

第四讲：A 的 LU 分解

AB的逆矩阵：

$$\begin{aligned}A \cdot A^{-1} &= I = A^{-1} \cdot A \\(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) &= I \\ \text{则 } AB \text{ 的逆矩阵为 } &B^{-1}A^{-1}\end{aligned}$$

A^T 的逆矩阵：

$$\begin{aligned}(A \cdot A^{-1})^T &= I^T \\(A^{-1})^T \cdot A^T &= I \\ \text{则 } A^T \text{ 的逆矩阵为 } &(A^{-1})^T\end{aligned}$$

将一个 n 阶方阵 A 变换为 LU 需要的计算量估计：

1. 第一步，将 a_{11} 作为主元，需要的运算量约为 n^2

要将 $n-1$ 个元素消为0，每消一个耗费 $O(n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. 以此类推，接下来每一步计算量约为 $(n-1)^2$ 、 $(n-2)^2$ 、 \cdots 、 2^2 、 1^2 。
3. 则将 A 变换为 LU 的总运算量应为 $O(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2)$ ，即 $O(\frac{n^3}{3})$ 。

置换矩阵(Permutation Matrix)：

3阶方阵的置换矩阵有6个：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

n 阶方阵的置换矩阵有 $\binom{n}{1} = n!$ 个。

这里的组合标记应该不对

理解为 n 的全排列即可： $n!$