

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ - natürliche Zahlen
 $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - ganze Zahlen
 $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$ - rationale Zahlen
 $\mathbb{R} := \{x | x \text{ als endlicher oder unendlicher Bruch darstellbar}\}$ - reelle Zahlen

2 Aussagenlogik

2.1 Wahrheitstabellen

A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	A	B	$A \implies B$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

A	B	$A \iff B$	A	B	$A \text{ XOR } B$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Implikation: Wenn wir sagen *A impliziert B*, dann bedeutet dies “Wenn A wahr ist, dann kann die Aussage, dass dann B falsch ist, nicht mehr wahr sein”.

Kontraposition: $(A \implies B) \equiv (\neg B \implies \neg A)$

Regen impliziert nasse Strassen. Trockene Strasse impliziert Sonnenschein. Nasse Strasse impliziert **nicht** Regen. Sonnenschein impliziert **nicht** trockene Strassen.

2.2 Normalformen

Berechnen mit Wahrheitstabelle oder Rechenregeln.

A	B	C	f	KNF Klausel	DNF Klausel
0	0	0	0	$(A \vee B \vee C)$	Nicht relevant für DNF
0	0	1	0	$(A \vee B \vee \neg C)$	Nicht relevant für DNF
0	1	0	1	Nicht relevant für KNF	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
1	1	0	0	$(\neg A \vee \neg B \vee C)$	Nicht relevant für DNF
...					

Konjunktive NF: $f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots$, für KNF sind wegen den Identitätsgesetzen nur die Zeilen massgebend, welche f den Wahrheitswert 0 (false) zuordnen (Zeilen die 1 sind spielen keine Rolle weil $f \wedge true = f$)

Disjunktive NF: $f = f_1 \vee f_2 \vee \dots$

Angenommen, $f(0,1,0) = 1$, dh die DNF muss für (0,1,0) 1 zurückgeben. Die DNF ($f_1 \vee f_2 \vee \dots$) ist = 1, wenn nur schon eine Klausel = 1 ist. Also müssen in der DNF die Argumente der Klausel umgedreht werden (da sie in der Klammer mit \wedge verknüpft sind).

3 Mengenalgebra

3.1 Rechenregeln Quantoren

Verneinungssätze
 $\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$
 $\neg(\forall x \in M : \neg A(x)) \iff \exists x \in M : A(x)$
 $\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$
 $\neg(\exists x \in M : \neg A(x)) \iff \forall x \in M : A(x)$

Vertauschbarkeitssätze
 $\forall x \in M, y \in N : A(x, y) \iff \forall y \in N, x \in M : A(x, y)$
 $\exists x \in M, y \in N : A(x, y) \iff \exists y \in N, x \in M : A(x, y)$
 $\exists x \in M : \forall y \in N : A(x, y) \implies \forall y \in N : \exists x \in M : A(x, y)$

$\forall x \in M : A(x) \implies \exists x \in M : A(x)$
 $\exists! x \in M : A(x) \implies \exists x \in M : A(x)$

Sprachgebrauch:
“Einige meiner Freunde sind schlau.” $\iff \exists x : F(x) \wedge S(x)$
 $\exists x : (\forall y : A(x, y))$: “Es gibt (mind.) ein Produkt, welches im Korb jeder Person liegt.”
 $\forall y : (\exists x : A(x, y))$: “Alle Personen haben (mind.) 1 Produkt im Korb.”

Verteilungssätze
 $\exists x \in M : (P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x \in M : P(x)) \vee (\exists x \in M : Q(x))$
 $\exists x \in M : (P(x) \wedge Q(x)) \implies (\exists x \in M : P(x)) \wedge (\exists x \in M : Q(x))$
 $\forall x \in M : (P(x) \vee Q(x)) \iff (\forall x \in M : P(x)) \vee (\forall x \in M : Q(x))$
 $\forall x \in M : (P(x) \wedge Q(x)) \iff (\forall x \in M : P(x)) \wedge (\forall x \in M : Q(x))$

3.2 Rechenregeln

Operatoren	$\cap / \cup \rightarrow$ AND/OR \rightarrow Konj/Disj	
Idempotenz	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Kommutativ	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Identität	$A \cap G = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup G = G$
Assoziativ	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
Absorption	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiv	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Komplementär	$A \cap A^c = \emptyset$ $(A^c)^c = A$ $G^c = \emptyset$ $\emptyset^c = G$	$A \cup A^c = G$
Teilmengen	$A \subseteq B \implies (A \cap B = A)$ $A \subseteq B \implies (A \cup B = B)$ $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \implies (A \subseteq C)$	

3.3 Definitionen

Vereinigung: $A \cup B := \{x \in G | x \in A \vee x \in B\}$
Schnitt: $A \cap B := \{x \in G | x \in A \wedge x \in B\}$
Differenz: $A \setminus B := \{x \in G | (x \in A \wedge x \notin B)\}$
Sym Diff.: $A \triangle B := \{x \in G | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$,
 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Complement: $A^c := \{x \in G | x \notin A\} = G \setminus A$
Kart. Produkt: $A \times B := \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

Teilmenge: $x \in A \implies x \in B$, dann ist $A \subseteq B$, dh. A ist Teilmenge von B und B ist Obermenge von A

3.4 Partition

Alle Partitionen von $\{0, 1, 2\}$: $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}, \{\{0\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{0, 2\}\}, \{\{2\}, \{0, 1\}\}, \{\{0, 1, 2\}\}.$

3.5 Potenzmenge

Menge aller Teilmengen einer Menge A wird Potenzmenge genannt.
 $A := \{1, 2, 3\}$, dann ist $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$
 $P(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$
Mächtigkeit der Potenzmenge einer endlichen Menge ist $|P(A)| = 2^{|A|}.$
Beachten:
 $(x, y) \in M \times M \implies \{\{(x, y)\}\} \subseteq P(M \times M)$
 $(x, y) \in M \times M \implies \{(x, y)\} \in P(M \times M)$
Anzahl Relationen:
 $M = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow$ Anzahl Relationen $|P(M \times M)| = 2^{|M| \times |M|} = 2^{16}$

4 Relationen

Reflexivität: Jeder Knoten hat eine Schleife, $\forall x \in A : (x, x) \in R$.
Kontrollieren: $(x, x) \in R$?
Symmetrie: Für jeden Pfeil gibt es einen Pfeil in Gegenrichtung (Schleifen sind gleichzeitig Pfeil und Pfeil in Gegenrichtung).
Kontrollieren $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$?
 $\forall x, y \in A : ((x, y) \in R \implies (y, x) \in R)$
Antisymmetrie: Für jeden Pfeil, der nicht Schleife ist, gibt es keinen Pfeil in Gegenrichtung.
 $\forall x, y \in A : (x \neq y \wedge (x, y) \in R \implies (y, x) \notin R)$
Kontrollieren $(x, y) \in R$ und $(y, x) \notin R$? Falls ja ist es antisymmetrisch
Transitivität: Jeder Pfad entlang zweier Pfeile (mit gleichem Richtungssinn) hat einen abkürzenden Pfeil vom Anfangs- zum Endknoten des Pfades
 $\forall x, y, z \in A : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R)$
Beachten: für Transitivität ist erforderlich mind. zwei Paare $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ zu haben, ansonsten wäre Prämisse der Definition der Implikation nicht erfüllt. Wenn nicht zwei Paare vorhanden sind $\in R$, ist die Relation automatisch transitiv.

4.1 Äquivalenzrelationen

Definition: Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heisst Äquivalenzrelation gdw. sie reflexiv, symmetrisch, transitiv ist.
Zwei Objekte $x, y \in A$ mit $(x, y) \in R$ heissen dann äquivalent zueinander, geschrieben $x \sim y$, oder auch $\sim(x, y)$ wenn $(x, y) \in \sim$ ist.
Äquivalenzklasse: $[x]_{\sim} := \{y \in A | x \sim y\}$: “Jedes Element steht mit jedem in Relation und nicht in Relation mit Elementen ausserhalb der Klasse.”

Beispiel: Äquivalenzrelation mit drei Äquivalenzklassen

$x \sim y \iff 3 \mid |x - y|$ (3 teilt Betrag):

$[0]_{\sim} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$

$[1]_{\sim} = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

$[2]_{\sim} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$

Äquivalenzrelationen partitionieren ihre Menge und sind gegenseitig disjunkt.

Bell-Zahlen: 1, 2, 5, 15, 52, ...

	<	≤	≠	=
reflexiv	n	j	n	j
symm.	n	n	j	j
antisymm.	j	j	n	j
trans.	j	j	n	j

4.2 Ordnungsrelationen

Definition: Eine Relation R auf Menge A heisst Halbordnung gdw. R reflexiv, antisymmetrisch, transitiv ist.

Beispiel: $M := \{0, 1, 2, 3\}$, dann ist $\preceq := \{(x, y) \in M^2 \mid x \leq y\}$ eine Halbordnung auf M . Hier $\preceq = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Vergleichbarkeit: Zwei Elemente x, y einer Menge M mit einer Halbordnung \preceq heissen unvergleichbar gdw. $(x, y) \not\preceq \wedge (y, x) \not\preceq$.

Teilbarkeit: $a \mid b \iff \exists m \in \mathbb{Z} : b = ma$

4.3 Grundbegriffe Halbordnungen

Minimales Element: Keine direkten Vorgänger

Kleinstes Element: Alle anderen Elemente nachfolger von x

Maximales Element: Keine direkten Nachfolger

Grösstes Element: Alle anderen Elemente Vorgänger von x

Zeichnen: Starten bei Knoten von dem möglichst viele Pfeile ausgehen (ohne Schleifen). Dann weitergehen, transitive Pfeile weglassen. Gerichteter Graph: $a \rightarrow b \rightarrow c, a \rightarrow c$ wird zu $a - b - c$.

4.4 Verknüpfung

Definition: $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$, Verknüpfung

$S \circ R := \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$

$g \circ f = g(f)$

4.5 Inverse Relation

Relation umdrehen: Beide Mengen vertauschen und Pfeile umdrehen R^{-1} .

Definition: Für $R \subseteq A \times B$, $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$

Korrekt? Inverse Relation einer bel. Funktion ist nur dann eine Funktion, wenn die Funktion bijektiv ist.

Aufgaben aus SZP

5 Funktionen

5.1 Allgemein

Bei (totalen) Funktionen geht von linken Knoten genau ein Pfeil aus. Eine totale Funktion ist rechtseindeutig. **Rechtseindeutig-**

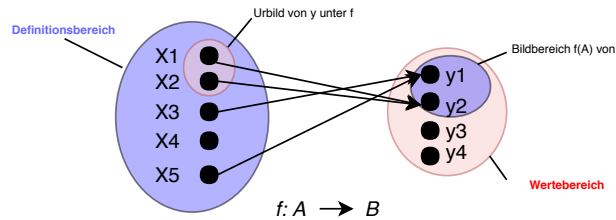
keit: Das was ich rechts habe ist für ein linkes Element eindeutig.

Beispiel: Ist homogene Relation $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x\}$ eine Funktion?

Nein, denn es sind z.B. $(1, -1) \in R_3$, aber auch $(1, 1) \in R_3$. Somit existieren für $x = 1 \in \mathbb{R}$ zwei Elemente $y_1 = -1 \in \mathbb{R}$ und $y_2 = 1 \in \mathbb{R}$, so dass $(1, 1) \in R_3$ und $(1, -1) \in R_3$ ist.

5.2 Begriffe Funktionen

Definition URBILD L.8-1(4) anschauen



Urbild: ist Menge

$f(x) = x + 1$, testen: $x + 1$ auf \mathbb{R} definiert? $\rightarrow x = y - 1$: auch auf \mathbb{R} ?

$f(x) = 2x$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: Beachten bspw. $y = 3$, im Wertebereich aber nicht im Bildbereich.

5.3 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

surjektiv: Alle Elemente der Wertemenge B gehören zur Bildmenge $f(A)$:

$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$, dh. falls $f(A) = B$

injektiv: Für zwei verschiedene Argumente $x_1, x_2 \in A$ sind die dazugehörigen Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ unterschiedlich:

$\forall x_1, x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$

Inverse Funktion: $f(x) = 2x$, $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, $f^{-1}(x) = 1/2x$.

6 Graphen

6.1 Begriffe

Kreis: Wenn $v_{init} = v_{end}$, nicht zwingend jede Kante Teil vom Kreis.

6.2 Eulergraphen

Wird in einem Weg jede (!) Kante genau einmal besucht, heisst der Weg Eulerweg.

Satz: In einem Graphen oder Multigraphen kann es nur eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad haben.

Eulerweg I: Für jeden Eulerweg gilt: jeder Knoten, der nicht End- oder Anfangsknoten, also "Zwischenknoten" ist, muss zu einer bisher im Weg unbenutzten hineinführenden Kante eine bisher unbenutzte herausführende Kante haben.

Bei Königsberg: Jeder Knoten hat ungerade Anzahl Kanten, diese können alle nicht Zwischenknoten des Weges sein.

Notwendige Eulerbedingung für Eulerwege: Existiert in einem Graph oder Multigraph ein Eulerweg, dann haben notwendigerweise alle Knoten bis auf zwei einen geraden Grad (also höchstens zwei, bzw. 0 oder 2, haben einen ungeraden Grad).

\rightarrow **Wenn der Graph oder Multigraph zwei Knoten mit ungeradem Grad besitzt, muss der Eulerweg in einem von beiden starten und im anderen enden.**

Notwendige und hinreichende Eulerbedingung für Eulerwege: Ein Graph oder Multigraph hat genau dann einen Eulerweg, wenn er zusammenhängend ist und die notwendige Eulerbedingung erfüllt ist, also entweder keinen oder zwei Knoten mit ungeradem Grad hat.

Notwendige und hinreichende Bedingung für Eulerkreis: Ein Graph hat Eulerkreis, genau wenn er zusammenhängend ist und jeder Knoten geraden Grad hat.

6.3 Hierholzer: Berechnung Eulerweg

Input: Zusammenhängender Graph/Multigraph mit maximal zwei Knoten von ungeradem Grad

1) Wähle beliebigen Startknoten (falls es ungerade Knoten gibt, wähle einen solchen)

2) Gehe von diesem Knoten aus über noch nicht besuchte Kanten so lange weiter bis du nicht mehr weiterkommst

3) Alle Kanten schon einmal besucht?

\rightarrow Ja : Ende

\rightarrow Nein: Wähle beliebigen Knoten mit noch unbesuchten Kanten auf diesem Weg als neuen Startknoten und gehe zu 2)

Wege Zusammengefügt ergeben einen Eulerweg

6.4 Minimal aufspandender Baum

"Greedy": In jedem Schritt die beste Wahl treffen, die momentan zur Verfügung steht.

Von Prim: "In jedem Schritt wird die kürzest mögliche Brücke gebaut."

Wähle einen speziellen Ort aus (Festland) und nenne ihn erreichbar. Alle anderen Orte sind zunächst nicht erreichbar. Führe den folgenden Schritt so oft aus, bis alle Orte erreichbar sind:

Baue die kürzeste Brücke zwischen zwei Orten, von denen einer erreichbar und der andere nicht erreichbar ist, und nenne den bislang nicht erreichbaren Ort erreichbar.

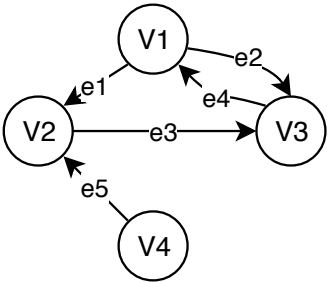
Von Kruskal: "Baue in jedem Schritt die kürzeste Brücke zwischen zwei beliebige bislang unverbunden Orten."

Führe den folgenden Schritt so oft aus, bis alle Orte untereinander durch Brücken verbunden sind: Baue die kürzeste Brücke, die zwei Orte verbindet, die bislang nicht voneinander aus erreichbar sind. Beachten: Anfangs sind kann es auch Lücken zwischen schon verbundenen Orten geben.

Eigenschaften: Jedes andere Brückensystem wird gesamthaft länger.

6.5 Matrixdarstellung

Knoten (Symbole V, v, w) \rightarrow Zeilen
Adjazenzma., ungerichtet: $a_{ij} = 1$, wenn $\{v_i, v_j\} \in E$, 0 sonst
Adjazenzma., gerichtet: $a_{ij} = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, 0 sonst
Inzidenzma., ungerichtet: $b_{ij} = 1$ wenn $\exists w \in V : e_j = \{v_i, w\} \in E$, 0 sonst
Inzidenzma., gerichtet: $b_{ij} = 1$, wenn $\exists w \in V : e_j = (v_i, w) \in E$, -1 , wenn $\exists w \in V : e_j = (w, v_i) \in E$, 0 sonst



Adjazenzmatrix

0	1	1	0
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0

Inzidenzmatrix (Zeilen = Knoten, Spalten = Kanten):

1	1	0	-1	0
-1	0	1	0	-1
0	-1	-1	1	0
0	0	0	0	1

6.6 Isomorphismus

Graphen isomorph unterscheiden sich nur durch Anordnung und Benennung der Knoten.
Es existiert eine bijektive Funktion $f : V \rightarrow V'$

7 Induktion

8 Rekursion

Lineare Rekursionsgleichung k -ter Ordnung mit Störterm:
 $f(n) = s(n) + \sum_{i=1}^k c_{n-i}(n) \cdot f(n-i)$
 $s(n)$ Störterm, k -te Ordnung, $c(n)$ abhängige Koeffizientenfunktionen. "homogen": Störterm = 0.

\rightarrow Erst durch Angabe von k Anfangsbedingungen $f(1), f(2), \dots, f(k)$ eindeutig bestimmt.

8.1 Rekursionsgraph

- 1) Anfangswerte zu Blättern hinzufügen
- 2) Im Baum aufsteigend für jeden Vorgänger gem. f den Funktionswert ausrechnen und hinschreiben, bis bei Wurzel $f(n)$ angekommen und so den Funktionswert $f(n)$ (die Auswertung) für das vorgegebene n erhalten

8.2 Beweis Rekursionsgleichung

$f(1) = 1, f(n) = 1 + 2 \cdot f(n-1)$
Nach Tabelle "Inhomogene RG 1. Ordg. mit konst. c und konst. s ", somit Ansatz:
 $\rightarrow f(n) = \underbrace{1}_a \cdot \underbrace{2^{n-1}}_c + \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \cdot 1$

Korrektheit des Induktionsschrittes im Beweis durch Einsetzen prüfen:

- 1) Gilt die explizite Darstellung der Zahlenfolge für $n = 1$
- 2) Ist die Gleichung korrekt, wenn die explizite Darstellung in die rekursive Definition eingesetzt wird?
 \rightarrow Explizite Lösung $f(n) \stackrel{?}{=} \text{Gleichung gem. Rekursionsdef. } f(n) = s + cf(n-1)$

8.3 Rekursionsgleichungen

Homogene RG 1. Ord. Homogene RG 1. Ord. mit $c = c(n)$ konst. Inhomog. RG 1. Ord. Inhomog. RG 1. Ord. mit konst. $c = c(n)$ und $s = s(n)$	$f(n) = c(n) \cdot f(n-1)$ mit $f(1) = a, a \in \mathbb{R}$ $f(n) = c \cdot f(n-1)$ $f(n) = s(n) + c(n) \cdot f(n-1), f(1) = a$ $f(n) = c \cdot f(n-1) + s, f(1) = a, a \in \mathbb{R}$	Iteration: $f(n-1), f(n-2), \dots$ einsetzen $f(n) = a \cdot c^{n-1}$ $f(n-1), f(n-2), \dots$ einsetzen $c \neq 1: f(n) = a \cdot c^{n-1} + \frac{1-c^{n-1}}{1-c} \cdot s$ (Achtung: Störterm!) $c = 1: a + (n-1) \cdot s$ $f(n) = \text{"allg. Lösung der dazugeh. homog. Gleichung"} + p(n) = d \cdot c^{n-1} + p(n)$ $d \in \mathbb{R}, p(n)$ spezielle (partikuläre) Lösg. der inhomog. Rekursion, und nicht Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung
Inhomog. RG 1. Ord. mit konst. $c = c(n)$ und allgm. $s(n)$	$f(n) = s(n) + c \cdot f(n-1)$, mit $c \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a \in \mathbb{R}$	
Homog. RG 2. Ord. mit konst. $c_1 = c_1(n)$ und $c_2 = c_2(n)$ Inhomog. RG 2. Ord. konst. $c_1 = c_1(n)$ und $c_2 = c_2(n)$ und allgem. $s(n)$		

8.4 Vorgehen Bestimmung Explizite Darstellung

- 1) Zahlenbeispiele mithilfe rekursiver Darstellung
- 2) Induktives Schliessen
- 3) Vermutung für explizite Darstellung
- 4) Vollständige Induktion oder Einsetzen
- 5) Explizite Darstellung

8.5 Ansätze für $s(n)$:

$s(n)$	Ansatz für $p(n)$
6	x
n	$xn + y$
n^2	$xn^2 + yn + z$
5^n	$t \cdot 5^n$
$n \cdot 7^n$	$(xn + y) \cdot 7^n$
$n^2 \cdot 7^n$	$(xn^2 + yn + z) \cdot 7^n$

Zugehörige homogene Rekursionsgleichung:

$$f(n) = s(n) + \underbrace{\sum_{i=1}^k c_{n-i}(i) \cdot f(n-i)}_{=h(n)}$$

$h(n)$: "zugehörige homogene Rekursionsgleichung".

Achtung: $h(n) = \sum_{i=1}^k c_{n-i}(n) \cdot h(n-i)$