第八讲：求解$Ax=b$：可解性和解的结构

举例，同上一讲：3×4矩阵
$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$，求$Ax=b$的特解：

写出其增广矩阵（augmented matrix）$\left[\begin{array}{c|c}A&b\end{array}\right]$：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&b_1\\2&4&6&8&b_2\\3&6&8&10&b_3\end{array}\right]\xrightarrow{\text{消元}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&b_1\\0&0&2&4&b_2-2b_1\\0&0&0&0&b_3-b_2-b_1\end{array}\right]$$

显然，有解的必要条件为$b_3-b_2-b_1=0$。

讨论b满足什么条件才能让方程$Ax=b$有解（solvability condition on b）：当且仅当b属于A的列空间时。另一种描述：如果A的各行线性组合得到0行，则b端分量做同样的线性组合，结果也为0时，方程才有解。

解法：令所有自由变量取0，则有$\left\{\begin{aligned}x_1+\ 2x_3&=1\\2x_3&=3\end{aligned}\right.$
，解得
$\left\{\begin{aligned}x_1&=-2\\x_3&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right.$
，代入$Ax=b$求得特解
$x_p=\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}$。

令$Ax=b$成立的所有解：

$$\left\{\begin{aligned}Ax_p&=b\\Ax_n&=0\end{aligned}\right.\xrightarrow{\text{两式相加}}A(x_p+x_n)=b$$

即$Ax=b$的解集为其特解加上零空间，对本例有：
$x_{complete}=\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

对于$m\times n$矩阵A，有矩阵A的秩$r\le min(m,n)$

列满秩$r=n$情况：
$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\6&1\\5&1\end{bmatrix}$
，$rank(A)=2$，要使$Ax=b,b\ne 0$有非零解，b必须取A中各列的线性组合，此时A的零空间中只有0向量。

行满秩$r=m$情况：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & 5\\3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

，$rank(A)=2$，$\forall b\in R^m都有x\neq 0的解$，因为此时$A$的列空间为$R^m$，$b\in R^m$恒成立，组成$A$的零空间的自由变量有n-r个。

行列满秩情况：$r=m=n$，如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

，则A最终可以化简为$R=I$，其零空间只包含0向量。

总结：

$$\begin{array}{c|c|c|c} r=m=n & r=n<m & r=m<n & r<m,r<n \\ R=I & R=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix} & R=\begin{bmatrix}I & F\end{bmatrix} & R=\begin{bmatrix}I & F\\0 & 0\end{bmatrix} \\ 1\ solution & 0\ or\ 1\ solution & \infty\ solution & 0\ or\ \infty\ solution \end{array}$$