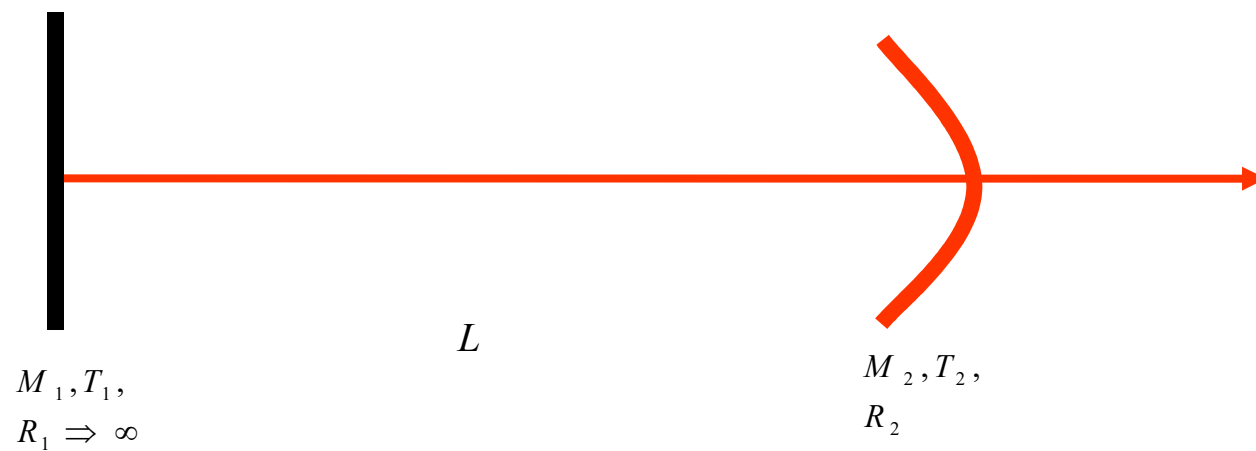
$$R_1 = R_2 = \frac{L}{2}.$$

*d*、一般双镜球面镜腔

腔镜曲率半径:  $R_1, R_2$ ; 腔长  $L$ ,  $M_1$ 、 $M_2$  相互平行

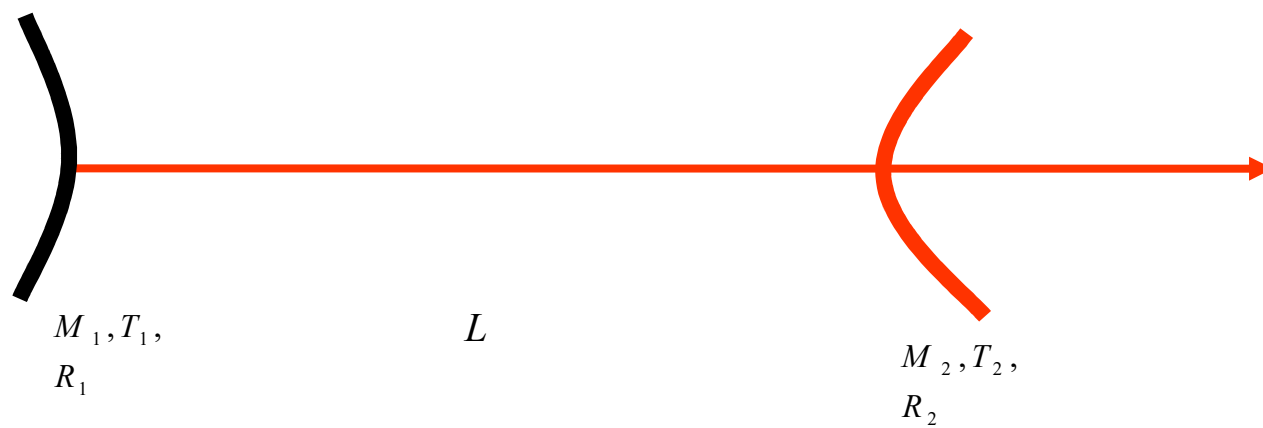


双凹腔



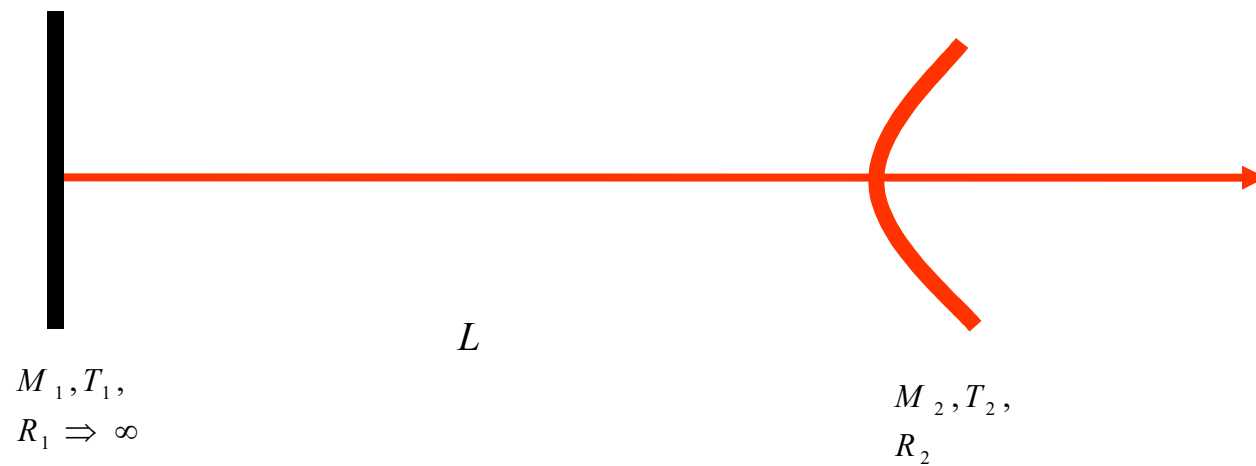
平凹腔

相当于腔长为 $2L$ 的对称双凹球面镜腔



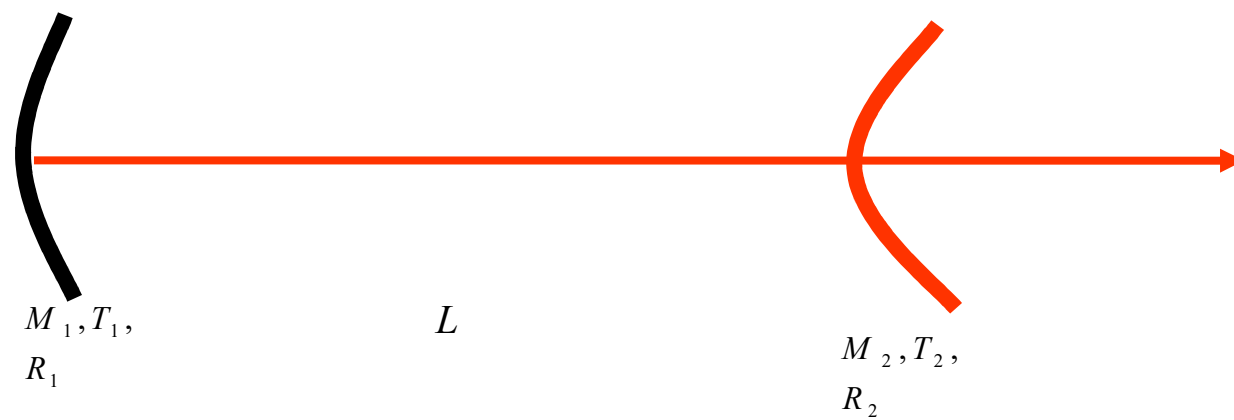
双凸腔





平凸腔

相当于腔长为 $2L$ 的对称双凸球面镜腔

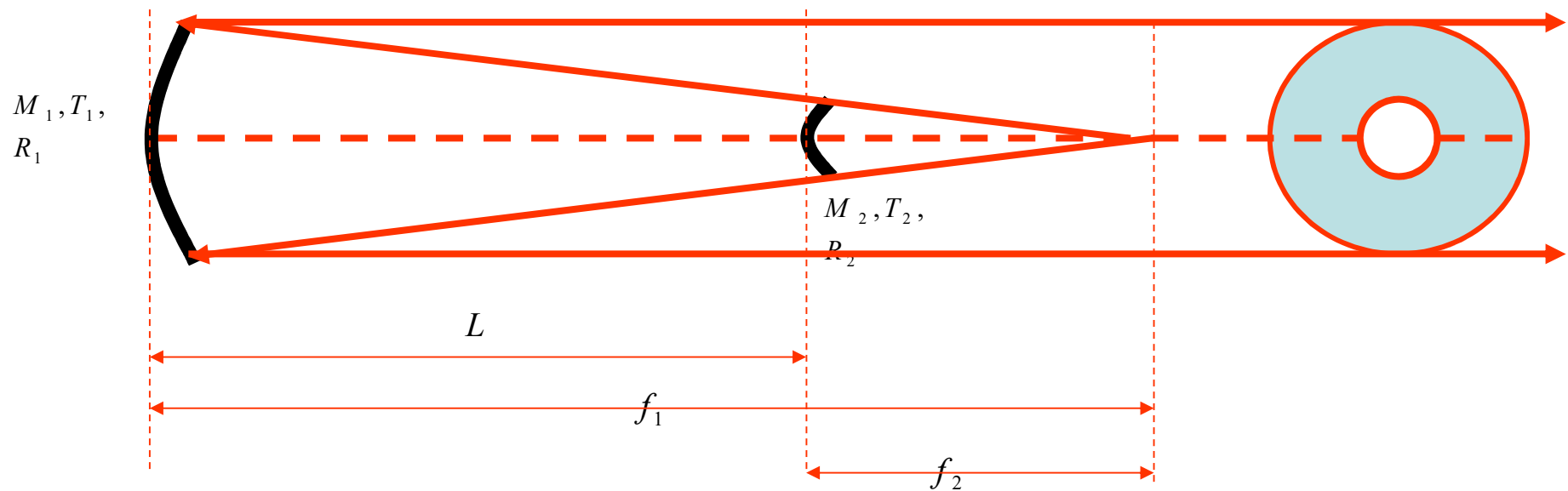


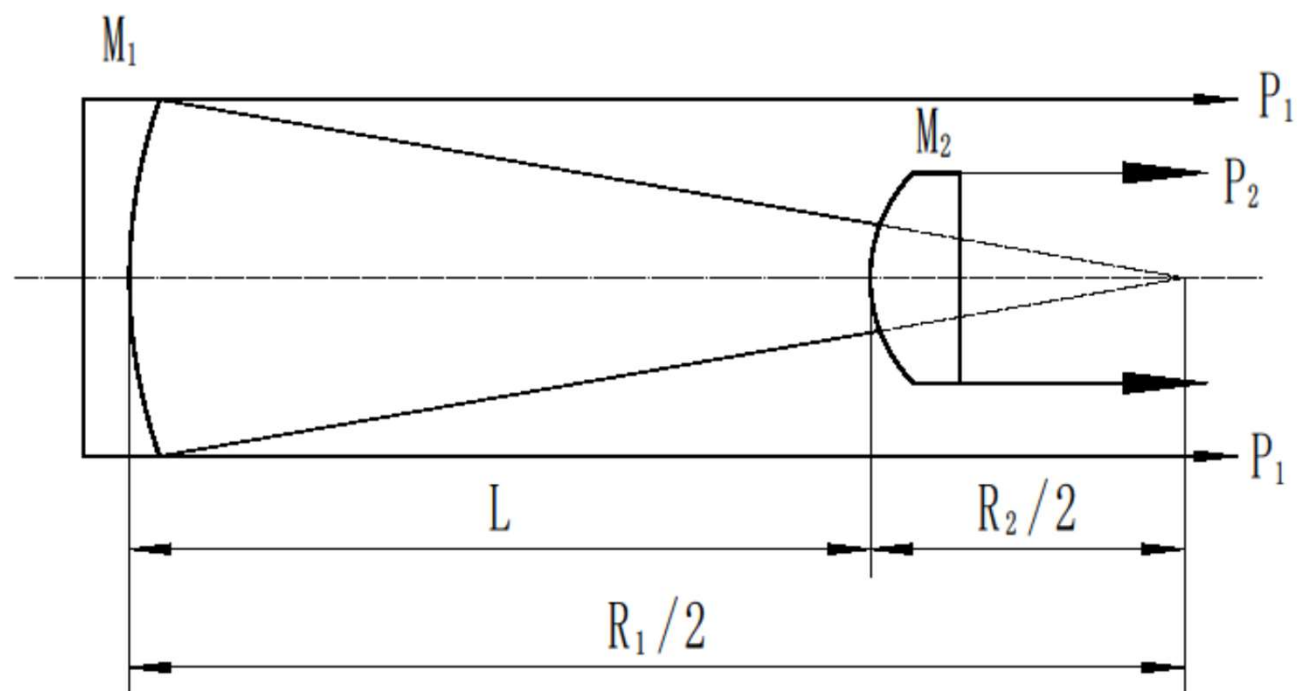
凹凸腔

e、虚共焦球面镜腔

腔镜曲率半径:  $f_1 - f_2 = L, \Rightarrow \frac{R_1}{2} - \frac{R_2}{2} = L$ ,  $M_1$ 、 $M_2$ 相互平行

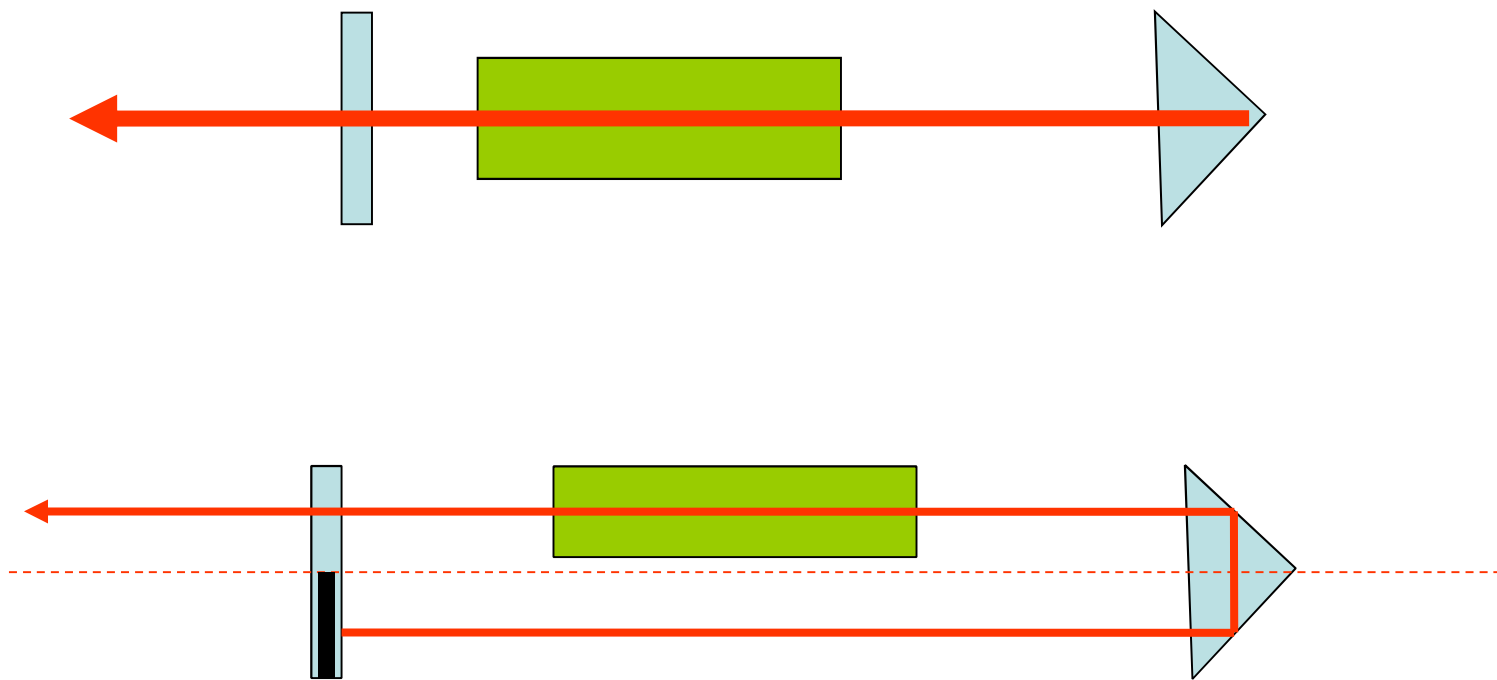
输出环形光束





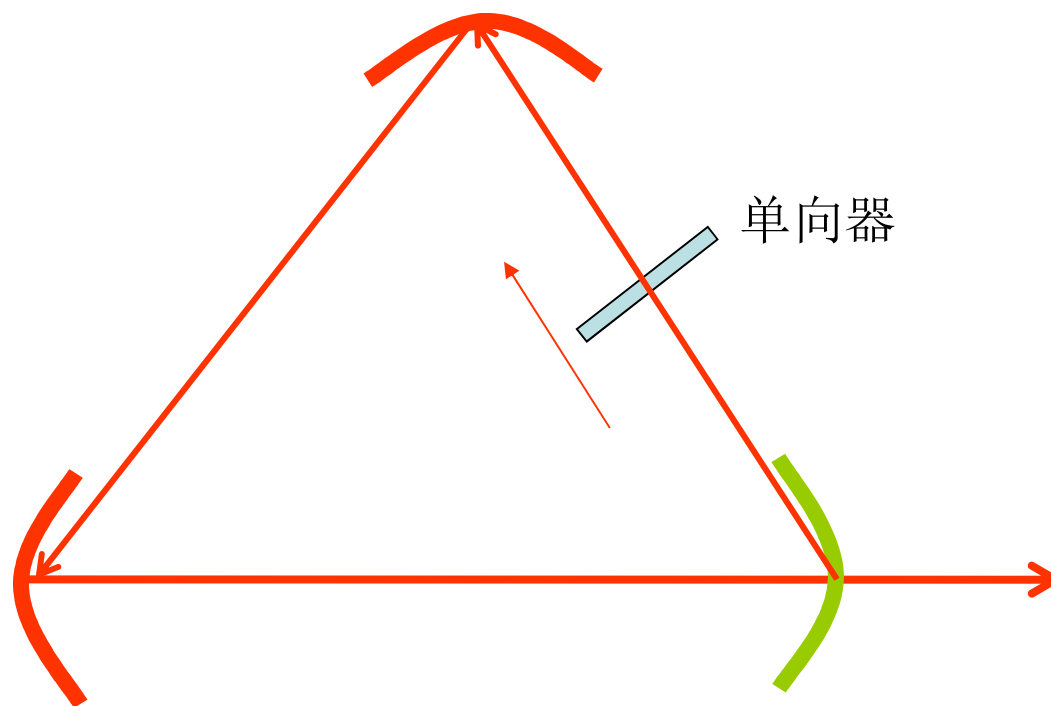
虚共焦望远镜型非稳定腔

$f$ 、平面 - 棱镜腔  
两种情况



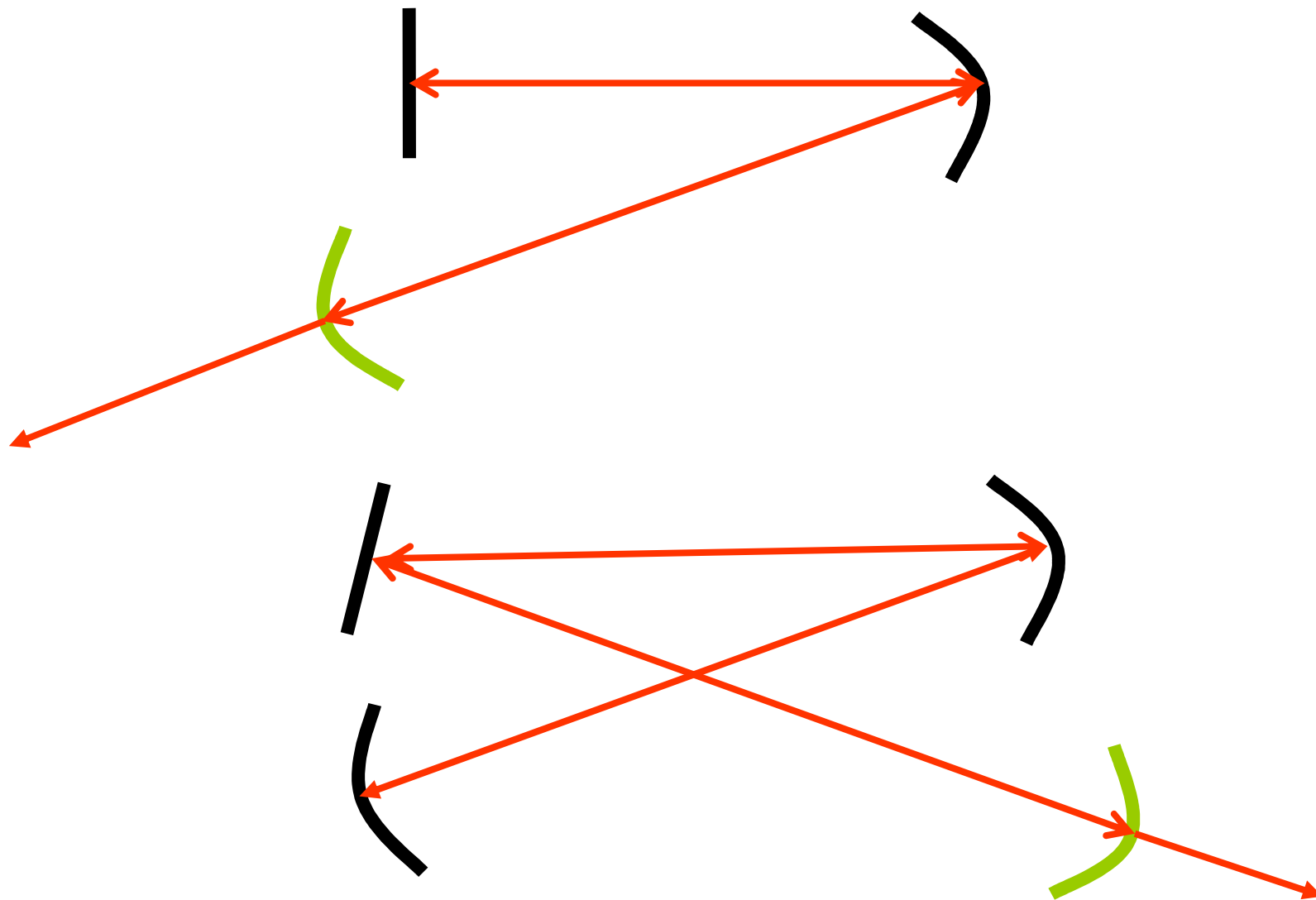
## 2、多镜腔

### *a*、环形腔

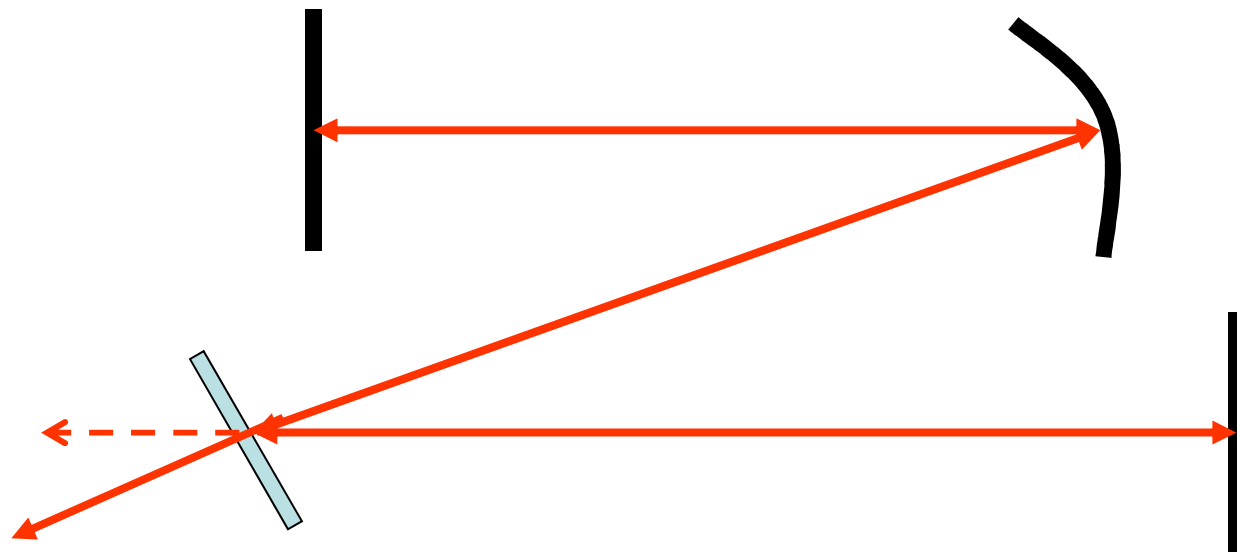


*b*、折迭腔

应该考虑象散补偿

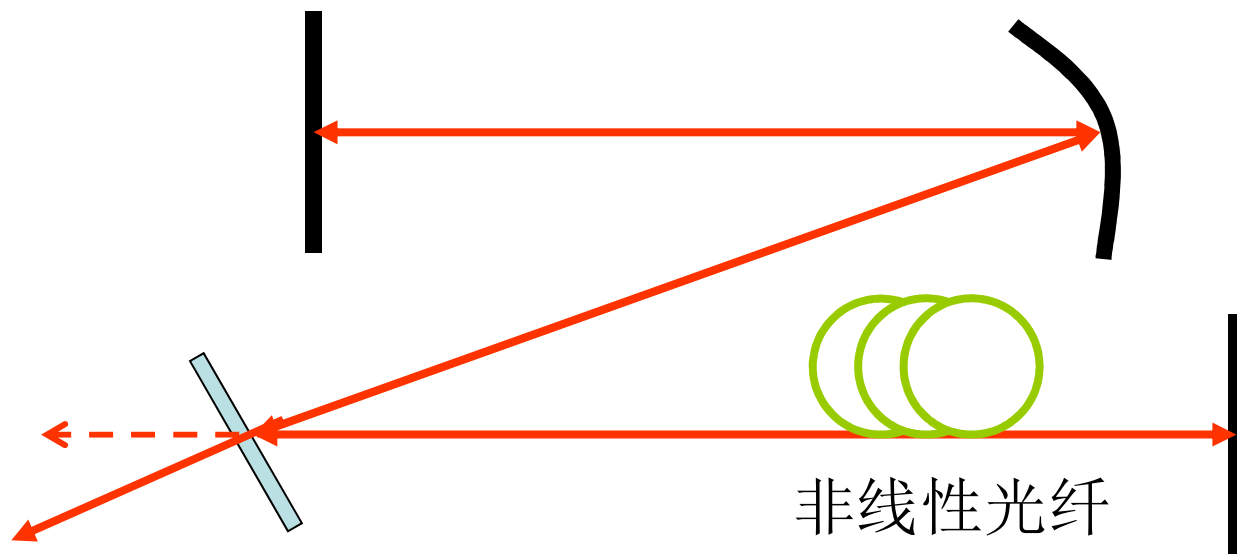


$c$ 、附加腔





附加腔



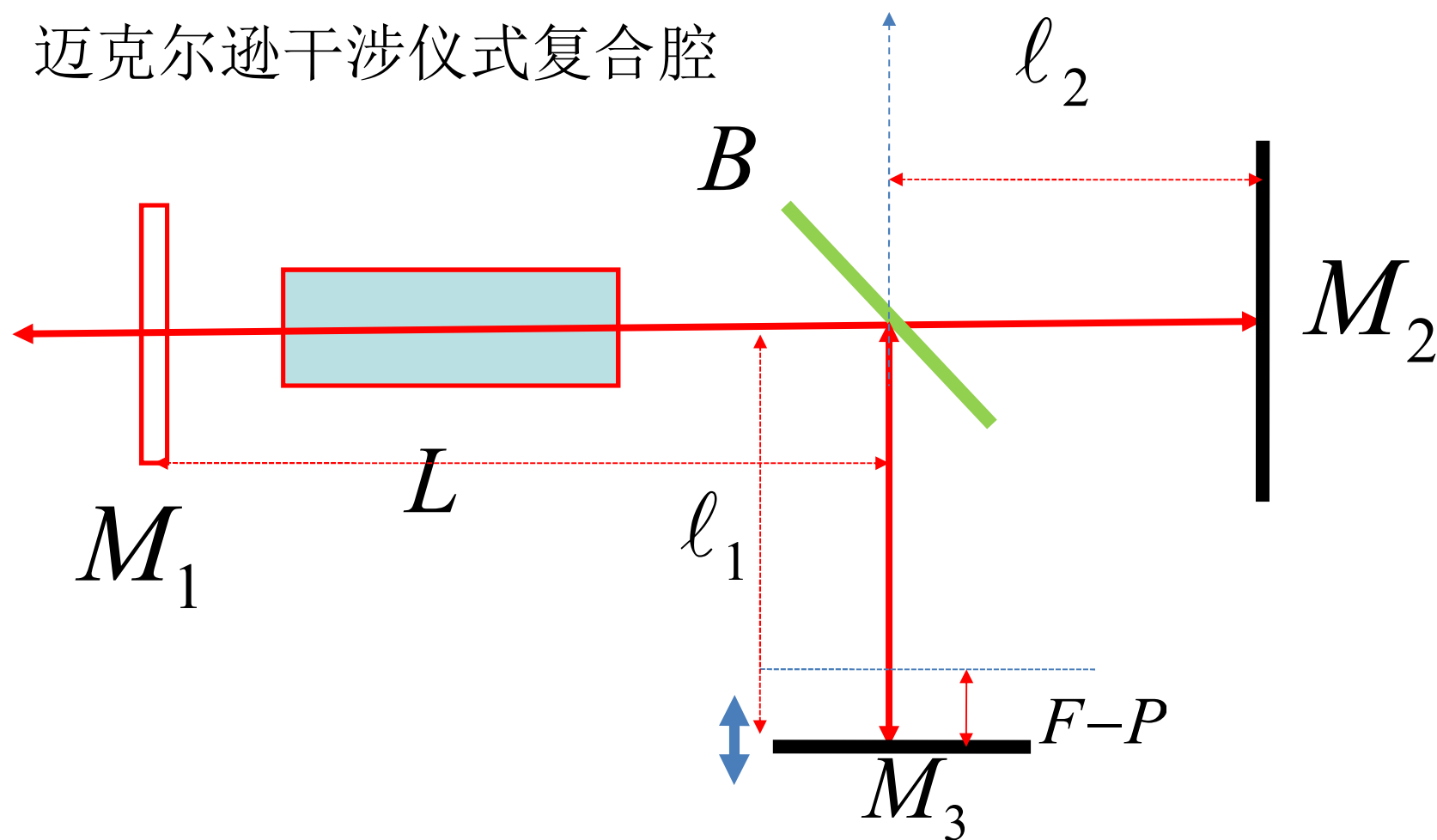
非线性光纤

- 复合腔

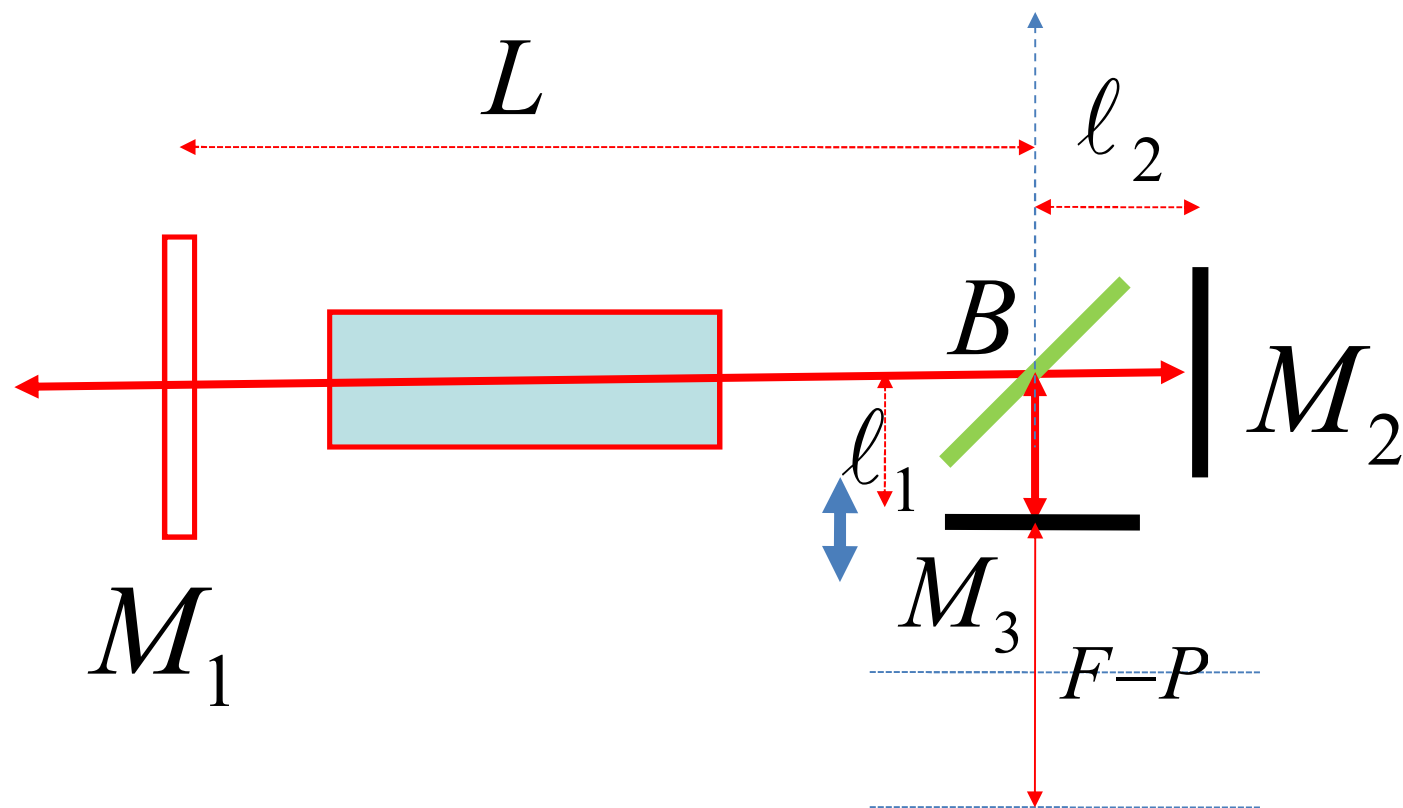
## 复合腔

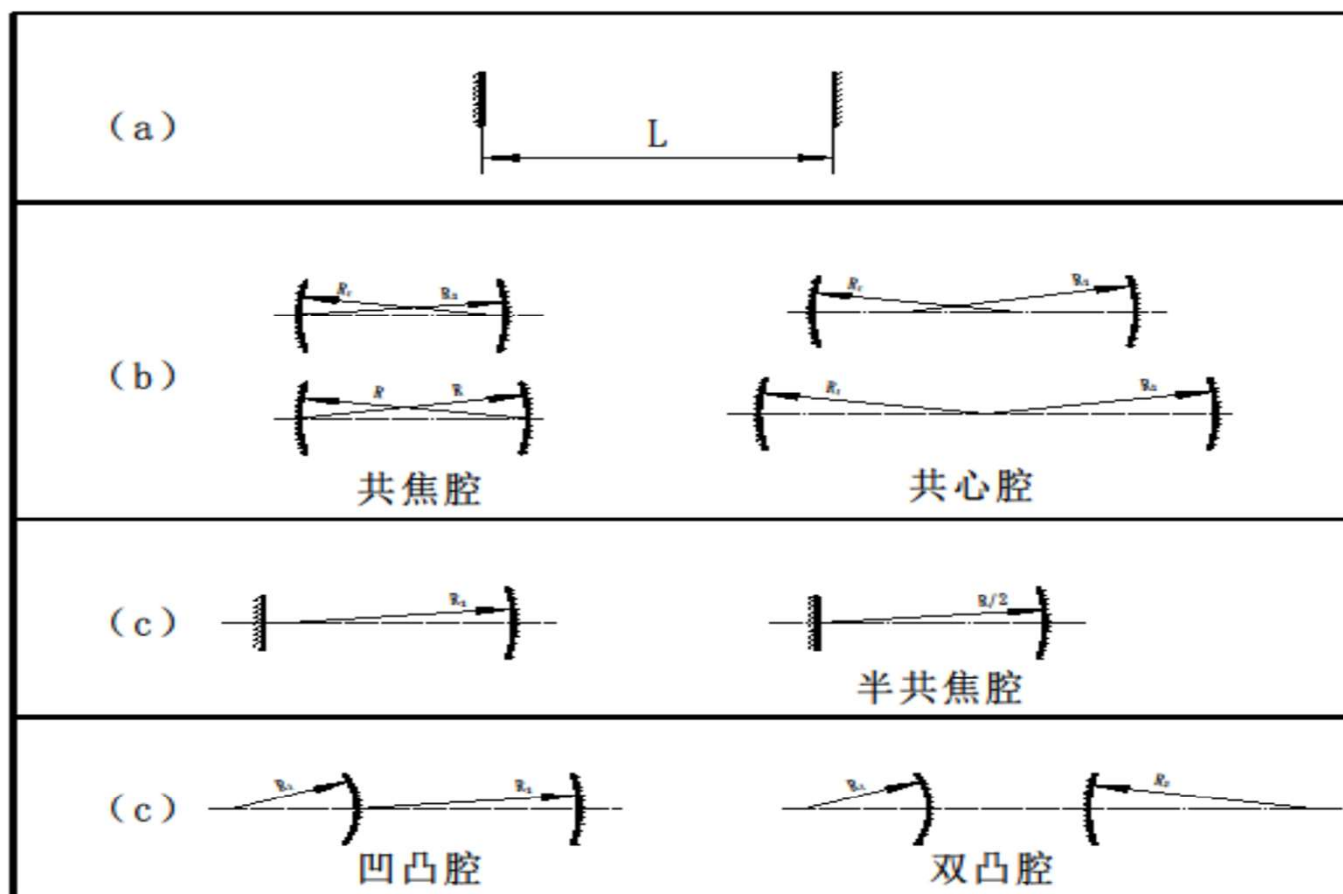
如果用一个反射干涉仪系统取代谐振腔中的一个反射镜，  
则其组合反射率是光波长（频率）的函数。

### 迈克尔逊干涉仪式复合腔



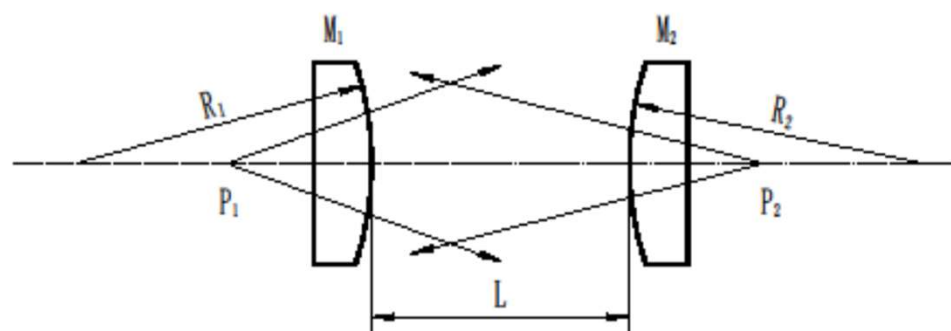
福克斯-史密斯干涉仪复合腔



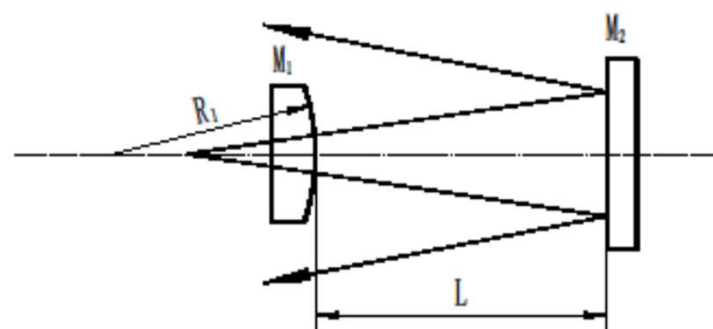


光学谐振腔的几种常见形式

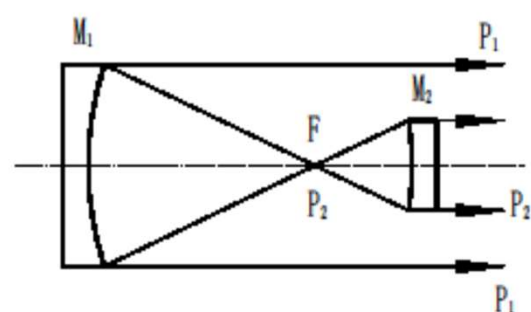
(a) 平行平面腔； (b) 凹球面镜腔；  
(c) 平凹腔； (d) 凹凸与双凸凹腔；



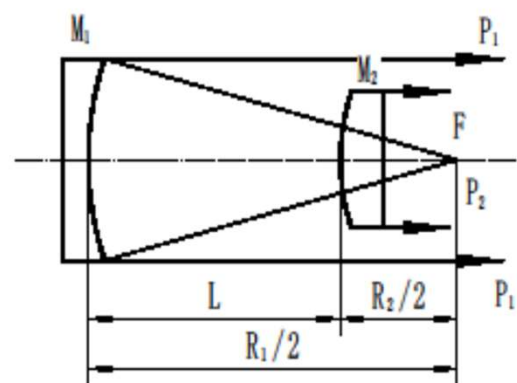
(a) 双凸腔



(b) 平凸腔



(c) 非对称实共焦腔



(d) 虚共焦腔

非稳定腔的四种主要形式

(a) 双凸腔；(b) 平凸腔；

(c) 非对称实共焦腔；(d) 虚共焦腔；

- 2、光学谐振腔质量指标

(1)、限模能力的大小——相邻两个模之间损耗差异之大小

(2)、模体积——某个模的光束在谐振腔中所占体积之大小

(3)、模损耗（模损耗绝对值）之大小；

(4)、腔镜调整精度之大小

在设计激光器谐振腔时，通常要综合考虑上述指标



### • 第三节、光学谐振腔的稳定性条件

- 光学谐振腔的几何光学分析
- 采用光束传输变换矩阵的方法
- 菲涅耳数很大(衍射损耗小)  $> 100$
- 以双球面镜腔为例来说明



图 1 开放式激光腔示意图。M1 和 M2 分别是两个腔镜，R1 和 R2 是两腔镜的半径. 注：该腔是球面镜腔，当  $R1=\infty$  且  $R2=\infty$  时候成为 F-P 腔



- 光线传输矩阵

- 
- $M(L) = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
-

自由空间

- 
- $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$
-

薄透镜

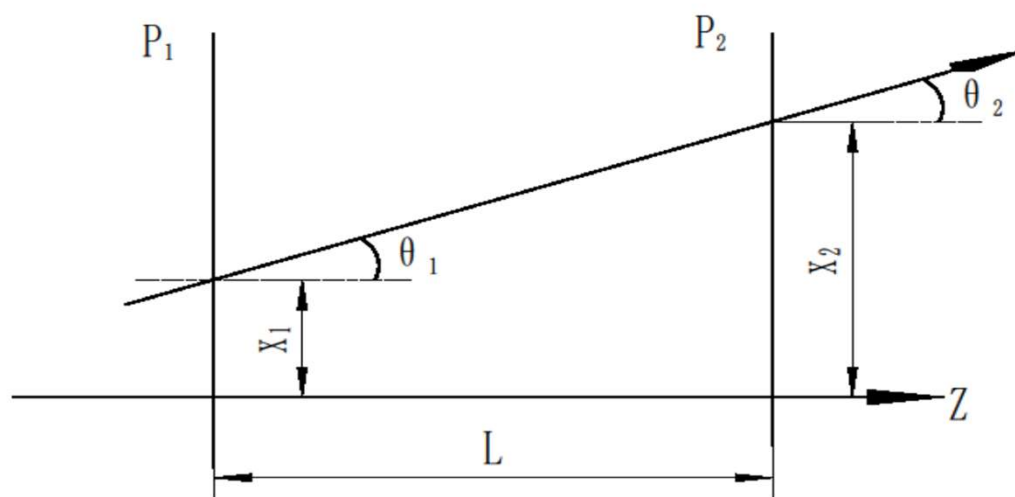
- 
- $M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$
-

球面全反射镜

$$x_2 = 1 \cdot x_1 + L \cdot \theta_1$$

$$\theta_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot \theta_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M(L) \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$



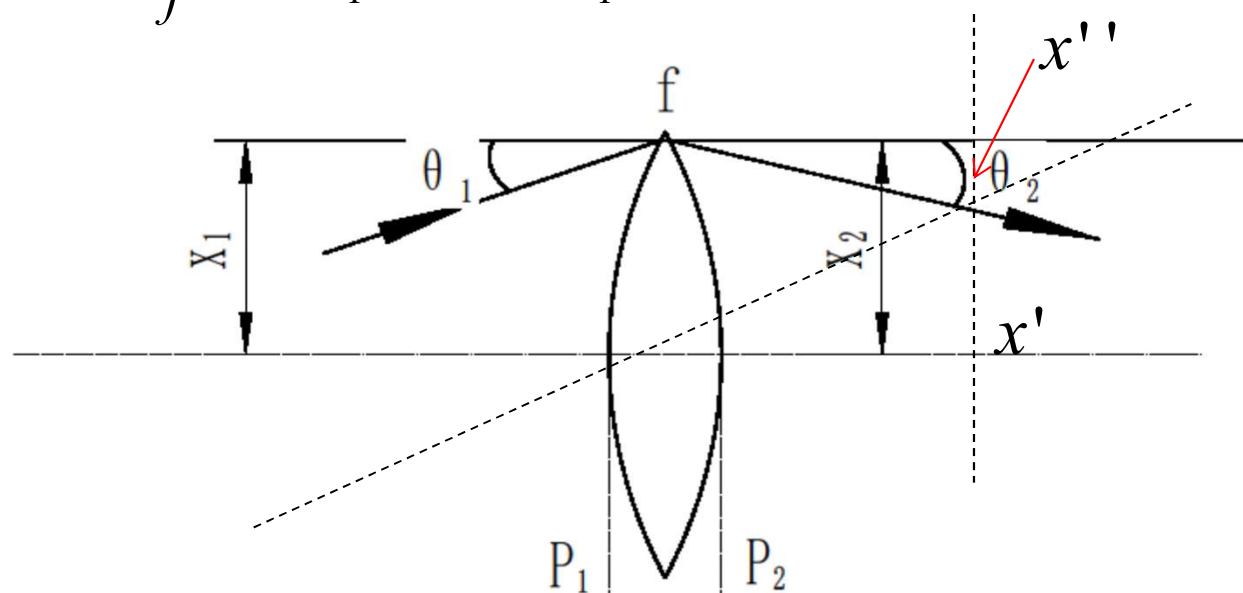
$$M(L) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

近轴光线通过长度 $L$ 均匀介质的传播

$$x_2 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot \theta_1,$$

$$x' + x'' = x_1 \Rightarrow -\theta_2 \cdot f + \theta_1 \cdot f = x_1$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \left(-\frac{1}{f}\right) \cdot x_1 + 1 \cdot \theta_1$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

光线通过薄透镜的变换

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

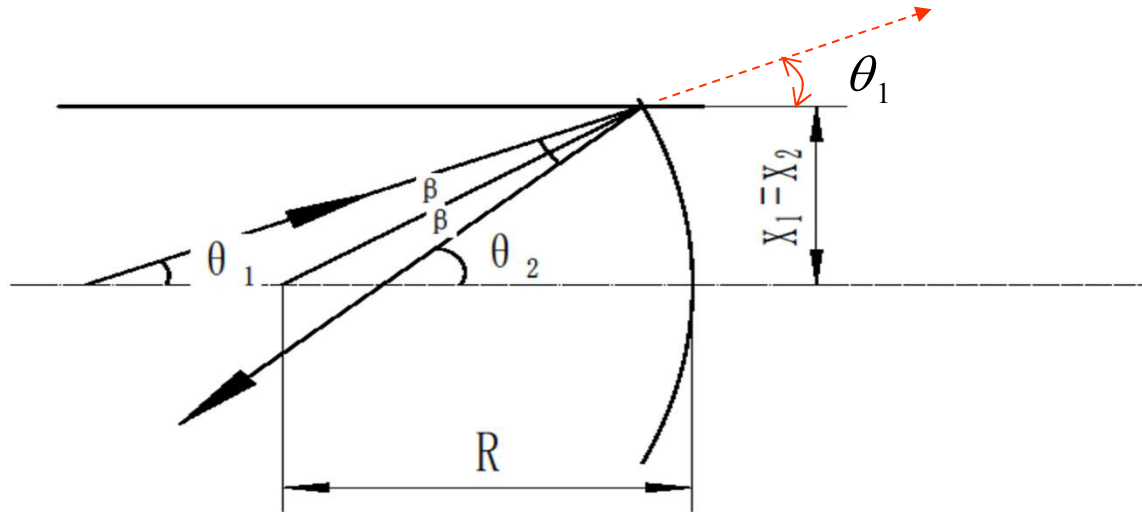
$$x_2 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot \theta_1$$

$$-\theta_2 = 2\beta + \theta_1, \dots (\theta_1 + \beta) \cdot R = x_1,$$

(近轴近似,  $R$  比较大)

$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{2}{R} \cdot x_1 + 1 \cdot \theta_1$$

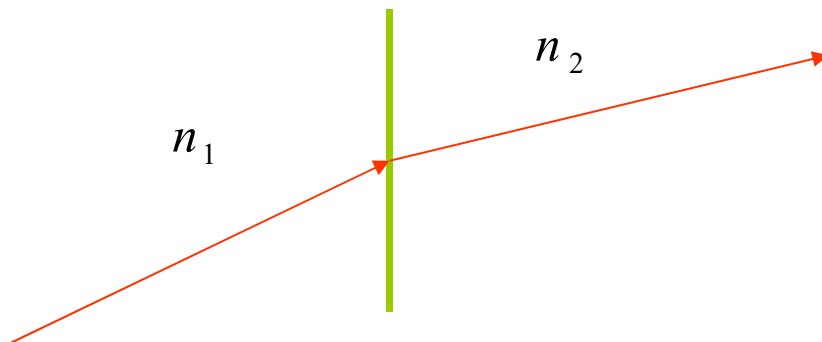
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M(R) \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$



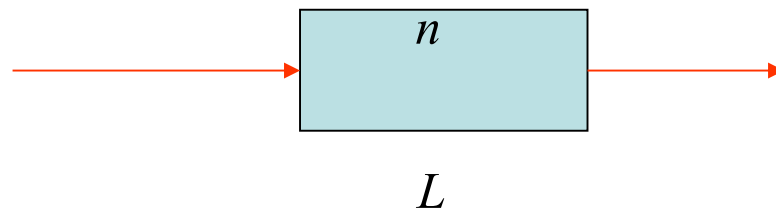
$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

球面反射的光线传播

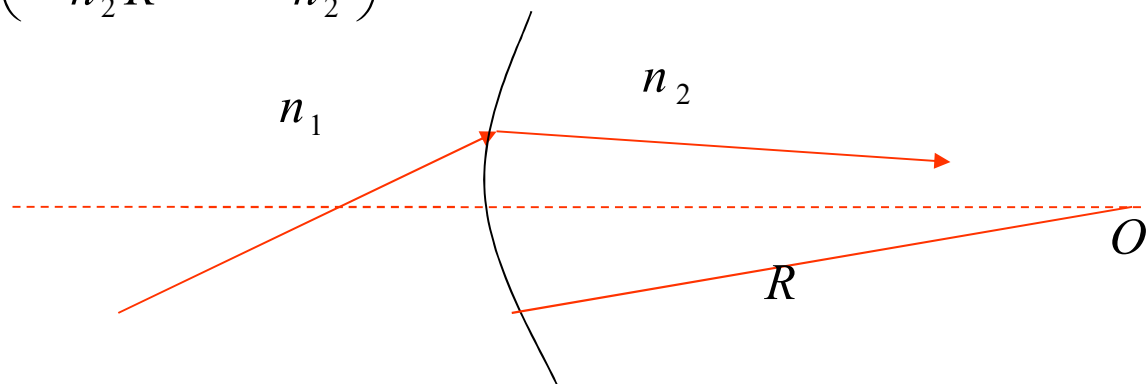
界面折射： $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$



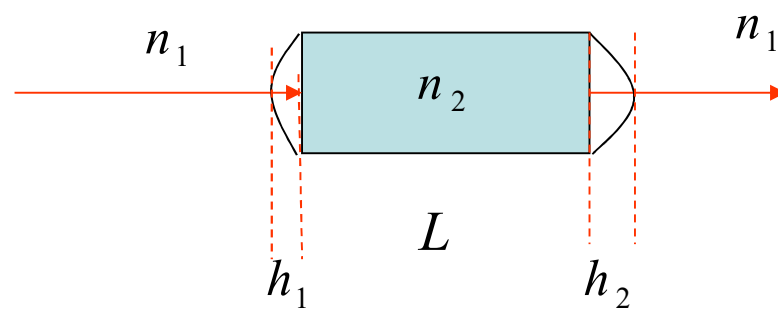
折射  $n$  长度  $L$  的均匀介质： $\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



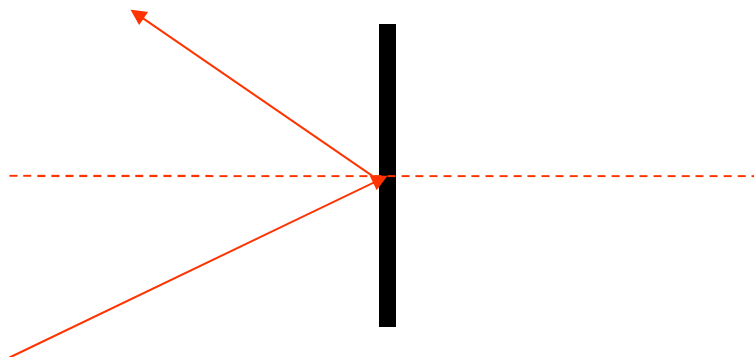
球面折射:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$



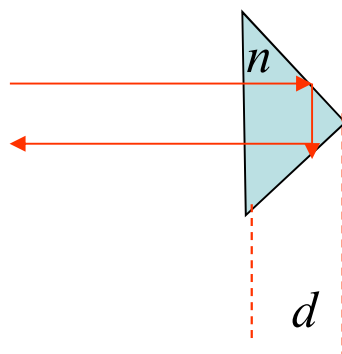
厚透镜:  $\begin{pmatrix} -1 - \frac{h_2}{f} & \frac{Ln_1}{n_2} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{h_1}{f} \end{pmatrix}$

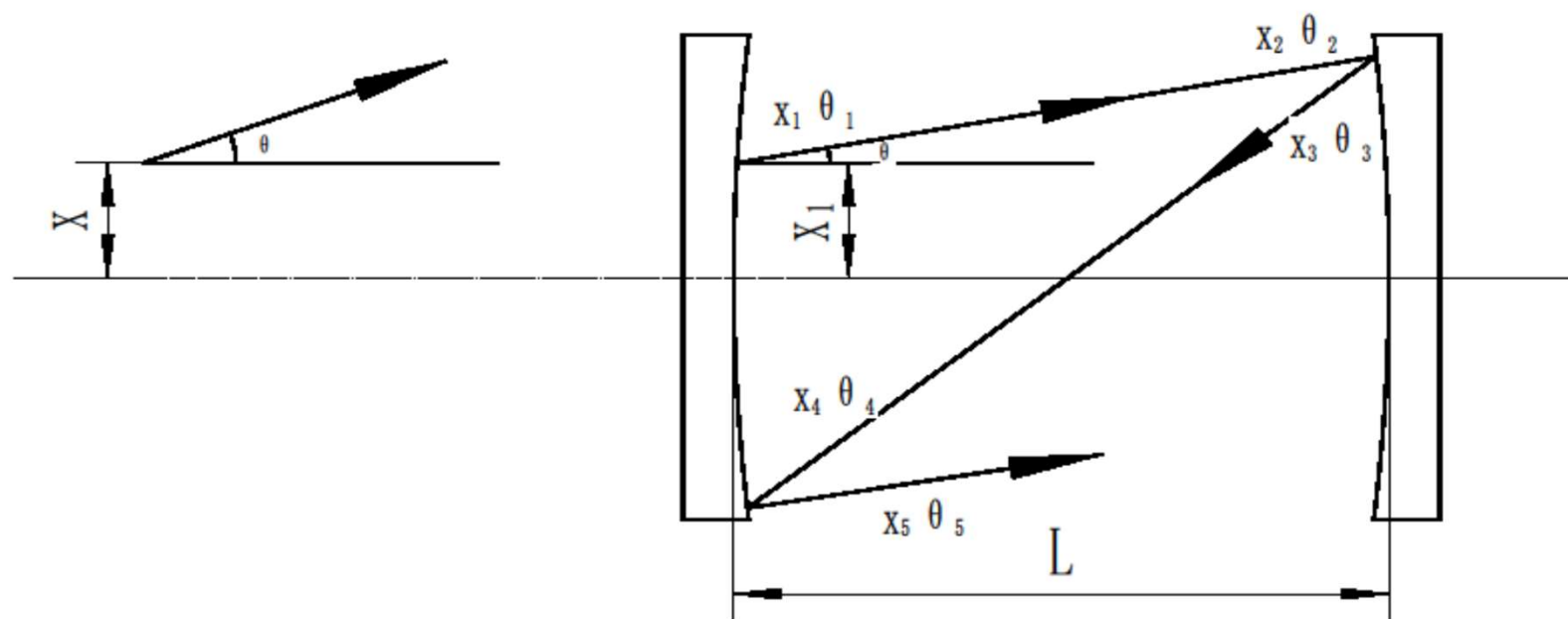


平面反射镜： $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



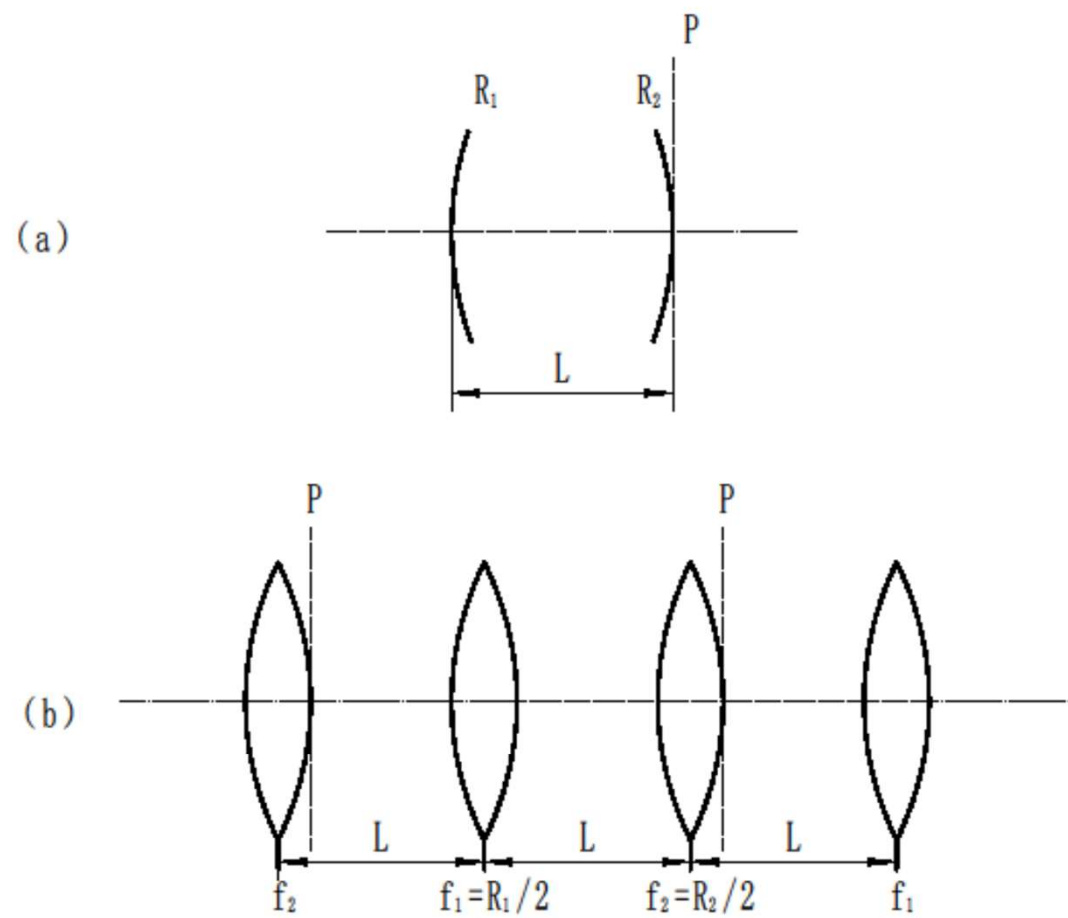
直角全反射棱镜： $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2d}{n} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$





光线在共轴球面腔中的往返传播





球面镜谐振腔和等效透镜序列

(a) 一般球面腔； (b) 等价周期透镜传输线

## 腔内光线往返一次后的光线传播矩阵

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{pmatrix} x_5 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = M(R_1)M(L)M(R_2)M(L) \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \\ & \bullet \\ & \bullet \end{aligned}$$

$$A = 1 - \frac{2L}{R_2}$$

$$B = 2L(1 - \frac{L}{R_2})$$

$$C = -[\frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_2}(1 - \frac{2L}{R_1})]$$

$$D = -[\frac{2L}{R_1} - (1 - \frac{2L}{R_1})(1 - \frac{2L}{R_2})]$$

- 谐振腔稳定性条件
- 如果激光束在共轴球面腔内经多次反射后，其位置仍“紧靠”光轴，那么该光学谐振腔是稳定的；
- 如果光束从腔内“逸出”反射镜之外，即横向逸出腔外，那么该光学谐振腔是不稳定的。

- 腔内光线往返n次后的传播矩阵方程为：
- (利用了矩阵理论中的薛尔凡斯特Sylvester定理)

$$M^n = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A \sin n\theta - \sin(n-1)\theta & B \sin n\theta \\ C \sin n\theta & D \sin n\theta - \sin(n-1)\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}$$

$$A = 1 - \frac{2L}{R_2}$$

$$B = 2L(1 - \frac{L}{R_2})$$

$$C = -[\frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_2}(1 - \frac{2L}{R_1})]$$

$$D = -[\frac{2L}{R_1} - (1 - \frac{2L}{R_1})(1 - \frac{2L}{R_2})]$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{2}(A + D)$$

- 对于稳定的序列，光束是有界的，即，当传输矩阵“ $M_n$ ”的矩阵元为有限的实数时，近轴光线在腔内往返进行无限次后，不会横向逸出腔外，要求矩阵元为实数，则要求 $\theta$ 为实数。对于不稳定序列，方程中的三角函数变成双曲线函数，这表明光束通过序列时将越来越发散，光束是无界的，因此，稳定性条件是：

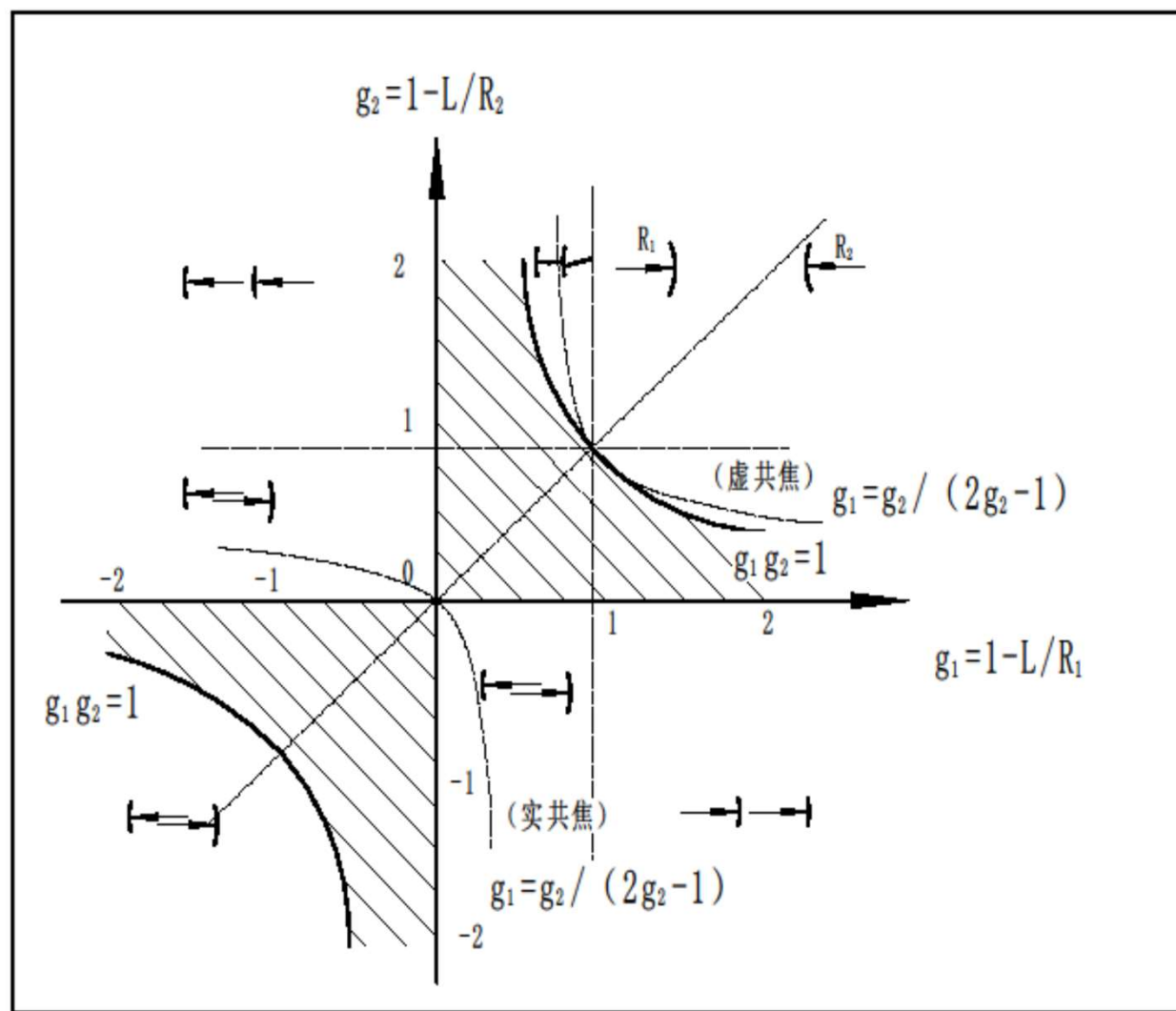
$$-1 < \frac{1}{2}(A + D) < 1$$

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1$$

- 引入两因子来表示谐振腔的几何参数

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \qquad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

- $0 < g_1 g_2 < 1$  此式称为共轴球面腔的稳定性条件。
- 式中当凹面镜向着腔内时， $R$ 为正值；而当凸面镜向着腔内时 $R$ 取负值。
- 如果 $g_1 g_2 > 1$ 或 $g_1 g_2 < 0$  则为非稳定腔； $g_1 g_2 = 1$ 或 $g_1 g_2 = 0$  为临界腔（介稳腔）。



谐振腔的稳定性图

- 上述的稳定性条件  $0 < g_1 g_2 < 1$  只是双镜腔的结果.
- 对于多镜腔,则要从腔内光线往返传输矩阵来推导.
- 不同的腔型,腔内光线往返传输矩阵是不同的.

## 第四节、光学谐振腔的衍射理论要点

- 自再现模 + 惠更斯-菲涅耳原理(菲涅耳-基尔霍夫公式)+光学谐振腔
- $\longrightarrow$  光学谐振腔的自洽衍射积分方程

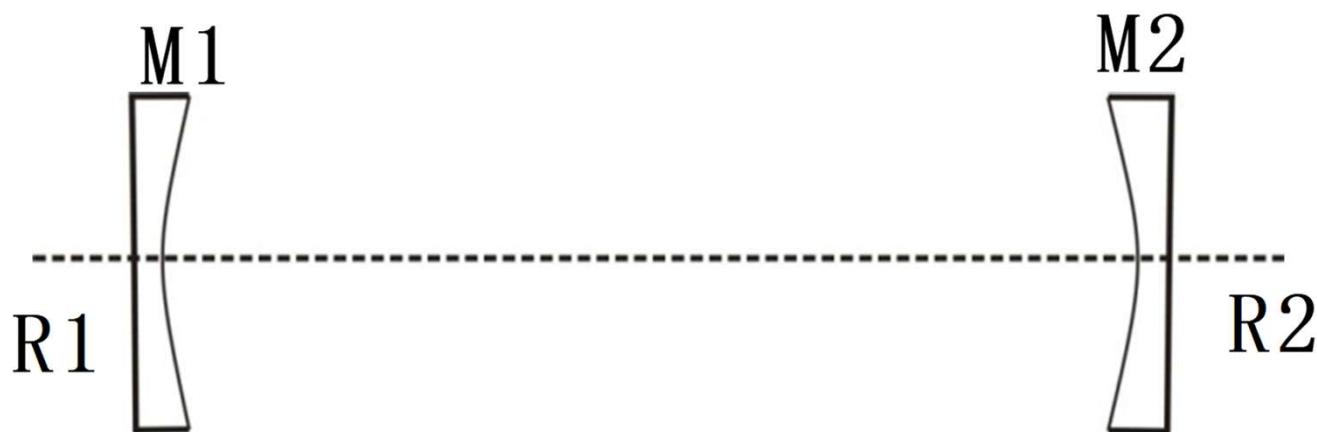


图 1 开放式激光腔示意图。M1 和 M2 分别是两个腔镜，R1 和 R2 是两腔镜的半径。注：该腔是球面镜腔，当  $R1=\infty$  且  $R2=\infty$  时候成为 F-P 腔



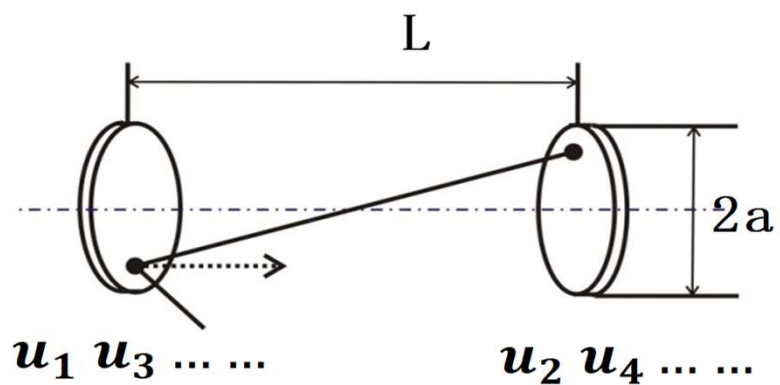


图 2-1

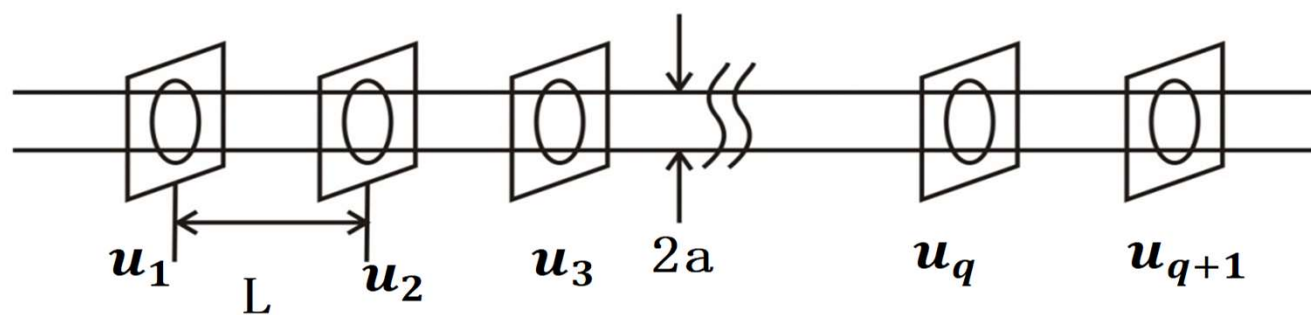
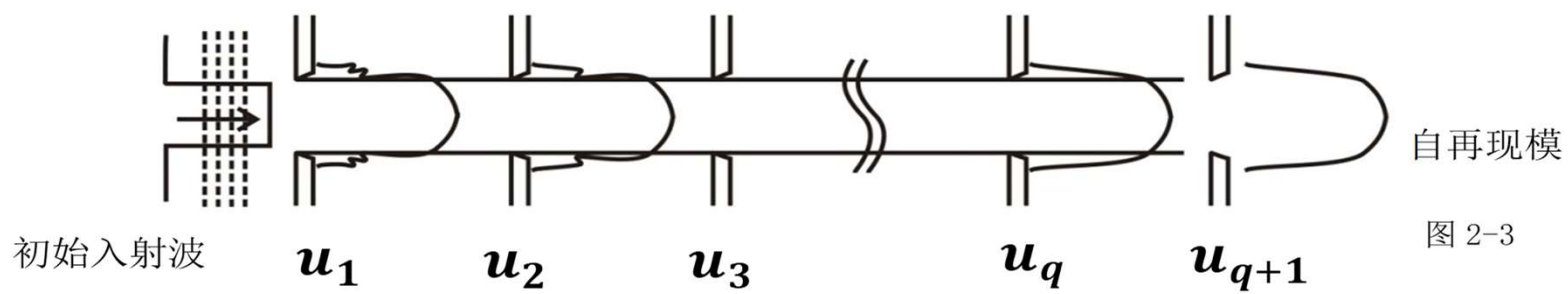


图 2-2



自再现模

图 2-3

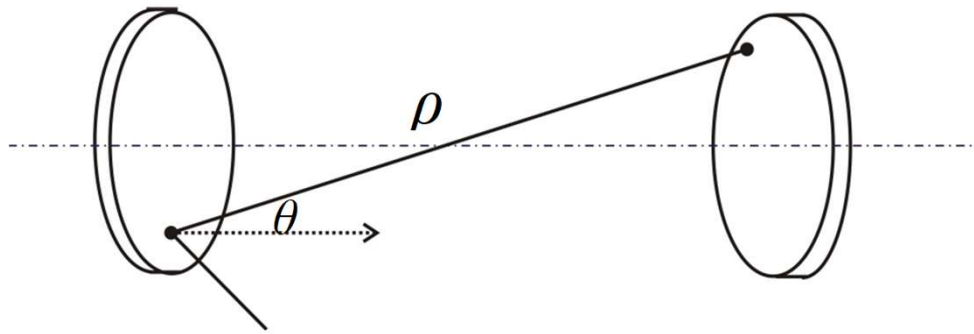
图 2 自再现模的形成过程描述

- 腔镜M1上的光场分布，到达镜M2时，由于衍射效应，要经历一次能量的损耗和场分布的变化，中间能量损失小，镜边缘损失大，每渡越一次，都会发生类似的能量损耗和场分布变化。多次往返后，从而逐渐形成中间强、边缘弱的基本不受衍射影响的相对稳态的场分布，该相对稳态的场分布一个往返后可“自再现”出发时的场分布，唯一变化是镜面上各点的场振幅按同样的比例衰减，各点相位发生同样大小的滞后。该稳定场形成过程就叫做腔模的自再现，形成的模式叫做自再现模。

- 自再现模是多次衍射的结果，与初始波形无关，但不同的初始波形最终形成的场分布不同，而自辐射可提供不同的初始波形，因此决定了自再现模的多样性。每经过一次衍射，光束横截面上各点的相位关联度变增加一次，则由于经过足够多次衍射的作用后，光束横截面上各点的相位关联越来越紧密，从而使光的空间相干性变强。在无源开腔中，自再现模的形成过程和场的空间相干性的增强过程，都不可避免地伴随着初始入射波能量的衰减，不足以形成激光。在激活腔中，只要某一自再现模能满足阈值条件，则该模在腔内就可以形成自激振荡。自再现模的形成过程伴随着光的受激放大，其结果是，光谱不断变窄，空间相干性不断增强，光强不断增大，最终形成高强度的激光输出。

- **惠更斯-菲涅耳原理**是分析衍射现象的理论基础，定量处理开腔模式问题的数学理论是菲涅耳-基尔霍夫衍射积分。运用以上两个工具，可以实现：如果知道了光波场在其所达到的任意空间曲面上的振幅和相位分布，就可以求出该光波场在空间其他任意位置处的振幅和相位分布。
- 这种方法主要求解光学谐振腔的**菲涅尔-基尔霍夫衍射积分方程**。积分方程的本征值描述了谐振腔的损耗特性，本征函数描述了光场分布（模）。但积分方程一般不存在解析解，只能用计算机进行数值求解。**对于实对称共焦球面镜腔可以获得近似解析解。**

- 设为已知空间任一曲面 $S$ 上光波场的振幅和相位分布函数 $u(x', y')$ ，这里 $(x', y')$ 为 $S$ 面上点的坐标。由它在所要考察的空间任一点 $P$ 处产生的场为 $u(x, y)$ ，这里 $(x, y)$ 为观察点 $P$ 的坐标。有下列关系式



$$u(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \iint u(x', y') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) ds'$$

- 将此积分公式应用到开腔的两个镜面上的场，则有

$$u_2(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \iint u_1(x', y') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) ds'$$

- 式中为镜1上的场分布；为由经腔内一次渡越后在镜2上生成的场。

- 经过j次渡越后所生成的场与产生它的场之间亦应满足类似的迭代关系

- $$u_{j+1}(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \iint u_j(x', y') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) ds'$$

- 按照自再现观点，当渡越次数 $j$ 足够大时，除了一个表示振幅衰减和相位移动的复常数因子 $\gamma$ 以外， $u_{j+1}$ 应该再现 $u_j$ ，则：

$$u_{j+1} = \frac{1}{\gamma} u_j, \quad u_{j+2} = \frac{1}{\gamma} u_{j+1}, \quad \dots$$

- 代入迭代关系得到：

$$\left. \begin{aligned} u_j(x, y) &= \gamma \frac{ik}{4\pi} \iint_S u_j(x', y') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos\theta) ds', \\ u_{j+1}(x, y) &= \gamma \frac{ik}{4\pi} \iint_S u_{j+1}(x', y') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos\theta) ds', \quad \dots \end{aligned} \right\}$$



- 则不受衍射影响的稳态场分布函数  $v(x, y)$  为:

$$u(x, y) = \gamma \int_S K(x, y, x', y') u(x', y') ds'$$

- 即开腔自再现模应满足的积分方程式---自洽衍射积分方程, 其中的积分核为:

$$K(x, y, x', y') = \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos\theta)$$

- 满足上述方程的任意一个分布函数  $v(x, y)$  就描述腔的一个自再现模或横模。
- 一般  $v(x, y)$  应为复函数, 它的模描述镜面上场的振幅分布, 而其辐角描述镜面上场的相位分布。

- 当腔长 $L$ 和镜线度 $a$ 满足： $L \gg a$ ，或曲面反射镜的曲率半径 $R$ 和镜线度 $a$ 满足： $R \gg a$ 时，有：

$$\frac{1 + \cos \theta}{\rho} \approx \frac{2}{L}$$

- 则初步简化后的自再现模方程（自洽衍射积分方程）为：

- $$u(x, y) = \gamma \iint_S K(x, y, x', y') u(x', y') ds'$$

- 其中

$$K(x, y, x', y') = \frac{i}{\lambda L} e^{-ik\rho}$$

- 的复常数因子 $\gamma$ 的物理涵义
- 表示自再现模的振幅衰减和相位移动
- 

$$\gamma = e^{\alpha + i\beta}$$

$$u_{j+1} = \frac{1}{\gamma} u_j, \quad u_{j+2} = \frac{1}{\gamma} u_{j+1}, \quad \dots$$

$$u_{j+1} = \frac{1}{\gamma} u_j = (e^{-\alpha} u_j) e^{-i\beta}$$

- 光功率 $W$ , 单程损耗因子 $\gamma_{\text{损}}$  ,

$$W = |u_q|^2, |u_{q+1}|^2 = \left| \frac{1}{\gamma} \right|^2 W,$$

$$\gamma_{\text{损}} = \frac{|u_q|^2 - |u_{q+1}|^2}{|u_q|^2} = 1 - e^{-2\alpha} = 1 - \left| \frac{1}{\gamma} \right|^2$$

- 单程渡越总相移:  $\Phi = \arg u_{q+1} - \arg u_q$
- 对于对称腔型有:  $\Phi = -\beta = \arg\left(\frac{1}{\gamma}\right)$
- 谐振条件(驻波条件):  $2\Phi=2q\pi$ ,  $q$ 为正整数, 对称开腔自再现模的 谐振条件---可得谐振频率(纵模频率)

$$\Phi = -\beta = \arg\left(\frac{1}{\gamma}\right) = q\pi$$

- 平行平面腔在激光发展史上最先被使用，但平行平面腔振荡模所满足的自在现积分方程尚得不到确切的解析解，只能用迭代解法。福克斯和厉鼎毅(Fox-Li)首先用计算机完成了这样的计算，求出了各种几何形状的平行平面腔、圆形镜共焦腔等的一系列腔的自再现模。

- 对于一个对称矩形平面镜腔 (尺寸为  $2a \times 2b$  , 其中), 有:

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + L^2}$$

$$= L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x'}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - y'}{L} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{x - x'}{L} \right)^4 - \frac{1}{8} \left( \frac{y - y'}{L} \right)^4 + \dots \right]$$

- 若满足:  $\frac{a^2}{L\lambda} \ll \left( \frac{L}{a} \right)^2, \frac{b^2}{L\lambda} \ll \left( \frac{L}{b} \right)^2$  可做近似:

$$e^{-ik\rho} = e^{-ik \left[ L + \frac{(x-x')^2}{2L} + \frac{(y-y')^2}{2L} \right]} = e^{-ikL} e^{-ik \left[ \frac{(x-x')^2}{2L} + \frac{(y-y')^2}{2L} \right]}$$

- 则模方程变为:

$$U(x,y) = \gamma \left( \frac{i}{\lambda L} \right) e^{-ikL} \int_{-a-b}^{+a+b} \int U(x',y') e^{-ik \left[ \frac{(x-x')^2}{2L} + \frac{(y-y')^2}{2L} \right]} dx' dy'$$

- 分离变量, 令:  $U(x,y) = U(x)U(y)$

$$K_x \left( x, \ x' \right) = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}} e^{-ikL} e^{-ik \left[ \frac{(x-x')^2}{2L} \right]}$$

$$K_y \left( y, \ y' \right) = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}} e^{-ikL} e^{-ik \left[ \frac{(y-y')^2}{2L} \right]}$$



- 模方程变为两形式完全一样的方程，求一个即可：

- $$U(x) = \gamma_x \int_{-a}^{+a} K_x(x, x') U(x') dx' \quad \text{或者} \quad U(y) = \gamma_y \int_{-b}^{+b} K_y(y, y') U(y') dy'$$

- 方程的解有多个，其中第 $m$ 和第 $n$ 个分别为 $v_m(x)$ 和 $v_n(y)$ ， $\gamma_m$ 和 $\gamma_n$ 为相应的复常数，则积分本征值方程为：

$$U_m(x) = \gamma_m \int_{-a}^{+a} K_x(x, x') U_m(x') dx' \quad U_n(y) = \gamma_n \int_{-b}^{+b} K_y(y, y') U_n(y') dy'$$

- 镜面上的场分布为：

$$U_{mn}(x, y) = U_m(x)U_n(y)$$

- 相应的复常数为：

$$\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n$$

- 取与Fox-Li相同的结构参数，即波长为  $632.8nm$  取腔镜的菲涅尔数  $N = \frac{a^2}{\lambda L} = 6.25$  ，实际计算中取得  $a = 25\lambda$  ，  $L = 100\lambda$  ，增益系数的单位为  $cm^{-1}$ ，输入光为平面波，(用Matlab程序设计计算)即得到结果如下

图 3-1 空间位置—相对振幅关系图

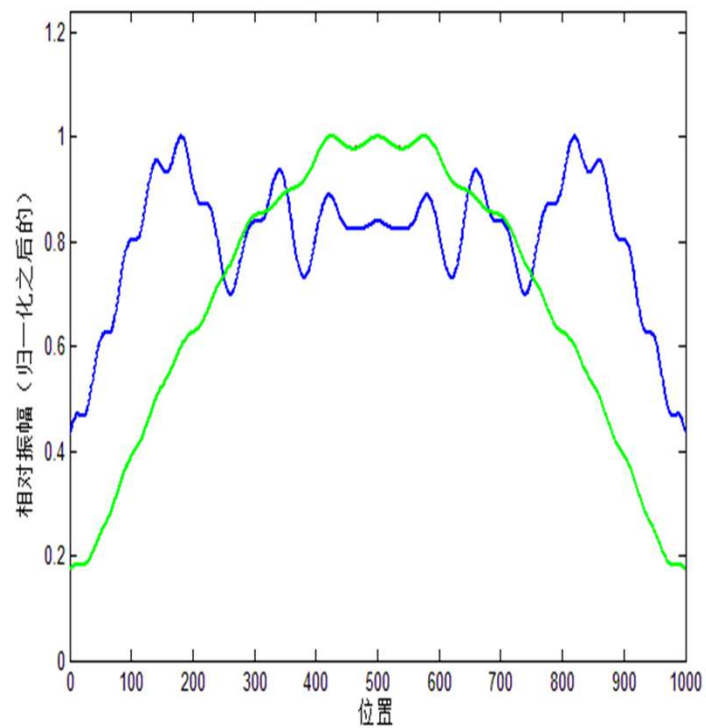


图 3-2 空间位置—相对相位变化关系图

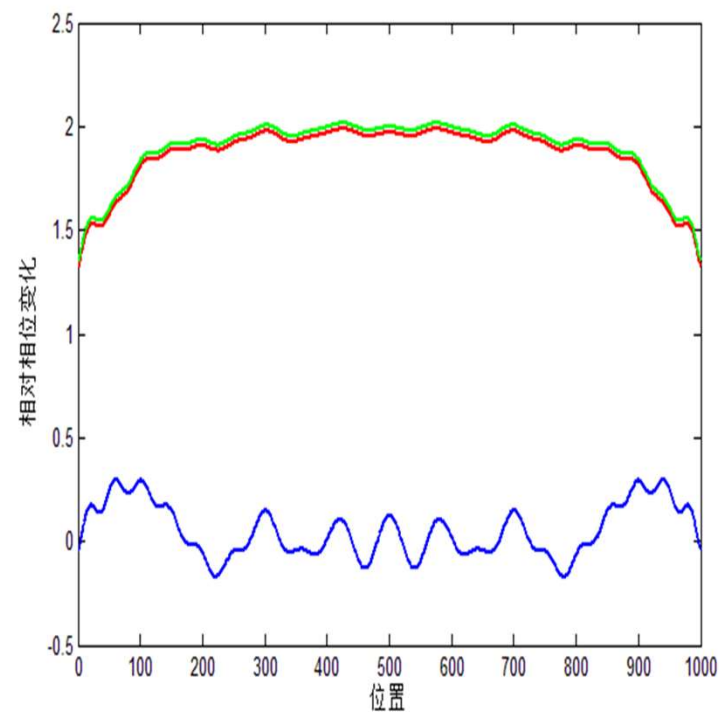


图 3 Matlab 计算结果

图 3 中蓝色的线表示第一次迭代的结果，红色和绿色的线表示 299 次和 300 次迭代的结果

(注：图 1 中红色和绿色重叠)。

- 由图3可知,初始场在经过第1次渡越后的振幅和相位随着腔面坐标的变化而急剧地起伏。随后的几次渡越,每一次渡越都对场分布发生了明显的影响。在经过第300次渡越后,振幅分布达到了稳定状态,呈现出近似高斯分布;而稳定后的相位分布,曲线上的起伏较小,中间区域接近平面波分布。将具有这种特征的横模称为腔的最低阶对称模或基模,方形镜腔和圆形镜腔的基模通常以符号 $TEM_{00}$ 表示。

- 平行平面腔福克斯和厉鼎毅(Fox-Li)的计算结果意义在于:
- 1、证明了光学谐振腔内相对稳定的光场分布----自再现模的存在;
- 2、说明了自再现模的产生需要一定的时间过程（往返振荡很多次），即激光的产生需要一定的时间过程。

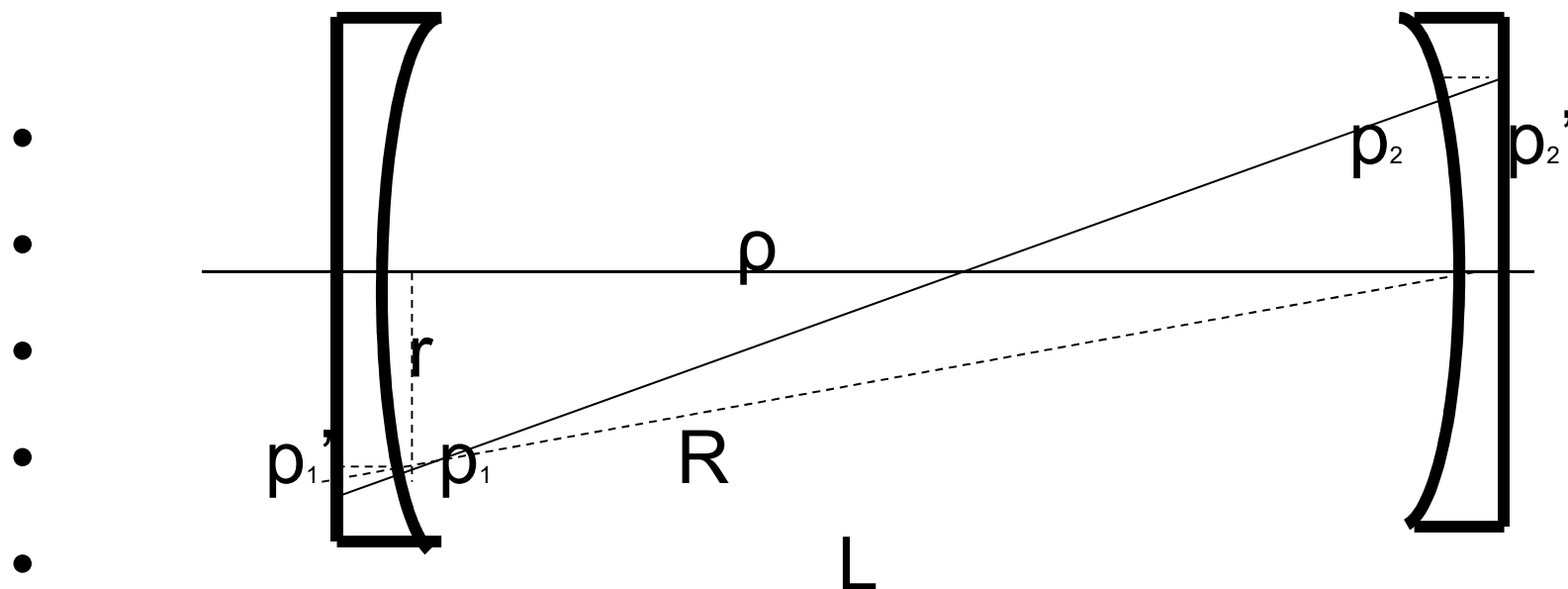
- 第五节、方形实对称共焦球面镜光学谐振腔中光场的自洽衍射积分方程及其解



图1 开放式激光腔示意图。M1 和 M2 分别是两个腔镜，R1 和 R2 是两腔镜的半径。注：该腔是球面镜腔，当  $R1=\infty$  且  $R2=\infty$  时候成为 F-P 腔

- 方形镜  $2a \times 2a$  尺寸，  $R_1 = R_2 = L, L \gg a \gg \lambda$

- 方形镜  $2a \times 2a$  尺寸,  $R_1 = R_2 = L$ ,  $L \gg a \gg \lambda$



$$p_1' p_1 = R - \sqrt{R^2 - r^2} \cong \frac{r^2}{2R} = \frac{x^2 + y^2}{2L}, \dots r^2 = x^2 + y^2, \dots R_1 = R_2 = L$$

$$p_2' p_2 = \frac{x'^2 + y'^2}{2L}$$



$$\rho = p_1 p_2 = p_1' p_2' - p_1' p_2 - p_2' p_1$$

$$\cong \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} - \frac{x^2 + y^2}{2L} - \frac{x'^2 + y'^2}{2L}$$

$$\cong L + \frac{(x-x')^2}{2L} + \frac{(y-y')^2}{2L} - \frac{x^2 + y^2}{2L} - \frac{x'^2 + y'^2}{2L}$$

$$= L - \frac{xx' + yy'}{L}$$

$$F=\frac{a^2}{L\lambda}<<\left(\frac{L}{a}\right)^2,$$

$$e^{-ik\rho}=e^{-ikL}e^{-ik\frac{xx'}{L}}e^{-ik\frac{yy'}{L}}$$

- 则模方程变为:

$$U(x,y)=\gamma\left(\frac{i}{\lambda L}\right)e^{-ikL}\int\limits_{-a-a}^{+a+a}\int U(x',y')e^{-ik\frac{xx'}{L}}e^{-ik\frac{yy'}{L}}dx'dy'$$

- 分离变量, 令:

$$U(x,y)=U(x)U(y)$$

- $$K_x(x, x') = \sqrt{\frac{i}{\lambda L} e^{-ikL}} e^{-ik \frac{xx'}{L}}$$

$$K_y(y, y') = \sqrt{\frac{i}{\lambda L} e^{-ikL}} e^{-ik \frac{yy'}{L}}$$

$$U_m(x) = \gamma_m \int_{-a}^{+a} K_x(x, x') U_m(x') dx'$$

$$U_n(y) = \gamma_n \int_{-b}^{+b} K_y(y, y') U_n(y') dy'$$

- 镜面上的场分布为：

$$U_{mn}(x, y) = U_m(x)U_n(y)$$

- 相应的复常数为：

$$\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n$$

- 博伊德—戈登求出,在 $c=2\pi F$ 为有限值时,有:

本征函数

$$U_{mn}(x, y) = U_m(x)U_n(y) = \text{Som}\left(c, \frac{X}{\sqrt{c}}\right)\text{Son}\left(c, \frac{Y}{\sqrt{c}}\right)$$

$$= \text{Som}\left(c, \frac{x}{c}\right)\text{Son}\left(c, \frac{y}{c}\right),$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{其中 } c = 2\pi F, X = x \frac{\sqrt{c}}{a}, Y = y \frac{\sqrt{c}}{a},$$

$\text{Som}\left(c, \frac{x}{c}\right), \text{Son}\left(c, \frac{y}{c}\right)$ 为角向长椭球函数

本征值 :

$$\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n = (4F \text{Rom}^{(1)}(c, 1) \text{Ron}^{(1)}(c, 1))^{-1} e^{i(kL - (m+n+1)\frac{\pi}{2})}$$

决定了模的相移和损耗

其中  $\text{Ron}^{(1)}(c, 1), \text{Rom}^{(1)}(c, 1)$ 为径向长椭球函数

- 当  $F$  较大  $>1$ , 同时  $F = \frac{a^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2$ , 在共焦腔中心附近, 角向长椭圆函数可表示为厄米多项式(Hermitian)和高斯(Gauss)分布函数的乘积----厄米-高斯光束.

$$U_{mn}(x, y) = U_m(x)U_n(y) \cong C_{mn} H_m\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}y\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{L\lambda/\pi}}$$

$C_{mn}$  为实常数;

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^j m!}{j!(m-2j)!} (2x)^{m-2j}$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- 不同的 $m, n$ 值,表示不同的相对稳定的光场振幅(强度)分布,即不同的横模,
- 记为 $TEM_{mn}$ 模, $m, n$ 为横模序数(或横模指数)。
- $TEM_{00}$ 模---基横模或基模,
- $TEM_{01}$ 模或 $TEM_{10}$ 模---低阶模,
- 其他---高阶模。
- $TEM_{00}$ 模---基横模或基模,

$$U_{00}(x, y) = C_{00} e^{-\frac{x^2 + y^2}{L\lambda/\pi}} = C_{00} e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_{0s}^2}},$$

$$I_{00}(x, y) = A e^{-2\frac{x^2 + y^2}{w_{0s}^2}},$$

为中心强、边缘弱的圆形光斑, 其中

$$w_{0s} = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \text{ 为镜面上的“光斑半径”或“光斑尺寸”,}$$

即振幅衰减到中心的  $e^{-1}$  或光强衰减到中心的  $e^{-2}$  处的光斑范围。(集中了大部分光能量)

- x方向,m阶,m个零点(节点),m条暗线,m+1个峰值
- y方向,n阶,n个零点(节点),n条暗线,n+1个峰值
- 光斑半径:

$$w_{ms} = \sqrt{2m+1} w_{0s},$$

$$w_{ns} = \sqrt{2n+1} w_{0s},$$

- $2\pi F$ 越大,场越集中镜面中心及其附近,越小,镜边缘场振幅渐增(衍射损耗增大);
- 统一,高阶模在镜边缘处的振幅比基模的大;
- 近似解与精确解在镜面中心及其附近符合较好.



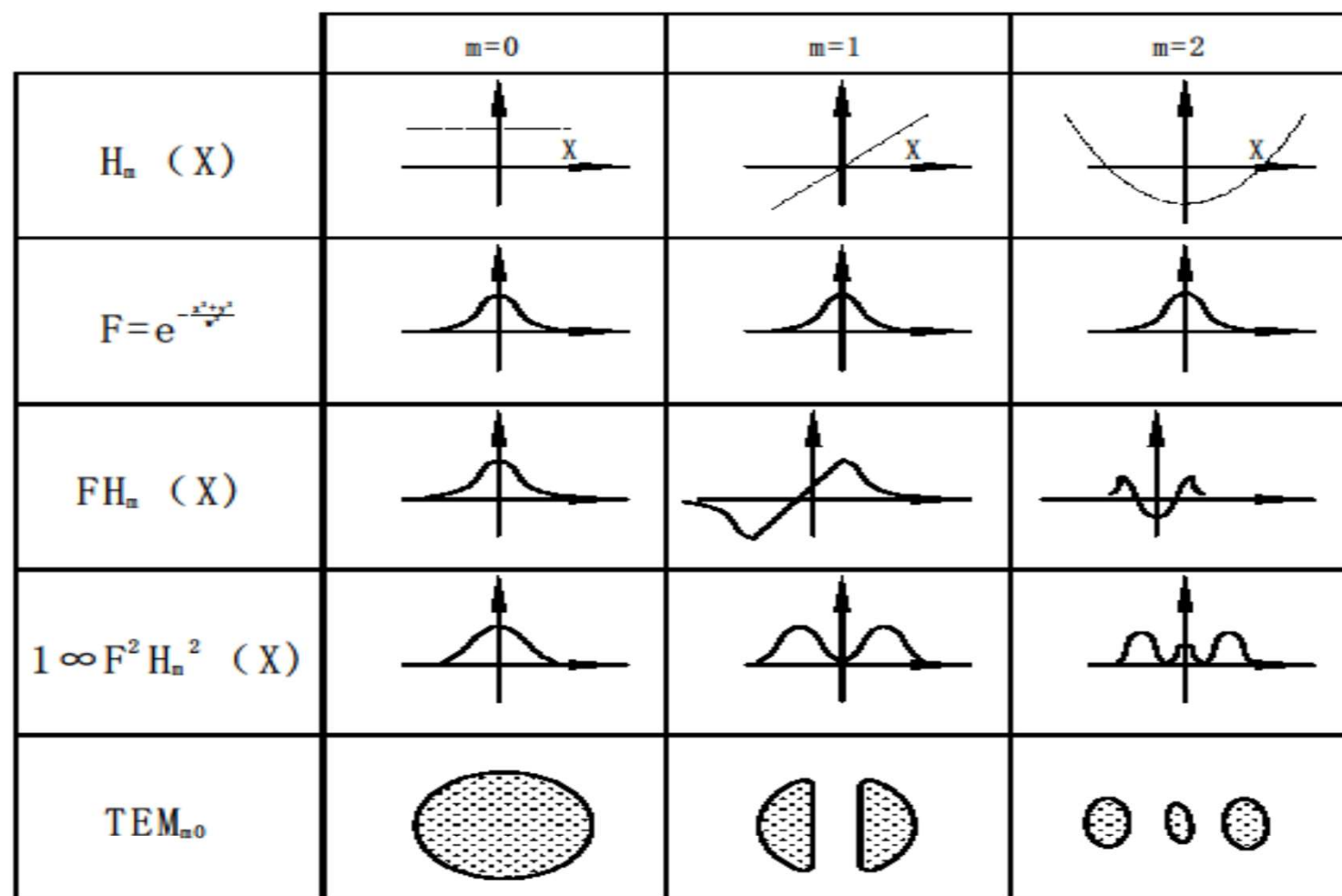


图2-7-3 矩形镜共焦腔高阶横模在整个镜面上的  
振幅分布和强度分布

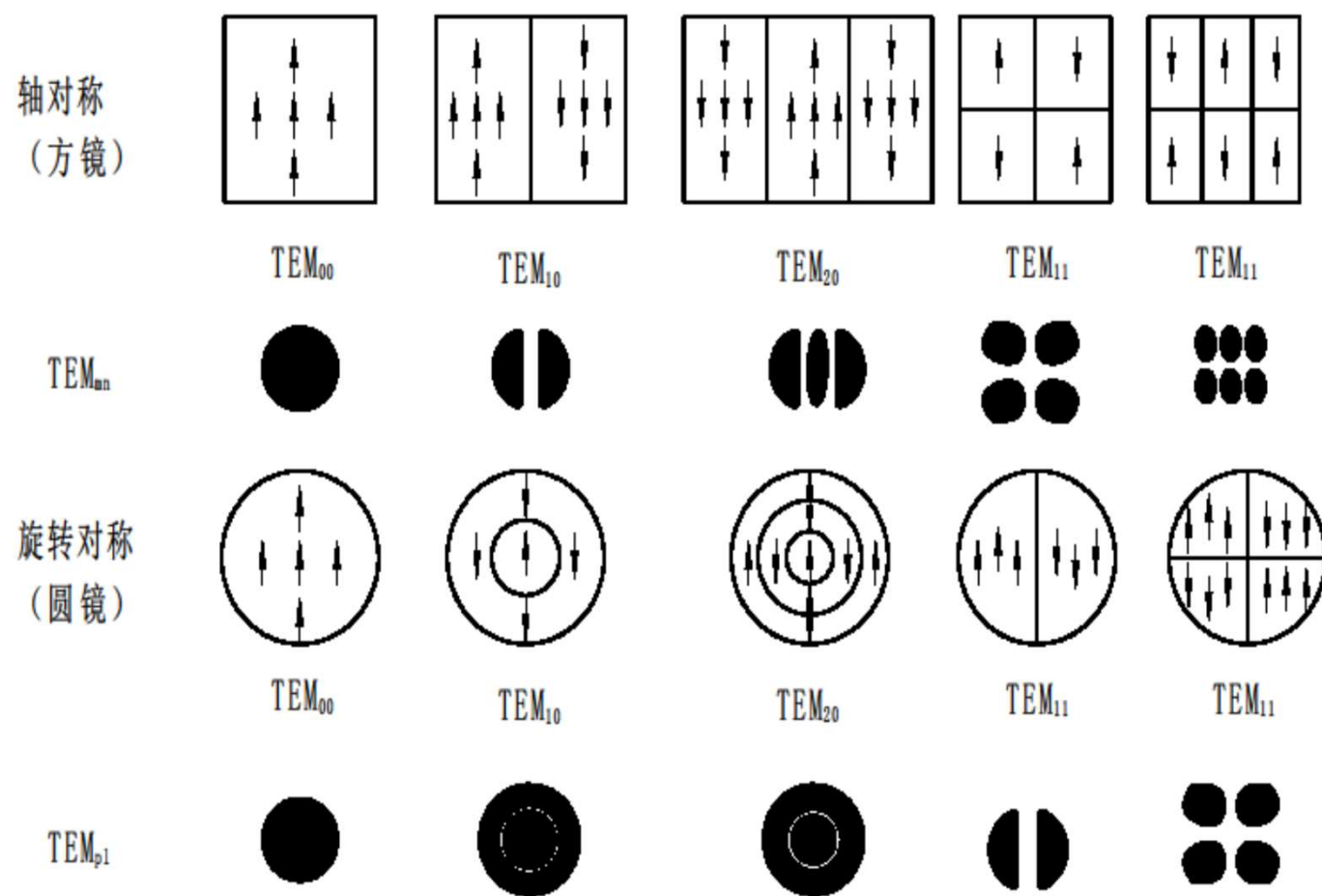


图2-2-4 方形反射镜和圆形反射镜的横模图形及线偏振腔模结构

- 位相分布
- 镜面上场的位相分布由自再现模的幅角决定

$$\begin{aligned}
 U_{mn}(x, y) &= U_m(x)U_n(y) \\
 &= S_{0m}(2\pi F, \frac{x}{a})S_{0n}(2\pi F, \frac{y}{a}) \\
 &= U_0 e^{i\psi(x,y)}
 \end{aligned}$$

- 角向长椭球函数为实数,---镜面上各点位相相同,即镜面本身为等相位面.
- 基模在镜面上有单一的位相,
- 其他模,相邻模瓣之间有180度( $\pi$ )相移.

- 基模在镜面上有单一的位相,

$$U_{00}(x, y) = C_{00} e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}} = C_{00} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}}, \text{为实函数}$$

- 其他模,相邻模瓣之间有**180度( $\pi$ )**相移(场方向反向),偏振方向相反.如:

- $$U_{10}(x, y) = C_{10} \frac{2\sqrt{2}}{w_{0s}} x e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}}, x \text{可取}\pm \text{号},$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

- 单程衍射损耗

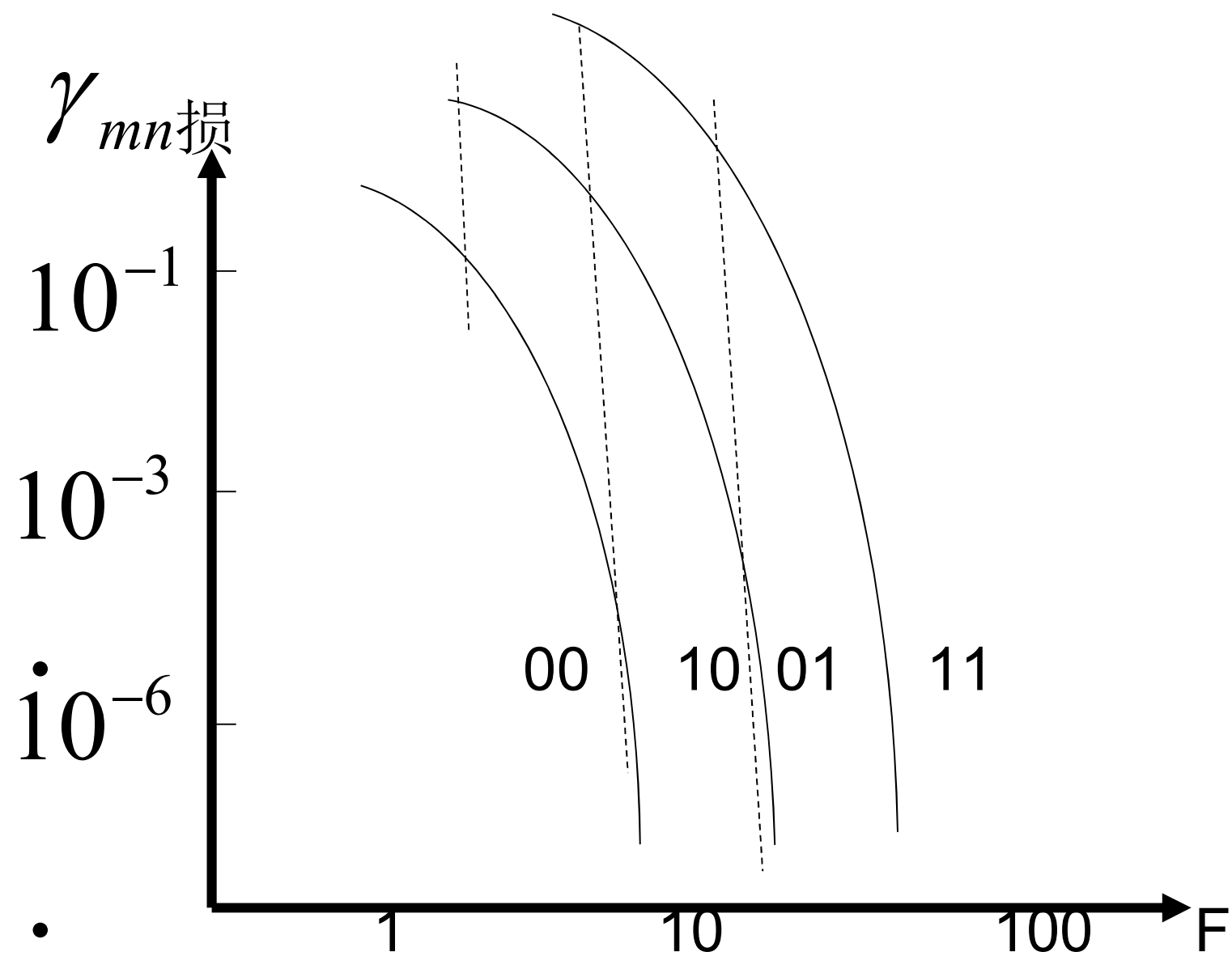
本征值：

$$\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n = (4FRom^{(1)}(c,1)Ron^{(1)}(c,1))^{-1} e^{i(kL - (m+n+1)\frac{\pi}{2})}$$

决定了模的相移和损耗

其中  $Ron^{(1)}(c,1), Rom^{(1)}(c,1)$  为径向长椭圆函数

$$\begin{aligned} \gamma_{mn \text{ 损}} &= \frac{|u_q|^2 - |u_{q+1}|^2}{|u_q|^2} = 1 - e^{-2\alpha} = 1 - \left| \frac{1}{\gamma_{mn}} \right|^2 \\ &= 1 - 16F^2 (R_{om}^{(1)}(2\pi F, 1) R_{on}^{(1)}(2\pi F, 1))^2 \end{aligned}$$



- 单程相移

$$\Phi = \beta = \arg\left(\frac{1}{\gamma}\right) = q\pi$$

$$q\pi = kL - (m + n + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$q = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{mnq}}, \nu_{mnq} = \frac{\nu}{\lambda_{mnq}} = \frac{c}{\eta\lambda_{mnq}}$$

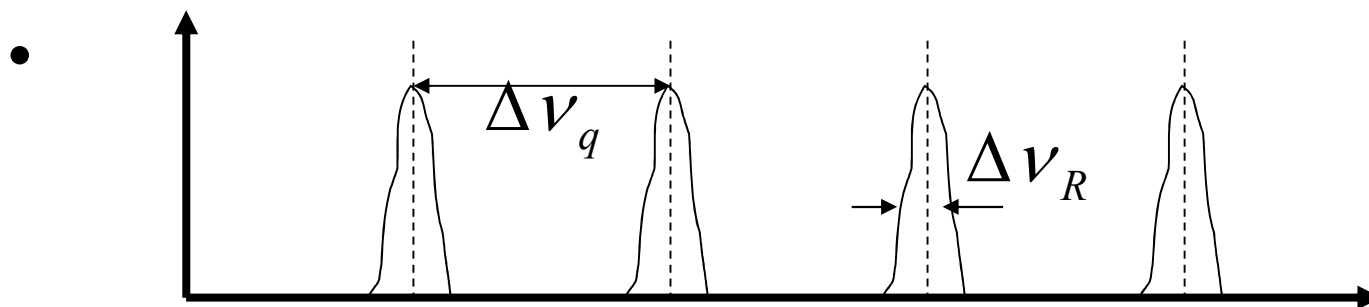
- 谐振频率

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2\eta L} \left( q + \frac{1}{2}(m + n + 1) \right)$$

- 完整的模式符号: TEM<sub>mnq</sub>, 指数q表征沿腔轴方向的场分布特性——腔的纵模指数. 一般情况下, 有  $q \gg m, n$ .

- 同一横模(m, n一定),不同纵模,相邻两纵模之间频率间隔为:

$$\Delta \nu_q = \nu_{m,n,q+1} - \nu_{m,n,q} = \frac{c}{2\eta L}$$



- q一定, (m+n)不同,相邻两横模之间频率间隔为:

$$\Delta \nu_m = \nu_{m+1,n,q} - \nu_{m,n,q} = \frac{c}{4\eta L} = \frac{1}{2} \Delta \nu_q$$



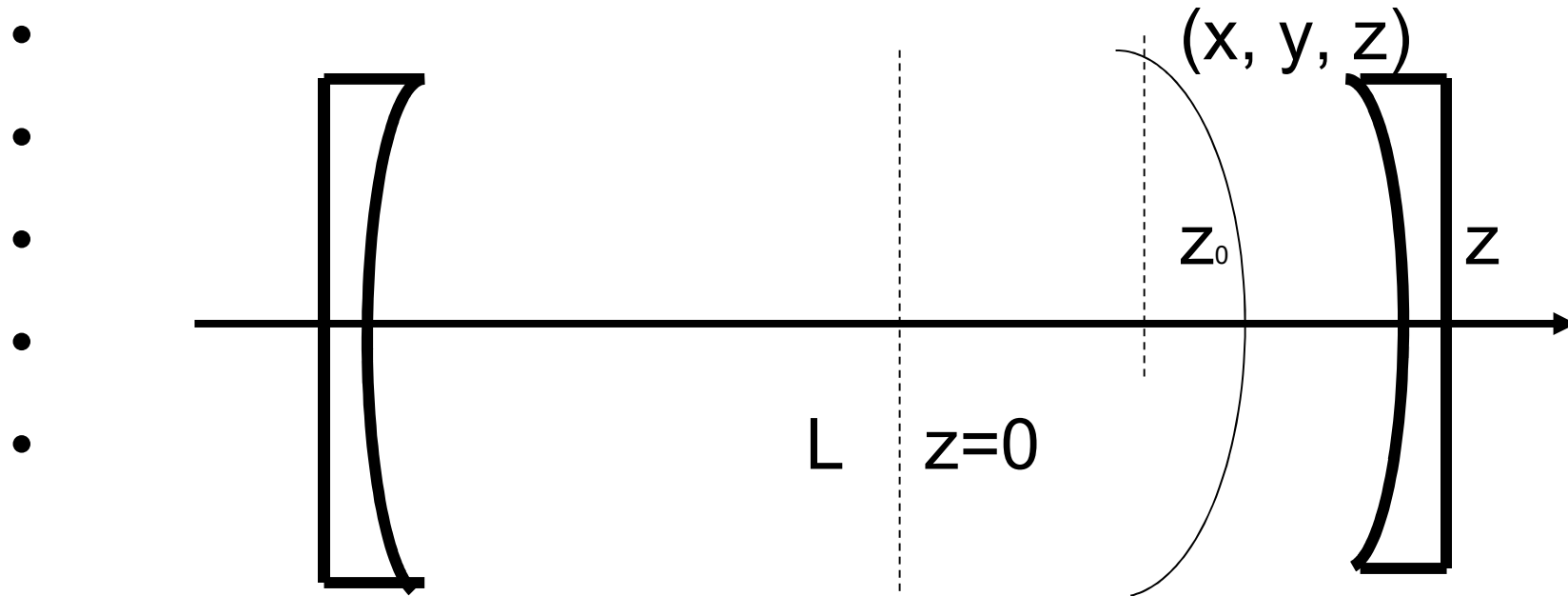
- 只要 $(2q+m+n+1)$ 相同的模式,都具有相同的谐振频率,它们被称为简并模,(高度简并的)
- 如:
- $TEM_{00q} TEM_{02q-1}$

$$\nu_{00q} = \frac{c}{2\eta L} \left( q + \frac{1}{2} \right),$$

$$\nu_{02q-1} = \frac{c}{2\eta L} \left( q - 1 + \frac{1}{2} (0 + 2 + 1) \right) = \frac{c}{2\eta L} \left( q + \frac{1}{2} \right) = \nu_{00q}$$

## 第六节、方形实对称共焦球面镜光学谐振腔中光场行波场

- 方形镜  $2a \times 2a$  尺寸,  $R_1 = R_2 = L$ ,  $L \gg a \gg \lambda$



在点  $(x, y, z)$  , 作  $\xi = \frac{z}{L/2} = \frac{2z}{L}$ ,

在共焦腔内 , 有  $0 < |\xi| < 1$ , 在腔外 , 有  $|\xi| > 1$ .

- 博伊德—戈登求出,腔内一点(x, y, z)的行波场为:

$$U_{mn}(x, y, z) = U_0 \left( \frac{2}{1 + \xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(m + 1) \Gamma(n + 1)} \times e^{-\frac{kw^2}{L(1 + \xi^2)}} \\ \times H_m\left(X \left( \frac{2}{(1 + \xi^2)} \right)^{\frac{1}{2}}\right) \times H_n\left(Y \left( \frac{2}{(1 + \xi^2)} \right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ \times e^{i\left(k\frac{L}{2}(1 + \xi) + \frac{k\xi}{1 + \xi^2} \frac{w^2}{L}\right) + i(m + n + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}$$

其中 :  $w^2 = x^2 + y^2$ ,  $\psi = \arctan\left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)$ ,

$U_0$ 与坐标无关 ,  $X = x \frac{\sqrt{2\pi F}}{a}$ ,  $Y = y \frac{\sqrt{2\pi F}}{a}$ ,

$\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) = \left(\frac{m}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$ ,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(m) = m!$ 为伽马函数

## 相位分布

- 相位函数描述共焦腔内场点的相位分布:

$$P(x,y,z)=k\frac{L}{2}(1+\xi)+\frac{k\xi}{1+\xi^2}\frac{w^2}{L}+(m+n+1)(\frac{\pi}{2}-\psi)$$

- 设(x, y, z)为等相面,截轴于(0,0,z<sub>0</sub>),
- (x, y, z)点与(0,0,z<sub>0</sub>)相位相同,
- 即P (x, y ,z)=P(0,0,z<sub>0</sub>) ;  $w = x^2 + y^2 = 0, \xi_0 = 2z_0 / L,$

$$k\frac{L}{2}(1+\xi_0)+(m+n+1)(\frac{\pi}{2}-\psi_0)$$

$$= k\frac{L}{2}(1+\xi)+\frac{k\xi}{1+\xi^2}\frac{w^2}{L}+(m+n+1)(\frac{\pi}{2}-\psi)$$

- 忽略由 $z$ 的变化造成的  $\psi$  的微小变化, 即设在等相位面上,
- $\Psi = \psi_0$ , 利用近轴近似可得:

$$z - z_0 \cong -\frac{\xi}{1 + \xi^2} \frac{w^2}{L} \cong -\frac{\xi_0}{1 + \xi_0^2} \frac{w^2}{L}$$

- 这是旋转抛物面方程, 其顶点 $z=z_0$ 在处, 抛物面焦距为:

$$f' = \left| \frac{1 + \xi_0^2}{4\xi_0} L \right| = \left| \frac{z_0}{2} + \frac{f^2}{2z_0} \right|, \left( \xi_0 = \frac{2z_0}{L}, f = \frac{R}{2} = \frac{L}{2} \right)$$

- 进一步假设,腔轴附近旋转抛物面近似看作球面.
- 实对称共焦腔中光场的等相位面近似看作球面, 其曲率半径随 $z_0$ 而变:

$$R(z_0) = 2f' = \left| z_0 + \frac{f^2}{z_0} \right|$$

- 再判断球面方向:

$$z - z_0 = - \frac{\xi_0}{1 + \xi_0^2} \frac{w^2}{L},$$

$$z_0 > 0, \text{ ———— } \rightarrow z - z_0 < 0$$

$$z_0 < 0, \text{ ———— } \rightarrow z - z_0 > 0$$

- 表明实对称共焦腔中光场的等相位面都是凹向中心( $z=0$ )的球面

- 当 
$$z_0 = \pm f = \pm \frac{R}{2} = \pm \frac{L}{2},$$
  

$$R(z) = 2f = L = R_1 = R_2 = R$$
- 腔镜本身与场的两个等相位面重合
- $Z_0=0 \quad R(z_0) \longrightarrow \infty; \quad Z_0 \longrightarrow \infty \quad R(z_0) \longrightarrow \infty。$
- 腔中心或无穷远处,是平面等相位面
- 对于  $R(z_0) = \left| z_0 + \frac{f^2}{z_0} \right|$  求微商可以证明,方形实对称共焦球面镜腔 **镜面** 是共焦腔中 **曲率最大** 的等相位面.

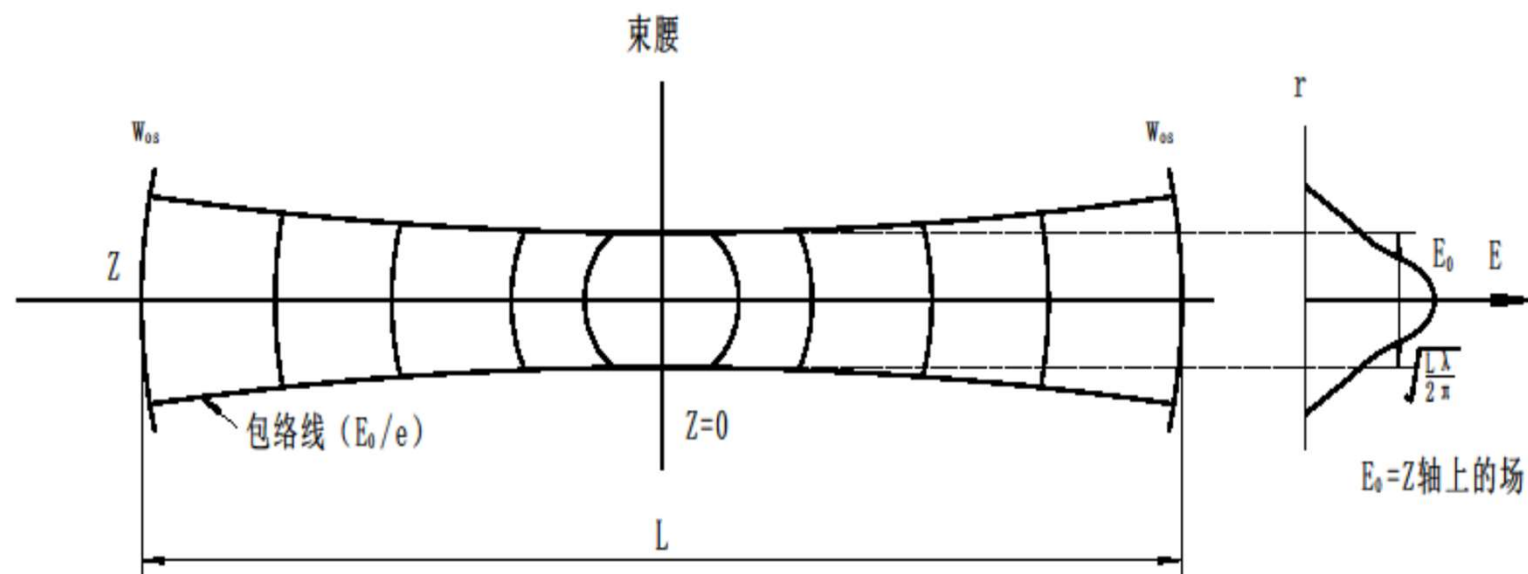


图2-7-7 共焦腔场等相位面  
和 $TEM_{00}$ 模光斑尺寸随 $z$ 的变化



# 光束特性

- 对于**TEM<sub>00</sub>**模,决定光场分布的主要是实指数因子:

$$e^{-\frac{kw^2}{L(1+\xi^2)}} = e^{-1}$$

- 对应的横向距离,称为**基模光斑半径W(z)**,  
即在 **$z=z_0$** 平面内,振幅下降到中心最大值的**1/e**时的光束范围.

$$w(z) = \left(\frac{L}{k} (1 + \xi^2)\right)^{\frac{1}{2}} = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{f^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中:  $f = \frac{L}{2} = \frac{R}{2}$ , 而  $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}}$ , 为  $z=0$  光斑半径, 束腰半径

- 基模光斑半径 $w(z)$ 随呈双曲线变化,

$$\frac{w^2(z)}{w_0^2(0)} - \frac{4z^2}{L} = 1,$$

$$z = \pm \frac{L}{2} = \pm f, w_0(z) = w_{0s} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} = w_0,$$

- 高斯光束平面等相位面、球面等相位面, 与平面波、球面波的情况不同。振幅分布不同。

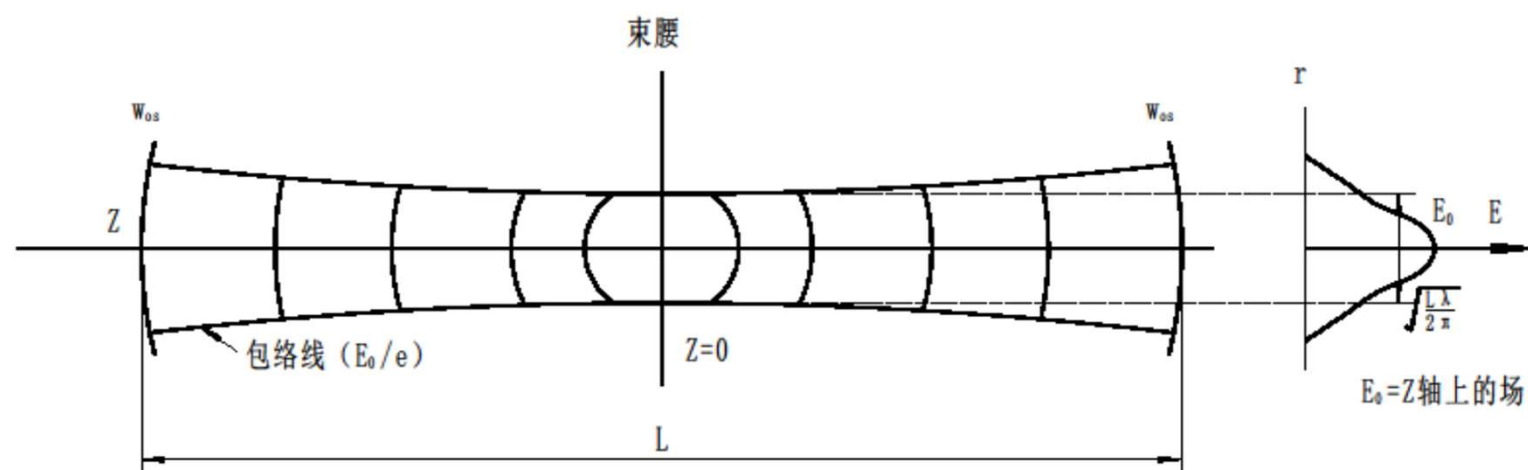


图2-7-7 共焦腔场等相位面  
和 $TEM_{00}$ 模光斑尺寸随 $z$ 的变化

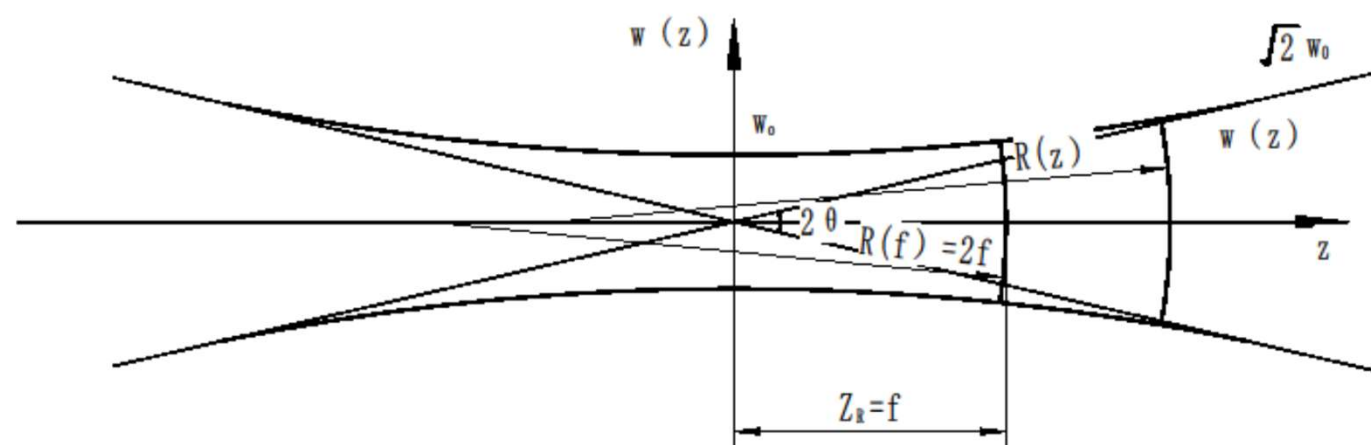


图3-1-2 高斯光束通过轴截面的轮廓线为双曲线

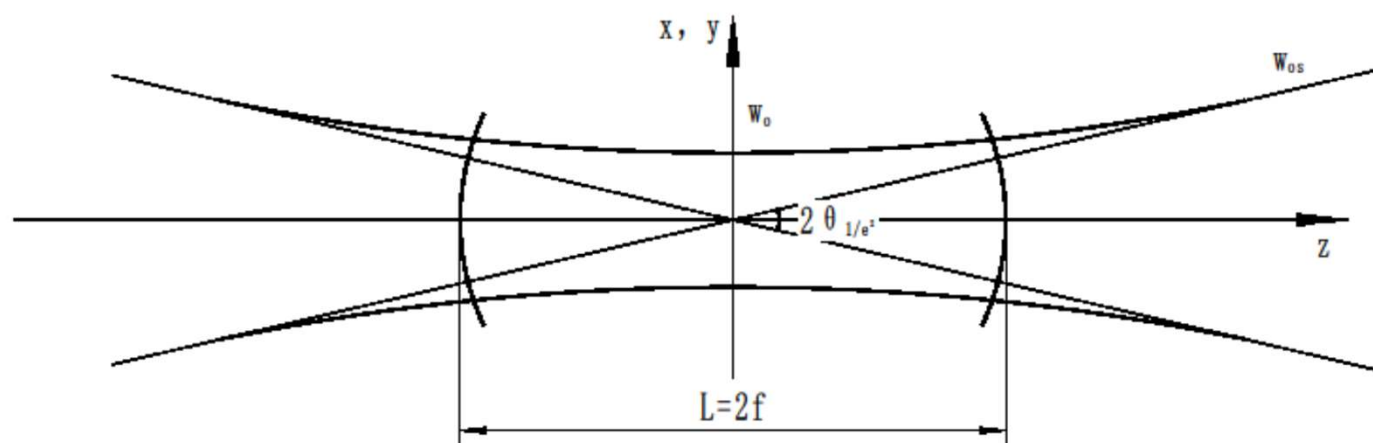


图2-7-8 共焦腔基模的发散角  $\theta_{1/e^2}$

## 基模光束远场发散角

- 远场发散半角:

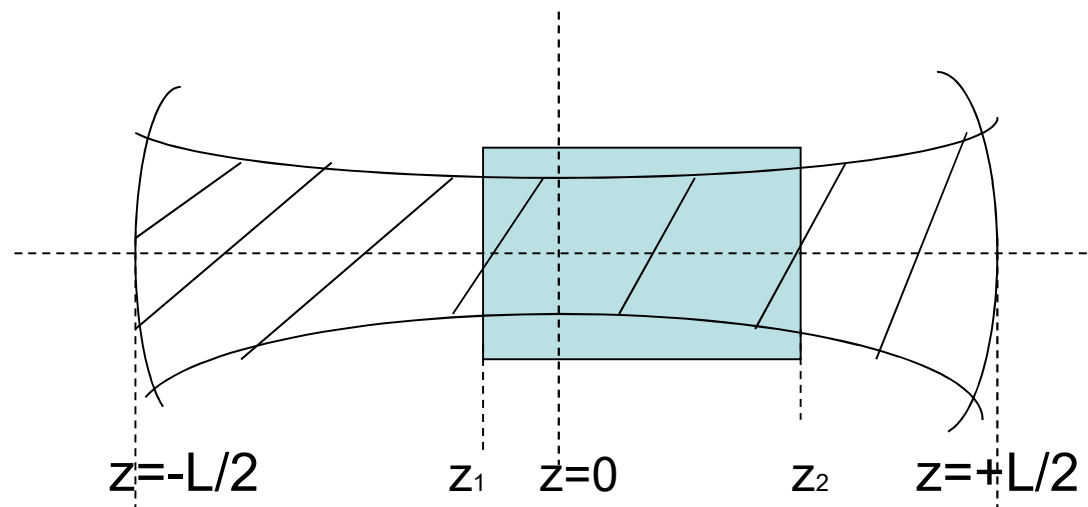
$$\theta_{1/e^2} \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}} = \frac{\lambda}{\pi w_0},$$

$$2\theta_{1/e^2} = 2 \frac{\lambda}{\pi w_0} = 4 \frac{\lambda}{\pi D_0} \cong 1.27 \frac{\lambda}{D_0}, \text{功率/总功率} = 86.5\%,$$

$$\text{而爱里斑: } \Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \text{功率/总功率} = 83.78\%.$$

衍射极限角

- 



$$V_{00} = \int_{-L/2}^{+L/2} \pi w^2(z) dz = \int_{-L/2}^{+L/2} \pi w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{f^2}\right) dz = \frac{2}{3} \lambda L^2,$$

$$V_{00eff} = \int_{z_1}^{z_2} \pi w_0^2 (1 + \frac{z^2}{f^2}) dz = \pi w_0^2 (z_2 - z_1 + \frac{1}{3f^2} (z_2^3 - z_1^3))$$

- 高阶模

$$\theta_{m1/e^2} = \sqrt{2m+1} \theta_{1/e^2},$$

$$\theta_{n1/e^2} = \sqrt{2n+1} \theta_{1/e^2}, m, n \uparrow, \theta_{m1/e^2}, \theta_{n1/e^2} \uparrow.$$

$$V_{mn} = \sqrt{(2m+1)(2n+1)} V_{00},$$

$$V_{mneff} = \sqrt{(2m+1)(2n+1)} V_{00eff}, m, n \uparrow, V_{mn}, V_{mneff} \uparrow.$$



- 第七节、圆形实对称共焦球面镜光学谐振腔中光场特性
- 采用极坐标.
- 在F值足够大(且近轴近似),圆形实对称共焦球面镜光学谐振腔中自再现模在腔镜上的场分布为缔合拉盖尔多项式和  
高斯函数的乘积--拉盖尔-高斯光束.

$$U_{pl}(r, \varphi) = C_{pl} \left( \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda L}} r \right)^l L_p^l \left( \frac{2\pi}{\lambda L} r^2 \right) e^{-\frac{\pi}{\lambda L} r^2} \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases},$$

$p, l = 0, 1, 2, \dots, l = 0$ 时, 只能用 $\cos l\varphi$ 项.

- 其中 $(r, \Phi)$ 为镜面上的极坐标, 为 $C_{pl}$ 归一化常数,  $L$ 表示共焦腔的腔长,  $L_p$ 为缔合拉盖尔多项式 $\text{TEM}_{p|q}$ 模或**LG模**
- 本征值:

$$\gamma_{pl} = e^{ikL - i(2p+l+1)\frac{\pi}{2}},$$

- 光斑具有圆对称形式.
- **p**表示径向(**r**方向)节线圆的数目;
- **l**表示角向(沿幅**Φ**方向)节线的数目;

•

$$L_0^m(\xi) = 1$$

$$L_1^m(\xi) = 1 + m - \xi$$

$$L_2^m(\xi) = \frac{1}{2}[(1+m)(2+m) - 2(2+m)\xi + \xi^2]$$

.....

$$L_n^m(\xi) = e^\xi \frac{\xi^{-m}}{n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi} \xi^{n+m}) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+m)!(-\xi)^k}{(m+k)!k!(n-k)!}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

- 基模  $\text{TEM}_{00q}$  的光场分布也为高斯函数:

$$U_{00}(r, \varphi) = C_{00} e^{-\frac{\pi}{\lambda L} r^2}$$

- 基模  $\text{TEM}_{00q}$  在镜面上光斑尺寸与方形镜一样:

$$w_{0s} = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}}$$

- $\text{TEM}_{plq}$  在镜面上光斑尺寸:

$$w_{plq} = \sqrt{2p + l + \frac{1}{2}} w_{0s}$$

- 谐振频率:

$$\nu_{plq} = \frac{c}{2\eta L} \left( q + \frac{1}{2} (2p + l + 1) \right)$$

- 基模  $\text{TEM}_{00q}$  的光场分布、发散角、在镜面上光斑尺寸与方形镜一样;
- 高阶模两个相邻模瓣位相差  $\pi$ ;
- 同阶次的两个正交偏振模, 可以合成为其他偏振模。

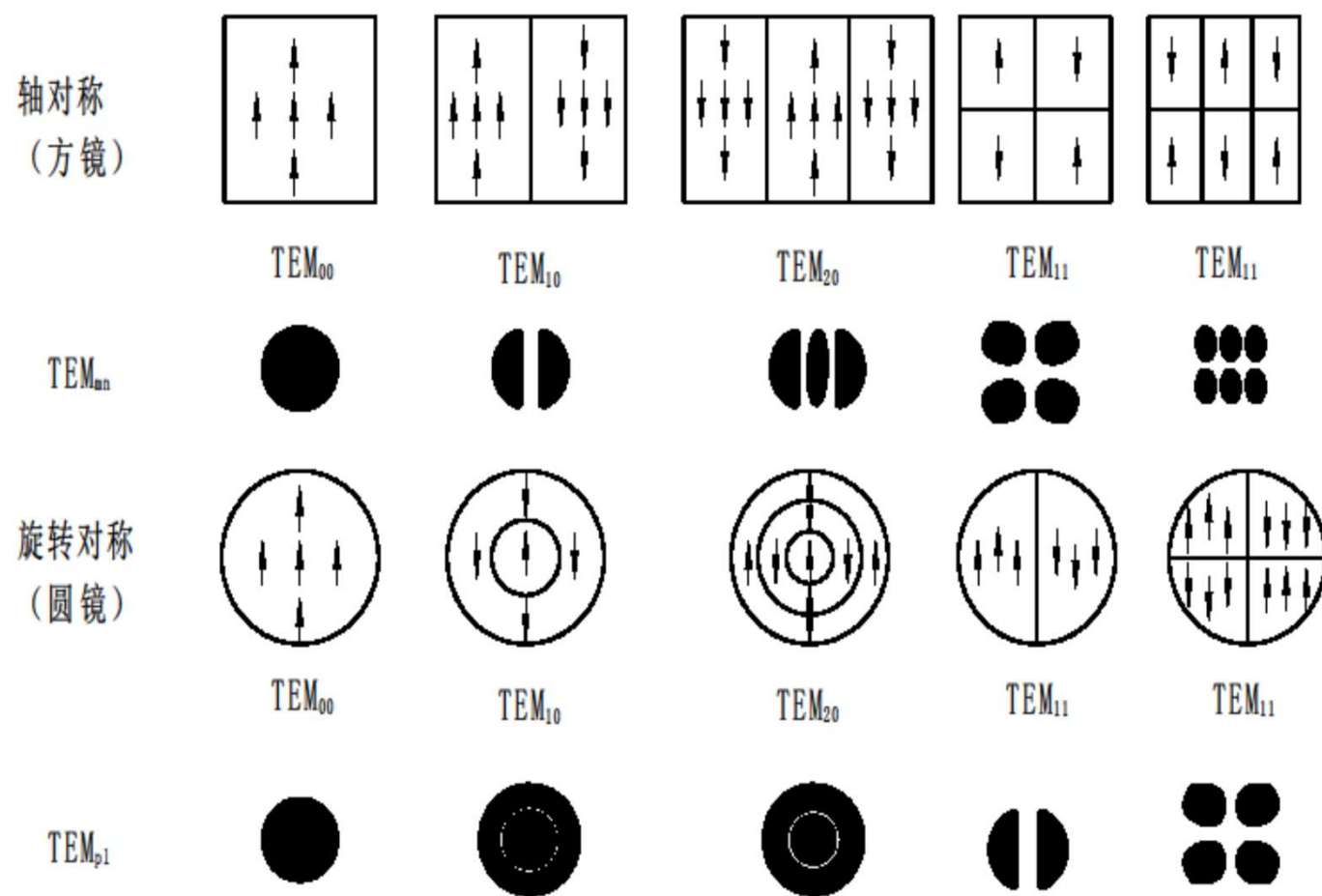
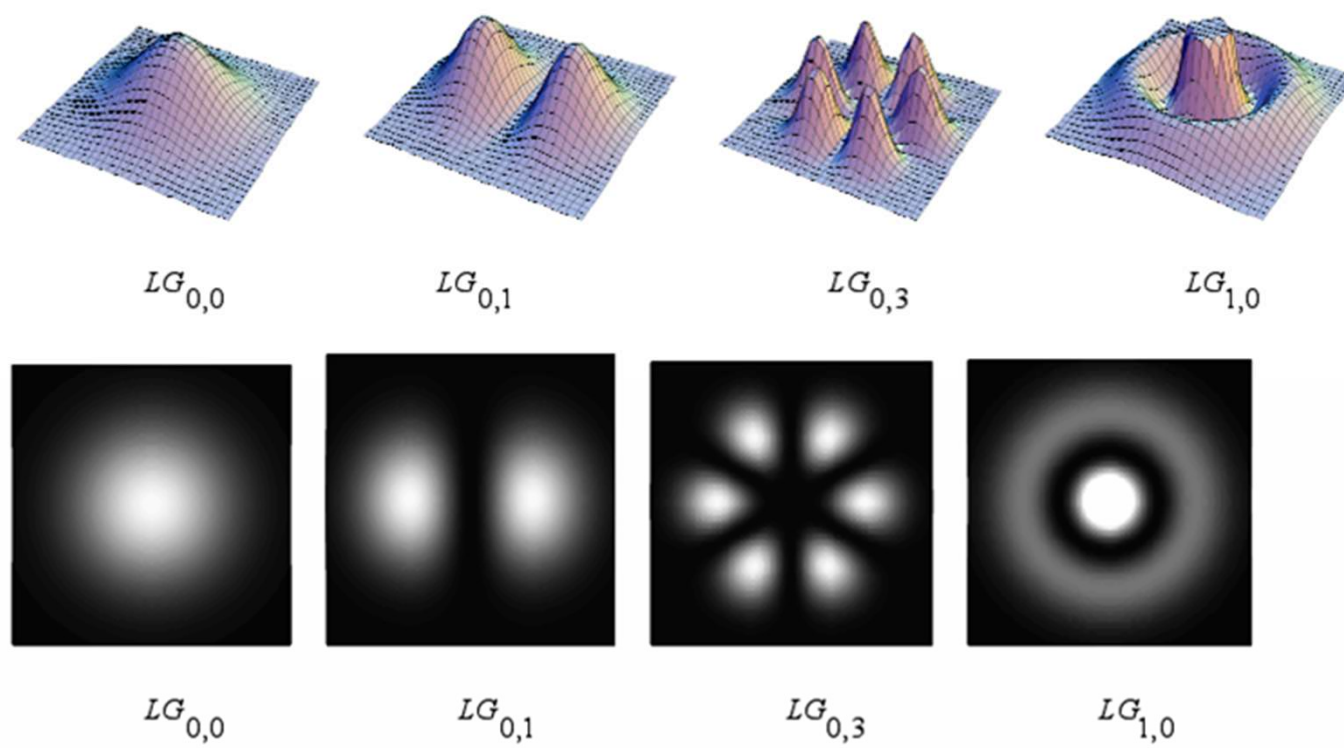
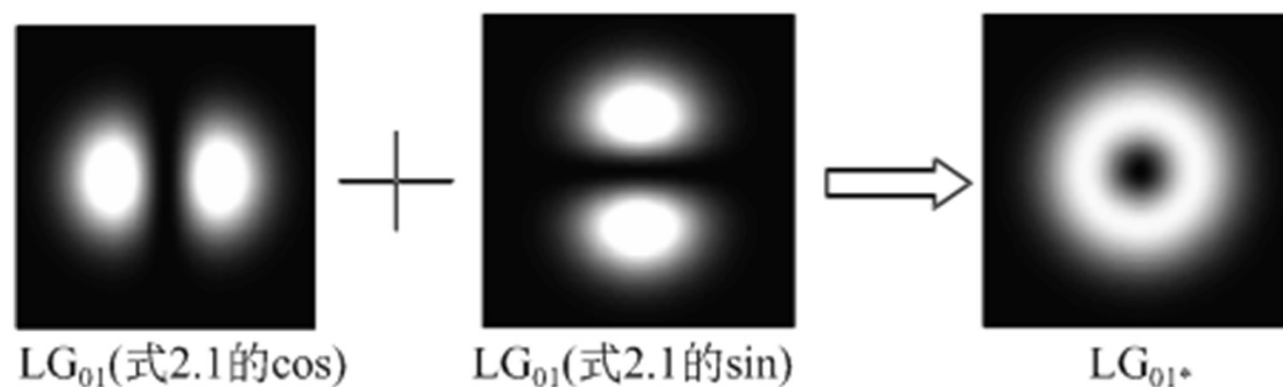


图2-2-4 方形反射镜和圆形反射镜的横模图形及线偏振腔模结构

- 几个典型的拉盖尔-高斯光场分布
- 



- 在实际的激光器中常有模式畸变和简并现象，从而导致输出光不是某一单一模式，而是两个或多个模式的叠加，称之为简并模。在柱坐标系下，**LG01 (cos)**和**LG01 (sin)**是最低阶拉盖尔-高斯模式的两个分量，这两个模具有旋转对称性，其中一个模由另一个模绕中心轴旋转 $90^\circ$ 而得到，两个模式之间有 $\pi/2$ 的相位差。两个模式通过叠加可以得到一个空心横模，称为**LG01\***模（如图所示）。

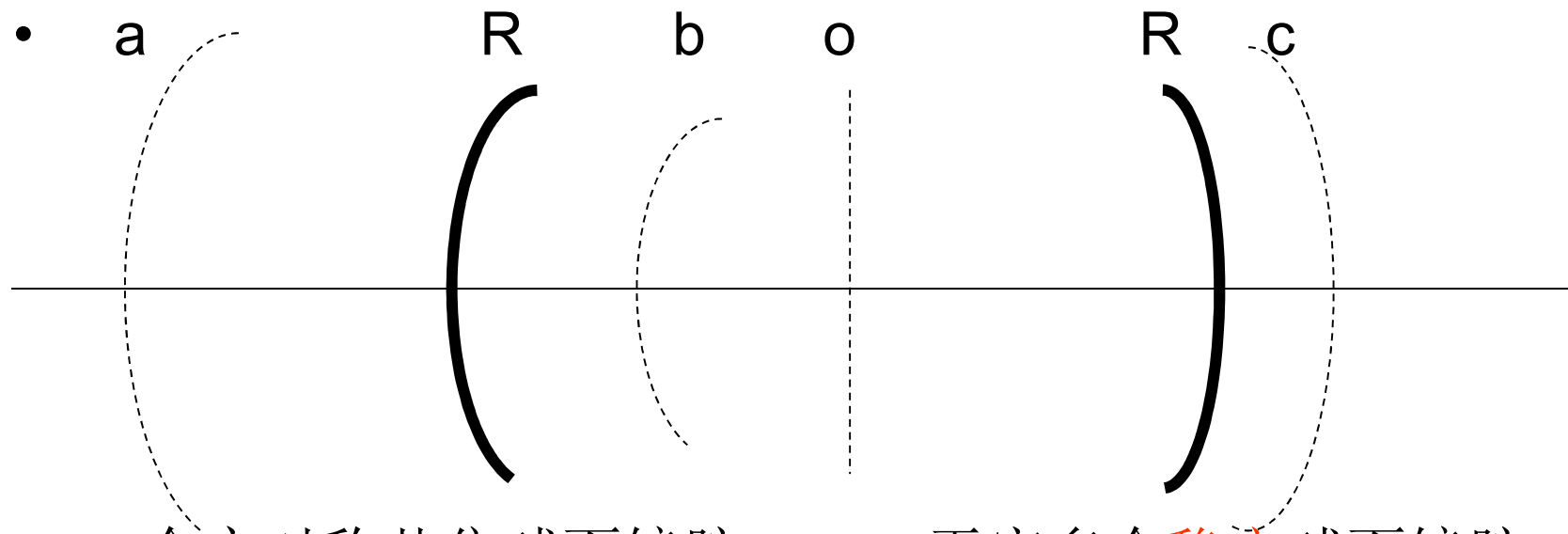


- 两个模式简并得到空心横模（LG01\*）

- 第八节、一般稳定球面镜腔和等价共焦腔中光场特性

- $0 < g_1 g_2 < 1$ ,  $g_1 = 1 - L/R_1$ ,  $g_2 = 1 - L/R_2$

- 等价共焦腔方法



- 一个实对称共焦球面镜腔  $\longleftrightarrow$  无穷多个稳定球面镜腔；

- 一个稳定球面镜  $\longleftrightarrow$  一个等价实对称共焦球面镜腔。



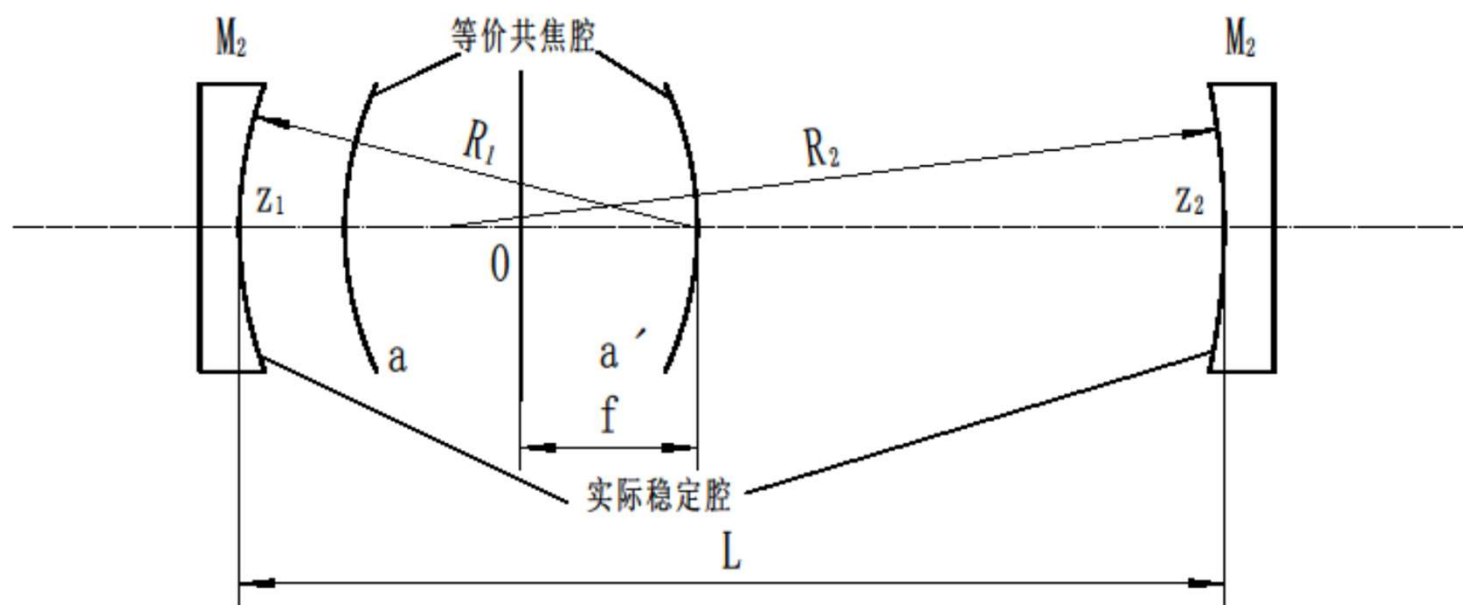


图2-8-2 稳定球面腔和它的等价共焦腔

$$R(z) = \left| z + \frac{f^2}{z} \right|,$$

$$f = \frac{L'}{2}, L' \text{ 为等价共焦腔的腔长。}$$

$$R_1 = R_1(z_1) = -\left(z_1 + \frac{f^2}{z_1}\right),$$

$$R_2 = R_2(z_2) = +\left(z_2 + \frac{f^2}{z_2}\right),$$

$$z_2 - z_1 = L,$$

$L$  为实际稳定球面镜腔腔长

- 已知  $R_1, R_2, L$  值,
- 可唯一解出一组
- $z_1, z_2, f$  值.

$$z_1 = \frac{L(R_2 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} = -\frac{g_2(1 - g_1)L}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2}$$

•

$$z_2 = \frac{-L(R_1 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} = \frac{g_1(1 - g_2)L}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2}$$

$$f^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{((L - R_1) + (L - R_2))^2}$$

$$= \frac{g_1g_2(1 - g_1g_2)L^2}{(g_1 + g_2 - 2g_1g_2)^2}$$

- 可以获得:等价共焦腔腔长  $L'=2f$ , 束腰半径  $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L'}{2\pi}}$ ,
- 并由  $w(z) = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,
- 可以获得镜面 $z_1, z_2$ 处以及沿轴向任何位置 $z$ 的光斑半径.

远场发散角 (半角) :  $\theta_{1/e^2} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L'}} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ ,

- 模体积

$$V_{00} = \int_{z_1}^{z_2} \pi w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{f^2}\right) dz = \pi w_0^2 \left(z_2 - z_1 + \frac{1}{3f^2} (z_2^3 - z_1^3)\right)$$

$$V_{00eff} = \int_{z_1'}^{z_2'} \pi w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{f^2}\right) dz = \pi w_0^2 \left(z_2' - z_1' + \frac{1}{3f^2} (z_2'^3 - z_1'^3)\right)$$

- 谐振频率(修正):

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2\eta L} \left( q + \frac{1}{\pi} (m + n + 1) \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right)$$

$$\nu_{plq} = \frac{c}{2\eta L} \left( q + \frac{1}{\pi} (2p + l + 1) \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right)$$

- 两腔镜的有效菲涅耳数:

$$F_{1eff} = \frac{a_1^2}{\pi w_{0s1}^2} = \frac{a_1^2}{L\lambda} \sqrt{\frac{g_1}{g_2} (1 - g_1 g_2)}$$

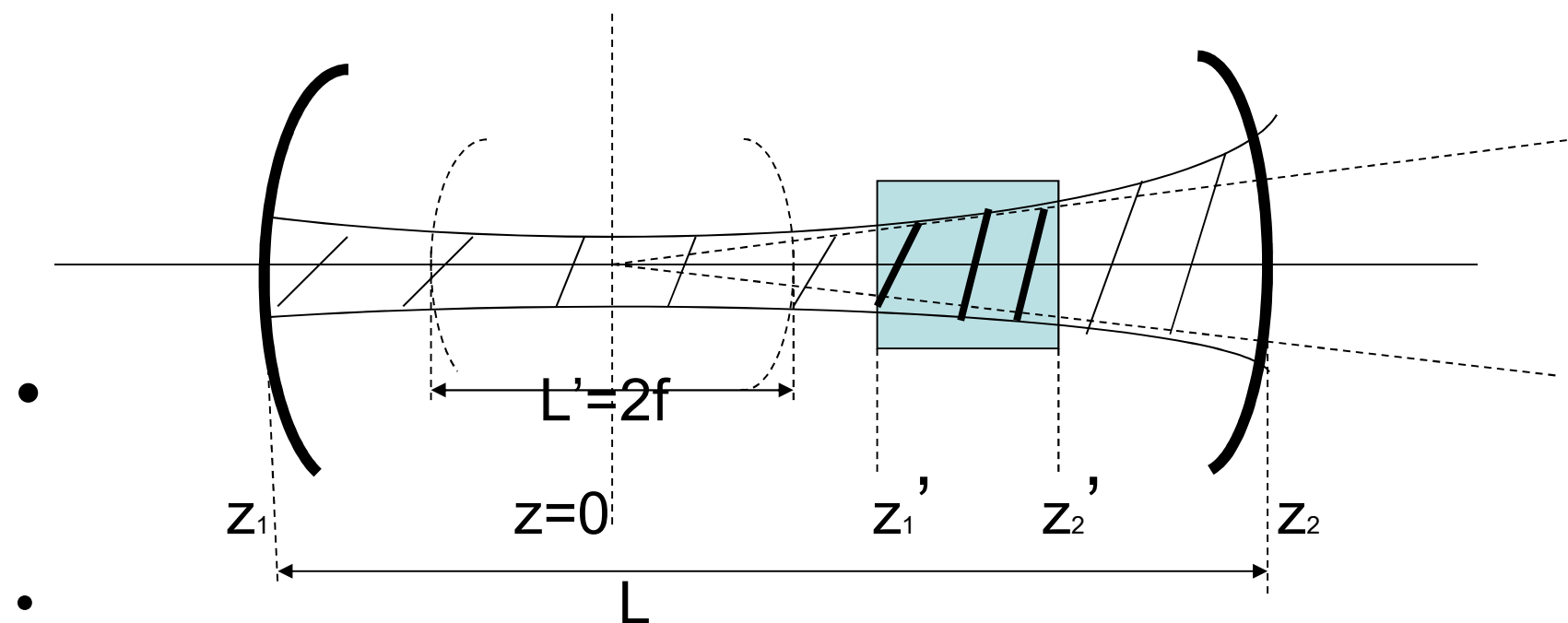
$$F_{2eff} = \frac{a_2^2}{\pi w_{0s2}^2} = \frac{a_2^2}{L\lambda} \sqrt{\frac{g_1}{g_2} (1 - g_1 g_2)}$$

•

- 按共焦腔衍射损耗曲线,查出球面镜两镜面处的单程损耗值:

$$\gamma_{mn\text{损}}^{(1)} \quad \gamma_{mn\text{损}}^{(2)}$$

# 一般稳定球面镜腔中基模高斯光束



- 平均单程损耗值:

$$\gamma_{mn\text{损}} = \frac{1}{2} (\gamma_{mn\text{损}}^{(1)} + \gamma_{mn\text{损}}^{(2)})$$

$m, n \uparrow, \gamma_{mn\text{损}} \uparrow$ ;

共焦腔  $\gamma_{mn\text{损}}$  最小, 平-平腔, 共心腔最大;

$F_{\text{eff}} \uparrow, \gamma_{mn\text{损}} \downarrow$ .

- 非稳腔(用几何光学定性描述)

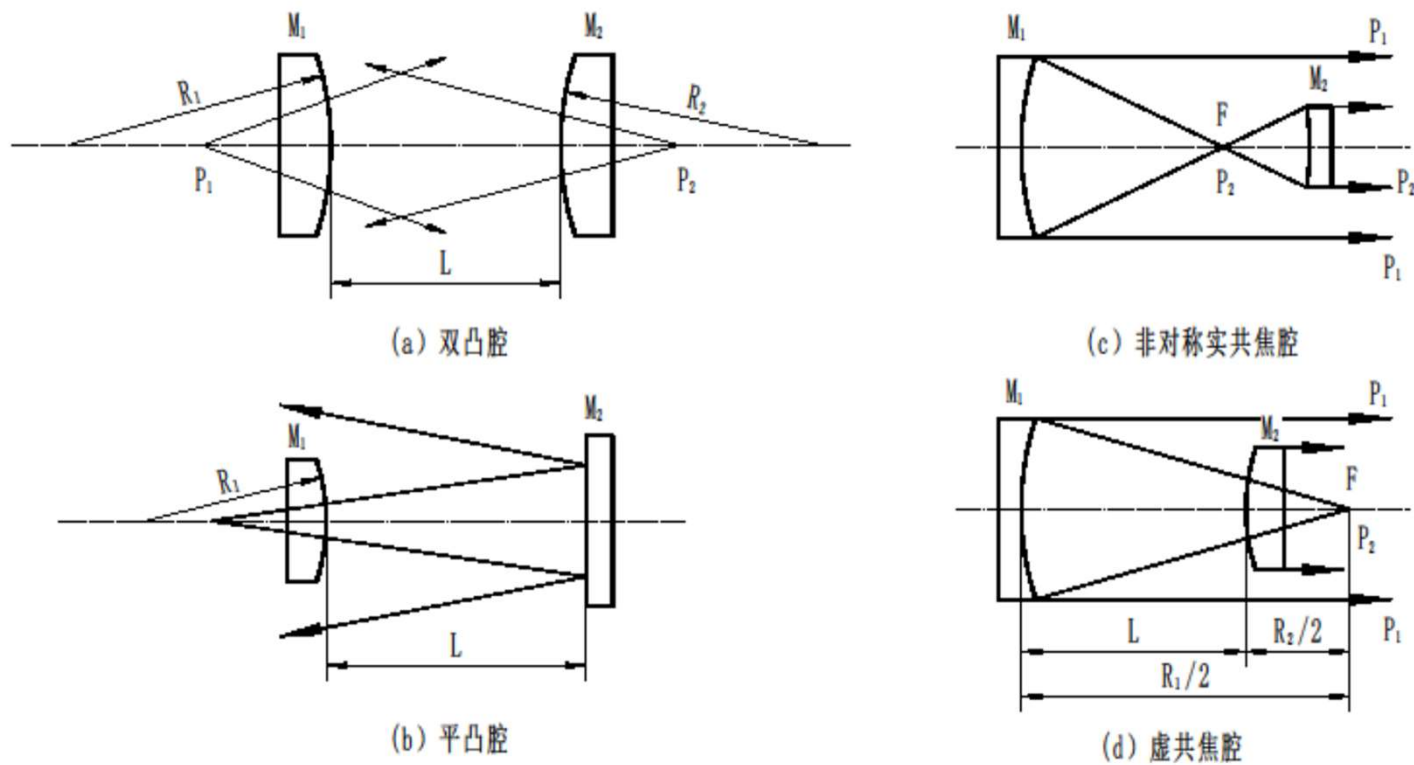


图2-9-1 非稳定腔的四种主要形式

(a) 双凸腔；(b) 平凸腔；  
(c) 非对称实共焦腔；(d) 虚共焦腔；



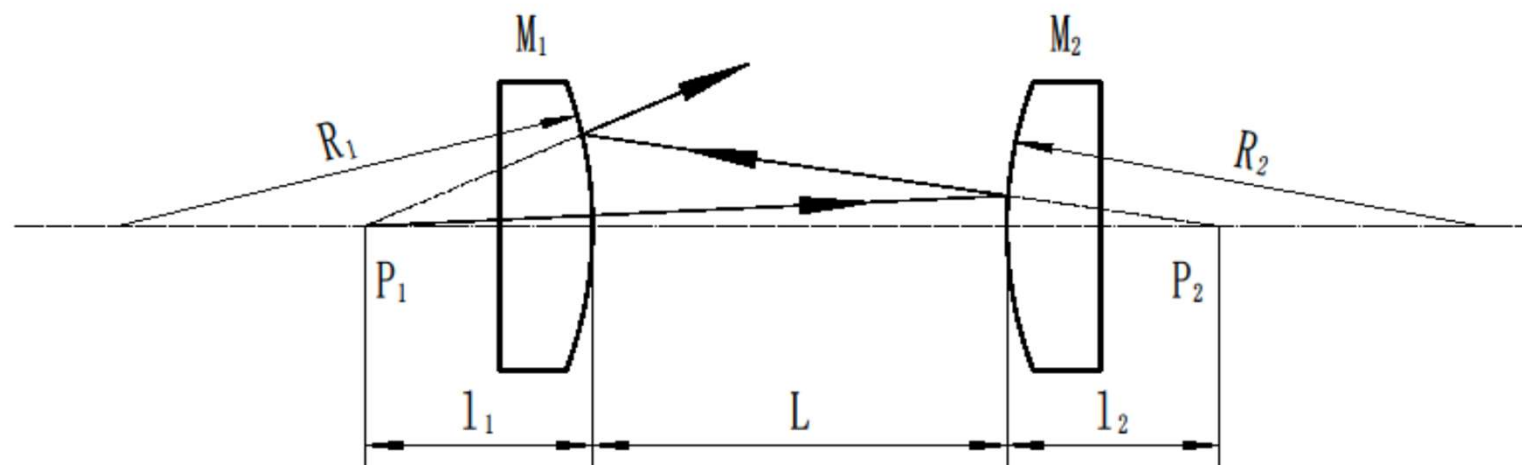


图2-9-3 双凸腔中光线传输路径

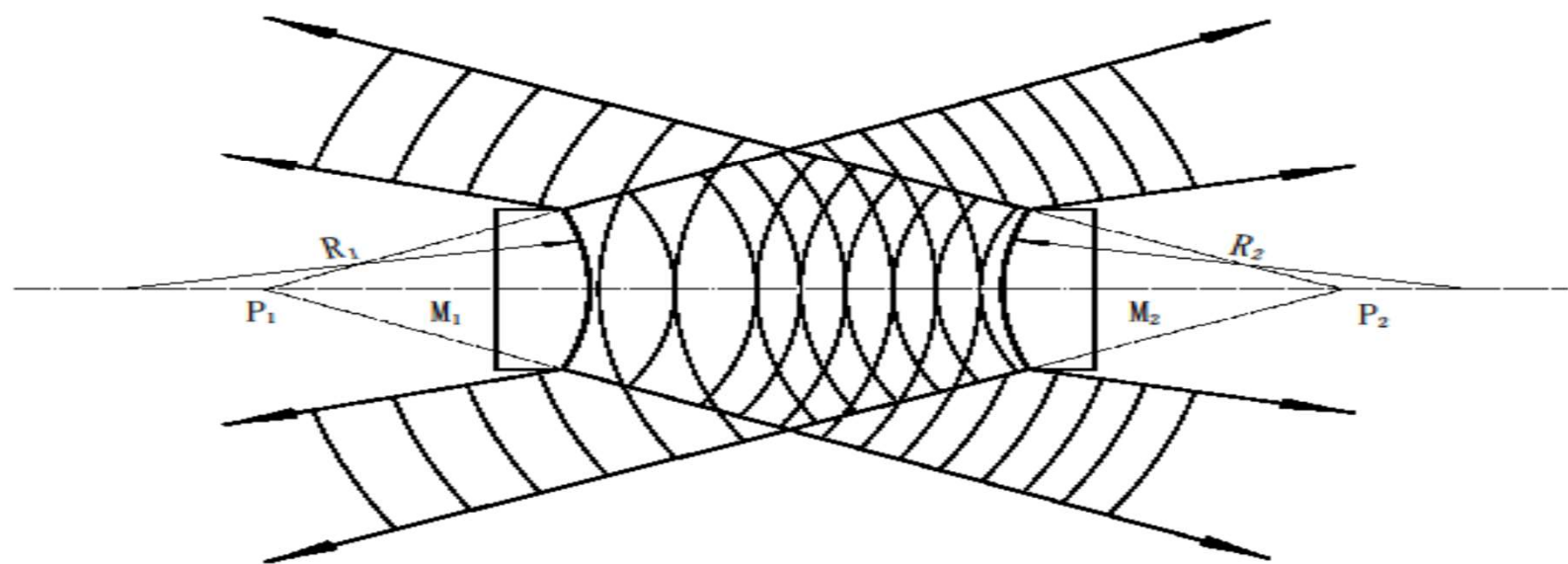


图2-9-2 双凸腔的共轭像点及几何自再现波型

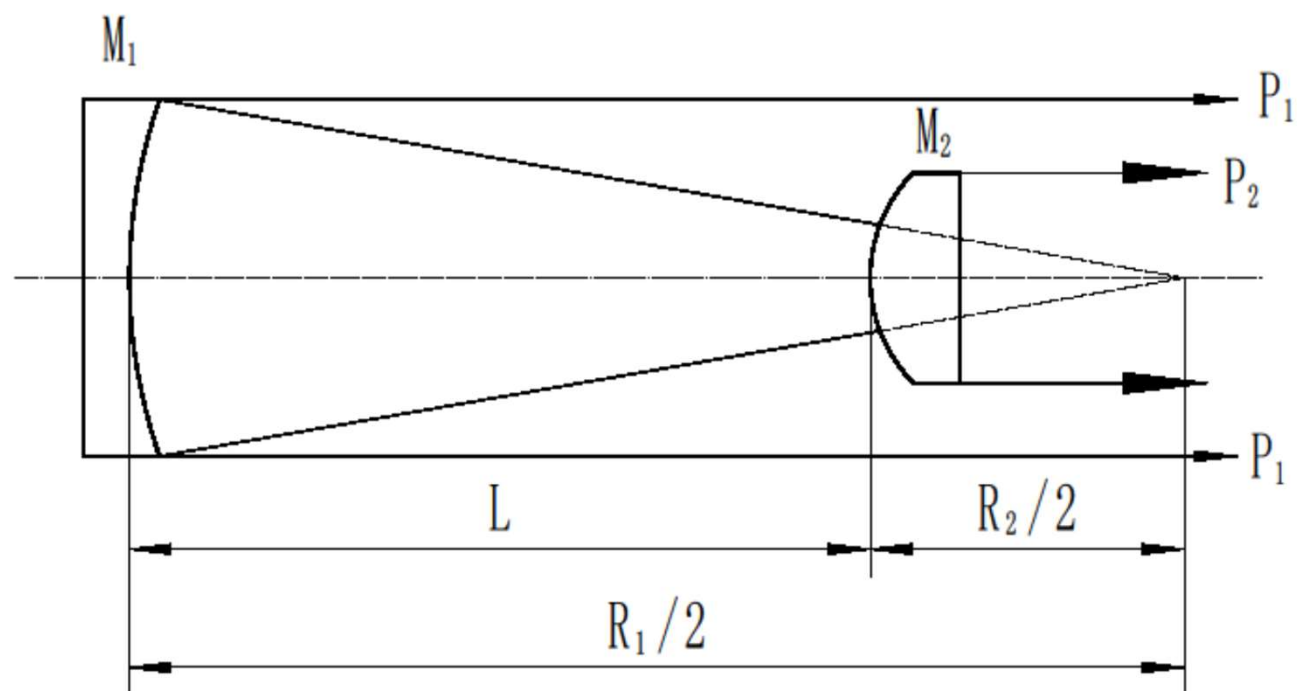


图2-9-4 虚共焦望远镜型非稳定腔