Todo:
- Aufgabe III 13 - Verknüpfung von Relationen
- Eulerkreise: Algorithmen
- =, *leq*, ... trans, refl., sym.
- Rechnregeln kartesisches Produkt L.5-3
- Kruskal, von Prim Algorithman
- Skizze "Wertemenge", "Definitionsbereich", "Bildmenge"

Martin Hediger, FHNW

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ - natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - ganze Zahlen
$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$ - rationale Zahlen
$\mathbb{R} := \{x | x$ als endlicher oder unendlicher Bruch darstellbar$\}$ - reelle Zahlen

2 Aussagenlogik

2.1 Wahrheitstabellen

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A $\Longrightarrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	A $\Longleftrightarrow$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikation: Wenn wir sagen A *impliziert* B, dann bedeutet dies *"Wenn A wahr ist, dann kann die Aussage, dass dann B falsch ist, nicht mehr wahr sein"*.

2.2 Normalformen

Berechnen mit Wahrheitstabelle oder Rechenregeln.

A	B	C	f	KNF Klausel	DNF Klausel
0	0	0	0	$(A \vee B \vee C)$	Nicht relevant für DNF
0	0	1	0	$(A \vee B \vee \neg C)$	Nicht relevant für DNF
0	1	0	1	Nicht relevant für KNF	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
1	1	0	0	$(\neg A \vee \neg B \vee C)$	Nicht relevant für DNF
...					

Konjunktive NF: $f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots$, für KNF sind wegen den Identitätsgesetzen nur die Zeilen massgebend, welche f den Wahrheitswert 0 ($false$) zuordnen (Zeilen die 1 sind spielen keine Rolle weil $f \wedge true = f$)

Disjunktive NF: $f = f_1 \vee f_2 \vee \dots$
Angenommen, $f(0, 1, 0) = 1$, dh die DNF muss für $(0, 1, 0)$ 1 zurückgeben. Die DNF $(f_1 \vee f_2 \vee ...)$ ist $= 1$, wenn nur schon eine Klausel $= 1$ ist. Also müssen in der DNF die Argumente der Klausel umgedreht werden (da sie in der Klammer mit $\wedge$ verknüpft sind).

3 Mengenalgebra

3.1 Rechenregeln Quantoren

Verneinungssätze
$\neg(\forall x : A(x)) \Longleftrightarrow \exists x : \neg A(x)$
$\neg(\forall x : \neg A(x)) \Longleftrightarrow \exists x : A(x)$
$\neg(\exists x : A(x)) \Longleftrightarrow \forall x : \neg A(x)$
$\neg(\exists x : \neg A(x)) \Longleftrightarrow \forall x : A(x)$

Vertauschbarkeitssätze
$\forall x, y : A(x, y) \Longleftrightarrow \forall y, x : A(x, y)$
$\exists x, y : A(x, y) \Longleftrightarrow \exists y, x : A(x, y)$
$\exists x \forall y : A(x, y) \Longrightarrow \forall y \exists x : A(x, y)$

$\forall x : A(x) \Longrightarrow \exists x : A(x)$
$\exists! x : A(x) \Longrightarrow \exists x : A(x)$

Sprachgebrauch:
"Einige meiner Freunde sind schlau." $\Longleftrightarrow \exists x : F(x) \wedge S(x)$
$\exists x : (\forall y : A(x, y))$: *"Es gibt (mind.) ein Produkt, welches im Korb jeder Person liegt."*
$\forall y : (\exists x : A(x, y))$: *"Alle Personen haben (mind.) 1 Produkt im Korb."*

3.2 Rechenregeln

Operatoren	$\cap / \cup \rightarrow$ AND/OR $\rightarrow$ Konj/Disj	
Idempotenz	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Kommutativ	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Identität	$A \cap G = A$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup G = G$
Assoziativ	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
Absorption	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiv	$A \cap (B \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Komplementär	$A \cap A = \emptyset$	$A \cup A^c = G$
	$(A^c)^c = A$	
	$G^c = \emptyset$	
	$\emptyset^c = G$	
Teilmengen	$A \subseteq B \Longrightarrow (A \cap B = A)$	
	$A \subseteq B \Longrightarrow (A \cup B = B)$	
	$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Longrightarrow (A \subseteq C)$	

3.3 Definitionen

Vereinigung: $A \cup B := \{x \in G | x \in A \vee x \in B\}$
Schnitt: $A \cap B := \{x \in G | x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz: $A \setminus B := \{x \in G | (x \in A \wedge x \notin B)\}$
Sym Diff.: $A \triangle B := \{x \in G | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
Complement: $A^c := \{x \in G | x \notin A\} = G \setminus A$
Kart. Produkt: $A \times B := \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

4 Relationen

Reflexivität: Jeder Knoten hat eine Schleife, $\forall x \in A : (x, x) \in R$.
Kontrollieren: $(x, x) \in R$?
Symmetrie: Für jeden Pfeil gibt es einen Pfeil in Gegenrichtung (Schleifen siend gleichzeitig Pfeil uend Pfeil in Gegenrichtung). Kontrollieren $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$?
$\forall x, y \in A : ((x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R)$
Antisymmetrie: Für jeden Pfeil, der nicht Schleife ist, gibt es keinen Pfeil in Gegenrichtung.
$\forall x, y \in A : (x \neq y \wedge (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R)$
Kontrollieren $(x, y) \in R$ und $(y, x) \notin R$? Falls ja ist es antisymmetrisch
Transitivität: Jeder Pfad entlang zweier Pfeile (mit gleichem Richtungssinn) hat einen abkürzenden Pfeil vom Anfangs- zum Endknoten des Pfades
$\forall x, y, z \in A : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R)$
Beachten: für Transitivität ist erforderlich mind. zwei Paare $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ zu haben, ansonsten wäre Prämisse der Definition der Implikation nicht erfüllt. Wenn nicht zwei Paare vorhanden sind $\in R$, ist die Relation automatisch transitiv.

4.1 Äquivalenzrelationen

Definition: Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heisst Äquivalenzrelation gdw. sie reflexiv, symmetrisch, transitiv ist.
Zwei Objekte $x, y \in A$ mit $(x, y) \in R$ heissen dann äquivalent zueinander, geschrieben $x \sim y$, oder auch $\sim (x, y)$ wenn $(x, y) \in \sim$ ist.
Äquivalenzklasse: $[x]_\sim := \{y \in A | x \sim y\}$

Beispiel: Äquivalenzrelation mit drei Äquivalenzklassen
$x \sim y \Longleftrightarrow 3 | |x - y|$ (3 teilt Betrag):
$[0]_\sim = \{0, 3, 6, 9, ...\}$
$[1]_\sim = \{1, 4, 7, 10, ...\}$
$[2]_\sim = \{2, 5, 8, 11, ...\}$

Äquivalenzrelationen partitionieren ihre Menge und sind gegenseitig disjunkt.

4.2 Ordnungsrelationen

Definition: Eine Relation R auf Menge A heisst Halbordnung gdw. R reflexiv, antisymmetrisch, transitiv ist.
Beispiel: $M := \{0, 1, 2, 3\}$, dann ist $\preceq := \{(x, y) \in M^2 | x \leq y\}$ eine Halbordnung auf M.

Teilbarkeit: $a | b \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : b = ma$

4.3 Grundbegriffe Halbordnungen

Minimales Element: Keine direkten Vorgänger
Kleinstes Element: Alle anderen Elemente nachfolger von x
Maximales Element: Keine direkten Nachfolger
Grösstes Element: Alle anderen Elemente Vorgänger von x

Zeichnen: Starten bei Knoten von dem möglichst viele Pfeile ausgehen (ohne Schleifen). Dann weitergehen, transitive Pfeile weglassen. Gerichteter Graph: $\underline{a \rightarrow b \rightarrow c, a \rightarrow c}$ wird zu $a - b - c$.

4.4 Verknüpfung

Definition: $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$, Verknüpfung
$S \circ R := \{(x,z) \in A \times C | \exists y \in B : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}$

4.5 Inverse Relation

Relation umdrehen: Beide Mengen vertauschen und Pfeile umdrehen R^{-1}.
Definition: Für $R \subseteq A \times B$, $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R\}$

5 Funktionen

5.1 Allgemein

Bei (totalen) Funktionen geht von linken Knoten genau ein Pfeil aus. Eine totale Funktion ist rechtseindeutig. **Rechtseindeutigkeit:** Das was ich rechts habe ist für ein linkes Element eindeutig.

Beispiel: Ist homogene Relation $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = x\}$ eine Funktion?
Nein, denn es sind z.b. $(1,-1) \in R_3$, aber auch $(1,1) \in R_3$. Somit existieren für $x = 1 \in \mathbb{R}$ zwei Elemente $y_1 = -1 \in \mathbb{R}$ und $y_2 = 1 \in \mathbb{R}$, so dass $(1,1) \in R_3$ und $(1,-1) \in R_3$ ist.

5.2 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

surjektiv: Alle Elemente der Wertemenge B gehören zur Bildmenge $f(A)$:
$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$, dh. falls $f(A) = B$
injektiv: Für zwei verschiedene Argumente $x_1, x_2 \in A$ sind die dazugehörigen Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ unterschiedlich:
$\forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$