

圈图函数中的红外发散^{*}

万陵德¹ 曹俊杰^{1, 2}

1(河南师范大学物理与信息工程学院 新乡 453002)

2(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

摘要 介绍一种判断和计算圈图函数红外发散的有效方法. 利用该方法研究了 C 函数(即三点圈图函数)和 D 函数(即四点圈图函数)的红外发散性质, 并且给出常见的 C 函数的红外发散形式.

关键词 红外发散 积分变换 维数正规化 质量正规化 Li_2 函数

1 引言

在粒子物理唯象研究中, 随着实验精度的提高, 物理学工作者必须考虑理论对物理可观察量的辐射修正. 圈图函数就是在作这些修正时经常用到的积分函数^[1, 2]. 研究圈图函数的性质将有助于唯象研究者更好地理解物理结果. 本文将主要讨论圈图函数, 尤其是三点圈图函数的红外发散性质.

众所周知, 圈图函数存在三类发散: 紫外发散、红外发散和共线发散. 其中, 紫外发散是由于内线动量可以趋于无穷大引起的, 而后两者则分别源于零质量的内线粒子和外线粒子^[3, 4]. 知道圈图函数中的发散形式不仅有助于对物理可观测量进行数值计算, 而且有助于检验解析结果的正确性. 圈图函数中紫外发散的形式已在文献[1, 2]中有详细论述, 下面将介绍一种判断和计算红外发散的方法. 利用这种方法, 可以计算 C 函数(即三点圈图函数)和 D 函数(即四点圈图函数)的红外发散形式. 作为具体实践, 本文给出 C 函数的红外发散形式.

2 判断圈图函数存在红外发散的基本方法

对于两点函数, 研究它的红外发散是非常简单

的, 本文不再论述.

对于三点函数 C_0 , 它可以写成如下积分形式:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f)}. \quad (1)$$

其中 d, e 和 f 可以是复数. 对上述积分作替换: $y = y' + \alpha$, 其中 α 满足 $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$, 则上述积分就变为

$$\int_0^1 dx \int_{-\alpha}^{(1-\alpha)x} dy \frac{1}{by^2 + (c+2b\alpha)xy + (d+e\alpha)x + ey + f} = \left(\int_0^{1-\alpha} dy \int_{y/(1-\alpha)}^1 dx - \int_0^{-\alpha} dy \int_{-y/\alpha}^1 dx \right) \frac{1}{by^2 + (c+2b\alpha)xy + (d+e\alpha)x + ey + f}. \quad (2)$$

对 x 积分后, 上述积分就变为如下形式:

$$\int_0^1 dy \frac{\ln \{ a(y-y_1)(y-y_2) \}}{y-y_0}. \quad (3)$$

其中 a 和 y_i 都是常数. 借助 Li_2 函数, 这个积分结果是很容易写出的. 从式(3)可以看出, 当 y_0 位于积分端点处^[1], 三点函数 C_0 实部存在发散. 这种积分变换的方法就是本文判断和计算 C 函数的基础.

上述积分变换成立的条件是被积函数在复 y 平面三角形 $(0, -\alpha, (1-\alpha))$ 是解析的. 但是正如文献[5]所言, 若对积分结果作一微小修改, 就能得到整个复平面空间都适用的结果.

2002-07-11 收稿

* 中国科学院百人计划经费资助

1) 当 y_0 与 y_1 或 y_2 相差很小时, 根据 $y_{1,2}$ 的取值范围, 上述积分虚部可能会存在发散.

对于四点函数 D_0 , 经过两次这样的积分变换, 结果也可以写成式(3)的形式。但是与 C 函数相比, 计算 D 函数的红外发散就显得比较繁杂^[5]。

3 存在红外发散的 C 函数

C 函数是计算企鹅图时经常用到的一系列函数。其中 C_0 定义为

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{\mu^2}{(k^2 - m_1^2)((k+p_1)^2 - m_2^2)((k+p_1+p_2)^2 - m_3^2)}, \quad (4)$$

在该定义式中, k 是 N 维空间圈图积分变量^[1], p_1 和 p_2 是外线动量, m_1, m_2 和 m_3 为内线粒子的质量;

$$C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1+p_2)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) =$$

$$\sum_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2} \left\{ \int_0^1 dy \frac{\ln \{ by^2 + (c+e)y + a + d + f \} - \ln \{ by_1^2 + (c+e)y_1 + a + d + f \}}{(c+2\alpha b)y + d + e\alpha + 2a + c\alpha} - \int_0^1 dy (1-\alpha) \frac{\ln \{ (a+b+c)y^2 + (e+d)y + f \} - \ln \{ (a+b+c)y_2^2 + (e+d)y_2 + f \}}{(c+2\alpha b)(1-\alpha)y + d + e\alpha} - \int_0^1 dy \alpha \frac{\ln \{ ay^2 + dy + f \} - \ln \{ ay_3^2 + dy_3 + f \}}{-(c+2\alpha b)\alpha y + d + e\alpha} \right\}. \quad (7)$$

其中 α_i 为方程 $ba^2 + c\alpha + a = 0$ 的解。如果定义 $y_0 = -(d+e\alpha)/(c+2\alpha b)$, 则(7)式中 y_i 可写为: $y_1 = y_0 + \alpha$, $y_2 = y_0/(1-\alpha)$ 和 $y_3 = -y_0/\alpha$ 。式(7)右端的积分已在文献[5]中有详细推算, 结果见附录。应当指出, 在物理允许的参数空间, 无论 α 是实数还是虚数, 式(7)可以看成是 C_0 的定义式^[5]。由(7)式可知, 当下列条件之一满足时, C_0 存在发散: (1) $d+e\alpha=0$; (2) $d+e\alpha=(c+2\alpha b)(\alpha-1)$; (3) $d+e\alpha=(c+2\alpha b)\alpha$ 。

注意到在单圈层次, 和内线光子或胶子相连的两个外线动量必有一个在壳, 故在讨论 C_0 的红外发散时, 考虑如下 C_0 函数: $C_0(p_1^2=m_1^2, p_2^2; p^2=(p_1+p_2)^2, 0, m_1^2, m_2^2)$ 。利用上述判断发散条件, 可得 C_0 存在发散的具体条件:

(1) $p^2 = m_2^2$ 。这个式子表明当与光子或胶子相连的两个外线动量都在壳时, 如图 1(a)所示^[2], 企鹅图存在发散。

μ 是为了保证耦合常数量纲不变而引入的标度因子, $\epsilon = 2 - \frac{N}{2}$ 。很明显, 在物理允许的参数空间, C_0 具有如下性质:

$$\begin{aligned} C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) &= \\ C_0(p_2, -(p_1+p_2), m_2, m_3, m_1) &= \\ C_0(-(p_1+p_2), p_1, m_3, m_1, m_2). \end{aligned} \quad (5)$$

当 $N=4$ 时, 经过费曼积分, C_0 可以续写为

$$C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1+p_2)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \int_0^1 dx \int_0^x dy (ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f)^{-1}. \quad (6)$$

其中 $a = -p_2^2$, $b = -p_1^2$, $c = -(p_1+p_2)^2 + p_1^2 + p_2^2$, $d = -m_2^2 + m_3^2 + p_2^2$, $e = -m_1^2 + m_2^2 + (p_1+p_2)^2 - p_2^2$, $f = -m_3^2$ 。

对 C_0 进行上述积分变换, 可得如下结果:

(2) $m_1=0$ 。这个式子表明当存在三胶子相互作用, 并且外线胶子在壳时, 如图 1(b)所示, 企鹅图存在发散。

(3) $p^2 = (m_1^2 - p_2^2 + m_2^2)(m_1^2 - p_2^2 - m_2^2) / \{ 2(m_1^2 + p_2^2 - m_2^2) \}$ 或 $p^2 = \{ p_2^2 m_2^2 \pm m_1 m_2 (p_2^2 + m_2^2 - m_1^2) \} / (m_2^2 - m_1^2)$ 。这个条件表明当内线粒子质量同外线动量满足特定关系时, 可能会存在发散。考虑到能动量守恒, 这个关系在很多情况下是不满足的。例如, 若 $m_2=0$ 且 $p_2^2 = m_1^2$, 则 C_0 发散条件退化为 $p^2=0$ 。当 $p_{1,2}$ 同为出射或入射粒子动量时, 这个条件是不满足的。由此得到一个比较重要的结论: 图 1(c)不存在发散。

综上所述, 可得如下结论: (1) 并非有内线粒子质量为零圈图函数就存在发散。(2) 当光子或胶子线相连的两外线动量都不在壳时, 式(3)中的 y_0 将不位于积分端点处, 此时 C 函数实部将不存在发散。(3) 当与光子或胶子线相连的两外线动量均在

1) 上述定义是在维数正规化方案下定义的。这种正规化的优点在于它既保持了规范不变性, 又能够处理圈图中的发散问题。一般来说, 如果对紫外发散感兴趣, 则令 $N < 4$; 如果对红外发散感兴趣, 则令 $N > 4$ 。

2) 图中箭头方向代表动量正方向。

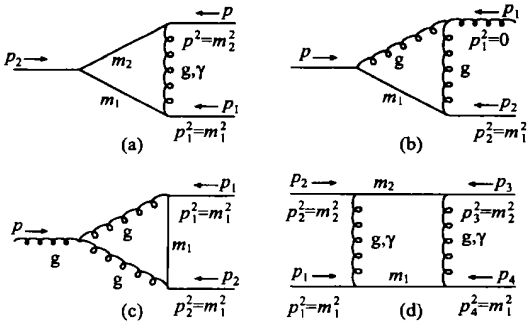


图1 可能存在红外发散的圈图
图(a), (b)和(d)一定存在红外发散.

壳或存在三胶子相互作用且其中的外线胶子在壳时, C 函数一定存在发散.

4 C 函数红外发散的计算

由式(3)可知, 当 $y_0=0$ 或 1 时, 式(3)是发散的. 为了给出发散的具体形式, 必须采取某种方案调节 y_0 , 使之偏离积分端点. 目前常用的方案有维数正规化方案^[6]和质量正规化方案^[7]. 维数正规化方案的基本思想在于改变积分维数来控制被积函数的发散行为; 而质量正规化方案则是通过给规范粒子一小的质量 m 来避免被积函数的端点奇异性. 在以后的表达式中, 可令 $m^2 = \delta$ 其中 δ 为一小量. 在具体计算红外发散时, 对 $C(m_1^2, p^2, m_2^2, \delta m_1^2, m_2^2)$ (第一种情形) 采取质量正规化方案, 而对 $C(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)$ (第二种情形) 采取维数正规化方案. 这样做主要出于两方面考虑: 一方面, 由于质量正规化方案破坏规范相互作用, 当遇到三胶子相互作用时, 必须采取维数正规化方案^[6]; 另一方面, 由于圈图中的红外发散是用来抵消软致辐射中的发散, 这样做所得结论可以同已有的计算软致辐射红外发散公式作比较^[12, 4].

利用(5)式和(6)式, $C(m_1^2, p^2, m_2^2, \delta m_1^2, m_2^2)$ 可以写成如下形式积分:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \cdot \frac{1}{-p^2 y^2 + (p^2 + m_2^2 - m_1^2)xy - m_2^2 x^2 - \delta(1-x)}. \quad (8)$$

利用(7)式及相应附录公式, 可得上述积分的红外发散为

$$C_0(m_1^2, p^2, m_2^2, \delta m_1^2, m_2^2)_{\text{Inf}} = \frac{1}{2p^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \left\{ \ln \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} - \ln \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2} \right\} \ln \delta \quad (9)$$

其中 α_1, α_2 满足如下方程:

$$-p^2 \alpha^2 + (p^2 + m_2^2 - m_1^2)\alpha - m_2^2 = 0. \quad (10)$$

利用 C 函数之间的关系^[1], 可知

$$C_{11, 12, 21, 22, 23, 24}(m_1^2, p^2, m_2^2, \delta m_1^2, m_2^2)_{\text{Inf}} = 0. \quad (11)$$

对于 $C(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)$, 由于采取维数正规化方案, (6)式将作如下微小改动: 指数因子 -1 将被替换为 $-1-\epsilon$. 此时尽管(7)式将不再适用, 但是利用上述积分变换的方法以及附录所列积分公式, 仍能够得出上述积分的发散为

$$C_0(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = \frac{1}{\epsilon^2(p^2 - m_1^2)} - \frac{1}{\epsilon(p^2 - m_1^2)} \ln \frac{-m_1^2}{\mu^2}. \quad (12)$$

由该积分发散行为可知, 此时 C_0 既存在红外发散又存在共线发散^[4]. 同样, 利用 C 函数之间的关系, 可得

$$C_{11, 12}(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = \frac{1}{\epsilon(p^2 - m_1^2)},$$

$$C_{21, 22, 23}(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = \frac{-1}{2\epsilon(p^2 - m_1^2)},$$

$$C_{24}(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = 0. \quad (13)$$

特别是, 当 $m_1=0$ 时, 式(12)和(13)变为

$$C_0(0, 0, p^2, 0, 0, 0)_{\text{Inf}} = \frac{1}{\epsilon^2 p^2} - \frac{1}{\epsilon p^2} \ln \frac{p^2}{\mu^2},$$

$$C_{11, 12}(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = \frac{1}{\epsilon p^2},$$

$$C_{21, 22, 23}(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = \frac{-1}{2\epsilon p^2},$$

$$C_{24}(0, m_1^2, p^2, 0, 0, m_1^2)_{\text{Inf}} = 0.$$

从这些结果可知, C_{ij} 的红外发散幂次都比 C_0 低, 这是由 C_{ij} 的具体形式决定的^[1]. 从这些结果还可以看出, C 函数的红外发散行为与紫外发散行为非常不同^[1, 2]. 由于物理可观测量是有限的, 判断物理可观测量中红外发散是否抵消可用来检验计算结果的正确性.

5 D 函数的红外发散

与 C 函数相比, 判断和计算 D 函数^[1] 的红外发散有如下特点^[5]: (1) D 函数涉及变量太多, 这给解析形式的推导造成一定困难. (2) D 函数是个三重积分, 需要借助两次上述积分变换才能写成(3)式形式, 这增加问题的复杂程度. 但是, 上述方法仍可用来判断和计算 D 函数的红外发散. 经过分析, 得到如下结论: 与 C 函数类似, 当与内线光子或胶子相

连的两外线动量都在壳或涉及三胶子相互作用时, D 函数存在发散¹⁾. 特别是, 当 $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$, $p_3^2 = m_2^2$, $p_4^2 = m_1^2$, $(p_1 + p_2)^2 = s > 0$, $(p_2 + p_3)^2 = t < 0$ 时(如图 1(d)所示), 在质量正规化方案下, 计算了 D_0 函数红外发散的具体形式, 结果为

$$D_0(m_1^2, m_2^2, m_2^2, m_1^2, s, t, m_1^2, \delta, m_2^2, \delta) =$$

$$\frac{2\ln \delta}{st(\alpha_1 - \alpha_2)} \left\{ \ln \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} - \ln \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2} \right\}. \quad (15)$$

其中 $\alpha_{1,2}$ 满足 $s\alpha^2 - (s + m_2^2 - m_1^2)\alpha + m_2^2 = 0$. 与文献[9]²⁾比较, 发现若将文献中 $(m_1 + m_2)^2$ 替换为 $m_1^2 + m_2^2$, 两者结果是一致的.

参考文献 (References)

- 1 G. 't Hooft, Veltman M. Nucl. Phys., 1973, **B44**: 189
- 2 Denner A. Fortsch. Phys., 1993 **41**: 307
- 3 Bloch F, Nordsieck A. Phys. Rev., 1937, **52**: 54 Kinoshita T J. Math. Phys., 1962, **3**: 650; Lee T D, Nauenberg M. Phys. Rev., 1964 **B133**: 1547
- 4 Field R D. Applications of Perturbative QCD. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989
- 5 G. 't Hooft, Veltman M. Nucl. Phys., 1979, **B153**: 365
- 6 Marciano W J. Phys. Rev., 1975, **D12**: 3861
- 7 Basham C L et al. Phys. Rev., 1978, **D17**: 2298; Basham C L et al. Phys. Rev. Lett., 1978, **41**: 1585; Fox G C, Wolfram S. Nucl. Phys., 1979, **B149**: 413
- 8 Berends F, Gaemers K, Gastmans R. Nucl. Phys., 1972, **B57**: 381; 1973, **B63**: 381; 1974 **B68**: 541
- 9 van Nieuwenhuizen P. Nucl. Phys., 1971, **B28**: 429

附录

本附录列出一些有用的计算圈图红外发散的公式, 具体推导可参见文献[5]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(ay^2 + by + c) - \ln(ay_0^2 + by_0 + c)}{y - y_0} dy = & Li_2\left(\frac{y_0}{y_0 - y_1}\right) - Li_2\left(\frac{y_0 - 1}{y_0 - y_1}\right) + \eta\left(-y_1, \frac{1}{y_0 - y_1}\right) \ln \frac{y_0}{y_0 - y_1} - \\ & \eta\left(1 - y_1, \frac{1}{y_0 - y_1}\right) \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 - y_1} + Li_2\left(\frac{y_0}{y_0 - y_2}\right) - Li_2\left(\frac{y_0 - 1}{y_0 - y_2}\right) + \eta\left(-y_2, \frac{1}{y_0 - y_2}\right) \ln \frac{y_0}{y_0 - y_2} - \\ & \eta\left(1 - y_2, \frac{1}{y_0 - y_2}\right) \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 - y_2} - \left\{ \eta(-y_1, -y_2) - \eta(y_0 - y_1, y_0 - y_2) - \right. \\ & \left. \eta\left(a - i\delta, \frac{1}{a - i\delta}\right) \right\} \ln \frac{y_0 - 1}{y_0}. \end{aligned} \quad (A1)$$

上式中 a 为实数, 而 b, c 和 y_0 可以是复数; $y_{1,2}$ 为方程 $ay^2 + by + c = 0$ 的两个根. 式(A1)涉及 Li_2 函数, 它具有如下有用性质:

$$\begin{aligned} Li_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad (|x| < 1), \\ Li_2(x) &= - \int_0^1 dt \frac{\ln(1 - xt)}{t} = - \int_0^x dt \frac{\ln(1 - t)}{t} = - \int_{1-x}^1 dt \frac{\ln t}{1 - t}, \\ Li_2(x) + Li_2\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2(x) - i\pi \ln(x), \\ Li_2(x) + Li_2(1 - x) &= \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1 - x). \end{aligned} \quad (A2)$$

式(A1)还涉及 η 函数, 它的具体定义见文献[5]. 另外, 当用维数正规化方案时, 经常用到以下有用公式^[6]:

$$\frac{1}{a^R b^M} = \frac{\Gamma(R+M)}{\Gamma(R)\Gamma(M)} \int_0^1 dx \frac{x^{R-1}(1-x)^{M-1}}{(ax + b(1-x))^{R+M}}. \quad (A3)$$

或反过来

$$\int_0^1 dx \frac{x^{R-1}(1-x)^{M-1}}{(ax + b(1-x))^{R+M}} = \frac{\Gamma(R)\Gamma(M)}{\Gamma(R+M)a^R b^M}. \quad (A4)$$

其中 Γ 函数具有如下性质:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (x > 0).$$

1) 对某一个物理可观测量, 可能会有若干个箱图对它都有贡献. 很多情况下, 这些箱图的红外发散相互抵消^[8].

2) 应当注意文献[9]中对圈图函数的定义与本文有所不同. 除了差一 π^2 因子外, 所有质量平方都应替换为 $m_i^2 \rightarrow -m_i^2$.

$$\Gamma(1+\epsilon) = 1 - \gamma_E \epsilon + \frac{1}{2} \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \epsilon^2 + \dots \quad (\text{A5})$$

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + O(\epsilon) \right).$$

在具体推导过程中, 还可能用到以下公式:

$$R^\epsilon = e^{\epsilon \ln R} = 1 + \epsilon \ln R + O(\epsilon^2),$$

$$\int_0^1 dx x^\alpha \ln x = \frac{-1}{(\alpha+1)^2}, \quad (\text{A6})$$

$$\int dx x^\alpha \ln(1+bx) = \frac{1}{\alpha+1} \left(x^{\alpha+1} \ln(1+bx) - b \int dx \frac{x^{\alpha+1}}{1+bx} \right).$$

Infrared Divergence in Loop Functions^{*}

WAN Ling-De¹ CAO Jun-Jie^{1,2}

¹(College of Physics and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453002, China)

²(Institute of Theoretical Physics, CAS, Beijing 100080, China)

Abstract A method to calculate infrared divergence of loop function is introduced. Using this method, we analysis the divergence property of three-point loop function and get the criterion to judge whether there exists infrared divergence for three-point functions. The explicit forms of infrared divergence in some cases are obtained with mass regulation or dimension regulation. Such method can also be applied to four-point loop functions.

Key words infrared divergence, integral transformation, dimension regulation, mass regulation *Liz* function