第二讲：矩阵消元

这个方法最早由高斯提出，我们以前解方程组的时候都会使用，现在来看如何使用矩阵实现消元法。

消元法

有三元方程组$\begin{cases}x & +2y & +z & =2\\3x & +8y & +z & =12\\ & 4y & +z & =2\end{cases}$，对应的矩阵形式$Ax=b$为$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$。

按照我们以前做消元法的思路：

- 第一步，我们希望在第二个方程中消去x项，来操作系数矩阵$A=\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$，下划线的元素为第一步的主元（pivot）：$\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_2-3row_1}\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$

  这里我们先不管b向量，等做完A的消元可以再做b的消元。（这是MATLAB等工具经常使用的算法。）
- 第二步，我们希望在第三个方程中消去y项，现在第二行第一个非零元素成为了第二个主元：$\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\0&\underline{2}&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_3-2row_2}\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\0&\underline{2}&-2\\0&0&\underline{5}\end{bmatrix}$

  注意到第三行消元过后仅剩一个非零元素，所以它就成为第三个主元。做到这里就算消元完成了。

再来讨论一下消元失效的情形：首先，主元不能为零；其次，如果在消元时遇到主元位置为零，则需要交换行，使主元不为零；最后提一下，如果我们把第三个方程z前的系数成-4，会导致第二步消元时最后一行全部为零，则第三个主元就不存在了，至此消元不能继续进行了，这就是下一讲中涉及的不可逆情况。

- 接下来就该回代（back substitution）了，这时我们在A矩阵后面加上b向量写成增广矩阵（augmented matrix）的形式：$\begin{bmatrix}A\,|\,b\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&4&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{array}\right]$

  不难看出，z的解已经出现了，此时方程组变为$\begin{cases}x & +2y & +z & =2\\ & 2y & -2z & =6\\ & & 5z & =-10\end{cases}$，从第三个方程求出$z=-2$，代入第二个方程求出$y=1$，在代入第一个方程求出$x=2$。

消元矩阵

上一讲我们学习了矩阵乘以向量的方法，有三个列向量的矩阵乘以另一个向量，按列的线性组合可以写作$\begin{bmatrix}v_1&v_2&v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=3v_1+4v_2+5v_3$。

但现在我们希望用矩阵乘法表示行操作，则有$\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}row_1\\ row_2\\ row_3\end{bmatrix}=1row_1+2row_2+7row_3$。易看出这里是一个行向量从左边乘以矩阵，这个行向量按行操作矩阵的行向量，并将其合成为一个矩阵行向量的线性组合。

介绍到这里，我们就可以将消元法所做的行操作写成向量乘以矩阵的形式了。

初等变换阵(左乘表示行变换)

- 消元法第一步操作为将第二行改成row_2-3row_1，其余两行不变，则有$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$（另外，如果三行都不变，消元矩阵就是单位矩阵$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$I$之于矩阵运算相当于1之于四则运算。）这个消元矩阵我们记作E_{21}，即将第二行第一个元素变为零。
- 接下来就是求E_{32}消元矩阵了，即将第三行第二个元素变为零，则$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$。这就是消元所用的两个初等矩阵（elementary matrix）。
- 最后，我们将这两步综合起来，即$E_{32}(E_{12}A)=U$，也就是说如果我们想从A矩阵直接得到U矩阵的话，只需要$(E_{32}E_{21})A$即可。注意，矩阵乘法虽然不能随意变动相乘次序，但是可以变动括号位置，也就是满足结合律（associative law），而结合律在矩阵运算中非常重要，很多定理的证明都需要巧妙的使用结合律。

既然提到了消元用的初等矩阵，那我们再介绍一种用于置换两行的矩阵：置换矩阵（permutation matrix）：例如$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}$，置换矩阵将原矩阵的两行做了互换。顺便提一下，如果我们希望交换两列，则有$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}$。

右乘表示列变换

我们现在能够将A通过行变换写成U，那么如何从U再变回A，也就是求消元的逆运算。对某些“坏”矩阵，并没有逆，而本讲的例子都是“好”矩阵。

逆

现在，我们以E_{21}为例，$\begin{bmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，什么矩阵可以取消这次行变换？这次变换是从第二行中减去三倍的第一行，那么其逆变换就是给第二行加上三倍的第一行，所以逆矩阵就是$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

我们把矩阵E的逆记作E^{-1}，所以有$E^{-1}E=I$。