Logik und Komplexität Übung 5

Notizen zur fünften Übung
HU Berlin

Aufgabe 1)

a)

Aufgabe 2)

IV: $|A| < |B| und |A| \leq 2^m$
mit Invariante ($a_j <^A a_{j'}$ *und* $b_j \geq^B b_{j'}$) *oder* ($a_j \geq^A a_{j'}$ *und* $b_j <^B b_{j'}$)
oder $Dist(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ *und* $Dist(a_j, a_{j'}) < Dist(b_j, b_{j'})$
IA: i=0.
Der zweite Teil der Invariante ist erfüllt, da nach IV $|A| < |B|$, somit ist für die vorgegebenen Knoten $Dist(a_j, a_{j'}) < Dist(b_j, b_{j'})$ erfüllt. Die Distanz von a_1, a_2 kann maximal $2^m - 1$ sein, nach Definition der Distanzfunktion (Der erste Knoten selbst wird nicht mitgezählt). Somit ist der linke Teil der Invariante ($Dist(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$) ebenfalls erfüllt.
IS: $i \to i+1$
Spoilers Gewinnstrategie ist es, ein Halbierungsverfahren auf B durchzuführen. Wir zeigen, dass egal wie Duplicator auf diese Strategie reagiert, die Invariante erfüllt bleibt. Spoiler wählt also b_{2+i+1} s.d. $b_j < b_{2+i+1} < b_{j'}$ und $Dist(b_j, b_{2+i+1}) = 2^{m-(i+1)}$ mit j,j'$\in \{1, .., 2+i\}$.
Duplicator wählt nun aus A.
Fall 1: $a_{2+i+1} = a_j$. Die Invariante ist erfüllt, da die Distanz 0 ist.
Fall 2: $a_{2+i+1} <^A a_j$ *oder* $a_{2+i+1} >^A a_{j'}$ ist ungünstig für Duplicator, da es die Invariante erfüllt.
Fall 3: $Dist(a_j, a_{2+i+1}) = Dist(b_j, b_{2+i+1})$
Es folgt $Dist(a_j, a_{j'}) < Dist(b_j, b_{j'}) \Rightarrow Dist(a_{2+i+1}, a_{j'}) < Dist(b_{2+i+1}, b_{j'})$
Da $Dist(b_{2+i+1}, b_{j'}) \geq 2^{m-(i+1)} \Rightarrow Dist(a_{2+i+1}, a_{j'}) < 2^{m-(i+1)}$
Fall 4: $Dist(a_j, a_{2+i+1}) < Dist(b_j, b_{2+i+1})$

Da $Dist(b_{2+i+1}, b_{j'}) \geq 2^{m-(i+1)} \Rightarrow Dist(a_j, a_{2+i+1}) < 2^{m-(i+1)}$
Fall 5: $Dist(a_j, a_{2+i+1}) > Dist(b_j, b_{2+i+1})$
$Dist(a_{2+i+1}, a_j) < 2^{m-i} - Dist(a_j, a_{2+i+1})$ *und* $Dist(a_j, a_{2+i+1}) > 2^{m-(i+1)}$
$\Rightarrow 2^{m-i} - Dist(a_j, a_{2+i+1}) < 2^{m-(i+1)}$

Aufgabe 3)

Nach Skript 3.13 gibt es endlich viele Sätze der Quantorentiefe 0. Aufbauend darauf wurde gezeigt, dass es nur endlich viele Hintikka-Formeln gibt. Wir beweisen, dass es nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Formeln mit k freien Variablen und Quantortiefe m gibt per Induktion nach m. Dabei betrachten wir nur Formeln bestejend aus Disjunktion, Negation und Existensquantoren, da alle anderen durch diese formuliert werden können.
Hierbei sei $\Phi_m(\bar{x})$ die Menge aller Formeln vom Quantorrang m mit den Variablen $\bar{x} = x_1...x_{k'}$

IV: Es gibt endlich viele FO[σ]-Formeln mit k freien Variablen und Quantortiefe m.
IA: m=0. Laut 3.13 gibt es endlich viele Formeln $\phi_0(\bar{x}) \in \Phi_0(\bar{x})$.
IS: m+1. Wir betrachten alle Möglichkeiten die Menge an verschiedenen Formeln mit Hilfe des neuen Quantors zu erweitern.
$\exists y \phi_m(\bar{x}, y), phi_m(\bar{x}, y) \in \Phi_m(\bar{x}, y)$
Wobei wir nach IV wissen, dass $\Phi_m(\bar{x}, y)$ endlich ist. $\bar{x}$ hat k' viele Elemente. Eines hinzuzufügen ändert an der Endlichkeit nichts, da k' wie auch k beliebig aber fest und endlich sind.
Wenn wir $\exists y \phi_m(\bar{x}, y)$ als Atom betrachten, dann gibt es wieder endlich viele Möglichkeiten Formeln über den neuen Quantor zu bilden. Dies wissen wir bereits aus 3.13.

Aufgabe 4)

a) Notiz: Ob dieser Beweis sauber und stimmig ist, bin ich mir nicht sicher. Notiz 2: Die Behauptung scheint generell nur zu stimmen, wenn alle Elemente in irgendeiner Relation stehen, oder? Hätten wir im Beispiel von Aufgabe b) auch ungefärbte Knoten, also Knoten die weder in R noch in B sind, dann bricht die Behauptung zusammen... Wurde dieser Fall irgendwo wegdefiniert und ich habe es übersehen?
Beweis durch Kontraposition. Angenommen Spoiler könnte in m Runden oder weniger gewinnen (sei m' *leq* m). Das würde bedeuten, der größte partielle Isomorphismus über eine beliebige Teilmenge der neuen Strukturen ist kleiner als m. Diese beliebige Teilmenge kann nicht in ausschließlich in einer der beiden Strukturenpaare liegen, da wir wissen, dass der größte partielle Isomorphismus jeweils m ist. Aber dies kann nicht sein, da es zu größeren partiellen Isomorphismen führt aus beiden Teilstrukturen zu wählen. Wenn bereits k Elemente aus Teilstruktur A_1 gewählt wurden und j aus A_2 mit k ¿ j, k,j ¡ m, dann lässt sich immer ein Element finden, welches Duplicator der Abbildung hinzufügen kann. Es folgt m' *geq* m.
Angenommen m' *geq* m. Wähle als Gewinnstrategie für Spoiler: Betrachte nur Teilstrukturen A_1, B_1 und spiele die m Runden Gewinnstrategie. Duplicator muss immer mit einem Element aus der Teilstruktur B_1 antworten, da dieses in der bzw. den selben Relationen stehen muss, wie das Element aus A_1. Diese existieren aber in B_2 nicht.

b) Zunächst geben wir eine Gewinnstrategie für Spoiler an. Strategie: Wähle immer die Menge mit den wenigsten Elementen, also $\min(k_1, k_2, l_1, l_2)$. Ziehe aus der Menge der jeweils anderen Struktur solange, bis Duplicator die Elemente ausgehen. Aus der Gewinnstrategie leitet sich ab, dass m = $\min(k_1, k_2, l_1, l_2)$.
Fall 1: Sei eine der roten Knotenmengen dieses Minimum.
Wir nehmen an, dies sei k_1. Es folgt, dass k_1=m und $k_2 >$ m ist. Für $k_1 = k_2$ gilt, Spoiler hat keine Gewinnstrategie. Dies impliziert dann auch, dass $l_1 = l_2$ ist. Folglich gilt: $(k_1 = k_2 \vee (k_1 = m \wedge k_2 > m))$ Es folgt weiter, dass $l_1, l_2 \geq$ m

sind. Sollte eines der beiden gleich m sein, so sind die Gewinnstrategien auf beiden Farben gleich gut. Nur wenn $l_1 = l_2$ ist, dürfen sie kleiner als m sein, da dies eine Gewinnstrategie für Spoiler ausschließt. Es gilt: $(l_1 = l_2 \vee l_1, l_2 \geq m)$
Zusammen:
$(k_1 = k_2 \vee (k_1 = m \wedge k_2 > m)) \wedge (l_1 = l_2 \vee l_1, l_2 \geq m)$
Fall 2: Analog zu Fall 1, nur dass l_1 das Minimum ist. Als Formel folgt:
$(l_1 = l_2 \vee (l_1 = m \wedge l_2 > m)) \wedge (k_1 = k_2 \vee k_1, k_2 \geq m)$
Fall 3: $\min(k_1, k_2, l_1, l_2) = k_2$ ...
Fall 4: $\min(k_1, k_2, l_1, l_2) = l_2$ ...
Wir wissen, es tritt einer dieser Fälle auf, also:
$((l_1 = l_2 \vee (l_1 = m \wedge l_2 > m)) \wedge (k_1 = k_2 \vee k_1, k_2 \geq m)) \vee ((k_1 = k_2 \vee (k_1 = m \wedge k_2 > m)) \wedge (l_1 = l_2 \vee l_1, l_2 \geq m)) \vee$
$((l_1 = l_2 \vee (l_2 = m \wedge l_1 > m)) \wedge (k_1 = k_2 \vee k_1, k_2 \geq m)) \vee ((k_1 = k_2 \vee (k_2 = m \wedge k_1 > m)) \wedge (l_1 = l_2 \vee l_1, l_2 \geq m))$
Welches sich zu folgendem vereinfachen lässt:
$(k_1 = k_2 \vee k_1, k_2 \geq m) \wedge (l_1 = l_2 \vee l_1, l_2 \geq m)$
q.e.d.