

1.验证感知机为什么不能表示异或

本部分为练习LaTeX所以没用手写，而是敲的公式

先列异或的逻辑表

a	b	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

课本给出的感知机模型为

$$f(x) = \text{sign}(w \cdot x + b)$$

我们使用感知机原始形式尝试证明（反证），与上面的a和b对应的的向量的两个维度为 x_1 和 x_2

1. $x_1 = 0$ 并且 $x_2 = 0$ 时，令 $f(x) = 0$ ，需要 $b < 0$
2. $x_1 = 0$ 并且 $x_2 = 1$ 时，令 $f(x) = 1$ ，需要， $f \cdot (w \cdot x + b) > 0$ ，注意这里 w 是列向量， $w_1 * 0 + w_2 * 1 + b > 0$ ，也就是 $w_2 < b < 0$
3. $x_1 = 1$ 并且 $x_2 = 0$ 时，和上面一样，推出 $w_1 < b < 0$
4. $x_1 = 1$ 并且 $x_2 = 1$ 时，令 $f(x) = 0$ ，需要 $(w_1 + w_2 + b) > 0$

4的条件和1、2、3的条件相冲突，所以不可能存在这样的超平面

综上证得，感知机不能实现异或

2.解感知机模型

这题我用手算和python代码分别实现了一次，先上用python的

```
1  """
2      数据组织形式：
3      每个实例点占一行，最后一个为label，其余为输入值，中间用空格隔开
4  """
5  import numpy as np
6  import matplotlib.pyplot as plt
7
8  # 从data.txt中加载数据
9  data = []
10 label = []
11 file = open('Data.txt')
12 for line in file:
13     line = line.split(' ')
14     for i in range(len(line)):
15         line[i] = float(line[i])
16     data.append(line[0: len(line)-1])
17     label.append(int(line[-1]))
18 file.close()
19 data = np.array(data)
20 label = np.array(label)
```

```

21 # 初始化alpha, w, b
22 alpha = 1
23 w = np.array([0, 0])
24 b = 0
25
26 # 根据y*(w*x+b)判断是否为误分类点
27 f = (np.dot(data, w.T) + b) * label
28 idx = np.where(f <= 0)
29 print(f)
30 # 对w, b使用SGD进行更新
31 iter = 1
32 while f[idx].size != 0:
33     point = np.random.randint((f[idx].shape[0]))
34     print(f[idx].shape[0])
35     x = data[idx[0][point], :]
36     y = label[idx[0][point]]
37     w = w + alpha * y * x
38     b = b + alpha * y
39     print("Iter: ", iter, "\tw: ", w, "\tb: ", b)
40     f = (np.dot(data, w.T) + b) * label
41     idx = np.where(f <= 0)
42     iteration = iter + 1
43 print(w)
44
45
46 x1 = np.arange(0, 6, 0.1)
47 # 避免w中某一维度为0造成无法正常除法
48 if -w[1] == 0:
49     x2 = 0
50 else:
51     x2 = (w[0] * x1 + b) / (-w[1])
52 idx_p = np.where(label == 1)
53 idx_n = np.where(label != 1)
54 data_p = data[idx_p]
55 data_n = data[idx_n]
56 plt.scatter(data_p[:, 0], data_p[:, 1], color='red')
57 plt.scatter(data_n[:, 0], data_n[:, 1], color='blue')
58 plt.plot(x1, x2)
59 plt.show()

```

```

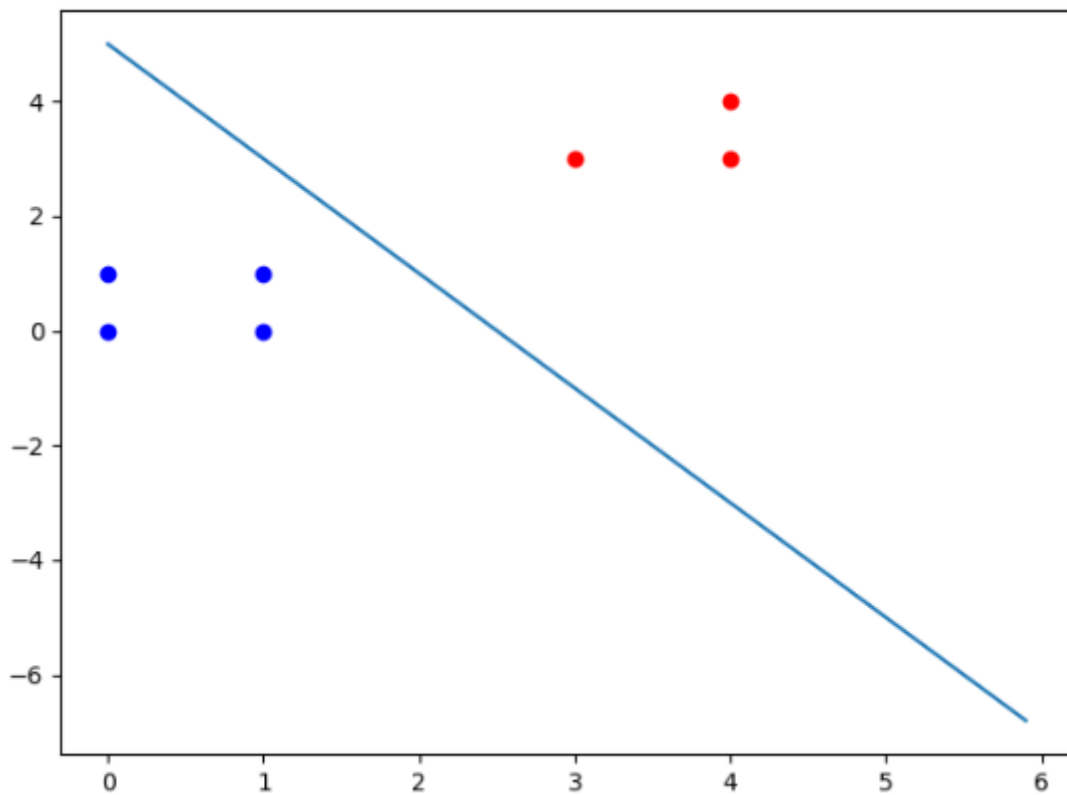
1 [ 0.  0. -0. -0.  0. -0. -0.]
2 7
3 Iter: 1    w: [-1.  0.]    b: -1
4 3
5 Iter: 2    w: [2.  3.]     b: 0
6 4
7 Iter: 3    w: [2.  2.]     b: -1
8 3
9 Iter: 4    w: [1.  1.]     b: -2
10 1
11 Iter: 5    w: [0.  0.]     b: -3
12 3
13 Iter: 6    w: [4.  4.]     b: -2
14 3
15 Iter: 7    w: [3.  3.]     b: -3
16 3
17 Iter: 8    w: [3.  2.]     b: -4

```

```

18 1
19 Iter: 9    w: [2. 1.]    b: -5
20 [2. 1.]
21
22 Process finished with exit code 0
23

```



以下是手写计算

下午5:19 3月29日周一

2021年3月29日 下午12:43

更改题目中(4,3)点为(4,4)
则样本为 正类 $x_1 = (1, 3)^T$
 $x_2 = (4, 3)^T$
负类 $x_3 = (1, 1)^T$
初始假设 $w=0$ $b=0$, $\eta=1$

① 对 $x_1 = (1, 3)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 0$ 未能正确分类
 $w = w + \eta x_1 y_1 = (1, 3)^T$
 $b = b + \eta y_1 = 1$

② 对 $x_1 = (1, 3)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 1 > 0$
已正确分类
对 $x_2 = (4, 3)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 25 > 0$
已正确分类
对 $x_3 = (1, 1)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) < 0$
未能正确分类
 $w = w + \eta x_3 y_3 = (2, 2)^T$
 $b = w + \eta y_3 = 0$

③ 对 $x_3 = (1, 1)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = -4 < 0$
未能正确分类
 $w = w + \eta x_3 y_3 = (1, 1)^T$
 $b = b + \eta y_3 = -1$

④ 对 $x_3 = (1, 1)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = -1$
未能正确分类
 $w = w + \eta x_3 y_3 = (0, 0)^T$
 $b = b + \eta y_3 = -2$

⑤ 对 $x_1 = (1, 3)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = -2 < 0$
未能正确分类
 $w = w + \eta x_1 y_1 = (3, 3)^T$
 $b = b + \eta y_1 = -1$

⑥ 对 $x_3 = (1, 1)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = -5 < 0$
未能正确分类
 $w = w + \eta x_3 y_3 = (2, 2)^T$
 $b = -2$

⑦ 对 $x_3 = (1, 1)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 0$
未能正确分类
 $w = w + \eta x_3 y_3 = (1, 1)^T$
 $b = b + \eta y_3 = -3$

⑧ 对 $x_3 = (1, 1)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 1 > 0$
对 $x_1 = (1, 3)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 3 > 0$
对 $x_2 = (4, 3)^T$
 $\eta(w \cdot x + b) = 5 > 0$
此时均能正确分类
故为
 $w \cdot x + b = 0$
 $x_1 + y_1 - 3 = 0$
即为感知机所求的模型