# Logik und Komplexität  Übung 4

Notizen zur vierten Übung
HU Berlin

**Aufgabe 1)**

**a)**

$$\exists x X(x) \quad \wedge \exists y \neg X(y) \quad \wedge \forall u \forall v((X(u) \wedge \neg X(v)) \quad \rightarrow (\neg E(u,v) \wedge \quad \neg E(v,u)))$$

$$\bigvee_{a\in A} v_a \quad \wedge \bigvee_{a\in A} \neg v_a \quad \wedge \bigwedge_{a\in A} \bigwedge_{b\in A} (v_a \wedge \neg v_b \quad \rightarrow (\neg \begin{cases} 1 & (a,b) \in E \\ 0 & (a,b) \notin E \end{cases} \wedge \neg \begin{cases} 1 & (b,a) \in E \\ 0 & (b,a) \notin E \end{cases}))$$

$$\begin{array}{ll} & (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \\ \wedge & (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \\ \wedge & (v_1 \wedge \neg v_1 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_1 \wedge \neg v_2 \rightarrow \neg 1 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_1 \wedge \neg v_3 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_2 \wedge \neg v_1 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_2 \wedge \neg v_2 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_2 \wedge \neg v_3 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_3 \wedge \neg v_1 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_3 \wedge \neg v_2 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_3 \wedge \neg v_3 \rightarrow \neg 1 \wedge \neg 1) \end{array}$$

**b)** Erfüllende Belegung ist $v_1, \neg v_3$ d.h.: Erfüllt für $X = \{1\}, X = \{1, 2\}$

**Aufgabe 2)**

Zeige: $Eval_{Fin_<}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz $\Phi$ liegt in P.
D.h. es ex. ein det. Algorithmus der bei eingabe einer Endlichen Struktur $\mathfrak{A}$ in Polinomialzeit entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \Phi$

Ein ESO-Horn Satz $\Phi$ besitzt die form:

$$\exists X_1 ... \exists X_d \forall y_1 .. \forall y_{d'} \phi$$

Wobei $\phi$ eine Konjunktion von ESO-Horn formeln ist:

$$\phi := \bigwedge_{k \in \Gamma} \bigvee_{j \in K} \beta_{k,j}$$

mit

$$\beta_{k,j} := \begin{cases} \psi(y_1, ..., y_{d'}) & \psi \in FO[\sigma] \\ X_i(\bar{y}) & \bar{y} \in (\{y_1, ..., y_d\} \cup \{c : \text{c ist eine Konstante in } \sigma\})^{ar(X_i)} \\ \neg X_i(\bar{y}) & \bar{y} \in (\{y_1, ..., y_d\} \cup \{c : \text{c ist eine Konstante in } \sigma\})^{ar(X_i)} \end{cases}$$

Aus dem Beweis von Theorem 2.24 konstruieren wir in **Polinomialzeit** bei eingabe von $\mathfrak{A}$ die Aussagenlogische Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$. Diese hat die Form:

$$\bigwedge_{a_1 \in A} \cdots \bigwedge_{a'_d \in A} \bigwedge_{k \in \Gamma} \bigvee_{j \in k} \beta'_{k,j}$$

mit

$$\beta'_{k,j} := \begin{cases} \psi(a_1, ..., a_{d'}) & \psi \in FO[\sigma] \\ v_{X_i,(\bar{y})} & \bar{y} \in A^{ar(X_i)} \\ \neg v_{X_i,(\bar{y})} & \bar{y} \in A^{ar(X_i)} \end{cases}$$

$\psi(a_1, ..., a_{d'})$ besitzt keine variablen und kann rekursiv in Polinomialzeit ausgewertet werden. Somit ist $\Phi$ ein Aussagenlogischer Horn Satz ist, welcher mit dem Streichungsalgorithmus in Polinomialzeit gelöst werden kann. $\square$

**Aufgabe 3)**

**a)** $A \approx_2 B$ und $A \not\approx_3 B$

Gewinnstrategie Duplicator in 2 Runden: 'Wähle jeweils den entsprechenden Knoten aus der anderen Struktur. Sollte Spoiler aus B zwei der unteren

äußeren 3 nehmen, wähle gegenüberliegende Knoten.'
Gewinnstrategie Spoiler in 3 Runden: 'Wähle den linken, unteren und rechten Knoten in B. Denn es gibt keine drei knoten in A, so dass diese paarweise keine Kante haben.'

**b)** $\neg\Psi \equiv \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge z \neq y \wedge x \neq z \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(y,z) \wedge \neg E(x,z))$
$A \models \forall x \forall y \forall z (x = y \vee = y \vee x = z \vee E(x,y) \vee E(y,z) \vee E(x,z))$
$B \models \neg\Psi$

**Aufgabe 4)**

IV: Wenn es eine FO-Formel $\Psi$ mit $qr(\Psi) = m$ gibt, so dass $A \models \Psi(\bar{a})$ und $B \models \neg\Psi(\bar{b})$, dann gibt es eine Gewinnstrategie für Spoiler.
IA: Sei m = 0. Das heisst, dass die Formel eine quantorenfreie Formel, also eine Boolsche Kombination von atomaren Formeln ist. Sie können also bereits durch ein Atom unterschieden werden.
IS: Sei $qr(\Psi) > 0$, $A \models \Psi(\bar{a})$ und $B \models \neg\Psi(\bar{b})$.
$\Psi(\bar{x})$ ist eine Formel mit Quantorenrang m-1 und hat die Form $\exists u(\psi(\bar{x}, u))$.
Es gibt also mindestens eine solche Formel geben, die A,$\bar{a}$ und B,$\bar{b}$ unterscheidet. Wenn diese Formel den Quantorrang ¡m besitzt, so gilt nach IV, dass Spoiler eine Gewinnstrategie haben muss. Somit hat dieser natürlich auch eine Strategie für m Runden lange Spiele.
Ansonsten ist eines von beiden der Fall:
$A \models \exists u(\psi(\bar{a}, u))$ und $B \models \forall u(\neg\psi(\bar{b}, u))$
oder $A \models \forall u(\neg\psi(\bar{a}, u))$ und $B \models \exists u(\psi(\bar{B}, u))$
Im ersteren Falle kann Spoiler ein beliebiges Element aus A wählen, so dass die linke Seite erfüllt wird. Für jedes Element, dass Duplicator dann aus B wählen kann gilt dann die rechte Seite. Nach IV gewinnt Spoiler dann alle längeren Spiele. Im zweiteren Fall wählt Spoiler aus B und verfährt analog. Auch hier gewinnt er nach IV alle längeren Spiele.