第三讲：乘法和逆矩阵

上一讲大概介绍了矩阵乘法和逆矩阵，本讲就来做进一步说明。

矩阵乘法

- 行列内积：有$m \times n$矩阵A和$n \times p$矩阵B（A的总列数必须与B的总行数相等），两矩阵相乘有$AB=C$，C是一个$m \times p$矩阵，对于C矩阵中的第i行第j列元素c_{ij}，有：

  $c_{ij} = row_i \cdot column_j = \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$

  其中a_{ik}是A矩阵的第i行第k列元素，b_{kj}是B矩阵的第k行第j列元素。

  可以看出c_{ij}其实是A矩阵第i行点乘B矩阵第j列

  $$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ & row_i & \\ & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ \cdots & column_j & \cdots \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

- 整列相乘：上一讲我们知道了如何计算矩阵乘以向量，而整列相乘就是使用这种线性组合的思想：

  $$\begin{bmatrix} A_{col1} & A_{col2} & \cdots & A_{coln} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots & (b_{1j}A_{col1}+b_{2j}A_{col2}+\cdots+b_{nj}A_{coln}) & \cdots \end{bmatrix}$$

  上面的运算为B的第j个列向量右乘矩阵A，求得的结果就是C矩阵的第j列，即C的第j列是A的列向量以B的第j列作为系数所求得的线性组合，$C_j = b_{1j}A_{col1}+b_{2j}A_{col2}+\cdots+b_{nj}A_{coln}$。

- 整行相乘：同样的，也是利用行向量线性组合的思想：

  $$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{row1} \\ B_{row2} \\ \vdots \\ B_{rown} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vdots \\ (a_{i1}B_{row1}+a_{i2}B_{row2}+\cdots+a_{in}B_{rown}) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

  上面的运算为A的第i个行向量左乘矩阵B，求得的结果就是C矩阵的第i行，即C的第i行是B的行向量以A的第i行作为系数所求的的线性组合，$C_i = a_{i1}B_{row1}+a_{i2}B_{row2}+\cdots+a_{in}B_{rown}$。

- 列乘以行：用A矩阵的列乘以B矩阵的行，得到的矩阵相加即可：

  $$\begin{bmatrix} A_{col1} & A_{col2} & \cdots & A_{coln} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{row1} \\ B_{row2} \\ \vdots \\ B_{rown} \end{bmatrix}=A_{col1}B_{row1}+A_{col2}B_{row2}+\cdots+A_{coln}B_{rown}$$

  注意，$A_{coli}B_{rowi}$是一个$m \times 1$向量乘以一个$1 \times p$向量，其结果是一个$m \times p$矩阵，而所有的$m \times p$矩阵之和就是计算结果。

- 分块乘法：$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ \hline A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{array}\right]$

  在分块合适的情况下，可以简化运算。

逆（方阵）

首先，并不是所有的方阵都有逆；而如果逆存在，则有$A^{-1}A=I=AA^{-1}$。教授这里提前剧透，对于方阵，左逆和右逆是相等的，但是对于非方阵（长方形矩阵），其左逆不等于右逆。

对于这些有逆的矩阵，我们称其为可逆的或非奇异的。我们先来看看奇异矩阵（不可逆的）：

$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$，在后面将要学习的行列式中，会发现这个矩阵的行列式为0。

观察这个方阵，我们如果用另一个矩阵乘A，则得到的结果矩阵中的每一列应该都是$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的倍数，所以我们不可能从$AB$的乘积中得到单位矩阵$I$。

另一种判定方法，如果存在非零向量x，使得$Ax=0$，则矩阵A不可逆。我们来用上面的矩阵为例：
$\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$。 判断A不可逆的一个方法

证明：如果对于非零的x仍有$Ax=0$，而A有逆A^{-1}，则$A^{-1}Ax=0$，即$x=0$，与题设矛盾，得证。

现在来看看什么矩阵有逆，设$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}$，我们来求$A^{-1}$。$\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，使用列向量线性组合的思想，我们可以说$A$乘以$A^{-1}$的第$j$列，能够得到$I$的第$j$列，这时我会得到一个关于列的方程组。

接下来介绍高斯-若尔当（Gauss-Jordan）方法，该方法可以一次处理所有的方程：

- 这个方程组为$\begin{cases}\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$，我们想要同时解这两个方程；
- 构造这样一个矩阵$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]$，接下来用消元法将左侧变为单位矩阵；
- $\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{row_2-2row_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{row_1-3row_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]$
- 于是，我们就将矩阵从$\left[\begin{array}{c|c}A&I\end{array}\right]$变为$\left[\begin{array}{c|c}I&A^{-1}\end{array}\right]$

而高斯-若尔当法的本质是使用消元矩阵E，对A进行操作，$E\left[\begin{array}{c|c}A&I\end{array}\right]$，利用一步步消元有$EA=I$，进而得到$\left[\begin{array}{c|c}I&E\end{array}\right]$，其实这个消元矩阵$E$就是$A^{-1}$，而高斯-若尔当法中的$I$只是负责记录消元的每一步操作，待消元完成，逆矩阵就自然出现了。 消元结束后，I就会变成“ A的逆 ”