Logik und Komplexität Übung 4

Notizen zur dritten Übung
HU Berlin

Aufgabe 1)

a)

$$\exists x X(x) \quad \wedge \exists y \neg X(y) \quad \wedge \forall u \forall v ((X(u) \wedge \neg X(v)) \qquad \to (\neg E(u,v) \wedge \qquad \neg E(v,u)))$$

$$\bigvee_{a\in A} v_a \quad \wedge \bigvee_{a \in A} \neg v_a \quad \wedge \bigwedge_{a\in A} \bigwedge_{b \in A} (v_a \wedge \neg v_b \quad \to (\neg \begin{cases} 1 & (a,b) \in E \\ 0 & (a,b) \notin E \end{cases} \wedge \neg \begin{cases} 1 & (b,a) \in E \\ 0 & (b,a) \notin E \end{cases}))$$

$$\begin{array}{ll} & (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \\ \wedge & (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \\ \wedge & (v_1 \wedge \neg v_1 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_1 \wedge \neg v_2 \to \neg 1 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_1 \wedge \neg v_3 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_2 \wedge \neg v_1 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_2 \wedge \neg v_2 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_2 \wedge \neg v_3 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_3 \wedge \neg v_1 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_3 \wedge \neg v_2 \to \neg 0 \wedge \neg 0) \\ \wedge & (v_3 \wedge \neg v_3 \to \neg 1 \wedge \neg 1) \end{array}$$

b) Erfüllende Belegung ist $v_1, \neg v_3$ d.h.: Erfüllt für $X = \{1\}, X = \{1,2\}$

Aufgabe 2)

Zeige: $Eval_{Fin_<}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz Φ liegt in P.
D.h. es ex. ein det. Algorithmus der bei eingabe einer Endlichen Struktur $\mathfrak{A}$ in Polinomialzeit entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \Phi$

Ein ESO-Horn Satz Φ besitzt die form:

$$\exists X_1 ... \exists X_d \forall y_1 .. \forall y_{d'} \phi$$

Wobei ϕ eine Konjunktion von ESO-Horn formeln ist:

$$\phi := \bigwedge_{k \in \Gamma} \bigvee_{j \in K} \beta_{k,j}$$

mit

$$\beta_{k,j} := \begin{cases} \psi(y_1, ..., y_{d'}) & \psi \in FO[\sigma] \\ X_i(\bar{y}) & \bar{y} \in (\{y_1, ..., y_d\} \cup \{c : \text{c ist eine Konstante in } \sigma\})^{ar(X_i)} \\ \neg X_i(\bar{y}) & \bar{y} \in (\{y_1, ..., y_d\} \cup \{c : \text{c ist eine Konstante in } \sigma\})^{ar(X_i)} \end{cases}$$

Aus dem Beweis von Theorem 2.24 konstruieren wir in **Polinomialzeit** bei eingabe von $\mathfrak{A}$ die Aussagenlogische Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$. Diese hat die Form:

$$\bigwedge_{a_1 \in A} \cdots \bigwedge_{a'_d \in A} \bigwedge_{k \in \Gamma} \bigvee_{j \in k} \beta'_{k,j}$$

mit

$$\beta'_{k,j} := \begin{cases} \psi(a_1, ..., a_{d'}) & \psi \in FO[\sigma] \\ v_{X_i,(\bar{y})} & \bar{y} \in A^{ar(X_i)} \\ \neg v_{X_i,(\bar{y})} & \bar{y} \in A^{ar(X_i)} \end{cases}$$

$\psi(a_1, ..., a_{d'})$ besitzt keine variablen und kann rekursiv in Polinomialzeit ausgewertet werden. Somit ist Φ ein Aussagenlogischer Horn Satz ist, welcher mit dem Streichungsalgorithmus in Polinomialzeit gelöst werden kann. $\square$

Aufgabe 3)

a) $A \approx_2 B$ und $A \not\approx_3 B$

Gewinnstrategie Duplicator in 2 Runden: 'Wähle jeweils den entsprechenden Knoten aus der anderen Struktur. Sollte Spoiler aus B zwei der unteren

äußeren 3 nehmen, wähle gegenüberliegende Knoten.'
Gewinnstrategie Spoiler in 3 Runden: 'Wähle den linken, unteren und rechten Knoten in B. Denn es gibt keine drei knoten in A, so dass diese paarweise keine Kante haben.'

b) $\neg\Psi \equiv \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge z \neq y \wedge x \neq z \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(y,z) \wedge \neg E(x,z))$
$A \models \forall x \forall y \forall z (x = y \vee = y \vee x = z \vee E(x,y) \vee E(y,z) \vee E(x,z))$
$B \models \neg\Psi$

Aufgabe 4)