TOPOLOGIA I*
Pomocnik studenta

Notatki do wykładu
na Wydziale MIM UW
Semestr zimowy r. akad. 2016/17

Stefan.Jackowski@mimuw.edu.pl

5 listopada 2017

Spis treści

Wstęp **i**

1 Ciągłość i topologia **1**
- 1.1 Ciągłość funkcji wg. Cauchy . . . 1
- 1.2 Topologie i przestrzenie topologiczne . . . 2
- 1.3 Odwzorowania ciągłe i homeomorfizmy . . . 3
- 1.4 Zbiory domknięte . . . 3
- 1.5 Własność Hausdorffa . . . 4
- 1.6 Topologie pochodzące od metryki . . . 6
- 1.7 Ciągi w przestrzeniach metrycznych i topologicznych . . . 7
- 1.8 Przestrzenie unormowane . . . 8
- 1.9 Przykłady i zadania . . . 9

2 Generowanie topologii i baza **13**
- 2.1 Generowanie topologii . . . 13
- 2.2 Baza topologii . . . 14
- 2.3 Przykłady i zadania . . . 16

3 Wnętrze i domknięcie zbioru **19**
- 3.1 Wnętrze zbioru . . . 19
- 3.2 Domknięcie zbioru . . . 20
- 3.3 Zbiory gęste, brzegowe i ośrodkowość . . . 21
- 3.4 Brzeg zbioru . . . 21
- 3.5 Wnętrze i domknięcie w terminach metryki . . . 22
- 3.6 Zadania i przykłady . . . 23

4 Aksjomaty oddzielania **25**
- 4.1 Przestrzenie T_i dla $i \leqslant 2$ . . . 25
- 4.2 Przestrzenie regularne, czyli T_3 . . . 25
- 4.3 Przestrzenie $T_{3\frac{1}{2}}$ i T_4 . . . 26
- 4.4 Twierdzenie Tietze o przedłużaniu przekształceń . . . 27

5 Konstrukcje przestrzeni topologicznych **29**
- 5.1 Cofanie i popychanie topologii . . . 29
- 5.2 Podprzestrzeń . . . 30

5.3 Przestrzeń ilorazowa . . . 32
5.4 Produkt kartezjański . . . 33
5.5 Suma prosta . . . 38
5.6 Zadania i przykłady . . . 39

6 Spójność i łukowa spójność 43
6.1 Spójność . . . 43
6.2 Składowe spójne . . . 46
6.3 Spójne podzbiory prostej euklidesowej . . . 48
6.4 Łukowa spójność . . . 49
6.5 Lokalna spójność i łukowa spójność . . . 52
6.6 Składowe spójne grupy liniowej . . . 53
6.7 Zadania . . . 54

7 Rozmaitości jednowymiarowe 57
7.1 Rozmaitości topologiczne . . . 57
7.2 Klasyfikacja rozmaitości 1-wymiarowych . . . 58

8 Zwartość 63
8.1 Przestrzenie zwarte . . . 63
8.2 Zwartość a konstrukcje przestrzeni topologicznych . . . 65
8.3 Lemat o tubie . . . 66
8.4 Lokalna zwartość . . . 67
8.5 Uzwarcenie Aleksandrowa . . . 69
8.6 Zwartość w przestrzeniach metrycznych . . . 71
8.6.1 Zwartość metryczna i topologiczna . . . 71
8.6.2 Liczba Lebesgue'a pokrycia . . . 72
8.6.3 Zwarte podzbiory przestrzeni euklidesowych . . . 73
8.7 Zadania . . . 73

9 Zupełność 75
9.1 Zupełność i zwartość przestrzeni metrycznych . . . 75
9.2 Twierdzenie Baire'a i topologiczna zupełność . . . 77
9.3 Zupełność a konstrukcje przestrzeni metrycznych . . . 78
9.4 Uzupełnianie przestrzeni metrycznych . . . 80
9.5 Twierdzenie Banacha o punktach stałych . . . 81
9.6 Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha . . . 82
9.7 Zadania . . . 85

10 Przestrzenie odwzorowań ciągłych 87
10.1 Topologia zbieżności punktowej . . . 87
10.2 Topologia zwarto-otwarta . . . 87
10.3 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański . . . 89
10.4 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a zbieżność jednostajna . . . 91
10.5 Twierdzenie Stone'a – Weierstrassa . . . 93

11 Homotopia **97**
11.1 Homotopia odwzorowań 97
11.2 Przekształcenia i przestrzenie ściągalne 98
11.3 Homotopijna równoważność 99
11.4 Punktowana homotopia 99
11.5 Jednospójność 101
11.6 Grupa Bruschlinsky'ego 103
11.7 Odwzorowanie wykładnicze i logarytm 104
11.8 Homotopijna klasyfikacja pętli $\mathbb{C}^*$. 108
11.9 Zadania 111

12 Powierzchnie **113**
12.1 Walec i wstęga Möbiusa 113
12.2 Sfera 114
12.3 Torus 116
12.4 Płaszczyzna rzutowa 117
12.5 Butelka Kleina 119

13 Dodatek. Rachunek zbiorów. **121**

Wstęp

Topologią jest dziedziną matematyki w której nadaje się precyzyjny, abstrakcyjny sens intuicjom związanym z pojęciami ciągłości, deformacji, spójności oraz analizy jakościowej wzajemnego położenia obiektów geometrycznych - stąd dawna nazwa topologii *Analysis situs*, czyli analiza położenia. Topologia bywa określana jako ”elastyczna geometria”; czyli nauka o relacjach geometrycznych abstrahujących od pomiarów odległości, ale dopuszczających ciągłe przekształcenia obiektów geometrycznych. Relacje przystawania czy izometrii znane z geometrii zastępują w topologii pojęcia homeomorfizmu lub jeszcze bardziej zgrubne homotopijnej równoważności obiektów geometrycznych. Niezmiennikiem homeomorfizmu jest np. zwartość i spójność przestrzeni; niezmiennikiem homotopijnych równoważności tylko spójność i jej wyżej wymiarowe odpowiedniki (”dziury w przestrzeni”).

Początki rozważań topologicznych znajdują się w pracach Leonarda Eulera, ale pierwszego całościowego ujęcia idei topologicznych dokonał Johann Benedict Listing w wydanej w 1847 roku książce *Vorstudien zur Topologie*, który wprowadził też nazwę "Topologia" od greckiego słowa *topos* - miejsce. Kolejne przełomy w rozwoju topologii są związane ze sformułowaniem jej podstawowych i pojęć w terminach teorii mnogości, rozwiniętej przez Georga Cantora pod koniec XIX w. oraz z wprowadzeniem narzędzi algebraicznych do badania własności topologicznych przez Henri Poincaré na początku wieku XX. Do rozwoju topologii wybitnie przyczynili się w okresie międzywojennym warszawscy matematycy Kazimierz Kuratowski, Karol Borsuk i Samuel Eilenberg (od 1939 r. w USA).

Tak jak przewidywał Poincaré, metody topologiczne wywarły ogromny wpływ na badania matematyczne w wielu dziedzinach. Aż 15 matematyków otrzymało medal Fieldsa za osiągnięcia w dziedzinie topologii lub za osiągnięcia w geometrii i analizie globalnej motywowane ideami topologicznymi. Topologia przeplata się z niemal wszystkimi działami matematyki czystej, a w ostatnich latach jej idee są wykorzystywane coraz szerzej w informatyce teoretycznej i robotyce; obok tradycyjnych działów topologii: topologii mnogościowej (ogólnej), algebraicznej, geometrycznej coraz więcej mówi się o topologii obliczeniowej (*computational topology*).

Studentów zachęcam do korzystania z tych notatek równolegle z lekturą skryptu S. Betley, J. Chaber, E.Pol, R.Pol *TOPOLOGIA I, wykłady i zadania,* wrzesień 2012 oznaczanego dalej BCPP. Zauważycie z pewnością pewne różnice zarówno w zakresie materiału, jak i rozkładu akcentów. Mam jednak nadzieję, że spojrzenie na topologię z różnych perspektyw pozwoli Wam lepiej zrozumieć jedne z najważniejszych idei matematyki. Wśród podręczników, które wpłynęły na kształt niniejszych notatek wymienię jeszcze dwa J. Dugundji *Topology* Allyn and Bacon, Inc. , Boston oraz K. Jänich *Topologia* PWN, Warszawa 1991 (oryginał niemiecki tłumaczony na wiele języków). Uwagi Czytelników mile widziane.

Rozdział 1

Ciągłość i topologia

Nadanie precyzyjnego sensu intuicyjnemu pojęciu ciągłości jest jednym z głównych tematów dziedziny matematyki, zwanej topologią. Definicja funkcji ciągłej znana z podstawowego wykładu Analizy Matematycznej dotyczy jedynie liczb rzeczywistych i wykorzystuje dwie struktury, w które wyposażone są liczby rzeczywiste: dodawanie i porządek. Definicja topologii w zbiorze motywowana jest pytaniem, jaka możliwie najsłabsza struktura jest potrzebna, aby mówić o ciągłości w taki sposób, by w znanych przypadkach pokrywało się ono z faktami z analizy matematycznej oraz z intuicją geometryczną związaną z potocznym rozumieniem tego pojęcia.

1.1 Ciągłość funkcji wg. Cauchy

Z Analizy Matematycznej znana jest następująca definicja ciągłości funkcji:

Definicja 1.1.1 (Cauchy[1]). *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie będzie funkcją rzeczywistą. Mówimy, że f jest ciągła jeśli dla każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że zachodzi implikacja:*

$$|x_0 - x| < \delta \quad \implies \quad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$$

Następne stwierdzenie mówi, że aby mówić o ciągłości wystarczy relacja porządku liczb rzeczywistych, a dokładniej warunek Cauchy można sformułować odwołując się jedynie do odcinków otwartych:

Stwierdzenie 1.1.1. *Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego odcinka otwartego $(c,d) \subset \mathbb{R}$ i dowolnego punktu $x \in f^{-1}((c,d))$ istnieje odcinek otwarty $(a,b) \ni x$ taki, że $(a,b) \subset f^{-1}((c,d))$, czyli przeciwobraz dowolnego odcinka otwartego $f^{-1}((c,d))$ jest sumą mnogościową odcinków otwartych.*

Dowód. $\implies$ Dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $f(x) \in (c,d)$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset (c,d)$ a zatem z definicji Cauchy istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$f((x - \delta, x + \delta)) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset (c,d).$$

[1] Augustin Louis Cauchy (Paris 1789 - Sceaux (near Paris) 1857) pioneered the study of analysis, both real and complex, and the theory of permutation groups. He also researched in convergence and divergence of infinite series, differential equations, determinants, probability and mathematical physics. [Mac Tutor]

Ponieważ $x \in f^{-1}((c,d))$ było dowolnym punktem, a więc $f^{-1}((c,d))$ jest sumą mnogościową odcinków otwartych.
$\Longleftarrow$ Jeśli dla punktu $x \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}((f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon))$ jest sumą mnogościową odcinków otwartych to istnieje wśród nich odcinek otwarty zawierający punkt x wraz z pewnym odcinkiem $(x-\delta, x+\delta)$, a zatem $f(((x-\delta, x+\delta)) \subset (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)$. $\square$

Przeciwobraz sumy zbiorów jest sumą przeciwobrazów, a więc ostatnie stwierdzenie można sformułować tak: odwzorowanie jest ciągłe jeśli przeciwobrazy sum mnogościowych odcinków otwartych są sumami mnogościowymi odcinków otwartych.

1.2 Topologie i przestrzenie topologiczne

Definicja topologii w dowolnym zbiorze jest motywowana własnościami podzbiorów prostej rzeczywistej będących sumami mnogościowymi odcinków otwartych, czyli takich podzbiorów $U \subset \mathbb{R}$, że dla każdego punktu $x \in U$ istnieją liczby $s < x < t$ takie, że $(s,t) \subset U$. Jak widzieliśmy wyróżnienie tej rodziny podzbiorów wystarcza do zdefiniowania znanego z Analizy Matematycznej pojęcia ciągłości funkcji.

Definicja 1.2.1. *Niech X będzie zbiorem.* Topologią *w zbiorze X nazywamy rodzinę podzbiorów $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ taką, że:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(T2) Dla dowolnej rodziny zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$ takich, że $U_i \in \mathcal{T}$ suma mnogościowa $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

(T3) Dla dowolnej **skończonej** *rodziny zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$ takich, że $U_i \in \mathcal{T}$ ich część wspólna $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$*

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(X, \mathcal{T})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{T}$ ustaloną topologią. Zbiory należące do $\mathcal{T}$ nazywa się otwartymi *w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.*

Zauważmy kilka własności topologii jako podzbiorów zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$:

- Zbiór topologii w X jest częściowo uporządkowany przez inkluzję rodzin.
- W dowolnym zbiorze X definiuje się dwie topologie: minimalną (antydyskretną) $\mathcal{T}_{\alpha\delta} = \{\emptyset, X\}$ oraz maksymalną (dyskretną) $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Dla dowolnego zbioru X przestrzeń $(X, \mathcal{T}_{\alpha\delta})$ nazywamy *przestrzenią antydyskretną*, a przestrzeń $(X, \mathcal{T}_\delta)$ nazywamy *przestrzenią dyskretną.*
- Dla dowolnej topologii $\mathcal{T}$ w X : $\quad \mathcal{T}_{\alpha\delta} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\delta$.

Stwierdzenie 1.2.1. *Jeśli $\{\mathcal{T}_s\}_{s\in S}$ jest rodziną topologii w zbiorze X, to ich przecięcie $\bigcap\limits_{s\in S} \mathcal{T}_s$ też jest topologią.* $\square$

1.3 Odwzorowania ciągłe i homeomorfizmy

Definicja 1.3.1. *Niech* $(X, \mathcal{T}_X)$ *oraz* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie zbiorów* $f : X \to Y$ *nazywa się* ciągłym *jeśli dla każdego zbioru* $V \in \mathcal{T}_Y$ *jego przeciwobraz* $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ *.*

Powyższa definicja jest równoważna następującemu warunkowi, nawiązującemu do definicji ciągłości wg. Cauchy:

Stwierdzenie 1.3.1. *Odwzorowanie* $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu* $x \in X$ *i zbioru* $V \in \mathcal{T}_Y$ *takiego, że* $f(x) \in V$ *istnieje zbiór* $U \in \mathcal{T}_X$ *taki, że* $x \in U$ *oraz* $f(U) \subset V$*.*

Jeśli powyższy warunek zachodzi tylko dla ustalonego punktu $x \in X$ (pomijamy pierwszy kwantyfikator) to mówimy, że odwzorowanie jest ciągłe w punkcie x.

Zauważmy, że każde przekształcenie określone na przestrzeni dyskretnej o wartościach w dowolnej przestrzeni topologicznej oraz każde przekształcenie określone na dowolnej przestrzeni topologicznej o wartościach w przestrzeni antydyskretnej jest ciągłe.

Stwierdzenie 1.3.2. *Jeśli odwzorowania* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *są ciągłe, to ich złożenie* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{g \circ f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *też jest ciągłe. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T}_X)$ *odwzorowanie identycznościowe* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{id_X} (X, \mathcal{T}_X)$ *jest ciągłe.* □

Definicja 1.3.2. *Przekształcenie ciągłe* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *nazywa się* homeomorfizmem *jeśli istnieje przekształcenie ciągłe* $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ *takie, że* $f \circ g = Id_Y$ *oraz* $g \circ f = Id_X$*.*

Odnotujmy kilka własności homeomorfizmów:

- Homeomorfizm $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest bijekcją zbiorów $X \xrightarrow{f} Y$, ale nie każda ciągła bijekcja jest homeomorfizmem; np. jeśli zbiór X ma co najmniej dwa punkty, to identyczność $Id : (X, \mathcal{T}_\delta) \to (X, \mathcal{T}_{a\delta})$ jest ciągła, ale nie jest homeomorfizmem!

- Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to obraz dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym, bowiem jeśli g jest ciągłym przekształceniem odwrotnym, to $f(U) = g^{-1}(U)$ a ten zbiór na mocy ciągłości g jest otwarty.

- Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą bijekcją taką, że dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{T}_X$ jego obraz $f(U) \in \mathcal{T}_Y$, to f jest homeomorfizmem; uzasadnienie jak wyżej.

1.4 Zbiory domknięte

Definicja 1.4.1. *Niech* $(X, \mathcal{T})$ *będzie przestrzenią topologiczną. Podzbiór* $A \subset X$ *nazywa się domknięty (w topologii* $\mathcal{T}$*) jeśli* $X \setminus A \in \mathcal{T}$*. Rodzinę podzbiorów domkniętych w topologii* $\mathcal{T}$ *oznaczamy* $\mathcal{F}_\mathcal{T}$*.*

Zauważmy, że odwzorowanie $-^c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ przypisujące każdemu zbiorowi jego dopełnienie ustala bijekcję między rodziną zbiorów otwartych $\mathcal{T}$ i rodziną zbiorów domkniętych $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

Ze wzorów De Morgana[2] wynikają następujące własności rodziny zbiorów domkniętych $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$, dwoiste do własności rodziny zbiorów otwartych $\mathcal{T}$, wymienionych w Definicji 1.2.1:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$,
2. Dla dowolnej **skończonej** rodziny $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ suma mnogościowa $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$,
3. Dla dowolnej rodziny $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ ich część wspólna $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

Odnotujmy fakty dotyczące ciągłości odwzorowań w terminach zbiorów domkniętych, analogiczne do sformułowanych poprzednio dla zbiorów otwartych.

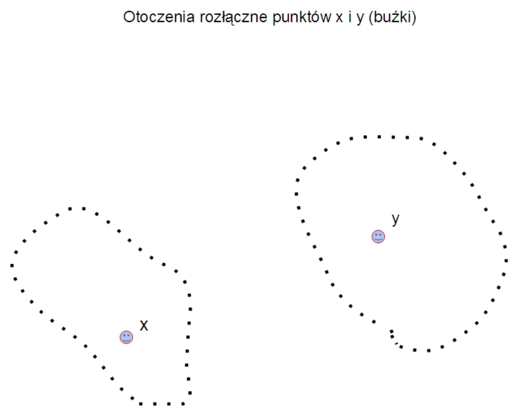
1. Przekształcenie $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz $f^{-1}(B)$ dowolnego podzbioru domkniętego $B \subset Y$ jest domknięty w X.
2. Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to obraz dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym.
3. Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągła bijekcją taką, że dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ jego obraz $f(A) \subset Y$ jest zbiorem domkniętym to f jest homeomorfizmem.

1.5 Własność Hausdorffa

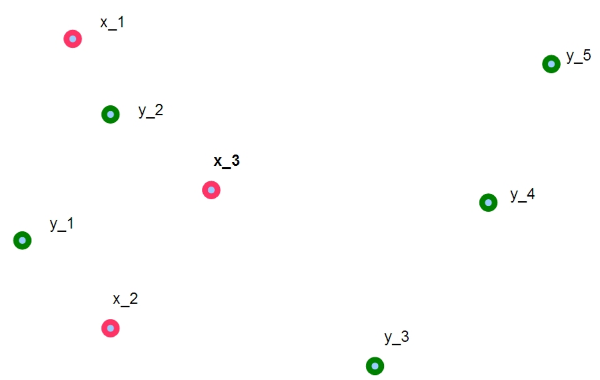
Definicja 1.5.1 (Własność Hausdorffa[3]). *Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią Hausdorffa jeśli dla dowolnych różnych punktów $x_0, x_1 \in X$ istnieją zbiory $U_0, U_1 \in \mathcal{T}$ takie, że $x_0 \in U_0,\ x_1 \in U_1$ oraz $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.*

[2] Augustus De Morgan (Madurai, Tamil Nadu, India 1806 - 1871 London, UK) became the first professor of mathematics at University College London and made important contributions to English mathematics. [Mac Tutor]

[3] Felix Hausdorff (Breslau (Wrocław) 1868 - Bonn 1942) worked in topology creating a theory of topological and metric spaces. He also worked in set theory and introduced the concept of a partially ordered set. [Mac Tutor]



Przykład 1.5.1. Na płaszczyźnie z topologią Zariskiego dowolne dwa niepuste zbiory otwarte mają niepuste przecięcie (na rysunku dwa zbiory - jeden po usunięciu punktów x_i, drugi y_j):



Stwierdzenie 1.5.1. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem i* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest przestrzenią Hausdorffa, to* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest przestrzenią Hausdorffa.* □

Ważną własność odwzorowań ciągłych o wartościach w przestrzeni Hausdorffa opisuje następne

Stwierdzenie 1.5.2. *Jeśli* $f, g\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *są dwoma odwzorowaniami ciągłymi o wartościach w przestrzeni Hausdorffa* $(Y, \mathcal{T}_Y)$, *to zbiór* $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ *jest domknięty.*

Dowód. Należy pokazać, że zbiór $X \setminus E$ jest otwarty. Niech zatem $f(x) \neq g(x)$. Ponieważ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest Hausdorffa więc istnieją rozłączne otoczenia $V_1 \ni f(x)$, $V_2 \ni g(x)$. Zbiór $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ zawiera punkt x oraz $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \subset X \setminus E$. □

1.6 Topologie pochodzące od metryki

Definicja 1.6.1 (Metryka)**.** *Metryką w zbiorze X nazywa się funkcję $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:*

1. *$d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,*

2. *$d(x, y) = d(y, x)$, dla $x, y \in X$,*

3. *$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, dla $x, y, z \in X$. (nierówność trójkąta)*

Liczba $d(x, y)$ nazywa się odległością punktów $x, y \in X$ w metryce d. Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną. Jeśli pominąć warunek (1), to taka funkcja nazywa się pseudometryką.

Przykład 1.6.1. W dowolnym zbiorze X można zdefiniować *metrykę dyskretną* kładąc dla dowolnych różnych punktów $x_1, x_2 \in X$, $d_\delta(x_1, x_2) = 1$ oraz $d_\delta(x, x) = 0$.

Uwaga 1.6.1. Jeśli $A \subset X$ jest dowolnym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d_X), to obcięcie odwzorowania d do zbioru $A \times A$ zadaje metrykę na A - odpowiednią przestrzeń metryczną oznaczamy $(A, d_X|A)$.

Definicja 1.6.2. *Kulą (otwartą) w przestrzeni metrycznej (X, d) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór*

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\},$$

a kulą domkniętą zbiór $D(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leqslant r\}$

Stwierdzenie 1.6.1. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Rodzina podzbiorów zbioru X:*

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \mid \forall_{x \in U} \exists_{r>0}\, B(x, r) \subset U\}$$

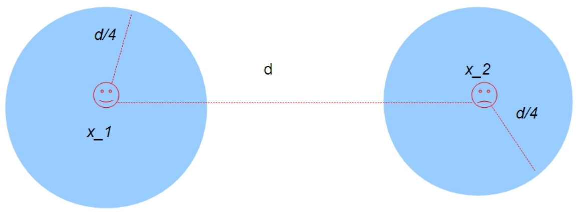
jest topologią w X, spełniającą warunek Hausdorffa.

Dowód. Spełnienie przez zdefiniowaną wyżej rodzinę warunków (1), (2) w definicji topologii Def. 1.2.1 jest oczywiste. Jeśli $U_1, .., U_k \in \mathcal{T}(d)$ oraz $x \in U_1 \cap ... \cap U_k$ i dla każdego $i = 1, .., k$ istnieje liczba $r_i > 0$ taka, że $B(x, r_i) \subset U_i$, to dla $r := \min\{r_1, .., r_k\}$ zachodzi inkluzja $B(x, r) \subset U_1 \cap ... \cap U_k$.

Zauważmy, że dowolna kula otwarta $B(x, r) \in \mathcal{T}(d)$, bowiem dla dowolnego punktu $y \in B(x, r)$ z nierówności trójkąta wynika, że dla $s := r - d(x, y)$ zachodzi inkluzja $B(y, s) \subset B(x, r)$.

Podobnie warunek Hausdorffa wynika natychmiast z warunku (1) i z nierówności trójkąta. Jeśli $x_1, x_2 \in X$ są różnymi punktami i $d := d(x_1, x_2) > 0$ to kule $B(x_1, \frac{d}{2})$ i $B(x_2, \frac{d}{2})$ są rozłącznymi otoczeniami otwartymi tych punktów. $\square$

Uwaga 1.6.1. Podzbiór $U \in \mathcal{T}(d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą kul otwartych.



Otoczenia rozłączne dwóch punktów w przestrzeni metrycznej.

Topologia dyskretna w zbiorze X pochodzi od metryki dyskretnej. Jednak nie każda topologia pochodzi od metryki, choćby dlatego, ze nie każda ma własność Hausdorffa (np. topologia antydyskretna w zbiorze co najmniej dwuelementowym). Z drugiej strony dwie różne metryki mogą wyznaczać tę samą topologię. Np. dla dowolnej metryki d jej "obcięcie" z góry przez dowolną liczbę > 0 np. 1, czyli $d'(x,y) := \min\{d(x,y), 1\}$ wyznacza tę samą topologię co d. Stąd następna definicja:

Definicja 1.6.3 (Metryki równoważne i topologia metryzowalna)**.** *Metryki d_1, d_2 w zbiorze X nazywają się* równoważne *jeśli $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną taką, że istnieje metryka d na X taka, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ to mówimy, że przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest* metryzowalna*.*

Stwierdzenie 1.6.2. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest metryzowalna, a przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest z nią homeomorficzna, to jest także metryzowalna.*

Dowód. Jeśli $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorfizmem, a $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ metryką taką, że $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(d_X)$ to definiujemy metrykę "przenosząc" ją przez odwzorowanie g : $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ wzorem $d_Y(y_1, y_2) := d_X(g(y_1), g(y_2))$. $\square$

Stwierdzenie 1.6.3 (warunek Cauchy)**.** *Odwzorowanie $(X, \mathcal{T}(d_X)) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}(d_Y))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$ i dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.* $\square$

1.7 Ciągi w przestrzeniach metrycznych i topologicznych

Uogólnimy dobrze znaną z Analizy Matematycznej definicję zbieżności ciągu najpierw na przestrzenie metryczne, a następnie dowolne przestrzenie topologiczne.

Definicja 1.7.1. *Ciąg punktów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbieżny do punktu $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $n(\epsilon)$ taka, że dla wszystkich $n > n(\epsilon)$ wyrazy ciągu $x_n \in B(x_0, \epsilon)$ tzn. $d(x_n, x_0) < \epsilon$ tzn. ciąg liczb rzeczywistych $d(x_n, x_0)$ jest zbieżny do 0.*

Definicja 1.7.2. *Ciąg punktów* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T})$ *jest zbieżny do punktu* $x_0 \in X$ *wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego otoczenia otwartego* $U \ni x_0$ *istnieje liczba* $n(U)$ *taka, że dla dowolnej liczby* $n > n(U)$ *wyrazy ciągu* $x_n \in U$.

Stwierdzenie 1.7.1. *Ciąg punktów* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *przestrzeni metrycznej* (X, d) *jest zbieżny do punktu* $x_0 \in X$ *wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny do tego punktu w przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T}(d))$. □

W dowolnej przestrzeni topologicznej ciąg może posiadać więcej niż jedną granicę. Np. w przestrzeni antydyskretnej każdy ciąg jest zbieżny do dowolnego punktu. Jednak w przestrzeni Hausdorffa (a więc w szczególności w przestrzeni metryzowalnej) ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Stwierdzenie 1.7.2. *Ciąg elementów w przestrzeni Hausdorffa ma co najwyżej jedną granicę.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ i załóżmy, że punkty x_0, x_0' są granicami tego ciągu. Jeśli $x_0 \neq x_0'$ to istnieją rozłączne otoczenia tych punktów $U \ni x_0$, $U' \ni x_0'$. Na mocy definicji zbieżności do dowolnego otoczenia granicy muszą należeć prawie wszystkie elementy ciągu, a skoro otoczenia U, U' są rozłączne jest to niemożliwe. □

Ciągłość funkcji w sensie topologicznym implikuje zachowywanie granic.

Stwierdzenie 1.7.3. *Jeśli odwzorowanie przestrzeni topologicznych* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe to zachowuje granice ciągów, tzn. jeśli ciąg punktów* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do punktu* x_0 *to ciąg wartości* $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do punktu* $f(x_0)$*. Jeśli przestrzenie* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *są metryzowalne zachodzi implikacja odwrotna.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Powtórz znany z Analizy Matematycznej dowód wynikania definicji ciągłości wg Heinego[4] z definicji Cauchy 1.6.3.

$\Longleftarrow$ Jeśli przestrzenie $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są metryzowalne powtórz dowód wynikania warunku Cauchy z warunku Heinego. Kluczowe jest posiadanie przez przestrzenie metryczne przeliczalnej bazy otoczeń w każdym punkcie (np. złożonej z kul o promieniu $\frac{1}{n}$). □

Uwaga 1.7.1. W dowolnych przestrzeniach topologicznych zachowywanie granic zwykłych ciągów NIE pociąga ciągłości odwzorowania! Definiuje się tzw. ciągi Moore'a-Smitha indeksowane dowolnymi zbiorami skierowanymi.[5]

1.8 Przestrzenie unormowane

Definicja 1.8.1. Przestrzenią unormowaną *nazywamy przestrzeń wektorową* $\mathbf{V}$ *nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *wyposażoną w normę* $||\cdot|| : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^+$ *spełniającą warunki:*

1. $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$

[4] Eduard Heine (Berlin 1821 - 1881 Halle)
[5] John L. Kelly **General Topology** New York, Van Nostrand, 1955 (dostępna w sieci)

2. $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$

3. $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

Norma definiuje metrykę w zbiorze $\mathbf{V}$*:* $d_{\|\cdot\|}(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$.

Ważne przykłady norm pochodzą z poznanych na GAL przestrzeni euklidesowych: dowolny iloczyn skalarny $\langle -,-\rangle\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ definiuje normę: $\|\mathbf{v}\|^2 := \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$.

Definicja 1.8.2. *Dwie normy* $||\cdot||_1, ||\cdot||_2\colon \mathbf{V}\to\mathbb{R}^+$ *są równoważne jeśli istnieją stałe* $B, C > 0$ *takie, że dla każdego wektora* $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ *zachodzą nierówności:* $\|\cdot\|_1 \leqslant B\|\mathbf{v}\|_2$ *oraz* $\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant C\|\mathbf{v}\|_1$.

Przykład 1.8.1. Dowolna baza skończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej wyznacza kilka (równoważnych) norm. Niech $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{V}$ będzie bazą, a $\mathbf{v} = \sum\lambda_i\mathbf{v}_i$ dowolnym wektorem. Definiujemy normy:

1. (Norma euklidesowa) $\|\mathbf{v}\|_e := \sqrt{\sum\lambda_i^2}$. Ta norma pochodzi od iloczynu skalarnego zdefiniowanego przez założenie, że $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ jest bazą ortonormalną.
2. (norma *sup*) $\|\mathbf{v}\|_{sup} := \sup\{|\lambda_i| \mid i = 1,\ldots n\}$
3. $\|\mathbf{v}\|_{sum} = \sum|\lambda_i|$.

Stwierdzenie 1.8.1. *Dwie normy* $||\cdot||_1, ||\cdot||_2\colon \mathbf{V}\to\mathbb{R}^+$ *są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy wyznaczone przez nie metryki są równoważne.*

Definicja 1.8.3. *Niech* $(X,\mathcal{T})$ *będzie przestrzenią topologiczną. Przez* $C(X)$ *oznaczamy zbiór funkcji ciągłych* $f\colon (X,\mathcal{T})\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$*, a przez* $C_b(X)$ *jego podzbiór składający się z funkcji ograniczonych.*[6] *Dla dowolnej funkcji* $f\in C_b(X)$ *definiujemy*

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| \mid x\in X\}.$$

Uwaga 1.8.1. Jeśli $X := \{1,..,n\}$ to $C_b(X) = \mathbb{R}\times..\times\mathbb{R}$, a norma $\|\cdot\|_{\sup}$ jest identyczna z normą sup wyznaczoną przez bazę kanoniczną $\mathbb{R}^n$. Jeśli $X := \{1,..,n,...\} = \mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych z topologią dyskretną, to $C_b(\mathbb{N})$ jest przestrzenią ciągów ograniczonych.

Przestrzenie $C_b(X)$ są na ogół nieskończenie wymiarowe i istnieje w nich wiele norm definiujących nierównoważne i niezupełne metryki.

1.9 Przykłady i zadania

Definicja 1.9.1 (Topologie na prostej)**.** *W zbiorze liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *zdefiniujmy rodziny podzbiorów* $\mathcal{T}_i$*:*

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *– topologia dyskretna*

2. $\mathcal{T}_2 = \{U\subset\mathbb{R}\colon \forall_{s\in U}\exists_{t>s}[s,t)\subset U\}$ *– topologia prawej strzałki*

[6] Funkcja $f\colon X\to\mathbb{R}$ jest ograniczona jeśli istnieje liczba M taka, że dla każdego $x\in X$, $|f(x)|\leqslant M$.

3. $\mathcal{T}_3 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t<s} (t, s] \subset U\}$ *– topologia lewej strzałki*

4. $\mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{r<s<t} (r, t) \subset U\}$ *– topologia euklidesowa*

5. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ *- topologia lewych przedziałów*

6. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ *- topologia prawych przedziałów*

7. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\}$ *– topologia Zariskiego*

8. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ *– topologia antydyskretna*

Zad. 1. Niech $\mathcal{T}_i$ dla $i = 1 \dots 8$ będą rodzinami podzbiorów prostej rzeczywistej opisanymi w Def. 1.9.1.

a) Sprawdź, że rodziny $\mathcal{T}_i$ są topologiami.

b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i$, rysując diagram inkluzji tych topologii i zbadaj ich przecięcia.

c) Zbadaj, które topologie $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.

d) O których parach przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij odpowiednią tabelkę.

e) Które z przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$ są metryzowalne? (p. BCPP Zad. 1.1, 1.2, 1.49)

Zad. 2 (Topologie w zbiorach skończonych)**.** Wyszczególnić wszystkie topologie w zbiorach dwu- i trzypunktowym. Sklasyfikować topologie w zbiorze dwu- i trzyelementowym z dokładnością do homeomorfizmu. Więcej informacji p. Wikipedia: Finite topological space.

Zad. 3 (Bukiet prostych)**.** Niech J będzie dowolnym zbiorem. W zbiorze $\mathbb{R} \times J$ rozpatrzmy relację równoważności

$$(t, i) \sim (s, j) \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad t = s = 0 \quad \text{lub} \quad (t, i) = (s, j)$$

a zbiór klas abstrakcji oznaczmy $\mathbb{R} \wedge J^+$. Zauważmy, że $\mathbb{R} \wedge J^+ = \mathbb{R} \times J / 0 \times J$ tzn. powstaje z iloczynu $\mathbb{R} \times J$ przez utożsamienie do punktu podzbioru $0 \times J$. W zbiorze $\mathbb{R} \wedge J^+$ rozpatrzmy dwie topologie:

1. Topologię $\mathcal{T}_k$ wyznaczoną przez metrykę węzła $d_k((t, i), (s, j)) = \begin{cases} |t - s| \text{ jeśli } i = j \\ |t| + |s| \text{ jeśli } i \neq j \end{cases}$

2. Topologię słabą $\mathcal{T}_w$ tzn. taką, że zbiór $U \subset \mathbb{R} \wedge J^+$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $i \in J$ zbiór $U \cap \mathbb{R} \times \{i\}$ jest otwarty w topologii euklidesowej prostej.

Zauważ, że $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_w$ oraz, że topologia $\mathcal{T}_w$ nie jest metryzowalna. Zauważ związek między metryką d_k a metryką kolejową, zdefiniowaną w BCPP Zad. 1.1.

Zad. 4. Normy zdefiniowane w Przykładzie 1.8.1 są równoważne, a także normy wyznaczone przez różne bazy są równoważne.

Zad. 5. Metryki $d_1, d_2 \colon X \times X \to \mathbb{R}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy te same ciągi są zbieżne w sensie d_1 i d_2.

Zad. 6 (Norma p-adyczna)**.** Niech p będzie liczbą liczba pierwszą. Odwzorowanie $|\cdot|_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $|m|_p := p^{-\alpha}$ gdzie $m = p^\alpha k$, $(p,k) = 1$, $|0|_p = 0$, które nazywa się normą p-adyczną ma nastepujące własności:

1. $|n|_p = 0 \iff n = 0$
2. $|n \cdot m|_p = |n|_p \cdot |m|_p$
3. $|n + m|_p \leqslant |n|_p + |m|_p$ – nierówność trójkąta
4. $|x + y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$ – silna nierówność trójkąta

i wyznacza w $\mathbb{Z}$ metrykę p-adyczną: $d_p(n,m) := |n - m|_p$. Metryka d_p jest przesuwalna tzn. dla ustalonej liczby n_0 odwzorowanie $\tau_{n_0}(m) := n_0 + m$ jest izometrią. Dowolne dwie kule są albo rozłączne, albo jedna jest zawarta w drugiej.

Zad. 7. Wzór $\|f\|_1 := \int\limits_0^1 |f(t)|dt$ zadaje normę w przestrzeni $C([0,1]) = C_b([0,1])$, która nie jest równoważna normie $\| \, \|_{\sup}$.

Zad. 8. BCPP Zad. 1.6, 1.7.

Zad. 9. Topologie w $\mathbb{R}^\infty$.

Zad. 10 (Kostka Cantora)**.** Niech $C := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem ciągów zero-jedynkowych, zwanym kostką Cantora. Rozpatrzmy w niej przemienne działanie grupowe zdaną przez dodawanie $\mod 2$ po współrzędnych oraz dwie metryki:

1. $d_1(s,t) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad s = t \\ \frac{1}{\min\{i \,|\, s_i \neq t_i\}} \end{cases}$
2. $d_2(s,t) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |s_i - t_i|$

Następujące stwierdzenia są prawdziwe:

1. Metryki d_1 , d_2 są równoważne.
2. Działanie grupowe oraz branie elementu odwrotnego są odwzorowaniami ciągłymi (czyli C jest grupą topologiczną), a przesunięcia są izometriami.
3. Metryka d_1 spełnia tzw. silną nierówność trójkąta tzn. $d_1(s,t) \leqslant \max\{d_1(s,u), d_1(u,t)\}$ (por. własność 4. w Zad 6).
4. Projekcje na czynniki $\pi_i \colon C \to \{0,1\}$ są odwzorowaniami ciągłymi (w zbiorze $\{0,1\}$ topologia jest dyskretna). Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X odwzorowanie $f \colon X \to C$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie złożenia $\pi_i f \colon C \to \{0,1\}$ są ciągłe.

Rozdział 2

Generowanie topologii i baza

2.1 Generowanie topologii

Niech X będzie dowolnym zbiorem a $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ dowolną rodziną jego podzbiorów.

Definicja 2.1.1. *Topologią* generowaną *przez rodzinę $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy najmniejszą topologię w X zawierającą $\mathcal{U}$ - czyli przecięcie wszystkich topologii zawierających rodzinę $\mathcal{U}$. Oznaczamy ją $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.*

Konstrukcja topologii $\mathcal{T}(\mathcal{U})$:

1. dołączamy do $\mathcal{U}$ przecięcia skończenie wielu elementów rodziny $\mathcal{U}$ definiując rodzinę:
$$\mathcal{U}^{\cap} := \{U_1 \cap \cdots \cap U_k \,|\, U_i \in \mathcal{U}\}$$
Rodzina $\mathcal{U}^{\cap}$ jest już zamknięta ze względu na branie przecięć skończenie wielu zbiorów tzn. jeśli $V_1, V_2 \in \mathcal{U}^{\cap}$ to $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}^{\cap}$. Zauważmy, że $X \in \mathcal{U}^{\cap}$ bowiem jest przecięciem pustej rodziny podzbiorów.

2. Do rodziny $\mathcal{U}^{\cap}$ dołączamy wszystkie sumy zbiorów należących do $\mathcal{U}^{\cap}$ definiując rodzinę:
$$(\mathcal{U}^{\cap})^{\cup} := \{\bigcup_{i \in I} V_i \,|\, V_i \in \mathcal{U}^{\cap}\}$$
Rodzina $(\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ jest zamknięta ze względu na branie sum zbiorów tzn. dla dowolnej rodziny $\{W_j\}_{j \in J} \subset (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ jej suma $\bigcup_{j \in J} W_j \in (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$. Zauważmy, że $\emptyset \in (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ bo zbiór pusty jest sumą pustej rodziny.

3. $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$

Stwierdzenie 2.1.1. *Dla dowolnej rodziny podzbiorów $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ rodzina $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ jest topologią w zbiorze X.* □

Rodzina $\mathcal{U}$ nazywa się podbazą topologii $\mathcal{T}$ jeśli $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Stwierdzenie 2.1.2. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną, Y będzie zbiorem oraz $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$ rodziną jego podzbiorów. Przekształcenie $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $V \in \mathcal{V}$ jego przeciwobraz $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Dowód. Dowolny zbiór otwarty w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ jest sumą (skończonych) przecięć zbiorów należących do rodziny $\mathcal{V}$. Ponieważ przeciwobraz zachowuje sumy i przecięcia zbiorów, a więc przeciwobraz dowolnego zbioru z $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ jest otwarty. Odwrotna implikacja jest oczywista, bo $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}(\mathcal{V})$. □

Przykład 2.1.1. Wybór rodziny generującej topologię nie jest oczywiście jednoznaczny; np. cała topologia generuje samą siebie. W przestrzeni metrycznej topologia $\mathcal{T}(d)$ jest generowana przez każdą z następujących rodzin:

1. Rodzinę wszystkich kul otwartych.

2. Rodzinę kul otwartych o promieniach wymiernych.

3. Rodzinę kul otwartych o promieniach $\frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3....$

i wiele innych.

Przykład 2.1.2. Topologia euklidesowa na prostej jest generowana przez rodzinę półprostych o końcach będących liczbami wymiernymi.

.

2.2 Baza topologii

Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie ustaloną przestrzenią topologiczną.

Definicja 2.2.1 (Baza topologii). *Podrodzinę $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ nazywamy* bazą *topologii $\mathcal{T}$ jeśli dowolny zbiór $U \in \mathcal{T}$ jest sumą mnogościową pewnych zbiorów należących do $\mathcal{B}$.*

Jeśli przestrzeń topologiczna posiada bazę przeliczalną, to mówimy że spełnia II aksjomat przeliczalności.

Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ oraz zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in V \subset U$. Istotnie, jest to warunek równoważny stwierdzeniu, że U jest sumą zbiorów należących do $\mathcal{B}$. W zapisie logicznym warunek, że zbiór jest otwarty, wyrażony w terminach bazy jest następujący:

$$U \in \mathcal{T} \iff \forall_{x \in U} \exists_{V \ni \mathcal{B}}\, x \in V \subset U.$$

Definicja 2.2.2 (Baza topologii w punkcie). *Niech $x \in X$ będzie ustalonym punktem. Podrodzinę $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}$ nazywamy* bazą topologii $\mathcal{T}$ w punkcie *x jeśli dla każdego zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}_x$ taki, że $x \in V \subset U$. Bazę w punkcie nazywamy także* bazą otoczeń *punktu $x \in X$.*

Jeśli przestrzeń topologiczna posiada bazę przeliczalną w każdym punkcie, to mówimy że spełnia I aksjomat przeliczalności.

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, to dla dowolnego $x \in X$ rodzina $\mathcal{B}_x := \{U \in \mathcal{B} \,|\, U \ni x\}$ jest bazą w punkcie x. Odwrotnie, mając bazy w punktach $\mathcal{B}_x$ dla wszystkich $x \in X$, rodzina $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{B}_x$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

Przykład 2.2.1. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną to dla ustalonego punktu $x_0 \in X$ rodzina kul $\mathcal{B}(x_0) := \{B(x_0; \frac{1}{n}) \,|\, n = 1, 2, ...\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(d)$ w punkcie x_0, a więc dowolna przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności.

Jeśli $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ to oczywiście $\mathcal{B}$ generuje topologię $\mathcal{T}$, przy czym w opisanej wyżej procedurze generowania topologii przez rodzinę zbiorów wystarczy dokonać kroku drugiego, bowiem definicji bazy przecięcie skończenie wielu zbiorów otwartych jest sumą zbiorów z $\mathcal{B}$.

Stwierdzenie 2.2.1. *Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ generowanej przez rodzinę $\mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*

(B1) $\forall_{x \in X} \exists_{V \in \mathcal{B}}\ x \in V$, *czyli* $\bigcup\{U \,|\, U \in \mathcal{B}\} = X$

(B2) $\forall_{V_1, V_2 \in \mathcal{B}} \forall_{x \in V_1 \cap V_2} \exists_{V \in \mathcal{B}}\ x \in V \subset V_1 \cap V_2$

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą topologii, to warunki (B1), (B2) muszą być spełnione, bo $X \in \mathcal{T}$ a przecięcie dwóch zbiorów otwartych jest otwarty, a więc z definicji bazy jest sumą zbiorów do niej należących.
$\Longleftarrow$ Warunek (B2) implikuje, że dowolne przecięcie dowolnej (niepustej!) rodziny zbiorów $\mathcal{B}$ jest sumą zbiorów należących do $\mathcal{B}$. Tak więc dowolny zbiór z rodziny $(\mathcal{B}^{\cap})^{\cup}$ jest sumą zbiorów z $\mathcal{B}$ - warunek (B1) zapewnia, że $X \in (\mathcal{B}^{\cap})^{\cup}$. □

Stwierdzenie 2.2.2. *Niech $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ będą topologiami w zbiorze X a $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1$, i $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_2$ odpowiednio pewnymi ich bazami. Inkluzja topologii $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ i zbioru bazowego $U_1 \in \mathcal{B}_1$ takiego, że $x \in U_1 \in \mathcal{B}_1$ istnieje zbiór U_2 taki, ze $x \in U_2 \subset U_1$.*

Dowód. Opisany związek między bazami $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ oznacza dokładnie, że każdy zbiór z bazy $\mathcal{B}_1$ da się przedstawić jako suma zbiorów z bazy $\mathcal{B}_2$. Wynika stąd, że każdy zbiór należący do $\mathcal{T}_1$ jest sumą zbiorów należących do $\mathcal{T}_2$, a zatem $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. □

Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi z wybranymi bazami $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{T}_X$ i $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{T}_Y$. Ciągłość odwzorowania $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ można badać w terminach tych baz.

Stwierdzenie 2.2.3. *Odwzorowanie $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ oraz zbioru $V \ni f(x)$ należącego do bazy $\mathcal{B}_Y$ istnieje zbiór $U \ni x$ należący do bazy $\mathcal{B}_X$ taki, że $f(U) \subset V$.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Przeciwobraz $f^{-1}(V)$ dowolnego zbioru z bazy $\mathcal{B}_Y$ jest otwarty, a więc dla dowolnego punktu $x \in f^{-1}(V)$ istnieje zbiór $U \subset f^{-1}(V)$ należący do bazy $\mathcal{B}_X$, czyli $f(U) \subset V$.

$\Longleftarrow$ Ponieważ każdy zbiór z $\mathcal{T}_Y$ jest sumą mnogościową zbiorów z $\mathcal{B}_Y$ wystarczy pokazać, że przeciwobraz $f^{-1}(V)$ dowolnego zbioru $V \in \mathcal{B}_Y$ jest otwarty (czyli należy do $\mathcal{T}_X$). Z założenia dla dowolnego punktu $x \in f^{-1}(V)$ istnieje zbiór $U_x \ni x$ należący do bazy $\mathcal{B}_X$ taki, że $f(U_x) \subset V$. Stąd wynika, że $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, zatem jest to zbiór otwarty. □

Definicja 2.2.3. *Rodzina podzbiorów $\{A_s\}_{s \in S}$ zbioru X jest jego* pokryciem *jeśli* $\bigcup\limits_{s \in S} A_s = X$.

Stwierdzenie 2.2.4. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ spełnia II aksjomat przeliczalności (tzn. posiada bazę przeliczalną), to z każdego pokrycia X zbiorami otwartymi $\{U_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{T}$ można wybrać podpokrycie przeliczalne, czyli istnieją wskaźniki $s_1, s_2, \ldots \in S$ takie, że $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{s_i} = X$.*

Dowód poprzedzimy lematem teoriomnogościowym, który zachodzi dla rodzin dowolnej mocy:

Lemat 2.2.1. *Załóżmy, że mamy dane dwa pokrycia zbioru X: $\{A_s\}_{s\in S}$ oraz $\{B_t\}_{t\in T}$. Jeśli dla każdego $s \in S$ i dla każdego punktu $a \in A_s$ istnieje zbiór $B_{t(a)}$ taki, że $a \in B_{t(a)} \subset A_s$, to istnieje podzbiór $S' \subset S$ mocy nie większej niż moc zbioru T taki, że $\{A_s\}_{s\in S'}$ jest także pokryciem.*

Dowód. Rozpatrzmy funkcję $\tau\colon \coprod\limits_{s\in S} A_s = \{(a, s) \mid a \in A_s,\ s \in S\} \to T$ taką, że $\forall_{(a,s)} a \in B_{\tau(a,s)} \subset A_s$. Oznaczając $T' = \tau(S) \subset T$ mamy równość $X = \bigcup\limits_{t'\in T'} B_{t'}$. Odwzorowanie $\tau : \coprod\limits_{s\in S} A_s \to T'$ jest surjekcją więc posiada przekształcenie prawo odwrotne (przekrój) tzn. $\sigma\colon T' \to \coprod\limits_{s\in S} A_s$ takie, że $\tau\sigma = id_{T'}$. Rozpatrzmy teraz odwzorowanie $\pi\colon \coprod\limits_{s\in S} A_s \to S$ będące rzutowaniem na drugą współrzędną: $\pi(a, s) := s$ i zdefiniujmy zbiór indeksów $S' := \pi(\sigma(T')) \subset S$. Zauważmy, że $\{A_{s'}\}_{s'\in S'}$ jest pokryciem, bowiem:

$$\bigcup_{s'\in S'} A_{s'} \supset \bigcup_{t'\in T'} B_{t'} = X.$$

Z konstrukcji zbioru S' wynika, że $|S'| \leqslant |T'| \leqslant |T|$ □

Dowód Stw. 2.2.4. Zbiory z bazy $\mathcal{B}$ stanowią pokrycie przestrzeni X i dla dowolnego pokrycia zbiorami otwartymi $\mathcal{U}$ spełniają założenia Lematu. Stąd z pokrycia $\mathcal{U}$ można wybrać pokrycie przeliczalne. □

Wniosek 2.2.1. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ spełnia II aksjomat przeliczalności to z dowolnej bazy można wybrać bazę przeliczalną.*

Dowód. Oznaczmy bazę przeliczalną X jako $\mathcal{B}$, natomiast dowolną bazę $\mathcal{B}'$. Dowód wynika natychmiast z Stw. 2.2.4. Dowolny zbiór z przeliczalnej bazy $\mathcal{B}$ można pokryć przeliczalną ilością zbiorów z bazy $\mathcal{B}'$ - ponieważ przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna, więc biorąc zbiory z bazy $\mathcal{B}'$ potrzebne do pokrycia wszystkich zbiorów z bazy $\mathcal{B}$ otrzymujemy bazę przeliczalną. □

2.3 Przykłady i zadania

Definicja 2.3.1 (Topologie na płaszczyźnie)**.** *Na płaszczyźnie rzeczywistej $\mathbb{R}^2$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów. $\mathcal{U}_i$: (punkty płaszczyzny oznaczamy $x = (x_1, x_2)$, a odcinki (a, b) - różne litery).*

1. $\mathcal{U}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ – *topologia dyskretna*
2. $\mathcal{U}_2 = \{(a, b) \times \mathbb{R} \colon a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times (a, b) \colon a < b\}$

3. $\mathcal{U}_3 = \{(a,b)\times(c,d)\colon a<b,\, c<d\}$ – *topologia euklidesowa*

4. $\mathcal{U}_4 = \{B(x,r)\subset\mathbb{R}^2\colon x\in\mathbb{R}^2,\, r>0\}$ *gdzie* $B(x,r) := \{x'\in X \,|\, ||x-x'||\leqslant r\}$

5. $\mathcal{U}_5 = \{B(x,r)\subset\mathbb{R}^2\colon x\in\mathbb{R}^2,\, r>0\}\cup\{B((x_1,x_2),|x_2|)\cup\{(x_1,0)\}\cup B((x_1,-x_2),|x_2|)\,|\, x_2\neq 0\}\}$ – *płaszczyzna motylków Niemyckiego*[1]

6. $\mathcal{U}_6 := \{\{a\}\times(c,d)\colon a\in\mathbb{R},\, c<d<0 \,\mathit{lub}\, 0<c<d\}\cup\{(a,b)\times(-c,c)\colon a<b,\, c>0\}$ – *topologia rzeczna*

7. $\mathcal{U}_6' := \{U\subset\mathbb{R}^2\colon \forall_{a\in\mathbb{R}}\, U\cap(\{a\}\times\mathbb{R}) \,\mathit{oraz}\, U\cap(\mathbb{R}\times\{0\})\, \textit{jest odcinkiem otwartym}\}$ – *(słaba) topologia rzeczna*

8. $\mathcal{U}_7 = \{I(\mathbf{v},\epsilon)\colon \mathbf{v}\neq 0,\, 0<\epsilon<1\}\cup\{(-a,a)\times(-a,a)\colon a>0\}$, *gdzie dla wektora* $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ *i* $\epsilon>0$, $I(\mathbf{v},\epsilon) := \{t\mathbf{v}\,|\,1-\epsilon<t<1+\epsilon\}$ – *topologia kolejowa*

9. $\mathcal{U}_7' = \{U\subset\mathbb{R}^2\colon \forall_{\mathbf{v}\neq 0} U\cap\mathbb{R}\mathbf{v}\, \textit{jest odcinkiem otwartym na prostej}\, \mathbb{R}\mathbf{v}\}$ – *słaba topologia kolejowa*

10. $\mathcal{U}_8 = \{\emptyset\}\cup\{\mathbb{R}^2\}\cup\{U\subset\mathbb{R}^2\colon \mathbb{R}^2\setminus U\, \textit{jest zbiorem skończonym}\}$ – *topologia Zariskiego*

11. $\mathcal{U}_9 = \mathcal{T}(<)$ *zadana przez porządek leksykograficzny:* $(x_1,x_2)<(y_1,y_2) \iff x_1<x_2$ *lub* $x_1=x_2 \,\mathit{oraz}\, y_1<y_2\}$, *(p. p. Zad 15 i BCPP Przykład 1.2.8)*

12. $\mathcal{U}_{10} = \{\emptyset\}\cup\{\mathbb{R}\}$ – *topologia antydyskretna*

Topologie generowane przez te rodziny będziemy oznaczać odpowiednio $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}(\mathcal{U}_i)$.

Zad. 11. Niech $\mathcal{U}_i$ dla $i = 1..8$ będą rodzinami podzbiorów płaszczyzny opisanymi w Definicji 2.3.1.

a) Które z rodzin $\mathcal{U}_i$ są topologiami, a które bazami topologii przez nie generowanymi?

b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}(\mathcal{U}_i)$, rysując diagram ich inkluzji i zbadaj przecięcia $\mathcal{T}_i\cap\mathcal{T}_j$. Kiedy otrzymuje się inną topologię niż jedną z ww. ?

c) Zbadaj, które z topologii $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.

d) O których przestrzeniach $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_i)$, $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij odpowiednią tabelkę.

e) Dla wektora $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ definiujemy przekształcenie przesunięcia (translację) $T_{\mathbf{v}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ wzorem $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) := \mathbf{v}+\mathbf{w}$. Dla każdego $i = 1..8$ zbadać dla jakich wektorów $\mathbf{v}$ przesunięcie $T_{\mathbf{v}}\colon(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_i)\to(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_i)$ jest przekształceniem ciągłym (homeomorfizmem).

f) Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_i)$ spełniają I, a które II aksjomat przeliczalności?

Zad. 12. Jeśli rodziny podzbiorów zbioru X, $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ są bazami generowanej przez nie topologii, to rodzina przecięć $\mathcal{B}_{12} := \{U_1\cap U_2\,|\,U_i\in\mathcal{B}_i\}$ też jest bazą tej topologii.

[1] Zazwyczaj płaszczyzną Niemyckiego nazywa się górną półpłaszczyznę z opisaną topologią. Opisana przestrzeń to sklejenie dwóch półprzestrzeni Niemyckiego wzdłuż osi poziomej $x_2 = 0$.

Zad. 13. Przekształcenie ciągłe przestrzeni topologicznych jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest bijekcją oraz obrazy zbiorów z pewnej bazy dziedziny są otwarte w przeciwdziedzinie tego odwzorowania.

Zad. 14. Metryki d_1, d_2 w zbiorze X są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy dla $i, j = 1, 2$ każdej kuli $B_{d_i}(x, r_i)$ istnieje liczba $r_j > 0$ taka, że $B_{d_j}(x, r_j) \subset B_{d_i}(x, r_i)$.

Zad. 15. Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem liniowo (dobrze) uporządkowanym zawierającym co najmniej dwa elementy. Topologię generowaną przez rodzinę przedziałów

$$\mathcal{F} := \{\{y \,|\, y < x\}, \{y \,|\, x < y\} \,|\, x, y \in X\}$$

nazywamy topologią porządkową i oznaczamy $\mathcal{T}(\leqslant)$. Znaleźć najmniejszą bazę topologii $\mathcal{T}(\leqslant)$, zawierającą zbiory $\mathcal{F}$. Wskazać tę bazę w przypadku płaszczyzny i kwadratu z porządkiem leksykograficznym.

Zad. 16. Dla dowolnego zbioru dobrze uporządkowanego $(X, \leqslant)$ topologia $\mathcal{T}(\leqslant)$ jest Hausdorffa.

Zad. 17. Topologia euklidesowa na prostej jest wyznaczona przez porządek tzn. $\mathcal{T}_e = \mathcal{T}(\leqslant) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Czy taka równość zachodzi dla dowolnego podzbioru prostej?

Zad. 18. Topologia kostki Cantora 10 jest generowana przez rodzinę podzbiorów $\{\pi_i^{-1}(x) \,|\, i = 1, ...;\ x = 0, 1\}$.

Zad. 19 (Topologia zbieżności punktowej)**.** Niech X będzie dowolnym zbiorem, Y przestrzenią topologiczną a $C(X, Y)$ zbiorem wszystkich odwzorowań $X \to Y$ w którym wyróżniamy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} := \{(x, V) \,|\, x \in X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$, gdzie $(x, V) := \{f \in C(X, Y) \,|\, f(x) \in V\}$. Mając wybraną bazę przestrzeni Y opisać w jej terminach bazę topologii generowanej przez $\mathcal{F}$. Funktorialność: dowolne przekształcenie ciągłe $g \colon Y \to Z$ indukuje przekształcenie ciągłe $g_* \colon C(S, Y) \to C(S, Z)$, $g_*(f) := gf$.

Zad. 20 (Przestrzenie z jednym punktem skupienia)**.** BCPP Zad. 1.33

Rozdział 3

Wnętrze i domknięcie zbioru

Nie każdy podzbiór przestrzeni topologicznej jest otwarty lub domknięty. Dla danego podzbioru przestrzeni można jednak wskazać zarówno jego punkty wewnętrzne, jak też punkty leżące blisko tego zbioru, choć niekoniecznie do niego należące. Ta geometryczna intuicja jest sformalizowana w postaci definicji operacji wnętrza i domknięcia zbioru. Poniżej niech $(X, \mathcal{T})$ będzie ustaloną przestrzenią topologiczną.

3.1 Wnętrze zbioru

Definicja 3.1.1. Wnętrzem zbioru $A \subset X$ *nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) otwarty podzbiór w A, a więc sumę wszystkich podzbiorów otwartych zawartych w A:*

$$\mathrm{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A) := \bigcup \{U \mid U \subset A,\, U \in \mathcal{T}\}$$

Zauważmy, że $U \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{Int}(U) = U$.

Uwaga 3.1.1. Oznaczenie $\mathrm{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A)$ podkreśla, że rozpatrujemy A jako podzbiór przestrzeni $(X, \mathcal{T})$. Jeśli jest jasne z kontekstu w jakiej przestrzeni topologicznej położony jest zbiór A stosowane są skrócone oznaczenia $\mathrm{Int}_X(A)$, $\mathrm{Int}(A)$ lub $\mathring{A}$.

Stwierdzenie 3.1.1. *Operacja brania wnętrza wyznacza odwzorowanie zbiorów potęgowych* $\mathrm{Int}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *spełniające następujące warunki:*

1. $\forall A \subset X$, $\mathrm{Int}(A) \subset A$,
2. *jeśli* $A \subset B$ *to* $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$
3. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$,
4. $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$. □

Stwierdzenie 3.1.2. *Punkt* $a \in \mathrm{Int}(A)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej bazy w punkcie a istnieje zbiór U z tej bazy taki, że $U \subset A$.* □

Stwierdzenie 3.1.3. *Przekształcenie przestrzeni topologicznych* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego podzbioru $B \subset Y$ zachodzi inkluzja* $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}\, f^{-1}(B)$. □

3.2 Domknięcie zbioru

Definicja 3.2.1. Domknięciem zbioru $A \subset X$ *nazywamy minimalny (ze względu na inkluzję) domknięty podzbiór zawierający A, a więc przecięcie wszystkich podzbiorów domkniętych zawierających A:*

$$\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(A) := \bigcap \{C \,|\, C \supset A,\, X \setminus C \in \mathcal{T}\}$$

Zauważmy, że $\mathrm{cl}(A) = A$ wtedy i tylko wtedy gdy zbiór A jest domknięty.

Uwaga 3.2.1. Oznaczenie $\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(A)$ podkreśla, że domykamy A jako podzbiór przestrzeni X. Jeśli jest jasne z kontekstu w jakiej przestrzeni topologicznej domykamy nasz zbiór, stosowane jest skrócone oznaczenie $\mathrm{cl}_X(A), \mathrm{cl}(A)$ lub $\bar{A}$.

Stwierdzenie 3.2.1. *Operacja domknięcie wyznacza odwzorowanie zbiorów potęgowych* $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *spełniające następujące warunki:*

1. $\forall A \subset X,\ \mathrm{cl}(A) \supset A,$
2. *Jeśli* $A \subset B$ *to* $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(B)$
3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A),$
4. $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(A \cup B).$

Stwierdzenie 3.2.2. $x \in \mathrm{cl}(A)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego* $U \ni x$ *(równoważnie dowolnego zbioru z pewnej bazy w punkcie* $x \in X$*) przecięcie ze zbiorem* A *jest niepuste:* $U \cap A \neq \emptyset$

Dowód. Niech $\mathcal{B}_x$ będzie ustaloną bazą w punkcie x. Rozpatrzmy zbiór

$$C := \{x \in X \,|\, \forall_{U \in \mathcal{B}_x}\, U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Z definicji wynika, że $A \subset C$ oraz $X \setminus C$ jest zbiorem otwartym czyli C jest zbiorem domkniętym. Stąd wynika, że $\mathrm{cl}(A) \subset C$. Zauważmy, że także $C \subset \mathrm{cl}(A)$. Istotnie, jeśli $x \notin \mathrm{cl}(A)$ to znaczy, że istnieje podzbiór domknięty $B \supset A$ taki, że $x \notin B$, a więc zbiór otwarty $X \setminus B$ zawiera x i nie przecina się z A. □

Stwierdzenie 3.2.3. *Dla przekształcenia przestrzeni topologicznych* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *następujące warunki są równoważne:*

a) f *jest ciągłe.*

b) $\forall_{B \subset Y}\ \mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}(B)).$

c) $\forall_{B \subset Y}\ f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}\, f^{-1}(B).$

d) $\forall_{A \subset X}\ f(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(f(A)).$

□

3.3 Zbiory gęste, brzegowe i ośrodkowość

Definicja 3.3.1. *Podzbiór $A \subset X$ nazywa się* gęsty *w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jeśli* $\mathrm{cl}(A) = X$. *Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nazywa się* ośrodkowa *jeśli posiada gęsty podzbiór przeliczalny.*

Stwierdzenie 3.3.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną.*

1. *Podzbiór $A \subset X$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy ma niepuste przecięcie z dowolnym niepustym zbiorem otwartym (równoważnie: zbiorem z pewnej bazy).*
2. *Jeśli przestrzeń topologiczna spełnia II aksjomat przeliczalności (tzn. ma bazę przeliczalną), to jest ośrodkowa.*
3. *Jeśli metryzowalna przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, to spełnia II aksjomat przeliczalności.*

Dowód.
Ad 1. Wynika natychmiast ze Stw. 4.4
Ad 2. Wybierając z każdego zbioru bazy przeliczalnej po jednym punkcie otrzymujemy zbiór przeliczalny mający niepuste przecięcie z każdym zbiorem otwartym (bo każdy zbiór otwarty jest sumą zbiorów z bazy.)
Ad 3. Niech dla pewnej metryki d w X, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$. Jeśli $G \subset X$ jest zbiorem przeliczalnym gęstym, to pokażemy, że przeliczalna rodzina zbiorów $\mathcal{B} := \{B(y, \frac{1}{n}) \,|\, y \in G, n \in \mathbb{N}\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(d)$. W tym celu wystarczy pokazać, że dla dowolnej kuli $B(x_0, r)$ i punktu $x \in B(x_0, r)$ istnieje punkt $y_i \in G$ oraz $\epsilon > 0$ takie, że $x \in B(y_i, \epsilon) \subset B(x_0, r)$. Ponieważ G jest gęsty a więc w G istnieje ciąg punktów $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do punktu x. Dobierzemy teraz punkt y_i z tego ciagu i promień ϵ dla którychx $\in B(y_i, \epsilon) \subset B(x_0, r)$ w następujący sposób: niech $y_i \in G$ będzie punktem takim, że $d(y_i, x) \leqslant \frac{1}{3}(r - d(x, x_0))$ natomiast $\epsilon := \frac{1}{2}(r - d(x, x_0))$. Wykorzystując warunek trójkąta sprawdzamy, że zachodzą wymagane inkluzje. [**Wykonaj rysunek**] □

Uwaga 3.3.1. Założenie o metryzowalności przestrzeni topologicznej w ostatniej implikacji jest istotne, wystarczy rozpatrzeć prostą z topologią strzałki, która jest ośrodkowa i spełnia I aksjomat przeliczalności, lecz nie spełnia II aksjomatu przeliczalności.

Stwierdzenie 3.3.2. *Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem gęstym w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ oraz $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest odwzorowaniem ciągłym i surjekcją to obraz $f(A) \subset Y$ jest podzbiorem gęstym w $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dowolny zbiór otwarty $V \subset Y$ przecina zbiór $f(A)$. Ponieważ f jest surjekcją zachodzi równość $f(f^{-1}(V) \cap A) = V \cap f(A)$. Ponieważ $A \subset X$ jest gęsty, a więc przecięcie $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$, skąd $V \cap f(A) \neq \emptyset$. □

3.4 Brzeg zbioru

Definicja 3.4.1. Brzegiem *zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór*

$$\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(X \setminus A).$$

Definicja 3.4.2. *Podzbiór $A \subset X$ nazywa się* brzegowy *jeśli* $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

Stwierdzenie 3.4.1. *Zachodzą następujące równości zbiorów:*

1. $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$.
2. $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$
3. $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$
4. $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$ *i te zbiory są parami rozłączne.*

Uwaga 3.4.1. Zbiór jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Fr}(A)$.

3.5 Wnętrze i domknięcie w terminach metryki

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $A \subset X$. Opiszemy operacje wnętrza i domknięcie zbioru A w topologii $\mathcal{T}(d)$ w terminach metryki d .

Stwierdzenie 3.5.1. *Punkt $a \in \mathrm{Int}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $r > 0$ taka, że $B(a, r) \subset A$.* □

Stwierdzenie 3.5.2. *Punkt $x \in \mathrm{cl}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg elementów $a_n \in A$ zbieżny do punktu x.*

Dowód. Jeśli $x \in \bar{A}$, to dla dowolnej kuli $B(x, \frac{1}{n})$ istnieje punkt $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Ciąg $\{a_n\}$ jest więc zbieżny do x.

Odwrotnie, jeśli ciąg $a_n \to x$, to w dowolnym otoczeniu punktu x leżą punkty ze zbioru A, a więc $x \in \bar{A}$. □

Domknięcie zbioru może być opisane w terminach intuicyjnej funkcji odstępu punktu od zbioru.

Stwierdzenie 3.5.3. *Funkcja odstępu punktu $a \in X$ od podzbioru $A \subset X$, $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem $d(x, A) := \inf\{d(x.a) \mid a \in A\}$ jest ciągła oraz:*

$$d(x, A) = 0 \quad \iff \quad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Dowód. Sprawdzimy, że $d(\cdot, A)$ jest ciągła. Dla każdego punktu $a \in A$ z definicji funkcji odstępu oraz nierówności trójkąta dla każdego punktu $a \in A$ i punktów $x, y \in X$ mamy oszacowanie:

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a).$$

Ponieważ punkt $a \in A$ jest wybrany dowolnie, biorąc ponownie infimum po $a \in A$ otrzymujemy nierówność $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Zamieniając miejscami punty x i y otrzymujemy także $d(y, A) - d(x, A)| \leqslant d(y, x) = d(x, y)$, a więc $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$. Funkcja $d(-, A)$ spełnia więc warunek Lipschitza ze stałą 1, skąd wynika jej ciągłość (łatwo sprawdzić z definicji Heine).

Z ciągłości funkcji odstępu wynika, że zbiór $\{x \in X \mid d(x, A)$ jest domknięty i oczywiście zawiera zbiór A. Odwrotnie, jeśli dla punktu $x \in X$ odstęp $d(x, A) = 0$ to istnieje ciąg $\{a_n\} \subset A$ zbieżny do x, a więc $x \in \mathrm{cl}(A)$. □

3.6 Zadania i przykłady

Zad. 21. Udowodnij Stw. 3.1.1. Wskaż podzbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ takie, że $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \neq \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Zad. 22. Udowodnij Stw. 3.2.1. Wskaż podzbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ takie, że $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) \neq \mathrm{cl}(A \cap B)$.

Zad. 23. Udowodnij Stw. 3.2.3. Czy obraz ciągły zbioru brzegowego musi być brzegowy?

Zad. 24. Podaj przykład podzbioru $A \subset \mathbb{R}$ prostej euklidesowej takiego, że:

1. $A = \mathrm{Fr}(A)$;
2. A jest domknięty, lecz nie jest domknięciem swojego wnętrza;
3. A jest wnętrzem swojego domknięcia;
4. A ma puste wnętrze i jest gęsty w $\mathbb{R}$;
5. A jest przeliczalny a jego brzeg jest całą prostą $\mathbb{R}$.

Zad. 25. Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ posiada bazę złożoną ze zbiorów o pustym brzegu. Czy ta przestrzeń jest dyskretna?

Zad. 26. Przestrzeń $C_b(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ z topologią wyznaczoną przez normę $\| \|_{sup}$ (1.8.1) nie jest ośrodkowa.

Zad. 27. Zbadaj wnętrza i domknięcia zbiorów opisanych w BCPP Zad. 1.6

Zad. 28. Kostka Cantora (Zad. 10) jest przestrzenią ośrodkową.

Zad. 29. Zbadaj ośrodkowość przestrzeni opisanych w Def. 1.9.1 i 2.3.1.

Zad. 30. Jeśli dwa odwzorowania ciągłe $f, g \colon X \to Y$ o wartościach w przestrzeni Hausdorffa są równe na podzbiorze $A \subset X$, to są równe na jego domknięciu.

Rozdział 4

Aksjomaty oddzielania

Aksjomaty oddzielania to dodatkowe własności topologii zapewniające, że jest dostatecznie wiele zbiorów otwartych. Są one tradycyjnie nazywane T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4. Przestrzeń dyskretna spełnia wszystkie te aksjomaty, przestrzeń antydyskretna co najmniej dwupunktowa żadnego. Nie wszystkie aksjomaty są równie ważne w praktyce matematycznej. Jeden z najważniejszych - T_2 - zwany też własnością Hausdorffa już poznaliśmy. Poniżej opiszemy pozostałe.

4.1 Przestrzenie T_i dla $i \leqslant 2$

Definicja 4.1.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ spełnia aksjomat T_0 (odpowiednio T_1) jeśli dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieje zbiór otwarty zawierający jeden z nich, a nie zawierający drugiego (odpowiednio istnieje zbiór otwarty $U \ni x$ taki, że $y \notin U$).*

Najprostszy przykład przestrzeni T_0, która nie jest T_1 to przestrzeń dwupunktowa w której właściwym podzbiorem otwartym jest zbiór złożony z jednego punktu. Oczywiście każda przestrzeń Hausdorffa ma własność T_1, lecz np. przestrzeń nieskończona w której właściwymi podzbiorami domkniętymi są zbiory skończone ma własność T_1, choć nie jest Hausdorffa (T_2). Zauważmy następującą oczywistą charakteryzację przestrzeni T_1.

Stwierdzenie 4.1.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ spełnia aksjomat T_1 wtedy i tylko wtedy gdy podzbiory jednopunktowe w X są domknięte.* $\square$

4.2 Przestrzenie regularne, czyli T_3

Definicja 4.2.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ spełnia aksjomat T_3 jeśli jest przestrzenią T_1 oraz dla dowolnego punktu $x \in X$ i podzbioru domkniętego $A \subset X$ takiego, że $x \notin A$ istnieją rozłączne zbiory otwarte $U \ni x$ oraz $V \supset A$. Przestrzenie spełniające aksjomat T_3 nazywa się* regularnymi.

Dowolna przestrzeń regularna jest oczywiście przestrzenią Hausdorffa. Jednak nie odwrotnie.

Przykład 4.2.1 (J. Munkers). Rozważmy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z topologią $\mathcal{T}$ generowaną przez odcinki otwarte oraz zbiory postaci $(a,b) \setminus K$ gdzie $K := \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ jest oczywiście przestrzenią Hausdorffa. Natomiast zbioru domkniętego K nie można oddzielić od punktu $0 \notin K$ zbiorami otwartymi.

Dowolna przestrzeń metryzowalna $(X, \mathcal{T}_d)$ jest regularna. Najprościej pokazać to korzystając z funkcji odstępu punktu od zbioru. Jeśli $x \in X$ oraz $A = \bar{A} \subset X$ taki, że $x \notin A$, to funkcja odstępu puntu od zbioru $d(-, A)\colon X \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $\delta := d(x, A) > 0$. Przeciwobrazy odcinków $(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ oraz $(\frac{\delta}{2}, +\infty)$ są rozłącznymi otoczeniami odpowiednio zbioru A i punktu x.

4.3 Przestrzenie $T_{3\frac{1}{2}}$ i T_4

Przykład przestrzeni metryzowalnych może sugerować iż na każdej przestrzeni regularnej istnieje wiele funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych. Tak jednak nie jest - E. Hewitt [1]

skonstruował przestrzeń regularną prawie dowolnej mocy na której jedynymi funkcjami ciągłymi są funkcje stałe. To motywuje następującą definicję:

Definicja 4.3.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ spełnia aksjomat $T_{3\frac{1}{2}}$ jeśli jest przestrzenią T_1 oraz dla dowolnego punktu $x \in X$ i podzbioru domkniętego $A \subset X$ takiego, że $x \notin A$ istnieje (ciągła) funkcja rzeczywista $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ taka, że $f(x) = 0$ oraz $f(a) = 1$ dla $a \in A$. Przestrzeń spełniająca aksjomat $T_{3\frac{1}{2}}$ nazywa się przestrzenią Tichonowa lub całkowicie regularną.*

Przestrzeń Tichonowa jest oczywiście regularna: rozłączne otoczenia to przeciwobrazy odcinków $f^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ oraz $f^{-1}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Definicję przestrzeni normalnych zawrzemy w twierdzeniu, zwanym lematem Urysohna[2], pokazującym ich relację do przestrzeni Tichonowa.

Twierdzenie 4.3.1 (Lemat Urysohna)**.** *Dla przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ spełniającej aksjomat T_1 oraz jej rozłącznych, domkniętych podzbiorów $A, B \subset X$ następujące warunki są równoważne*

1. *Istnieją rozłączne zbiory otwarte $U \supset A$ oraz $V \supset B$,*

2. *Istnieje funkcja $f\colon (X, \mathcal{T}(d)) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ taka, że $f(a) = 0$ dla $a \in A$ oraz $f(b) = 1$ dla $b \in B$.*

Przestrzeń spełniająca te warunki nazywa się normalna lub T_4-przestrzenią.

Dowód lematu Urysohna "metodą schodkową" został niezwykle klarownie przedstawiony i opatrzony świetnymi ilustracjami w podręczniku K. Jänicha *Topologia* (Rozdział 8, §1,2) , więc tam Czytelnika odsyłamy. Zauważmy, że jeśli mamy przestrzeń metryzowalną $(X, \mathcal{T}_d)$ to funkcję oddzielającą zbiory można łatwo skonstruować przy pomocy funkcji odstępu od zbioru: $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$.

[1] *On two problems of Uryshon.* **Annals of Mathematics** vol. 47, No. 3, July, 1945

[2] Pavel Samuilovich Urysohn (Odessa 1898 - 1924 Batz-sur-Mer, Francja) [Mac Tutor]

4.4 Twierdzenie Tietze o przedłużaniu przekształceń

Lemat Urysohna można traktować jako twierdzenie o rozszerzaniu funkcji stałych na rozłącznych podzbiorów domkniętych do funkcji ciągłych na całej przestrzeni. Okazuje się, że ten lemat pozwala udowodnić ogólne twierdzenie o rozszerzaniu funkcji ciągłych z podzbiorów domkniętych na całą przestrzeń.

Twierdzenie 4.4.1 (Tietze[3]). *Jeśli $A \subset X$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni normalnej j $(X, \mathcal{T})$ to dowolne przekształcenie ciągłe $f\colon (A, \mathcal{T}(d)|A) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ rozszerza się na całą przestrzeń tzn. istnieje $\bar{f}\colon (X, \mathcal{T}(d)) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ takie, że $\bar{f}(a) = f(a)$ dla każdego $a \in A$.*

Dowód twierdzenia Tietze znajduje się w BCPP Podrozdział 1.6 oraz (z obrazkami) w książce K. Jänicha *Topologia*.

Wniosek 4.4.1. *W Tw. 4.4.1 odcinek $[0,1]$ można zastąpić przez dowolny przedział na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ a także produkt kartezjański przedziałów.* $\square$

[3] Heinrich Franz Friedrich Tietze (Schleinz, Austria 1880 - 1964 München) [Mac Tutor]

Rozdział 5

Konstrukcje przestrzeni topologicznych

Mając daną przestrzeń topologiczną lub rodzinę przestrzeni można poprzez pewne standardowe konstrukcje budować nowe przestrzenie. Cztery konstrukcje (zwane także operacjami), które opisujemy w tym rozdziale to: podprzestrzeń, przestrzeń ilorazowa, produkt kartezjański i suma prosta. Nowe przestrzenie powstają przez wykonanie najpierw odpowiedniej konstrukcji na zbiorach, a potem zdefiniowanie w nich "naturalnej" topologii. Analogiczne konstrukcje występują w wielu innych teoriach matematycznych m.in. w algebrze liniowej i w teorii grup. Pierwszy podrozdział poświęcony jest definiowaniu topologii w zbiorze poprzez żądanie, aby były ciągłe przekształcenia należące do danej rodziny przekształceń określonych na tym zbiorze (lub prowadzące do tego zbioru). W następnych podrozdziałach omawiamy kolejno wspomniane wyżej konstrukcje.

5.1 Cofanie i popychanie topologii

Cofanie topologii

Niech X będzie ustalonym zbiorem a $\mathfrak{f} = \{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ rodziną przekształceń określonych na X o wartościach w przestrzeniach topologicznych $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.

Definicja 5.1.1. *Definiujemy topologię $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ w zbiorze X jako najmniejszą topologię, w której ciągłe są wszystkie odwzorowania*

$$\{f_i\colon (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f})) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}.$$

Stwierdzenie 5.1.1. *Topologia $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ jest generowana przez rodzinę zbiorów*

$$\{f_i^{-1}(U_i) \,|\, U_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}.$$

Bazą topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ są zbiory $\{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\}$, gdzie $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$. □

Stwierdzenie 5.1.2. *Odwzorowanie $g\colon (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in I$ złożenie przekształceń*

$$(Z, \mathcal{T}_Z) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f})) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \mathcal{T}_i)$$

jest ciągłe. □

Dowód. $\Longrightarrow$ Z definicji topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ dowolne odwzorowanie f_i jest ciągłe, a więc jego złożenie z odwzorowaniem ciągłym g jest ciągłe.
$\Longleftarrow$ Załóżmy, że wszystkie złożenia $f_i g$ są przekształceniami ciągłymi. W takim razie dla dowolnego zbioru otwartego $U_i \in \mathcal{T}_i$ przeciwobraz $(f_i g)^{-1}(U_i) = g^{-1}(f_i^{-1}(U_i))$ jest zbiorem otwartym w $(Z, \mathcal{T}_Z)$. Z definicji zbiory postaci $f_i^{-1}(U_i)$ generują topologię $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f}$, a więc przeciwobraz dowolnego zbioru z tej topologii jest otwarty w $(Z, \mathcal{T}_Z)$. □

Popychanie topologii

Niech teraz Y będzie ustalonym zbiorem a $\mathfrak{g} := \{g_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ rodziną przekształceń określonych na przestrzeniach topologicznych $(X_j, \mathcal{T}_j)$ o wartościach w zbiorze Y.

Definicja 5.1.2. $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g})$ *to największa topologia w* Y*, w której wszystkie odwzorowania* $\{g_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ *są ciągłe.*

Stwierdzenie 5.1.3. $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g}) = \{U \subseteq Y : \forall_{j\in J}\, g_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_j\} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_*(g_j)$ □

Stwierdzenie 5.1.4. *Odwzorowanie* $(Y, \mathcal{T}_*(\mathfrak{g})) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $j \in J$ *złożenie* $(X_j, \mathcal{T}_j) \xrightarrow{g_j} (Y, \mathcal{T}_*(\mathfrak{g})) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe.* □

Dowód. $\Longrightarrow$ Odwzorowania g_j są ciągłe na mocy definicji topologii $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g})$, a więc jeśli f jest ciągłe to złożenie fg_j jest ciągłe.
$\Longleftarrow$ Żeby pokazać, że f jest ciągłe trzeba pokazać, że przeciwobraz $f^{-1}(V)$ gdzie $V \in \mathcal{T}_Z$ jest zbiorem otwartym. W myśl definicji topologii $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g})$ ma to miejsce wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $j \in J$ przeciwobraz $g_j^{-1}(f^{-1}(V)) = (fg_j)^{-1}(V)$ jest zbiorem otwartym w $(X_j, \mathcal{T}_j)$, co jest równoważne z ciągłością złożenia fg_j. □

5.2 Podprzestrzeń

Rozpatrujemy przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ i jej podzbiór $A \subset X$. Chcemy określić topologię $\mathcal{T}|A$ w tym zbiorze, wyznaczoną przez topologię w całej przestrzeni. Naturalnym żądaniem jest, aby odwzorowanie włożenia $\iota\colon (A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$, $\iota(a) := a$ było ciągłe, a z drugiej strony topologia ta była jak najbliższa topologii w X. Definiujemy więc topologię $\mathcal{T}|A$ jako cofnięcie topologii $\mathcal{T}$ przez włożenie ι, czyli najmniejszą topologię przy której włożenie jest przekształceniem ciągłym:

$$\mathcal{T}|A := \mathcal{T}^*(\iota) = \{\iota^{-1}(U) \,|\, U \in \mathcal{T}\} = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$, to rodzina $\mathcal{B}|A := \{U \cap A\colon U \in \mathcal{B}\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}|A$ – podobnie dla bazy w punkcie.

Podobnie jak w przypadku zbiorów otwartych w $\mathcal{T}|A$, zbiory domknięte w topologii podprzestrzeni to przecięcia zbiorów domkniętych w całej przestrzeni z tą podprzestrzenią: $\mathcal{F}_{\mathcal{T}|A} = \{B \cap A \subset A\colon B \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}\}$ skąd wynika następujące:

Stwierdzenie 5.2.1. *Dla dowolnego podzbioru $B \subset A$ zachodzi równość*

$$\mathrm{cl}_{(A,\mathcal{T}|A)}(B) = \mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(B) \cap A.$$

□

Uwaga. Podobna równość *nie zachodzi* dla wnętrza zbioru!

Zauważmy, że własność domkniętości podzbioru jest w pewnym sensie własnością lokalną zachodzi bowiem następujące

Stwierdzenie 5.2.2. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią topologiczną, a $\{U_s\}_{s\in S}$ jest pokryciem otwartym. Podzbiór $A \subset X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $s \in S$ podzbiór $A \cap U_s \subset U_s$ jest domknięty w topologii $\mathcal{T}_X|U_s$.*

Dowód. Jeśli A jest podzbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$ to z definicji zbiory $A \cap U_s \subset U_s$ są domknięte w topologii podprzestrzeni $\mathcal{T}_X|U_s$. Odwrotnie, wystarczy pokazać, że dla każdego punktu $x \notin A$ istnieje otoczenie, które nie przecina się ze zbiorem A. Wybierzmy $U_s \ni x$. Ponieważ $A \cap U_s \subset U_s$ jest podzbiorem domkniętym, więc istnieje otoczenie $U_s \supset V \ni x$ (otwarte także w X, bo $U_s \subset X$ jest otwarty) rozłączne z $A \cap U_s$. Zatem także $A \cap V = A \cap U_s \cap V = \emptyset$. □

Stwierdzenie 5.2.3. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi oraz $A \subset X$, $B \subset Y$ ich podzbiorami.*

1. *Odwzorowanie $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (B, \mathcal{T}_Y|B)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (B, \mathcal{T}_Y|B) \xrightarrow{\iota} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe.*

2. *Jeśli odwzorowanie $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe oraz $A \subset X$, to obcięcie $f|A : (A, \mathcal{T}_X|A) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest ciągłe.* □

Odnotujmy zachowanie poznanych własności topologii przy przechodzeniu do podprzestrzeni (tzw. dziedziczność własności):

Stwierdzenie 5.2.4.

1. *Podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.*

2. *Jeśli przestrzeń topologiczna spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności), to dowolna jej podprzestrzeń też spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności).*

3. *Dowolna podprzestrzeń przestrzeni metryzowalnej jest metryzowalna. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $A \subset X$, to zachodzi równość topologii $\mathcal{T}(d)|A = \mathcal{T}(d|A)$.*

4. *Dowolna podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa.*

Dowód. Dowody punktów 1-3 wynikają bezpośrednio z definicji. Żeby pokazać, że podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa przypomnijmy, że dla przestrzeni metryzowalnej ośrodkowość pociąga spełnianie II aksjomatu przeliczalności, a zatem na mocy punktu 2. podprzestrzeń również spełnia II aksjomat przeliczalności, czyli w szczególności jest ośrodkowa. □

Przykład 5.2.1. Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa (np. oś $y = 0$ na płaszczyźnie Niemyckiego). Wynika stąd także, że topologia płaszczyzny Niemyckiego nie jest metryzowalna.

Na zakończenie wprowadzimy użyteczną definicję zanurzenia homeomorficznego jednej przestrzeni w inną, czyli "podprzestrzeni z dokładnością do homemorfizmu".

Definicja 5.2.1. *Różnowartościowe odwzorowanie ciągłe przestrzeni topopologicznych $f\colon (X\mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się zanurzeniem homeomoficznym (lub włożeniem), jeśli zadaje homeomorfizm $f\colon (X\mathcal{T}_X) \to (f(X), \mathcal{T}_Y|f(X))$.*

5.3 Przestrzeń ilorazowa

Niech X będzie zbiorem, $R \subset X \times X$ relacją równoważności w tym zbiorze, a $q\colon X \to X/R$ odwzorowaniem przypisującym każdemu elementowi x jego klasę abstrakcji $[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$. Zbiór klas abstrakcji jest podzbiorem zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$. Odwzorowanie $q\colon X \to X/R \subset \mathcal{P}(X)$ jest oczywiście surjekcją. Odwrotnie, dowolna surjekcja zbiorów $p\colon X \to Y$ definiuje relację równoważności $R_p := \{(x', x'') \in X \times X \,|\, p(x') = p(x'')\}$ i odwzorowanie p wyznacza bijekcję $\bar{p}\colon X/R_p \xrightarrow{\cong} Y$. Będziemy więc niżej rozpatrywać surjekcje zbiorów; rzutowanie na zbiór klas abstrakcji będzie szczególnym przypadkiem poniższej konstrukcji, dwoistej w pewnym sensie do poprzedniego przypadku, gdy rozważaliśmy injekcje (włożenia podzbiorów).

Definicja 5.3.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a $p\colon X \to Y$ surjekcją na zbiór Y. Definiujemy topologię $\mathcal{T}_*(p)$ w zbiorze Y jako popchnięcie topologii $\mathcal{T}$ przez odwzorowanie p, czyli największą topologię, w której p jest ciągłe:*

$$\mathcal{T}_*(p) = \{V \subset Y \,|\, p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$$

Stwierdzenie 5.3.1. *Odwzorowanie $f\colon (Y, \mathcal{T}_*(p)) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{p} (Y, \mathcal{T}_*(p)) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ jest ciągłe.* □

Spośród poznanych własności topologii jedynie ośrodkowość zachowuje się przy konstrukcji przestrzeni ilorazowej (p. Stw. 3.3.2).

Przykład 5.3.1 (Odcinek z rozdwojonym punktem). Przestrzeń ilorazowa przestrzeni Hausdorffa nie musi mieć własności Hausdorffa. Niech $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ x_2 = 0 \text{ lub } 1\}$ z topologią euklidesową, $Y = [-1, 1] \cup \{0'\}$ będzie *zbiorem*, $p : X \to Y$, $p(x_1, x_2) := x_1$ jeśli $(x_1, x_2) \neq (0, 1)$, $p(0, 1) := 0'$. W przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_*(p))$ punkty $0, 0'$ nie posiadają rozłącznych otoczeń (a wszystkie inne pary różnych punktów mają).

Przykład 5.3.2. Przestrzeń ilorazowa przestrzeni metryzowalnej nie musi być metryzowalna, nawet jeśli jest Hausdorffa. Rozpatrzmy przestrzeń $\mathbb{R}/\sim$ gdzie $t_1 \sim t_2 \iff t_1 = t_2$ lub t_1, t_2 są liczbami całkowitymi. Przestrzeń $\mathbb{R}/\sim$ jest przestrzenią Hausdorffa nie ma jednak bazy przeliczalnej w punkcie $[0] \in \mathbb{R}/\sim$, a więc nie spełnia I aksjomatu przeliczalności. Wszystkie inne punkty mają przeliczalną bazę otoczeń, homeomorficznych z otoczeniami euklidesowymi.

Odwzorowania ilorazowe

Mając daną ciągłą surjekcję $f\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ chcielibyśmy czasem wiedzieć, czy topologia $\mathcal{T}_Y$ jest zdefiniowana przez odwzorowanie f, co może ułatwić konstruowanie odwzorowań ciągłych określonych na przestrzeni $(Y,\mathcal{T}_Y)$.

Definicja 5.3.2. *Odwzorowanie ciągłe $f\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ nazywa się* ilorazowe *jeśli jest surjekcją oraz jeśli przeciwobraz $f^{-1}(V)$ podzbioru $V \subset Y$ jest otwarty w $(X,\mathcal{T}_X)$, to $V \in \mathcal{T}_Y$.*

Ponieważ ciągłość przekształcenia oznacza, że przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte, więc warunek na to, aby surjekcja $f\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ była przekształceniem ilorazowym można wyrazić następująco: $V \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ lub w terminach zbiorów domkniętych: $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_Y} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_X}$.

Definicja 5.3.3. *Przekształcenie ciągłe $f\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ nazywa się* otwarte *(odp.* domknięte*) jeśli obraz dowolnego zbioru otwartego w $(X,\mathcal{T}_X)$ jest otwarty (odp. domknięty) w $(Y,\mathcal{T}_Y)$.*

Stwierdzenie 5.3.2. *Jeśli $f\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ jest otwartą lub domkniętą surjekcją, to f jest przekształceniem ilorazowym.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z równości $f(f^{-1}(A)) = A$, która zachodzi dla dowolnego podzbioru $A \subset Y$. □

Zgniatanie podprzestrzeni i doklejanie

Dwa szczególne przypadki konstrukcji przestrzeni ilorazowej są warte wyróżnienia, bo prowadzą do wielu interesujących przykładów.

Definicja 5.3.4. *Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{T}_X)$ to przez X/A oznaczamy przestrzeń ilorazową relacji równoważności takiej, że $x \sim y \iff x = y$ lub $x, y \in A$.*

Zauważmy, że przeciwobrazy punktów przy projekcji $q\colon X \to X/A$ są jednopunktowe poza jednym punktem $[a]$, dla którego $q^{-1}([a]) = A$. Obcięcie odwzorowania do dopełnienia zbioru A jest homeomorfizmem $q\colon X \setminus A \to X/A \setminus [a]$ gdzie $a \in A$.

Doklejanie przestrzeni wzdłuż przekształcenia uogólnia tę konstrukcję. Rozważmy odwzorowanie ciągłe $X \supset A \xrightarrow{f} Y$.

Definicja 5.3.5. *Przestrzeń powstałą z doklejenia przestrzeni X do przestrzeni Y wzdłuż przekształcenia f nazywamy przestrzeń ilorazową $X \cup_f Y := X \sqcup Y/\sim$ gdzie $a \sim f(a)$ dla $a \in A$, a pozostałe klasy są jednopunktowe.*

5.4 Produkt kartezjański

Niech dana będzie rodzina przestrzeni topologicznych $\{(Y_s,\mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$. Zaczniemy od przypomnienia definicji produktu (iloczynu) kartezjańskiego zbiorów.

Definicja 5.4.1. Produktem (lub iloczynem) kartezjańskim *rodziny zbiorów* $\{Y_s\}_{s\in S}$ *nazywamy zbiór:*

$$\prod_{s\in S} Y_s := \{\phi : S \to \bigcup_{s\in S} Y_s \,|\, \forall_{s\in S}\, \phi(s) \in Y_s\}$$

wraz z rodziną rzutowań na współrzędne $\mathfrak{p} := \{\prod_{s\in S} Y_s \xrightarrow{p_t} Y_t\}_{t\in S}$ *gdzie* $p_t(\{y_s\}_{s\in S}) := y_t$

Formalnie, punkty produktu kartezjańskiego są funkcjami określonymi na zbiorze indeksów S. Funkcję ϕ można zapisać jako rodzinę jej wartości $\{\phi(s)\}_{s\in S}$, tak więc punkty w iloczynie kartezjańskim to indeksowane rodziny $\{y_s\}_{s\in S}$ gdzie $Y_s \in Y_s$, co nawiązuje do dobrze znanego zapisu elementów iloczynu kartezjańskiego indeksowanego liczbami naturalnymi jako ciągów $(x_1, x_2, ..)$.

Definicja 5.4.2. Produktem (lub iloczynem) kartezjańskim *rodziny przestrzeni topologicznych nazywamy zbiór* $\{Y_s\}_{s\in S}$ *wyposażony w topologię* $\mathcal{T}^*(\mathfrak{p})$ *cofniętą przez rodzinę projekcji* $\mathfrak{p}$

$$\prod_{s\in S}(Y_s, \mathcal{T}_s) := (\prod_{s\in S} Y_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p}))$$

wraz z (ciągłymi) odwzorowaniami $(\prod_{s\in S} Y_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p})) \xrightarrow{p_t} (X, \mathcal{T}_t)$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę przekształceń wynika natychmiast następujące:

Stwierdzenie 5.4.1.

1) *Topologia iloczynu kartezjańskiego jest generowana przez zbiory postaci*

$$p_t^{-1}(U_t) = \prod_{s\in S} U_s \subset \prod_{s\in S} Y_s$$

gdzie $U_s = Y_s$ *dla* $s \neq t$ *oraz* $U_t \in \mathcal{T}_t$.

2) *Jeśli dla każdego* $s \in S$ *wybrana jest baza* $\mathcal{B}_s$ *topologii* $\mathcal{T}_s$*, to bazę iloczynu kartezjańskiego tworzą zbiory postaci*

$$\langle U_{s_1}, .., U_{s_n}\rangle := p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \ldots p_{s_n}^{-1}(U_{s_n}) = \prod_{s\in S} U_s \subset \prod_{s\in S} Y_s$$

gdzie $U_s = Y_s$ *dla* s *poza pewnym skończonym zbiorem indeksów* $\{s_1, .., s_n\}$ *oraz* $U_{s_i} \in \mathcal{B}_{s_i}$.

□

Wniosek 5.4.1. *Rzutowania* $(\prod_{s\in S} Y_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p})) \xrightarrow{p_t} (X, \mathcal{T}_t)$ *są odwzorowaniami otwartymi tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że obrazy zbiorów z pewnej bazy topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{p})$ są otwarte, co wynika ze Stw. 5.4.1 oraz faktu, że $p_t(\prod_{s\in S} U_s) = U_t$. □

Stwierdzenie 5.4.2 (Przekątna rodziny odwzorowań).

1) Odwzorowanie $f : (X, \mathcal{T}_X) \to \prod\limits_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne odwzorowania f, czyli zdefiniowane dla każdego $t \in S$ złożenia

$$(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} \prod_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_t} (Y_t, \mathcal{T}_t) \text{ są ciągłe.}$$

2) Dla rodziny odwzorowań ciągłych $\{(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f_s} (Y_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f} \prod\limits_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s)$ takie, że dla każdego $s \in S$, $p_s \circ f = f_s$.

Dowód. Dowód wynika natychmiast z definicji topologii iloczynu kartezjańskiego i Stw. 5.1.2. □

Wykorzystamy Stw. 5.4.2, aby wykazać iż przestrzenie $(Y_s, \mathcal{T}_s)$ są homeomorficzne z podprzestrzeniami produktu kartezjańskiego $\prod\limits_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s)$. Wybierając punkt dowolny punkt $x^0 \in \prod Y_s$ dla każdego $t \in S$ definiujemy odwzorowanie zbiorów $\iota_t \colon Y_t \to \prod\limits_{s\in S} Y_s$:

$$\iota_t(y_t)_s = \begin{cases} y_t \text{ jeśli } s = t \\ y_s^0 \text{ jeśli } s \neq t \end{cases}$$

Lemat 5.4.1. *Odwzorowanie $\iota_t \colon (Y_t, \mathcal{T}_t) \to \prod (Y_s, \mathcal{T}_s)$ jest zanurzeniem (5.2.1).*

Dowód. Żeby sprawdzić, że odwzorowanie jest ciągłe wystarczy sprawdzić, że złożenia z rzutowaniami $\prod (Y_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_s} (Y_s, \mathcal{T}_s)$ są ciągłe. Istotnie z definicji: $p_t \circ \iota_t = id_{Y_t}$ natomiast dla $s \neq t$, $p_s \circ \iota_t = Y_s^0$ jest odwzorowaniem stałym. Aby wykazać, że zadaje homeomorfizm $\iota_t \colon (Y_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{\simeq} (i_t(Y_t), \mathcal{T}|i_t(Y_t))$, gdzie $\mathcal{T}$ oznacza topologię produktową w $\prod\limits_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s)$ zauważmy, że odwzorowaniem odwrotnym do ι_t jest obcięcie rzutowania $p_t \colon \iota_t(Y_t) \to Y_t$. □

Podobnie jak poprzednio zbadamy zachowanie poznanych własności topologii ze względu na produkty kartezjańskie.

Stwierdzenie 5.4.3. *Produkt kartezjański $\prod\limits_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$ przestrzeń $(Y_s, \mathcal{T}_s)$ ma własność Hausdorffa.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli dwa punkty $x = \{Y_s\}_{s\in S}$, $y = \{y_s\}_{s\in S}$ są różne to istnieje $t \in S$ takie, że $Y_t \neq y_t$. Wybierzmy w przestrzeni Y_t otoczenia rozłączne $U_{Y_t} \ni Y_t$ oraz $U_{y_t} \ni y_t$. Zbiory $\langle U_{Y_t} \rangle \ni x$ oraz $\langle U_{y_t} \rangle \ni y$ są rozłącznymi otoczeniami x, y (oznaczenia p. 5.4.1).

$\Longleftarrow$ Odwrotnie, jeśli produkt kartezjański jest przestrzenią Hausdorffa, to dowolna podprzestrzeń jest przestrzenią Hausdorffa, a zatem dla każdego $s \in S$ przestrzeń $(Y_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią Hausdorffa. □

Stwierdzenie 5.4.4. *Produkt kartezjański $\prod\limits_{s\in S} (Y_s, \mathcal{T}_s)$ przestrzeni Hausdorffa spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$ przestrzeń $(Y_s, \mathcal{T}_s)$ spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) oraz wszystkie zbiory Y_s, poza przeliczalną liczbą są jednopunktowe.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(Y_s,\mathcal{T}_s)$ spełnia I aksjomat przeliczalności to dowolna podprzestrzeń, a zatem dowolna przestrzeń $(Y_s,\mathcal{T}_s)$ spełnia I aksjomat przeliczalności. Jeśli zbiór S jest nieprzeliczalny oraz $|Y_s|>2$, to z bazy w punkcie opisanej w Stw. 5.4.1 nie da się wybrać bazy przeliczalnej, a więc stosując Lemat 2.2.1 stwierdzamy, że nie posiada żadnej przeliczalnej bazy w punkcie.
$\Longleftarrow$ Niech $(X_i,\mathcal{T}_i)$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni spełniających II (odp. I) aksjomat przeliczalności. Wybierając bazy przeliczalne $\mathcal{B}_i\subset\mathcal{T}_i$ w przestrzeniach, wykonując konstrukcję opisaną w Stw. 5.4.1 otrzymujemy przeliczalną bazę produktu kartezjańskiego (odp. bazę w punkcie). □

Stwierdzenie 5.4.5. *Produkt kartezjański $\prod_{s\in S}(Y_s,\mathcal{T}_s)$ przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią ośrodkową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(Y_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa oraz co najwyżej $2^{\aleph_0}$ spośród przestrzeni $(Y_s,\mathcal{T}_s)$ ma więcej niż jeden punkt.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(Y_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa, to dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(Y_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa jako obraz ciągły przestrzeni ośrodkowej (p. Stw. 3.3.2).

Niech teraz $T:=\{t\in S\,|\,|Y_t|\geqslant 2\}$ i dla każdej przestrzeni Y_t niech $U_t,V_t\in\mathcal{T}_t$ będą rozłącznymi niepustymi podzbiorami otwartymi. Wykażemy, że $|T|\leqslant 2^{\aleph_0}$. Niech $G\subset\prod_{s\in S}Y_s$ będzie przeliczalnym podzbiorem gęstym i dla dowolnego $t\in T$ zdefiniujmy $G^t:=G\cap\langle U_t\rangle$. Wykażemy, iż $G^t\neq G^r$ jeśli $r\neq t$. Istotnie, dla dowolnych $r,t\in T$ wybierzmy element $d(r,t)\in G\cap\langle U_r,V_t\rangle=D\cap\langle U_r\rangle\cap\langle V_t\rangle$. Z definicji wynika, że $d(r,t)\in G^r$, ale $d(r,t)\notin G^t$. Wynika stąd, że przyporządkowanie $T\ni t\rightsquigarrow G^t\in\mathcal{P}(G)$ jest injekcją, a więc $|T|\leqslant|\mathcal{P}(G)|\leqslant 2^{\aleph_0}$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że mamy rodzinę przestrzeni ośrodkowych indeksowanych liczbami rzeczywistymi $\{(X_r,\mathcal{T}_r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ i niech $\forall_{r\in\mathbb{R}}\,\iota_r\colon(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)\to(X_r,\mathcal{T}_r)$ będzie przekształceniem przeliczalnej przestrzeni dyskretnej (liczb naturalnych) na przeliczalny podzbiór gęsty w X_r. Obraz produktu kartezjańskiego tych odwzorowań $\prod_{r\in\mathbb{R}}\iota_r\colon\prod_{r\in\mathbb{R}}\mathbb{N}\to\prod_{r\in\mathbb{R}}X_r$ jest podzbiorem gęstym. Wystarczy zatem wskazać przeliczalny podzbiór gęsty w przestrzeni $\prod_{r\in\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)$. Przypomnijmy, że elementy iloczynu kartezjańskiego to odwzorowania $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}$. Wybierając dowolną rodzinę rozłącznych odcinków domkniętych o końcach wymiernych $[p.,q.]:=\{[p_1,q_1],..,[p_k,q_k]\}$ i ciąg liczb naturalnych $n.:=\{n_1,...,n_k\}$ definiujemy funkcję:

$$\phi_{([p.,q.],n.)}(r)=\begin{cases}n_i\text{ jeśli } r\in[p_i,q_i]\\ 0\text{ jeśli } r\notin\bigcup[p_i,q_i]\end{cases}$$

Zbiór funkcji postaci $\phi_{([p.,q.],n.)}$ jest przeliczalny oraz jest gęsty w $\prod_{r\in\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)$. Wystarczy wykazać, że dowolny zbiór bazowy zawiera taką funkcję. Zbiory bazowe opisane w Stw. 5.4.1 są postaci $U(r_1,..,r_k;n_1,...,n_k):=\{\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}\,|\,\psi(r_i)=n_i\}$ gdzie $r_i\in\mathbb{R}$ są różnymi liczbami rzeczywistymi oraz $n_i\in\mathbb{N}$. Wybierając odcinki rozłączne o końcach wymiernych $[p_i,q_i]\ni r_i$ otrzymujemy funkcję $\phi_{([p.,q.],n.)}\in U(r_1,..,r_k;n_1,...,n_k)$. □

Twierdzenie 5.4.1. *Produkt kartezjański niepustych przestrzeni $\prod_{s\in S}(Y_s,\mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(Y_s,\mathcal{T}_s)$ jest me-*

tryzowalna i wszystkie one, poza przeliczalną liczbą są jednopunktowe.

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod(Y_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną, to dowolna jej podprzestrzeń, a zatem każda przestrzeń $(Y_s, \mathcal{T}_s)$ jest metryzowalna.

Jeśli nieprzeliczalnie wiele przestrzeni występujących w rodzinie $\{(Y_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ ma więcej niż jeden punkt, to na mocy Stw. 5.4.4 $\prod\limits_{s\in S}(Y_s, \mathcal{T}_s)$ nie ma bazy przeliczalnej w żadnym punkcie, a więc nie jest metryzowalna, bowiem dowolna przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności (p. Przykład 2.2.1).

$\Longleftarrow$ Niech $\{(Y_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. W zbiorze $\prod\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ definiujemy metrykę:

$$d'(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'_i(x_i, y_i)$$

gdzie $d'_i(x_i, y_i) := \min(d_i(x_i, y_i), 1)$. Zauważmy, że "obcięcie" metryk d_i jest konieczne, aby zapewnić zbieżność szeregu. Trzeba wykazać, że topologia zdefiniowana w $\prod\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ przez metrykę d' jest identyczna z topologią produktową. Zauważmy, że bazą topologii produktowej są zbiory postaci $\prod\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ takie, że $B_i = B_{d'_i}(x_i, r)$ dla $i \leqslant n_0$ oraz $B_i = X_i$ dla $i > n_0$ dla pewnych liczb $r > 0$ oraz $n_0 > 0$. Porównamy tę bazę z bazą zadaną przez kule w metryce d'. Dla dowolnego punktu $x = (x_1, x_2, \dots)$ wystarczy sprawdzić dwie inkluzje, z których wynika równość topologii zadanych przez te bazy:

$$\forall_{R>0}\exists_{r>0,\, k\geqslant 1}\ B_{d'_1}(x_1, r) \times \dots \times B_{d'_k}(x_k, r) \times \prod_{i=k+1}^{\infty} X_i \subset B_{d'}(x, R)$$

oraz

$$\forall_{r>0, k\geqslant 1}\exists_{R>0}\ B_{d'}(x, R) \subset B_{d'_1}(x_1, r) \times \dots \times B_{d'_k}(x_k, r) \times \prod_{i=k+1}^{\infty} X_i$$

W pierwszym przypadku wystarczy wybrać $r = \frac{R}{2}$ oraz k tak, aby $2^{-k} < \frac{R}{2}$.
W drugim przypadku wystarczy wybrać $R := 2^{-k} r$. □

Uwaga. W przypadku skończonego produktu $(Y_1, d_1) \times \dots \times (Y_k, d_k)$, można metrykę zdefiniować prościej:

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$$

bowiem nie musimy kłopotać się o zbieżność szeregu.

5.5 Suma prosta

Zdefiniujemy konstrukcję sumy prostej rodziny zbiorów, w pewnym sensie dwoistą do konstrukcji iloczynu kartezjańskiego.

Definicja 5.5.1. Sumą prostą *(zwaną też koproduktem lub sumą rozłączną) rodziny zbiorów* $\{X_s\}_{s\in S}$ *nazywamy zbiór zbiór* $\coprod_{s\in S} X_s := \bigcup_{s\in S} X_s \times \{s\}$ *wraz z rodziną przekształceń (włożeń):* $\mathfrak{j} := \{X_t \xrightarrow{j_t} \coprod_{s\in S} X_s\}_{t\in S}, \quad j_t(x_t) := (x_t, t)$.

Zauważmy, że dla $s \neq t, (X_s \times \{s\}) \cap (X_t \times \{t\}) = \emptyset$.

Definicja 5.5.2. *Sumą prostą (koproduktem) rodziny przestrzeni topologicznych* $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ *nazywamy przestrzeń*

$$\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) := (\coprod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}_*(\mathfrak{j}))$$

gdzie $\mathcal{T}_*(\mathfrak{j})$ *jest topologią popchniętą przez rodzinę odwzorowań* $\mathfrak{j}$*, wraz z (ciągłymi) odwzorowaniami* $j_t : (X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{j_t} \coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_*(\mathfrak{j}))$.

Utożsamiając za pomocą j_s zbiór X_s z $X_s \times \{s\}$ możemy powiedzieć, że podzbiór $U \subset \coprod_{s\in S} X_s$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $s \in S$, $U \cap X_s \in \mathcal{T}_s$. Zauważmy, że włożenia składników $j_t\colon (X_t, \mathcal{T}_t) \to \coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ są zanurzeniami homeomorficznymi (5.2.1).

Stwierdzenie 5.5.1 (Sumy proste odwzorowań)**.**

1) *Odwzorowanie* $f\colon \coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $t \in S$ *złożenie* $(X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{j_t} \coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{f} (X_t, \mathcal{T}_t)$ *jest odwzorowaniem ciągłym.*

2) *Dla dowolnej rodziny odwzorowań ciągłych* $\{(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{f_s} (Y, \mathcal{T}_Y)\}_{s\in S}$ *istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe* $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *takie, że dla każdego* $s \in S$ *zachodzi równość* $f \circ j_s = f_s$.

Podobnie jak w przypadku iloczynów kartezjańskich zbadamy zachowanie poznanych własności topologii ze względu na sumy proste. Jest to jednak dużo łatwiejsze.

Stwierdzenie 5.5.2.

1. *Suma prosta* $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*

2. *Suma prosta rodziny przestrzeni spełnia I aksjomat przeliczalności wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki spełniają I aksjomat przeliczalności.*

3. *Suma prosta rodziny przestrzeni spełnia II aksjomat przeliczalności wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki spełniają II aksjomat przeliczalności i co najwyżej przeliczalnie wiele jest niepustych.*

4. *Suma prosta rodziny przestrzeni jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są przestrzeniami ośrodkowymi i co najwyżej przeliczalnie wiele jest niepustych.*

5. *Suma prosta* $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią metryzowalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest metryzowalna.*

Dowód. Dowody punktów 1-4 jako bardzo łatwych pomijamy.
Ad 5. $\Longrightarrow$ Jeśli $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną to dowolna jej podprzestrzeń, zatem także $(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną.
$\Longleftarrow$ Jeśli dana jest rodzina przestrzeni metrycznych $\{(X_s, d_s)\}_{s\in S}$ to w zbiorze $\coprod_{s\in S} X_s$ określamy metrykę:

$$d((x,s),(x',t)) = \begin{cases} d'_s(x,x') & \text{jeśli} \quad s = t \\ 1 \quad \text{jeśli} & s \neq t \end{cases}$$

gdzie $d'_s(x,x') := \min(d_s(x,x'),1)$. W tej metryce kule o środku w punkcie $(x,s) \in \coprod_{s\in S} X_s$ i promieniu < 1 są identyczne jak kule w metryce d_s w zbiorze X_s. Stąd wynika, że metryka d' definiuje topologię $\mathcal{T}_*(\mathrm{j})$. □

Zauważmy, że tak jak w przypadku metryki w produkcie kartezjańskim musieliśmy "obciąć" metryki d_i (nawet w przypadku sumy dwóch przestrzeni!), tym razem po to, aby spełniona była nierówność trójkąta.

5.6 Zadania i przykłady

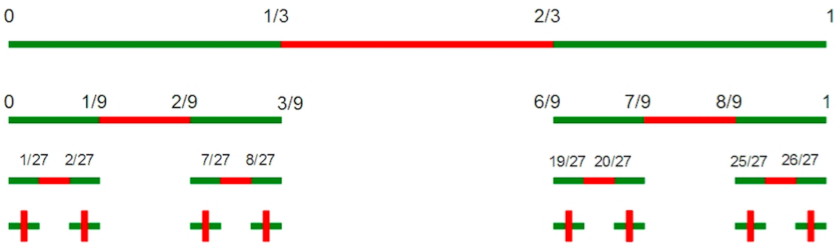
Zad. 31 (Domkniętość przekątnej i wykresu)**.** BCPP Zad. 1.40, 1.41

Zad. 32 (Rzutowania w iloczynie kartezjańskim)**.** Wykaż, że rzutowania na czynniki iloczynu kartezjańskiego $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_s} (X_s, \mathcal{T}_s)$ są odwzorowaniami otwartymi (tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte), a nie są zawsze odwzorowaniami domkniętymi (tzn. obrazy zbiorów domkniętych nie muszą być domknięte.) (p. BCPP Zad. 1.37)

Zad. 33 (Domknięcie a operacje na przestrzeniach)**.** BCPP Zad. 1.38

Zad. 34 (Wnętrze w produkcie)**.** Wykazać, że dla dowolnych przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i podzbiorów $A \subset X$, $B \subset Y$ zachodzi równość $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$. Czy analogiczna równość zachodzi dla produktów nieskończenie wielu przestrzeni?

Zad. 35 (Zbiór Cantora)**.** Pokazać, że odwzorowanie $\prod_1^{+\infty}(\{0,2\}, \mathcal{T}_\delta) \xrightarrow{f} ([0,1], \mathcal{T}_e)$ dane wzorem $f(\{n_i\}) := \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n_i}{3^i}$ jest homeomorfizmem na obraz, którym jest *zbiór Cantora*. p. M.Krych AM1. Przykład 6.5.



Konstrukcja zbioru Cantora – z odcinka [0,1] usuwamy odcinki otwarte zaznaczone na czerwono.

Zad. 36 (Suma prosta odcinków). Wykazać, że następujące przestrzenie są homeomorficzne:

a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza (zawsze) liczby całkowite

b) $(0,1) \setminus \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

c) $(0,1) \times \mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{N}$ - liczby naturalne z topologią dyskretną

d) $\coprod_{n=1}^{\infty} X_i$ gdzie $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, X_i = (0,1)$

Zad. 37 (Odwzorowania ilorazowe). Podać przykład odwzorowania ilorazowego, które nie jest ani otwarte ani domknięte.

Zad. 38. Wykazać, że jeśli A jest podzbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T})$ (odpowiednio otwartym), to rzutowanie $q\colon (X,\mathcal{T}) \to (X/\{A\}, \mathcal{T}_*(q))$ jest odwzorowaniem domkniętym (odpowiednio otwartym). Jeśli $(X,\mathcal{T})$ jest przestrzenią metryzowalną, to przestrzeń $(X/\{A\}, \mathcal{T}_*(q))$ jest Hausdorffa wtedy i tylko wtedy gdy $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym.

Zad. 39 (Bukiet przestrzeni). Niech $\{X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych i w każdej z nich został wyróżniony punkt $x_s^0 \in X_s$. Bukietem tej rodziny nazywamy przestrzeń ilorazową $(\coprod_{s\in S} X_s)/\sim$ gdzie $(x_s, s) \sim (x_{s'}, s')$ wtedy i tylko wtedy gdy $(x_s, s) = (x_{s'}, s')$ lub $x_s = x_s^0$ i $x_{s'} = x_{s'}^0$. Bukiet przestrzeni oznaczamy $\bigvee_{s\in S} X_s$. Wykazać, że dla dwóch przestrzeni, czyli $S = 1, 2$, istnieje homeomorfizm

$$X_1 \vee X_2 \simeq (X_1 \times \{x_2^0\}) \cup (\{x_1^0\} \times X_2)$$

gdzie ostatni zbiór rozpatrujemy z topologią podprzestrzeni $X_1 \times \{x_2^0\} \cup \{x_1^0\} \times X_2 \subset X_1 \times X_2$. Wykonać rysunek w przypadku, gdy przestrzenie X_1, X_2 są prostymi, odcinkami lub okręgami.

Zad. 40. Niech w rodzinie $\{X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ każda przestrzeń $(X_s, \mathcal{T}_s)$ będzie prostą euklidesową $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a jej punktem wyróżnionym będzie 0. Wykazać, że bukiet $\bigvee_{s\in S} \mathbb{R}$ jest homeomorficzny z podzbiorem płaszczyzny z topologią kolejową wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór S jest skończony.

Zad. 41 (Ilorazy odcinka)**.** BCPP Zad. 5.2. Narysuj podzbiory płaszczyzny homeomorficzne z tymi przestrzeniami.

Zad. 42. Jeśli $X_i \supset A_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ dla $i = 1, 2$ są dwoma odwzorowaniami ciągłymi takimi, ze istnieją homeomorfizmy $h\colon X_1 \to X_2$ oraz $g\colon Y_1 \to Y_2$ takie, że przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "h"', "\simeq"] & A_1 \arrow[l, "\supset"'] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"', "\simeq"] & Y_1 \arrow[d, "g"', "\simeq"] \\
X_2 & A_2 \arrow[l, "\supset"'] \arrow[r, "f_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

to g rozszerza się do homeomorfizmu $\bar{g}\colon X_1 \cup_{f_1} Y_1 \to X_2 \cup_{f_2} Y_2$ tzn. przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_1"'] & Y_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_1 \cup_{f_1} Y_1 \arrow[r, "\bar{g}"] & X_2 \cup_{f_2} Y_2
\end{tikzcd}$$

Zad. 43 (Nawijanie prostej na okrąg)**.** Odwzorowanie $p : \mathbb{R} \to S^1$, gdzie $S^1 := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid ||v|| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |$ dane wzorem $p(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2\pi t}$ jest odwzorowaniem otwartym (tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte) oraz definiuje homeomorfizm odcinka z utożsamionymi końcami z okręgiem: $[0, 1]/\{0 \sim 1\} \xrightarrow{\bar{p}} S^1$. Zauważyć, że $p : \mathbb{R} \to S^1$ jest homomorfizmem jeśli grupy addytywnej $\mathbb{R}$ w grupę multyplikatywną liczb zespolonych o module 1 i definiuje izomorfizm grup $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ będący jednocześnie homeomorfizmem przestrzeni topologicznych.

Zad. 44 (Walec)**.** Wykaż, że następujące przestrzenie są homeomorficzne (p.BCPP Zad. 1.39 A)

a) $W_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ (powierzchnia powstała przez obrót prostej $x_1 = 1, x_2 = 0$ wokół osi x_3)

b) $W_2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

c) $W_3 := S^1 \times \mathbb{R}$

d) $W_4 := [-1, 1] \times \mathbb{R}/\sim$ gdzie $(x, t) \sim (x', t') \iff |x| = |x'| = 1\, t = t'$ lub $(x, t) = (x', t')$

e) $W_5 := \mathrm{Fr}(A),\ A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 \leqslant 1,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$

Uwaga: Powyżej zdefiniowano "walec bez brzegu". Zastępując w punktach a), c), d) prostą $\mathbb{R}$ odcinkiem $[-1, 1]$ otrzymujemy "walec z brzegiem (podstawami)". Nazwa "walec" stosowana jest w obu przypadkach.

Zad. 45 (Wstęga Möbiusa)**.** (Wizualizacja p. Neil Strickland web page) Wykaż, że następujące przestrzenie są homeomorficzne:

a) M_1 – powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ powstała przez obrót odcinka $x_1 = 1, x_2 = 0, -1 < x_3 < 1$ wokół osi x_3 z jednoczesnym obrotem tego odcinka o kąt π

b) M_2 – przestrzeń ilorazowa walca $[-1,1] \times (-1,1)/\sim$, gdzie $(-1,t) \sim (1,-t)$,, a pozostałe klasy abstrakcji są jednopunktowe.

c) M_3 – przestrzeń ilorazowa walca $S^1 \times (-1,1)/\sim$, gdzie $(z,t) \sim (-z,-t)$, a pozostałe klasy abstrakcji są jednopunktowe.

Uwaga: Powyżej zdefiniowano ”wstęgę Möbiusa bez brzegu”. Zastępując w a),b),c) odcinek otwarty $(-1,1)$ odcinkiem domkniętym $[-1,1]$ otrzymujemy ”wstęgę Möbiusa z brzegiem”. Nazwa ”wstęgę Möbiusa” jest używana zarówno do wstęgi z brzegiem, jak i bez brzegu.

Zad. 46 (Torus)**.** (p.BCPP Zad. 1.39 B) (Wizualizacja p. Neil Strickland web page) Wykaż, że następujące przestrzenie są homeomorficzne:

a) T_1 – powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ otrzymaną przez obrót wokół osi x_3 okręgu położonego w płaszczyźnie $x_2 = 0$, który nie przecina osi x_3.

b) $T_2 := S^1 \times S^1$

c) T_3 – przestrzeń ilorazowa walca $[-1,1] \times [-1,1]/\sim$, gdzie $(-1,t) \sim (1,t)$, $(t,1) \sim (t,-1)$, a pozostałe klasy abstrakcji są jednopunktowe.

Skonstruować odwzorowanie $f\colon \partial I^2 \to S^1 \vee S^1$ z brzegu kwadratu euklidesowego do bukietu dwóch okręgów takie, że przestrzeń $I^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$ jest homeomorficzna z torusem T^2.

Definicja 5.6.1. *Grupą topologiczną nazywamy zbiór G wyposażony w topologię i strukturę grupową tak, że działanie grupowe $G \times G \to G$ oraz branie elementu odwrotnego $-^{-1}\colon G \to G$ są odwzorowaniami ciągłymi. Homomorfizmem grup topologicznych nazywamy homomorfizm grup, który jest ciągły.*

Zad. 47. Przestrzeń grupy topologicznej jest jednorodna tzn. dla dowolnych dwóch punktów $g_1, g_2 \in G$ istnieje homeomorfizm $f\colon G_1 \to G_2$ taki, że $f(g_1) = g_2$.

Zad. 48. Jeśli $H \subset G$ jest podgrupą normalną, to grupa ilorazowa G/H z topologią ilorazową jest grupą topologiczną. Istnieje izomorfizm grup topologicznych (tzn. izomorfizm grup będący homeomorfizmem) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$, gdzie $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ jest podgrupą liczb całkowitych a $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ jest grupą multyplikatywną liczb zespolonych o module 1.

Zad. 49. Jeśli $\{G_s\}_{s\in S}$ jest rodziną grup topologicznych, to ich produkt $\prod_{s\in S} G_s$ wyposażony w topologię produktu kartezjańskiego też jest grupą topologiczną. Zauważyć, żę torus posiada strukturę grupy topologicznej.

Rozdział 6

Spójność i łukowa spójność

6.1 Spójność

Definicja 6.1.1 (Spójność). *Przestrzeń* $(X, \mathcal{T})$ *jest* spójna *jeśli nie istnieją niepuste zbiory* $U, V \in \mathcal{T}$ *takie, że* $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Podzbiór $A \subset X$ *nazywa się* spójny *jeśli podprzestrzeń* $(A, \mathcal{T}|A)$ *jest spójna.*

Przykład 6.1.1. Przestrzeń dyskretna zawierająca więcej niż jeden element jest niespójna. Przestrzeń antydyskretna jest zawsze spójna.

Stwierdzenie 6.1.1. *Przestrzeń jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z sumą prostą dwóch niepustych przestrzeni.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli przestrzeń jest niespójna, to $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ gdzie $U, V \in \mathcal{T}$. Oczywiste odwzorowanie $U \coprod V \to X$ jest homeomorfizmem, bowiem jest ciągłą bijekcją i przeprowadza zbiory otwarte na otwarte.

$\Longleftarrow$ Jeśli $h\colon (X_1 \coprod X_2, \mathcal{T}_*) \to (X, \mathcal{T})$ jest homeomorfizmem, to $X = h(X_1) \cup h(X_2)$ jest rozkładem X na sumę dwóch niepustych rozłącznych podzbiorów otwartych, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie jest spójna. □

Stwierdzenie 6.1.2 (Kryteria spójności). *Następujące warunki dla przestrzeni* $(X, \mathcal{T})$*są równoważne:*

1) $(X, \mathcal{T})$ *jest spójna.*

2) Jedynymi zbiorami otwartymi i domkniętymi są $\emptyset, X$.

3) Każde odwzorowanie ciągłe $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_\delta)$ *jest stałe*

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2) Jeśli $U \subset X$ jest niepustym otwarto - domkniętym podzbiorem różnym od X, to $X = U \cup (X \setminus U)$ jest rozkładem na sumę rozłącznych, niepustych podzbiorów otwartych, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie jest spójna.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Przestrzeń nie jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niepuste zbiory $U, V \in \mathcal{T}$ takie, że $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ a zatem U, V są zbiorami otwartymi i domkniętymi różnymi od $\emptyset, X$.

(2) $\implies$ (3) Jeśli $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_\delta)$ jest ciągłe, to przeciwobrazy $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ są rozłącznymi zbiorami otwarto – domkniętymi, a zatem jeden z nich musi być zbiorem X a drugi zbiorem pustym, a to oznacza, że f jest stałe.

(2) $\impliedby$ (3) Jeśli $U \subset X$ jest podzbiorem otwarto-domkniętym różnym od $\emptyset, X$ to definujemy funkcję ciągłą $f(x) := \begin{cases} 1 \,\mathrm{dla}\, x \in U \\ 0 \,\mathrm{dla}\, x \notin U \end{cases}$, która jest ciągła, ale nie jest stała. □

Wniosek 6.1.1 (Podzbiory spójne)**.**

1. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją określoną na spójnej przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ to przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest spójna.*

2. *Jeśli $C \subset X$ jest zbiorem spójnym to dowolny podzbiór A taki, że $C \subset A \subset \mathrm{cl}(C)$ jest też spójny.*

3. *Jeśli $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ jest suma spójnych podzbiorów C_i oraz istnieje zbiór C_{i_0} taki, że $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ dla każdego $i \in I$, , to X jest przestrzenią spójną.*

Dowód.

Ad 1. Jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nie jest spójna, to istnieje rozkład się na sumę niepustych, otwartych rozłącznych podzbiorów $Y = V_1 \cup V_2$. Wtedy $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ jest rozkładem przestrzeni X na sumę niepustych, otwartych rozłącznych podzbiorów, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie byłaby spójna.

Ad 2. Niech $f \colon A \to \{0,1\}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Skoro C jest zbiorem spójnym, to $f|C$ jest stała. Ponieważ $\mathrm{cl}_A(C) = \mathrm{cl}_X(C) \cap A = A$, więc funkcja f jest stała na zbiorze A.

Ad 3. Niech $f \colon X \to \{0,1\}$ będzie funkcją ciągłą. Z założenia $f \colon C_i \to \{0,1\}$ jest stała, wystarczy więc zauważyć, że jej wartość nie zależy od i. Wynika to stąd, że $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ dla każdego $i \in I$ a więc na każdym zbiorze C_i funkcja f_i przybiera tę sama wartość co na C_{i_0}. □

Przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi twierdzenie odwrotne do 6.1.1 pkt.1:

Stwierdzenie 6.1.3. *Niech $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ilorazowym*[1] *na przestrzeń spójną $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli przeciwobraz $f^{-1}(y)$ dowolnego punktu $y \in Y$ jest zbiorem spójnym, to $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią spójną.*

Dowód. Niech $\phi : (X, \mathcal{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_\delta)$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Dla dowolnego $y \in Y$ obcięcie $\phi \colon p^{-1}(y) \to \{0,1\}$ jest stałe, a więc odwzorowanie $\bar{\phi} \colon Y \to \{0,1\}$, $\bar{\phi}(y) := \phi(x)$ gdzie $p(x) = y$ jest dobrze zdefiniowane. Jest także ciągłe, bo złożenie $p \circ \bar{\phi} = \phi$ jest ciągłe, a p jest ilorazowe. Ponieważ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójna, więc odwzorowanie $\bar{\phi}$ jest stałe, a zatem ϕ jest stałe, co dowodzi spójności $(X, \mathcal{T}_X)$. □

Stwierdzenie 6.1.4. *Niech dane będzie pokrycie przestrzeni spójnej $(X, \mathcal{T})$ zbiorami otwartymi $\mathcal{U} := \{U_t\}_{t \in T}$ Każde dwa punkty $a, b \in X$ dają się połączyć skończonym łańcuchem złożonym ze zbiorów z rodziny $\mathcal{U}$, tzn. istnieją wskaźniki $t_0, \dots, t_n \in T$ takie, że $a \in U_{t_0}$, $b \in U_{t_n}$ oraz $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ dla $i = 0, \dots n-1$.*

[1] Przypomnijmy, że odwzorowanie nazywa się ilorazowe jeśli jest surjekcją oraz $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_*(p)$

Dowód. Jeśli dla punktów a i b spełniona jest teza twierdzenia, to będziemy mówili w skrócie, że dają się połączyć łańcuchem w pokryciu $\mathcal{U}$. Ustalmy punkt $a \in X$ i rozpatrzmy zbiór

$$C(a) := \{x \in X \mid \exists \text{ łańcuch w pokryciu } \mathcal{U} \text{ łączący } a \text{ z } x\}.$$

Zauważmy, że ten zbiór jest otwarty: jeśli $x \in C(a)$ to istnieje łańcuch $U_{t_0}, \ldots, U_{t_n}$ łączący punkt a z punktem x. Ten sam łańcuch łączy dowolny punkt ze zbioru U_{t_n} z a, a więc $U_{t_n} \subset C(a)$.

Zbiór $C(a)$ jest także domknięty, bo jego dopełnienie jest zbiorem otwartym: jeśli $x \notin C(a)$ oraz $x \in U_t$, to $U_t \subset X \setminus C(a)$. Ponieważ $a \in C(a)$ więc ze spójności przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ wnioskujemy, ze $C(a) = X$. □

Wniosek 6.1.2. *Jeśli (X; d) jest przestrzenią metryczną spójną, to dla dowolnych $a, b \in X$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że $x_1 = a$, $x_n = b$ oraz $d(x_i; x_{i+1}) < \epsilon$ dla $i = 1, \ldots, n-1$.*

Dowód. Wystarczy zastosować Stw. 6.1.4 do pokrycia przestrzeni X kulami o promieniu $\epsilon/2$ i z kul wystepujących w łańcuchu wybrać po jednym punkcie. □

Spójność a operacje na przestrzeniach

Zauważmy jak zachowuje się spójność przy poznanych operacjach na przestrzeniach topologicznych. Następujące własności są oczywiste:

1) Podprzestrzeń przestrzeni spójnej może nie być spójna.

2) Przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej jest spójna na mocy Stw. 6.1.1 pkt. 1.

3) Suma prosta niepustych przestrzeni topologicznych nie jest spójna.

Trudniejsze do wykazania jest następujące:

Twierdzenie 6.1.1. *Iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni topologicznych jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie są spójne.*

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią spójną, to wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ też są przestrzeniami spójnymi ponieważ rzutowania na czynniki $p_t \colon \prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s) \to (X_t, \mathcal{T}_t)$ są ciągłymi surjekcjami.

$\Longleftarrow$ Zaczniemy od wykazania tezy dla skończonych rodzin przestrzeni. Dzięki indukcji wystarczy pokazać, że iloczyn dwóch spójnych przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójny. W tym celu rozłożymy $X \times Y$ na sumę spójnych podprzestrzeni spełniających założenia Stw. 6.1.1 pkt. 3. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ i przedstawmy $X \times Y = (\{x_0\} \times Y) \cup \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$ Poziomice (czyli zbiory postaci $\{x\} \times Y$ oraz $X \times \{y\}$) są zbiorami spójnymi p. Lemat 5.4.1 oraz dla każdego $y \in Y$ zachodzi $(\{x_0\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) = \{(x_0, y)\} \neq \emptyset$. Z Stw. 6.1.1 pkt. 3 wynika, że $X \times Y$ jest przestrzenią spójną.

Niech teraz $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ będzie produktem dowolnej rodziny przestrzeni spójnych. Wybierzmy punkt $x^0 := \{x_s^0\}_{s\in S}$ i rozpatrzmy zbiór

$$D := \{\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s \,|\, x_s = x_s^0 \text{ poza skończenie wieloma } s \in S\}$$

Zbiór D jest sumą podzbiorów homeomorficznych ze skończonymi iloczynami: jeśli $F \subset S$ jest zbiorem skończonym, to podzbiór:

$$D_F := \{\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s \,|\, x_s = x_s^0 \; s \in S \setminus F\}$$

jest homeomorficzny z $\prod_{s\in F}(X_s,\mathcal{T}_s)$ a więc spójny oraz $D = \bigcup_{F\subset S} D_F$. W przecięciu zbiorów D_F leży punkt x^0, więc D jest zbiorem spójnym.

Pozostaje zauważyć, że D jest gęstym podzbiorem $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$. Dowolny zbiór z bazy topologii produktowej $\langle U_{s_1},\dots U_{s_n}\rangle$ przecina zbiór D_F gdzie $F = \{s_1,\dots s_n\}$:

$$\langle U_{s_1},\dots U_{s_n}\rangle \cap D_F = \prod_{s\in S} A_s \quad \text{gdzie } A_s = \begin{cases} U_s \text{ dla } s \in F \\ x_s^0 \text{ dla } s \notin F \end{cases}.$$

Dowód kończy przywołanie Stw. 6.1.1 pkt. 2, bowiem $\mathrm{cl}(D) = \prod_{s\in S} X_s$. □

6.2 Składowe spójne

Definicja 6.2.1. Składową spójną *przestrzeni* $(X,\mathcal{T})$ *nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór spójny w* X. Składową punktu $x \in X$ *nazywamy składową spójną zawierającą punkt* x*, a więc maksymalny zbiór spójny zawierający punkt* x.

Stwierdzenie 6.2.1. *Niech* $(X,\mathcal{T})$ *będzie dowolną przestrzenią topologiczną.*

1. *Jeśli* $C_1, C_2 \subset X$ *są składowymi spójnymi, to* $C_1 = C_2$ *lub* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ *oraz* $X = \bigcup C$.

2. *Składowe spójne są zbiorami domkniętymi.*

Dowód.

Ad 1. Jeśli $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ to $C_1 \cup C_2$ jest zbiorem spójnym, zawierającym C_1 oraz C_2, a więc $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$. Każdy punkt $x \in X$ należy do pewnej składowej spójnej, zwanej składową tego punktu i oznaczanej C_x.

Ad 2. Jeśli $C \subset X$ jest składową, to ponieważ $C \subset \mathrm{cl}(C)$ i na mocy Stw. 6.1.1 pkt. 2 domknięcie $\mathrm{cl}(C)$ jest zbiorem spójnym, musi zachodzić równość $C = \mathrm{cl}(C)$. □

Uwaga 6.2.1. Składowe spójne nie muszą być podzbiorami otwartymi. Np. składowymi zbioru $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ są zbiory jednopunktowe, a $\{0\}$ nie jest zbiorem otwartym. Natomiast składowe spójne dowolnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}^n$ są otwarte, bowiem punkty w $\mathbb{R}^n$ posiadają dowolnie małe otoczenia spójne p. Stw. 6.5.3.

Stwierdzenie 6.2.2. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest odwzorowaniem ciągłym, a* $C \subset X$ *jest składową spójną, to zbiór* $f(C)$ *jest zawarty w pewnej składowej przestrzeni* $(Y, \mathcal{T}_Y)$. *Jeśli* f *jest homeomorfizmem, to dla dowolnej składowej* $C \subset X$, $f|C : C \to f(C)$ *jest homeomorfizmem na składową* $(Y, \mathcal{T}_Y)$. □

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z Stw. 6.1.1, bowiem obraz składowej musi być zbiorami spójnymi, a więc są zawarty w pewnym maksymalnym zbiorze spójnym. □

Zbiór składowych spójnych

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Rozbicie zbioru X na sumę składowych, które są zbiorami rozłącznymi, wyznacza w X relację równoważności. Zbiór jej klas abstrakcji (czyli zbiór składowych) oznaczmy $\pi_0'(X)$.

Uwaga 6.2.2. W zbiorze $\pi_0'(X)$ można wprowadzić topologię ilorazową z przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ (p. BCPP Zad. 5.9 – 5.11), ale w zastosowaniach do rozstrzygania pytania, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne rozpatruje się jedynie zbiór $\pi_0'(X)$, ignorując topologię.

Bardzo ważna własność przypisania przestrzeni X zbioru $\pi_0'(X)$ polega na tym, że przekształceniom ciągłym między przestrzeniami można w "naturalny" sposób przypisać odwzorowania zbiorów. Dokładniej:

Stwierdzenie 6.2.3. *Dowolne odwzorowanie ciągłe* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *definiuje odwzorowanie zbiorów:* $f_\#\colon \pi_0'(X) \to \pi_0'(Y)$, $f_\#(C) :=$ *składowa zawierająca* $f(C)$, *przy czym* $(Id_X)_\# = Id$ *oraz jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z.\mathcal{T}_Z)$ *to zachodzi równość* $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

Dowód. Odwzorowanie $f_\#(C) :=$ składowa zawierająca $f(C)$ jest dobrze zdefiniowane, bowiem $f(C)$ jest zbiorem spójnym, a więc istnieje dokładnie jedna składowa przestrzeni X, która go zawiera.

Sprawdzimy, że $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. Z definicji

$$(g \circ f)_\#(C) = g(\text{składowa zawierająca}\, f(C)),$$

a więc jest maksymalnym zbiorem spójnym $E_1 \supset g(D) \supset g(f(C))$, gdzie $D \supset f(C)$ jest składową przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Z drugiej strony

$$(gf)_\#(C) = \{\text{składowa zawierająca}\, g(f(C))\} := E_2,$$

przy czym $E_1 \cap E_2 \supset g(f(C))$ Suma zbiorów spójnych $E_1 \cup E_2$ jest więc zbiorem spójnym, a z maksymalności E_1 i E_2 wynika, że $E_1 = E_2$. □

Wniosek 6.2.1. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem, to* $\pi_0'(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_0'(Y)$ *jest bijekcją .*

Dowód. Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}_X)$ będzie odwzorowaniem odwrotnym, czyli $g \circ f = Id_X$ oraz $f \circ g = Id_Y$. Z Stw. 6.2.3 otrzymujemy, że $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = Id_X$ oraz $f_\# \circ g_\# = (f \circ g)_\# = Id_Y$, a więc $f_\#$ i $g_\#$ są bijekcjami. □

Wniosek 6.2.2. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem, to dla dowolnego podzbioru* $A \subset X$*, obcięcie* $h\colon X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ *też jest homeomorfizmem, a więc definiuje bijekcję zbiorów* $\pi_0'(X \setminus A) \xrightarrow{h_\#} \pi_0'(Y \setminus h(A))$. □

Uwaga 6.2.3. Skorzystaliśmy z tego argumentu w szczególnym przypadku w dowodzie Tw. 6.3.1, wykazując że różne przedziały standardowe na prostej nie są homeomorficzne.

6.3 Spójne podzbiory prostej euklidesowej

Definicja 6.3.1. *Podzbiór* $A \subset \mathbb{R}$ *nazywa się przedziałem jeśli stąd, że* $a \leqslant c \leqslant b$ *i* $a, b \in A$ *wynika* $c \in A$*, czyli dowolna liczba leżąca między dwoma liczbami należącymi do* A *też należy do* A.

Twierdzenie 6.3.1 (Klasyfikacja spójnych podzbiorów prostej)**.**

1) *Dowolny przedział na prostej euklidesowej jest homeomorficzny z jednym ze standardowych przedziałów: zbiorem jednopunktowym* $\{0\}$ *lub odcinkiem* $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, *przy czym żadne dwa z nich nie są homeomorficzne.*

2) *Podzbiór prostej euklidesowej* $(A, \mathcal{T}_e|A) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ *jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem.*

3) *Dowolny podzbiór otwarty prostej euklidesowej jest sumą rozłącznych przedziałów.*

Dowód. Dowolny niepusty przedział jest zbiorem jednopunktowym lub zbiorem postaci (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ gdzie $a < b$, a otwarty koniec odcinka może być $\pm\infty$ i łatwo znaleźć wśród funkcji znanych z Analizy Matematycznej I homeomorfizmy z odpowiednimi przedziałami standardowymi. Dowód, że żadne dwa różne przedziały standardowe nie są homeomorficzne wykażemy po udowodnieniu punktu 2).

Wykażemy, że przedziały standardowe są spójne. Ponieważ każdy przedział jest suma wstępującej rodziny odcinków domkniętych, wystarczy wykazać spójność odcinka $[0,1]$. Niech $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ jest funkcją ciągłą i załóżmy, że $f(0) = 0$. Jeśli funkcja nie jest stała, zdefiniujmy $t_1 := \inf\{t \in [0,1] \,|\, f(t) = 1\} > 0$. W punkcie t_1 funkcja nie byłaby ciągła, bowiem $f(t_1) = 1$, natomiast $f(t) = 0$ dla $t < t_1$.

Jeśli podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest przedziałem, to istnieje liczba $r \notin A$ taka, że

$$\{a \in A \,|\, a < r\} \cup \{a \in A \,|\, a > r\} = A$$

jest rozkładem zbioru A na sumę dwóch niepustych, rozłącznych podzbiorów otwartych.

Pokażemy teraz, że odcinki $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, nie są parami homeomorficzne. Załóżmy, że istniałby homeomorfizm $h\colon [0,1) \to (0,1)$. Wtedy po usunięciu początku odcinka $[0,1)$ mielibyśmy homeomorfizm $h\colon (0,1) \to (0,1) \setminus h(0)$. Jest to jednak niemożliwe, bo odcinek $(0,1)$ jest spójny, a po usunięciu dowolnego punktu staje się niespójny. Podobnie rozumujemy w przypadku pozostałych par odcinków, korzystając z tego, że końce odcinka mogą być scharakteryzowane jako jedyne punkty, których usunięcie nie narusza spójności. □

Wniosek 6.3.1 (Uogólniona własność Darboux)**.** *Jeśli* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ *jest odwzorowaniem ciągłym i przestrzeń* $(X, \mathcal{T})$ *jest spójna, to* $f(X) \subset \mathbb{R}$ *jest przedziałem.* □

6.4 Łukowa spójność

Często łatwiejsze niż bezpośrednie wykazanie spójności jest sprawdzenie silniejszej, lecz bardziej geometrycznej własności przestrzeni, zwanej łukową spójnością.

Definicja 6.4.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna jeśli dla dowolnych punktów $x_0, x_1 \in X$ istnieje odwzorowanie ciągłe (zwane drogą) $\omega : [0,1] \to X$ takie, że $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$.*[2]

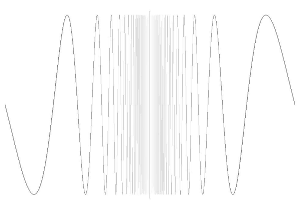
Stwierdzenie 6.4.1. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna to jest spójna.*

Dowód. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ oraz dla każdego innego punktu $x \in X$ drogę $\omega_x : [0,1] \to X$ taką, że $\omega_x(0) = x_0$, $\omega_x(1) = x$. Wtedy $X = \bigcup_{x \in X} \omega_x([0,1])$, czyli jest sumą zbiorów spójnych o niepustym przecięciu: $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \omega_x([0,1])$, a więc na podstawie Stw. 6.1.1 X jest przestrzenią spójną. □

Przykład 6.4.1. Dowolny wypukły podzbiór $W \subset \mathbb{R}^n$ przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny. Dla punktów $p_0, p_1 \in W$ definiujemy drogę je łączącą w zbiorze W, $\omega(t) := (1-t)p_0 + tp_1$. W szczególności kule euklidesowe są łukowo spójne, a więc także spójne. Ogólniej, podzbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym jeśli istnieje punkt $p_0 \in G$ taki, że dla dowolnego $p \in G$ odcinek $[p_0, p] \subset G$. Dowolny zbiór gwiaździsty jest łukowo spójny. Dowolny punkt $x \in G$ można połączyć z x_0 drogą afiniczną $\omega(t) := (1-t)x + tx_0$.

Przykład 6.4.2. Podzbiór płaszczyzny euklidesowej

$$S = \{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi},\ x \neq 0\} \cup \{\, (0,y) : |y| \leqslant 1 \,\}$$



jest spójny, lecz nie jest łukowo spójny. Zauważmy, że

$$S = \mathrm{cl}\{\, (x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\tfrac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2\pi},\ x \neq 0\},$$

a więc jest zbiorem spójnym. Pokażemy, że każda droga rozpoczynająca się w odcinku $J := \{\, (0,y) : |y| \leqslant 1 \,\}$ jest w nim w całosci zawarta. Niech $\omega : [0,1] \to S$ będzie drogą i załóżmy, że $\omega(0) \in J$. Niech $t_0 := \sup \omega^{-1}(J)$. Ponieważ zbiór $,\omega^{-1}(J)$ jest domknięty, a więc $\omega(t_0) \in J$. Zauważmy, że dla dowolnej kuli B o środku na odcinku J oraz promieniu < 1 zbiór $B \cap J$ jest jej składową spójną. Załóżmy, że $t_0 < 1$. Rozpatrzmy kulę $B :=$

[2]W dawnych podręcznikach w definicji łukowej spójności wymaga się, aby odwzorowanie ω było homeomorfizmem na obraz. W języku angielskim taki warunek nazywa się *arcwise-connected*, podczas gdy słabszy *path-conected*. Przestrzeń, która jest *arcwise connected* jest oczywiście*path-conected*, ale nie na odwrót.

$B(\omega(t_0), 1)$ - ponieważ ω jest odwzorowaniem ciągłym istnieje $\delta > 0$ taka, że $\omega([t_0, t_0+\delta]) \subset B(\omega(t_0), 1)$. Ponieważ odcinek $[t_0, t_0 + \delta]$ jest spójny, to jego obraz musi być zawarty w tej samej składowej spójnej B co punkt $\omega(t_0)$, a więc $B \cap J$. Stąd $\omega(t_0 + \delta) \in J$, a więc doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że $t_0 < 1$. Stąd wynika, że punktu należącego do odcinka J nie można połączyć drogą z punktem z $S \setminus J$.

Stwierdzenie 6.4.2. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Relacja R w zbiorze X:*

$$R := \{(x_0, x_1) \in X \times X \mid \exists_{\omega:[0,1]\to X}\, \omega(0) = x_0,\, \omega(1) = x_1\}.$$

(czyli dwa punkty są w relacji R jeśli istnieje droga je łącząca) jest relacją równoważności.

Dowód. Relacja R jest zwrotna, droga stała $c_x(t) = x$ łączy x z x. R jest także symetryczna: jeśli $\omega : [0,1] \to X$ łączy x_0 z x_1 to droga $\bar{\omega}(t) := \omega(1-t)$ łączy x_1 z x_0. Pozostaje wykazać przechodniość. Niech $\omega_1 : [0,1] \to X$ łączy x_0 z x_1 a $\omega_2 : [0,1] \to X$ łączy x_1 z x_2. Zdefiniujemy drogę ω jako złożenie dróg

$$\omega(t) := (\omega_1 \star \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t-1) \text{ dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Droga ω łączy x_0 z x_2. □

Własność łukowej spójności zachowuje się podobnie jak spójność (por. Stw. 6.1.1), z tym że domknięcie zbiorów łukowo spójnych nie musi być zbiorem łukowo spójnym (np. Przykład 6.4.2 - wykres dla $x > 0$).

Stwierdzenie 6.4.3.

1. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją określoną na łukowo spójnej przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest łukowo spójna.*

2. *Jeśli $X = \bigcup_{i\in I} C_i$ gdzie dla każdego $i \in I$ zbiór C_i jest łukowo spójny oraz istnieje $i_0 \in I$ taki, że $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ dla każdego $i \in I$, to X jest przestrzenią łukowo spójną.*

Dowód.

Ad 1. Aby znaleźć drogę łączącą $y_0, y_1 \in Y$ wybierzmy punkty $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1)$. Ponieważ X jest łukowo spójna, istnieje droga $\omega : [0,1] \to X$ $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$. Drogę łączącą $y_0, y_1 \in Y$ definiujemy jako złożenie odwzorowań $\eta(t) := f(\omega(t))$.

Ad 2. Każdy punkt $x \in X$ można połączyć drogą z pewnym (zależnym *a priori* od $x \in X$!) punktem $x_0 \in C_0$, a dowolne dwa punkty w C_0 można też połączyć drogą. Stąd wynika, że dowolne dwa punkty w X można połączyć drogą. □

Łukowa spójność a operacje na przestrzeniach

Zauważmy jak zachowuje się łukowa spójność przy poznanych operacjach na przestrzeniach topologicznych. Nastepujące własności są oczywiste:

1) Podprzestrzeń przestrzeni łukowo spójnej może nie być łukowo spójna.

2) Przestrzeń ilorazowa przestrzeni łukowo spójnej jest łukowo spójna na mocy Stw. 6.4.3 pkt. 1.

3) Suma prosta niepustych przestrzeni topologicznych nie jest łukowo spójna (bo nie jest spójna).

Dla iloczynu kartezjańskiego dowód twierdzenia analogicznego do Twierdzenia 6.1.1 jest znacznie prostszy.

Twierdzenie 6.4.1. *Iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni topologicznych jest przestrzenią łukowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki iloczynu są spójne.*

Dowód.
$\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią łukowo spójną, to wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ też są przestrzeniami łukowo spójnymi na mocy Stw. 6.4.3 pkt.1, ponieważ rzutowania $p_t\colon \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \to (X_t, \mathcal{T}_t)$ są ciągłymi surjekcjami.
$\Longleftarrow$ Jeśli $x^0 := \{x^0_s\}_{s\in S}$ i $x^1 := \{x^1_s\}_{s\in S}$ są dwoma punktami w iloczynie kartezjańskim, to wybierzmy dla każdego $s \in S$ drogę $\omega_s : [0,1] \to X_s$ łączącą x^0_s z x^1_s. Droga $\omega\colon [0,1] \to \prod_{s\in S} X_s$, $\omega(t) := \{\omega_s(t)\}_{s\in S}$ jest ciągła na mocy Stw. 5.4.2 i łączy x^0 z x^1. □

Składowe łukowo spójne

Analogicznie do pojęcia składowej spójnej przestrzeni topologicznej definiujemy składowe łukowo spójne.

Definicja 6.4.2. *Składową łukowo spójną przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór łukowo spójny w X.*

Zauważmy, że składowe łukowo spójne są dokładnie klasami równoważności relacji "istnienia drogi łączącej punkty", zdefiniowanej w Stw. 6.4.2. Wynika stąd natychmiast:

Stwierdzenie 6.4.4. *Jeśli $C_1, C_2 \subset X$ są składowymi łukowo spójnymi przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$, to $C_1 = C_2$ lub $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, a zbiór $X = \bigcup C$ jest sumą składowych łukowych.*

Stwierdzenie 6.4.5. $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$, *$C \subset X$ – składowa łukowo spójna, to $f(C)$ jest zawarty w pewnej składowej łukowo spójnej $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Dowód. Teza wynika natychmiast z Stw. 6.4.3 pkt.1. □

Zbiór składowych łukowo spójnych

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór jej składowych łukowych, a więc klas abstrakcji relacji opisanej w Stw. 6.4.2, oznaczamy $\pi_0(X)$.

Uwaga 6.4.1. W zbiorze $\pi_0(X)$ można wprowadzić topologię ilorazową z przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, ale w zastosowaniach do rozstrzygania pytania, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne rozpatruje się jedynie zbiór $\pi_0(X)$, ignorując topologię.

Bardzo ważny aspekt przypisania przestrzeni X zbioru $\pi_0(X)$ polega na tym, że przekształceniom ciągłym między przestrzeniami można w "naturalny" sposób przypisać odwzorowania zbiorów. Dokładniej:

Stwierdzenie 6.4.6. *Dowolne odwzorowanie ciągłe* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *definiuje odwzorowanie zbiorów:*

$$f_\#\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y),\ f_\#(C) := \textit{składowa łukowa zawierająca}\, f(C)$$

przy czym $(Id_X)_\# = Id$ *oraz dla dwóch odwzorowań* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z.\mathcal{T}_Z)$ *zachodzi równość* $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. □

Wniosek 6.4.1. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem, to* $\pi_0(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_0(Y)$ *jest bijekcją .*

Wniosek 6.4.2. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem, to dla dowolnego podzbioru* $A \subset X$*, obcięcie* $h\colon X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ *też jest homeomorfizmem, a więc definiuje bijekcję zbiorów* $\pi_0(X \setminus A) \xrightarrow{h_\#} \pi_0(Y \setminus h(A))$. □

6.5 Lokalna spójność i łukowa spójność

Definicja 6.5.1. *Przestrzeń* $(X, \mathcal{T})$ *jest lokalnie (łukowo) spójna w punkcie* $x \in X$ *jeśli dla dowolnego otoczenia* $U \ni x$ *istnieje (łukowo) spójny zbiór* $V \in \mathcal{T}$ *taki, że* $x \in V \subset U$. *Jeśli przestrzeń jest lokalnie (łukowo) spójna w dowolnym punkcie, to nazywa się lokalnie spójną.*

Zauważmy, że przestrzeń (łukowo) spójna nie musi być lokalnie (łukowo) spójna. Przestrzeń opisana w Przykładzie 6.4.2 jest spójna, ale nie jest lokalnie spójna w punktach leżących na osi pionowej. Łącząc końce sinusoidy z odcinkiem pionowym otrzymujemy przestrzeń, która jest łukowo spójna, ale nie jest lokalnie spójna.

Stwierdzenie 6.5.1. *Jeśli przestrzeń* $(X, \mathcal{T})$ *jest spójna oraz lokalnie łukowo spójna to jest łukowo spójna.*

Dowód. Niech $x_0 \in X$. Zbiór punktów $x \in X$, które można połączyć drogą z punktem x_0 jest zarazem otwarty i domknięty, a więc jest całą przestrzenią. □

Stwierdzenie 6.5.2. *Składowe (łukowej) spójności przestrzeni lokalnie (łukowo) spójnej są zbiorami otwartymi. Składowe spójne przestrzeni lokalnie łukowo spójnej są także jej składowymi łukowej spójności.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód w przypadku lokalnej łukowej spójności. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ i rozważmy składową łukowej spójności $C_{x_0} := \{x \in X \mid \exists_{\omega:[0,1]\to X}\, \omega(0) = x_0,\, \omega(1) = x\}$. Pokażemy, że U_{x_0} jest zbiorem otwarto-domkniętym. Dla dowolnego punktu $x \in U_{x_0}$ istnieje otoczenie łukowo spójne $U_x \ni x$. Dowolny punkt $x' \in U_x$ można połączyć drogą z x, a zatem na mocy Stw. 6.4.2 także z punktem x_0. Taki sam argument pokazuje, że dopełnienie zbioru C_{x_0} jest zbiorem otwartym. Wynika stąd także iż C_{x_0} jest składową spójności przestrzeni X. □

Z ostatniego stwierdzenia oraz Stw. 6.2.1. 2 wynika, że przestrzeń lokalnie łukowo spójna jest homeomorficzna z sumą prostą swoich składowych spójnych. W szczególności dotyczy to podzbiorów otwartych przestrzeni euklidesowej.

Stwierdzenie 6.5.3 (Spójność i łukowa podzbiorów otwartych)**.** *Otwarty, spójny podzbiór przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ jest łukowo spójny. Składowe spójne takiego zbioru są identyczne ze składowymi łukowo spójnymi.*

6.6 Składowe spójne grupy liniowej

Zajmiemy się teraz zbadaniem spójności ważnego podzbioru otwartego w przestrzeni macierzy kwadratowych $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych, a mianowicie grupy liniowej

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, n; \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} \subset M(n, n; \mathbb{R}) = \prod_{i,j=1}^{n} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$$

- $\det\colon M(n, n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym, a więc $GL(n, \mathbb{R})$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni macierzy $M(n, n; \mathbb{R})$.
- Mnożenie macierzy $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ jest odwzorowaniem ciągłym.
- $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ciągłą surjekcją, a więc

  $$GL(n; \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$$

  jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów otwartych składających się odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym.
- mnożenie przez dowolną macierz $A \in GL^-(n, \mathbb{R})$ zadaje homeomorfizm

  $$h_A\colon GL^+(n, \mathbb{R}) \to GL^-(n, \mathbb{R}).$$

Twierdzenie 6.6.1. *Zbiór macierzy $GL^+(n, \mathbb{R})$ jest łukowo spójny.*

Dowód. Na mocy Stw. 6.5.3 wystarczy pokazać, że $GL^+(n, \mathbb{R})$ jest zbiorem spójnym. Będziemy postępować indukcyjnie ze względu na wymiar macierzy: $GL^+(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ a więc jest to zbiór spójny. Załóżmy, że przestrzeń $GL^+(k, \mathbb{R})$ jest spójna dla $k < n$ i rozważmy rzutowanie $p\colon GL^+(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przypisujące każdej macierzy jej ostatnia kolumnę. Jako obcięcie rzutowania w produkcie kartezjańskim do otwartego podzbioru jest to odwzorowanie otwarte, a więc ilorazowe. Zauważmy, że odwzorowanie p polega na mnożeniu macierzy z prawej strony przez pionowo zapisany wektor bazy kanonicznej $\mathbf{e}_n := (0, .., 0, 1)$

Do odwzorowania p chcemy zastosować Stw. 6.1.3. Dla $n > 1$ przestrzeń $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest łukowo spójna, a więc spójna. Należy więc zbadać przeciwobrazy $p^{-1}(\mathbf{v})$ gdzie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zauważmy przede wszystkim, że dla dowolnych dwóch wektorów $p^{-1}(\mathbf{v})$ i $p^{-1}(\mathbf{w})$ są homeomorficzne. Istotnie, jeśli $C \in GL^+(n, \mathbb{R})$ jest macierzą taka, ze $C(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, to mnożenie przez C z lewej strony zadaje homeomorfizm $C\cdot\colon p^{-1}(\mathbf{v}) \to p^{-1}(\mathbf{w})$ – przekształcenie odwrotne jest mnożeniem przez C^{-1}.

Rozpatrzmy więc $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$. Jest to zbiór macierzy postaci zapisanych blokowo

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $A \in GL^+(n-1,\mathbb{R})$ a $\mathbf{c} = (c_{n,1}, ..., c_{n,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Taką macierz można w połączyć drogą $\omega\colon [0,1] \to GL^+(n,\mathbb{R})$z macierzą dla której $\mathbf{c} = 0$:

$$\omega(t) := \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ t\mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Zbiór macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in GL^+(n,\mathbb{R})$$

jest homeomorficzny z $GL^+(n-1,\mathbb{R})$, a więc na mocy założenia indukcyjnego jest spójny, a zatem zbiór $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$ jest spójny, co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 6.6.1. *Rozkład $GL(n;\mathbb{R}) = GL^+(n,\mathbb{R}) \cup GL^-(n,\mathbb{R})$ jest rozkładem na sumę dwóch homeomorficznych ze sobą składowych spójnych.* □

Uwaga 6.6.1. Korzystając z rozkładu macierzy na iloczyn macierzy elementarnych można podać bezpośrednią konstrukcję drogi łączącej daną macierz z macierzą identycznościową. Szkic dowodu jest następujący:

1. $\forall\, A \in GL^+(n,\mathbb{R})$ jest iloczynem macierzy elementarnych.

2. $\forall$ macierzy elementarnej $E_{ij}(\lambda)$ istnieje droga $[0,1] \xrightarrow{\omega} GL(n,\mathbb{R})$ taka, że $\omega_{ij}(0) = E_{ij}(\lambda)$ oraz $\omega(1) = Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$.

3. Jeśli $A = E^1_{i_1 j_1}(\lambda_1) \circ \cdots \circ E^k_{i_k j_k}(\lambda_k)$ i ω_r droga łącząca $E^r_{i_r j_r}(\lambda_r)$ z $Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$. Wtedy droga $\omega(t) := \omega_1(t) \circ \cdots \circ \omega_k(t)$ łączy macierz A z $Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$. Jeśli $\det A > 0$, to $\omega(0) = Id$.

6.7 Zadania

Zad. 50 (Przykłady)**.** Zbadać spójność przestrzeni opisanych w zadaniach do Rozdz. 1,2.

Zad. 51 (Kryterium spójności podzbioru)**.** Zbiór S w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych niepustych zbiorów A, B takich, ze $S = A \cup B$, mamy $\mathrm{cl}(A) \cap B \neq \emptyset$ lub $A \cap \mathrm{cl}(B) \neq \emptyset$.

Zad. 52 (Składowe produktu)**.** BCPP Zad. 4.25.

Zad. 53 (Spójność w $\mathbb{R}^n$)**.** Wykazać, że jeśli $n > 1$ to dopełnienie dowolnego zbioru przeliczalnego w przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ jest przestrzenią łukowo spójną. Jeśli $f : S^n \to [0,1]$ jest przekształceniem ciągłym i $n > 1$ to przeciwobraz co najwyżej dwóch punktów jest przeliczalny. Czy teza zachodzi dla $n = 1$?

Zad. 54. W spójnej przestrzeni metrycznej, mającej co najmniej dwa punkty, każda kula ma nieprzeliczalną liczbę elementów. BCPP Zad. 4.10..

Zad. 55. Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim spójnych przestrzeni metryzowalnych, z których każda ma co najmniej dwa punkty. Dopełnienie dowolnego przeliczalnego podzbiory w $X \times Y$ jest zbiorem spójnym. BCPP Zad. 4.11.

Zad. 56. Stwierdzić, które z następujących przestrzeni, (przypominających bukiet okręgów) są homeomorficzne, a które nie są homeomorficzne. Dla dowolnego punktu płaszczyzny $x \in \mathbb{R}^2$ i liczby $r > 0$ przez oznaczamy $S^1(x,r) := \{x' \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||x - x'|| = r\}$ czyli okrąg o środku w punkcie x i promieniu r. Przez S^1 oznaczamy okrąg jednostkowy o środku w 0, czyli $S^1 := S^1(0,1)$.

1. Rozbieżne okręgi, czyli podprzestrzeń płaszczyzny euklidesowej $X_1 := \bigcup_{n=1}^{\infty} S^1((n,0),n) \subset \mathbb{R}^2$
2. Pawie oczko, czyli podprzestrzeń płaszczyzny euklidesowej : $X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^1((\frac{1}{n},0),\frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}^2$
3. Podprzestrzeń $X_3 := \{(z_1, z_2, z_3, \dots) \,|\, \exists_n \forall_{i \neq n} z_i = 1\} \subset \prod_{i=1}^{\infty} S^1$ gdzie w $\prod_{i=1}^{\infty} S^1$ rozpatrujemy topologię produktu kartezjańskiego;
4. Bukiet przeliczalnej rodziny okręgów z wyróżnionym punktem $1 \in S^1$: $\bigvee_{i=1}^{\infty} S^1$
5. Przestrzeń ilorazowa prostej euklidesowej: $\mathbb{R}/\{\mathbb{Z}\}$ gdzie $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ oznacza liczby całkowite.

Zad. 57 (Klasyfikacja homeomorficzna liter)**.** Traktując drukowane, wielkie litery $A, B, C, \dots$ jako podzbiory płaszczyzny euklidesowej, podzielić je na klasy równoważności relacji homeomorfizmu.

Zad. 58 (Podzbiory okręgu)**.** Wykazać, że dowolny spójny podzbiór okręgu S^1 jest homeomorficzny z S^1 lub jednym z odcinków $[-1,1], [-1,1), (-1,1)$ i żadne dwie z tych przestrzeni nie są homeomorficzne.

Zad. 59. Zespolona grupa liniowa $GL(n,\mathbb{C})$ jest łukowo spójna.

Rozdział 7

Rozmaitości jednowymiarowe

Jednym z fundamentalnych kierunków badań topologii w XX wieku były próby klasyfikacja rozmaitości ustalonego wymiaru z dokładnością do homeomorfizmu lub innej, grubszej relacji równoważności. Rozmaitości to przestrzenie lokalnie homeomorficzne z przestrzeniami euklidesowymi (p. Def. 7.1.1). Pojawiają się w naturalny sposób jako zbiory rozwiązań nieosobliwych układów równań zadanych funkcjami gładkimi. W tym rozdziale zastosujemy poznane pojęcia do klasyfikacji topologicznej 1-wymiarowych rozmaitości. Okazuje się, że warunek lokalny nałożony na przestrzeń (lokalny homeomorfizm z prostą euklidesową) uzupełniony o trzy warunki globalne - własność Hausdorffa, II aksjomat przeliczalności i spójność - pozwalają wykazać, iż przestrzeń jest homeomorficzna z odcinkiem lub okręgiem.

7.1 Rozmaitości topologiczne

Definicja 7.1.1. *Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa, spełniającą II aksjomat przeliczalności.*

1. *Jeśli każdy punkt M posiada otoczenie homeomorficzne z pewną przestrzenią euklidesową (lub równoważnie z jej otwartym podzbiorem) , to M nazywamy rozmaitością topologiczną.*

2. *Jeśli każdy punkt M posiada otoczenie homeomorficzne z podzbiorem otwartym pewnej półprzestrzeni euklidesowej (tzn. $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \geqslant 0\}$, to M nazywamy rozmaitością topologiczną z brzegiem.*

Jeśli każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z przestrzenią $\mathbb{R}^n$ to mówimy, że rozmaitość jest n-wymiarowa. Zauważmy, że wymiar rozmaitości jest jednoznacznie zdefiniowany, bowiem przestrzeń $\mathbb{R}^n$ nie zawiera podzbioru otwartego homeomorficznego z przestrzenią $\mathbb{R}^m$ dla $m \neq n$. Dowód tego faktu w pełnej ogólności odkładamy na później; zauważmy teraz, że jeśli zachodzi on dla $n = 1$. Istotnie, po usunięciu z $\mathbb{R}^1$ punktu otrzymujemy przestrzeń niespójną, podczas gdy usunięcie punktu z otwartego podzbioru spójnego w $\mathbb{R}^n$ dla $n > 1$ nie narusza spójności.

Punkty wewnętrzne rozmaitości z brzegiem M to takie, które posiadają otoczenia homeomorficzne z przestrzenią euklidesową, a pozostałe to *punkty brzegowe*, których zbiór oznacza się ∂M i nazywa brzegiem rozmaitości. Brzeg rozmaitości jest dobrze zdefiniowany, bowiem żaden punkt przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ nie zawiera podzbioru otwartego homeomorficznego z półprzestrzenią. W przypadku rozmaitości jednowymiarowych wynika to jak wyżej z argumentu wykorzystującego spójność: po usunięciu dowolnego punktu z prostej otrzymujemy zbiór niespójny, a usuwając koniec z półprostej, zbiór spójny. Łatwo zauważyć, że brzeg rozmaitości n-wymiarowej ∂M jest rozmaitością $n-1$-wymiarową (bez brzegu).

Zauważmy następujące własności przestrzeni topologicznych będących rozmaitościami.

1. Dowolny podzbiór otwarty rozmaitości jest rozmaitością.
2. Przestrzeń ilorazowa rozmaitości oczywiście nie musi być rozmaitością.
3. Produkt kartezjański skończonej rodziny rozmaitości jest rozmaitością.
4. Koprodukt przeliczalnej rodziny rozmaitości jest rozmaitością.
5. Rozmaitości są przestrzeniami lokalnie spójnymi, a więc dowolna rozmaitość jest sumą prostą swoich składowych spójnych.
6. Dowolna rozmaitość jest przestrzenią ilorazową sumy prostej (koproduktu) rodziny przestrzeni, z których każda jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową.

7.2 Klasyfikacja rozmaitości 1-wymiarowych

Zauważmy, że:

1. Jedyną spójną rozmaitością 0-wymiarową jest punkt. Dowolna rozmaitość 0 wymiarowa jest homeomorficzna z przeliczalną przestrzenią dyskretną.
2. Przykłady spójnych rozmaitości 1-wymiarowych: prosta rzeczywista i okrąg to rozmaitości bez brzegu; półprosta i odcinek domknięty to rozmaitości z brzegiem. Żadne dwie z wymienionych przestrzeni nie są homeomorficzne.

Udowodnimy, że powyższe przykłady wyczerpują listę spójnych rozmaitości 1-wymiarowych.

Twierdzenie 7.2.1.

1. *Dowolna spójna rozmaitość 1-wymiarową to jest homeomorficzna z okręgiem lub z prostą rzeczywistą.*
2. *Dowolna spójna rozmaitością 1-wymiarową z brzegiem jest homeomorficzna z półprostą rzeczywistą lub odcinkiem domkniętym.*

Dowód twierdzenia opiera się na serii lematów wykorzystujących fakt, że topologia prostej rzeczywistej jest wyznaczona przez dobry porządek.

Lemat 7.2.1. *Niech $J := (a, b)$ będzie odcinkiem otwartym a $f\colon J \to \mathbb{R}$ odwzorowaniem ciągłym.*

1. *Jeśli $f\colon J \to f(J)$ jest homeomorfizmem, to obraz $f(J)$ jest odcinkiem otwartym, a odwzorowanie f jest ściśle monotoniczne.*

2. *Odwrotnie, jeśli odwzorowanie $f\colon J \to \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczne, to jego obraz jest odcinkiem otwartym, a odwzorowanie $f\colon J \to f(J)$ jest homeomorfizmem.*

3. *Dowolny homeomorfizm odcinków otwartych $h\colon (a,b) \to (c,d)$ rozszerza się do homeomorfizmu prostej $\bar{h}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Dowód.
Ad 1. Obraz spójnego zbioru jest spójny, a więc z Stw. wynika, że $f(J)$ jest przedziałem. Musi być to przedział otwarty, bowiem po usunięciu dowolnego punktu staje się niespójny. Aby wykazać, że odwzorowanie f jest ściśle monotoniczne rozważmy funkcję dwóch zmiennych $d(t,s) := \frac{f(t)-f(s)}{|f(t)-f(s)|}$ określoną na podzbiorze kwadratu $P := \{(s,t) \in J \times J \,|\, t < s\}$ o wartościach ± 1. Ponieważ podzbiór P jest spójny, więc d musi być stała. Wynika stąd, że f jest ściśle monotoniczna.

Ad 2. Ponieważ odwzorowanie f jest ściśle monotoniczne, a więc jest różnowartościowe. Żeby wykazać iż jest homeomorfizmem wystarczy zauważyć, że jest otwarte. Dla dowolnego odcinka $(c,d) \subset (a,b)$ jego obraz $f(c,d)$ jest przedziałem, który musi być otwarty, gdyż funkcja f jest ściśle monotoniczna.

Ad 3. Załóżmy, że funkcja h jest ściśle rosnąca. Wtedy rozszerzamy ją na odcinek domknięty $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kładąc $h(a) := c$, $h(b) := d$ a dalej liniowo na całą prostą. □

Lemat 7.2.2. *Jeśli J_1, J_2 są dwoma odcinkami otwartymi, $U \subset J_1$ otwartym podzbiorem a $h\colon U \to J_2$ homeomorfizmem na obraz. Jeśli przestrzeń $J_1 \cup_h J_2$ jest rozmaitością to zbiór U ma co najwyżej dwie składowe spójne a h odwzorowuje każdą z nich na odcinek współkońcowy lub współpoczątkowy z J_2.*

Dowód. Zauważmy, że projekcja ilorazowa $J_1 \coprod J_2 \to J_1 \cup_h J_2$ jest homeomorfizmem na każdym podzbiorze J_s, $s = 1,2$, więc każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z prostą; przestrzeń $J_1 \cup_h J_2$ posiada też bazę przeliczalną, pozostaje więc zbadać kiedy jest Hausdorffa.

Oznaczmy końce odcinka $J_1 := (a,b)$ oraz $J_2 := (c,d)$. Zbiór U jest sumą odcinków rozłącznych $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i, b_i)$, gdzie $a \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant b$ oraz $b_i < a_{i+1}$. Załóżmy, że w tym rozkładzie istnieje odcinek taki, że $a < a_i < b_i < b$ i załóżmy, że na tym odcinku (a_i, b_i) funkcja h jest rosnąca. Oznaczmy jego obraz $h((a_i,b_i)) := (c_i, d_i)$ i załóżmy, że jeden z końców odcinka (c_i, d_i) nie pokrywa się z końcem odcinka J_2, np. $c < c_i$. Wtedy klasy równoważności punktów $[a_i]$ i $[c_i]$ nie posiadają otoczeń rozłącznych, a więc $J_1 \cup_h J_2$ nie jest przestrzenią Hausdorffa. Wynika stąd, że jeśli $J_1 \cup_h J_2$ jest przestrzenią Hausdorffa, to zbiór U ma nie więcej niż dwie składowe, czyli $U = (a_0, b_0) \cup (a_1, b_1)$. Jeśli $h(U) = (c,d)$ to $U = (a_1, b_1)$ jest pododcinkiem J_1, a włożenie $J_1 \subset J_1 \cup_h J_2$ jest homeomorfizmem. Jeśli $h(U) \neq (c,d)$ i $J_1 \cup_h J_2$ jest przestrzenią Hausdorffa, to $U = (a, b_0) \cup (a_1, b)$ gdzie $a \leqslant b_0 < a_1 \leqslant b$). Załóżmy, że $a < b_0$ oraz $h\colon (a, b_0) \to J_2$ jest funkcją rosnącą. Jak poprzednio warunek Hausdorffa implikuje, że $h(a, b_0) = (c_1, d)$. Jeśli $a_1 < b$ to $h((a_1, b)) = (c, d_0)$ i funkcja h musi być na nim malejąca. Sytuacje gdy funkcja h jest malejąca na odpowiednich odcinkach analizujemy w ten sam sposób. □

Lemat 7.2.3. *Jeśli rozmaitość M można pokryć dwoma zbiorami homeomorficznymi z $\mathbb{R}^1$ to jest ona homeomorficzna z prostą lub okręgiem.*

Dowód. Niech $M = U_1 \cup U_2$, gdzie $U_i \simeq (a_i, b_i)$. Możemy przyjąć, że $a_1 = a_2 = 0$ i $b_1 = b_2 = 1$. Rozpatrzmy dwa przypadki wynikające z Lematu 7.2.2. Jeśli $U_1 \cap U_2$ ma jedną składową, to możemy przyjąć, że $M \simeq (0,1) \cup_h (0,1)$ gdzie $h\colon (t,1) \to (0,1)$ jest homeomorfizmem na obraz i $h(t_1) = (0,s)$. Pokażemy, że $M \simeq (0,1)$. Wybierzmy punkt $t < t_0 < 1$ i rozpatrzmy odcinki $(0,t_0)$ oraz $(h(t_0),1)$. Włożenie $(0,t_0) \coprod (h(t_0),1) \to (0,1) \coprod (0,1)$ definiuje homeomorfizm przestrzeni ilorazowych $(0,t_0] \cup_h [h(t_0),1) \to (0,1) \cup_h (0,1)$. Sprawdzenie, że przestrzeń $(0,t_0] \cup_h [h(t_0),1)$ (dwa odcinki jednostronnie domknięte sklejone końcami) jest homeomorficzna z odcinkiem pozostawiamy Czytelnikowi.

Podobnie postępujemy w przypadku, gdy $U_1 \cap U_2$ ma dwie składowe spójne. Pokazujemy, że rozmaitość M jest homeomorficzna z przestrzenią powstającą przez sklejenie końcami dwóch odcinków domkniętych, a ta przestrzeń jest homeomorficzna z okręgiem. □

Lemat 7.2.4. *Niech M będzie spójną rozmaitością 1-wymiarową posiadającą pokrycie skończoną ilością zbiorów otwartych homeomorficznych z $\mathbb{R}^1$. Wtedy M jest homeomorficzna z prostą lub z okręgiem.*

Dowód. Niech $M = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ gdzie każdy podzbiór U_i jest otwarty i homeomorficzny z odcinkiem otwartym i pokrycie jest nieredukowalne tzn. dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, suma $\bigcup_{i \neq k} U_i$ jest podzbiorem właściwym. Postępujemy przez indukcję ze względu na liczbę zbiorów w pokryciu. Dla $n = 1$ teza oczywiście zachodzi. Załóżmy, że zachodzi dla rozmaitości, które można pokryć $n-1$ zbiorami homeomorficznymi z $\mathbb{R}^1$, a więc podzbiór $M' := U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$ jest homeomorficzny z odcinkiem otwartym lub z okręgiem. Ponieważ rozmaitość M jest spójna, to $U_n \cap M' \neq \emptyset$. Jeśli $M' \simeq S^1$, to powtarzając argumenty dowodu Lematu 7.2.2 otrzymujemy, że M nie byłoby przestrzenią Hausdorffa. W takim razie M jest sumą dwóch podzbiorów homeomorficznych z prostą, a taka rozmaitość na mocy Lematu 7.2.3 jest homeomorficzna z okręgiem lub prostą. □

Lemat 7.2.5. *Niech M będzie spójną rozmaitością 1-wymiarową posiadającą pokrycie przeliczalną ilością zbiorów otwartych homeomorficznych z $\mathbb{R}^1$. Wtedy M jest homeomorficzna z prostą lub z okręgiem.*

Dowód. Rozmaitość M możemy przedstawić w postaci wstępującej sumy podzbiorów otwartych $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Przypadek gdy zbiorów U_i jest skończenie wiele rozstrzyga Lemat 7.2.4. Załóżmy więc, że $U_i \subsetneqq U_{i+1}$, a zbiory U_i są spójne. Wynika stąd, że zbiory U_i są homeomorficzne z odcinkami otwartymi, bowiem okrąg nie jest podzbiorem właściwym spójnej rozmaitości 1-wymiarowej. Dla każdego i wybierzmy homeomorfizm $h_i\colon U_i \to (-i,i)$. Indukcyjnie skonstruujemy "drabinę" homeomorfizmów:

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\bar h_1"] & U_2 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\bar h_2"] & \ldots \arrow[r, "\subset"] & U_i \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\bar h_i"] & U_{i+1} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\bar h_{i+1}"] & .. & M \arrow[d, "h"] \\
(-1,1) \arrow[r, "\subset"] & (a_2,b_2) \arrow[r, "\subset"] & \ldots \arrow[r, "\subset"] & (a_i,b_i) \arrow[r, "\subset"] & (a_{i+1},b_{i+1}) \arrow[r, "\subset"] & \ldots & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Definiujemy $\bar{h}_1 := h_1$. Załóżmy, że dany jest homeomorfizm h_i, rozszerzający homeomorfizm $\bar{h}_{i-1}$. Rozważmy złożenie homeomorfizmów

$$g_i := h_{i+1}\bar{h}_i^{-1}\colon (a_i, b_i) \to (c_i, d_i) \subset (-i-1, i+1) \quad \text{i jego odwrotność} \quad g_i'\colon (c_i, d_i) \to (a_i, b_i).$$

Korzystając z Lematu 7.2.1 pkt. 3 istnieje rozszerzenie tego homeomorfizmu na prostą: $\bar{g}_i'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zdefiniujmy $\bar{h}_{i+1} := \bar{g}_i' h_{i+1}$. Dla $x \in U_i$ otrzymujemy

$$\bar{h}_{i+1}(x) = \bar{g}_i'(h_{i+1}(x)) = (h_{i+1}\bar{h}_i^{-1})^{-1}(h_{i+1}(x)) = \bar{h}_i(x).$$

Oczywiście $\bar{h}_{i+1}(U_{i+1} \supsetneqq (a_i, b_i)$ i jest odcinkiem otwartym. Definiujemy homeomorfizm $h\colon M \to \mathbb{R}$ wzorem $h(x) = \bar{h}_i(x)$ jeśli $x \in U_i$. □

Dowód Tw. 7.2.1. Pkt. 1 wynika natychmiast z powyższych lematów. Udowodnimy pkt. 2. Niech M będzie rozmaitością 1-wymiarową z niepustym brzegiem ∂M. Zauważmy, ze brzeg rozmaitości 1-wymiarowej jest rozmaitością 0-wymiarową, a więc przestrzenią dyskretną. Niech $\iota\colon \partial M \to M$ będzie zanurzeniem brzegu. Przestrzeń $M \cup_\iota M$ jest spójną rozmaitością 1-wymiarową bez brzegu (sprawdzić!), a więc jest homeomorficzna z prostą lub z okręgiem i oczywiście zawiera M jako podzbiór właściwy. Jedynymi właściwymi podzbiorami spójnymi prostej i okręgu są zbiory homeomorficzne z przedziałami, a wśród nich tylko odcinek jedno- lub dwustronnie domknięty ma niepusty brzeg. □

Na zakończenie zauważmy, że założenie II aksjomatu przeliczalności jest niezbędne, aby zachodziło Tw. 7.2.1. Istnieje przestrzeń, zwana "długą prostą", która lokalnie jest homeomorficzna z prostą euklidesową, jest spójna, ale nie jest homeomorficzna ani z okręgiem, ani z prostą euklidesową. Opis "długiej prostej" można znaleźć w wielu podręcznikach topologii a także jej poświęconym notatkom Reinharda Schultza (University of California, Riverside) The long line oraz Richarda Kocha (University of Oregon) The long line.

Rozdział 8

Zwartość

8.1 Przestrzenie zwarte

Definicja 8.1.1. *Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ nazywa się zwarta jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz z dowolnego pokrycia przestrzeni X zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się zwarty jeśli przestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest zwarta, a relatywnie zwarty jeśli jego domknięcie jest podzbiorem zwartym.*

Przykład 8.1.1. Przestrzeń dyskretna jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest skończona.

Przykład 8.1.2. Odcinek domknięty $[0, 1]$ z topologią euklidesową jest przestrzenią zwartą. Istotnie, niech $\{U_s\}_{s \in S}$ będzie dowolnym pokryciem otwartym odcinka. Zdefiniujmy liczbę $t_0 \in I$ jako kres górny liczb t takich, że odcinek $[0, t]$ można pokryć skończoną liczbą zbiorów z pokrycia $\{U_s\}_{s \in S}$ tzn.

$$t_0 := \sup\{t \in I \mid \exists_{s_1, \dots, s_k} [0, t] \subset U_{s_1} \cup \dots \cup U_{s_k}\}.$$

Ponieważ punkt 0 jest zawarty w pewnym zbiorze z pokrycia wraz z odcinkiem $[0, \epsilon)$, a więc $t_0 > 0$. Pokażemy, że $t_0 = 1$. Załóżmy, że $t_0 < 1$. Istnieje zbiór U_{s_0} oraz liczba ϵ taka, że $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset U_{s_0}$. Otrzymujemy sprzeczność, bowiem odcinek $[0, t_0 + \epsilon]$ można pokryć skończoną rodziną zbiorów z pokrycia $\{U_s\}_{s \in S}$.

Twierdzenie 8.1.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią Hausdorffa. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta.*

2. *Jeśli $\mathcal{B}$ jest dowolną bazą topologii $\mathcal{T}$, to z dowolnego pokrycia przestrzeni X zbiorami należącymi do bazy $\mathcal{B}$ można wybrać pokrycie skończone.*

3. *Jeśli topologia $\mathcal{T}$ jest generowana przez rodzinę podzbiorów $\mathcal{F}$, to z dowolnego pokrycia przestrzeni X zbiorami należącymi do rodziny $\mathcal{F}$ można wybrać pokrycie skończone.*

Dowód. Równoważność warunków 1. i 2. jest oczywista. Stosując argument *ad absurdum* wykażemy, że 3. $\Longrightarrow$ 1.. Załóżmy, że z dowolnego pokrycia X zbiorami należącymi do $\mathcal{F}$ można wybrać pokrycie skończone, a przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nie jest zwarta. Oznaczmy przez

Cov rodzinę (zbiór) złożony z pokryć otwartych z których *nie można* wybrać podpokrycia skończonego. Zbiór Cov jest niepustym zbiorem częściowo uporządkowanym przez inkluzję. Korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna (*Zorn lemma*) pokażemy, że w Cov istnieje element maksymalny. Spełnione jest jego założenie. Niech $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J}$ będzie łańcuchem w Cov (tzn. dowolne dwa elementy są porównywalne). Taki łańcuch jest ograniczony z góry przez pokrycie $\mathcal{U} := \bigcup \mathcal{U}_j$. Łatwo zauważyć, że z $\mathcal{U}$ nie można wybrać pokrycia skończonego - jeśli by tak było, to już z któregoś $\mathcal{U}_j$ dałoby się je wybrać. Niech $\mathcal{M} \in Cov$ będzie elementem maksymalnym tzn. takim pokryciem otwartym, że dla dowolnego zbioru otwartego $V \notin \mathcal{M}$ z pokrycia $\mathcal{M} \cup \{V\}$ można wybrać pokrycie skończone.

Rodzina $\mathcal{F}$ generująca topologię $\mathcal{T}_X$ jest oczywiście pokryciem otwartym, więc można rozważyć rodzinę $\mathcal{S} := \mathcal{M} \cap \mathcal{F}$. Zauważmy, że jest ona pokryciem. Załóżmy przeciwnie - czyli, że istnieje element $x \in X$ taki, że $x \notin U$ dla każdego $U \in \mathcal{S}$. Ponieważ $\mathcal{M}$ jest pokryciem, to istnieje $U \in \mathcal{M}$ taki, że $x \in U$. Z definicji generowania topologii wynika, iż istnieją zbiory $V_1, \dots V_n \in \mathcal{F}$ takie, że $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subset U$, przy czym żaden ze zbiorów $V_1, \dots V_n \in \mathcal{F}$ nie może należeć do $\mathcal{M}$. Rozważmy zatem rodziny $\mathcal{M}_j := \mathcal{M} \cup \{V_j\}$ dla $j = 1, \dots n$. Każda z nich jest pokryciem z którego *można* wybrać pokrycie skończone, czyli $X = V_j \cup U_j$ gdzie U_j jest sumą *skończenie* wielu zbiorów z $\mathcal{M}$. Sprawdzimy, że należące do $\mathcal{M}$ składniki zbiorów U_j wraz ze zbiorem U tworzą skończone pokrycie X:

$$U \cup \bigcup_{j=1}^{n} U_j \supset (\bigcap_{j=1}^{n} V_j) \cup \bigcup_{j=1}^{n} U_j \supset \bigcap_{j=1}^{n} (V_j \cup U_j) = X.$$

Ponieważ z $\mathcal{M}$ nie można wybrać pokrycia skończonego, wynika stąd, że $\mathcal{S}$ jest pokryciem X. Ponieważ $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ to można zeń wybrać pokrycie skończone, co prowadzi do sprzeczności, bo $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$. Wynika stąd, że $\mathcal{M} = \emptyset$, a więc przestrzeń X jest zwarta . □

Korzystając z wzorów de Morgana zwartość można także określić w terminach zbiorów domkniętych.

Stwierdzenie 8.1.1. *Przestrzeń Hausdorffa jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna rodzina zbiorów domkniętych* $\{F_s\}_{s\in S}$ *taka, że dla dowolnego skończonego zbioru wskaźników* $s_1, \dots, s_k \in S$ *przecięcie zbiorów* $F_{s_1} \cap \dots \cap F_{s_k} \neq \emptyset$ *(zwana wtedy rodziną scentrowaną) cała ma niepuste przecięcie* $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \emptyset$.

Dowód. Będziemy dowodzić, że przestrzeń jest niezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina scentrowana o pustym przecięciu. Rzeczywiście, przestrzeń jest niezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jej pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego tzn. rodzina zbiorów domkniętych $\{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ ma puste przecięcie i jest scentrowana. Odwrotnie, mając rodzinę scentrowaną zbiorów domkniętych o pustym przecięciu $\{F_s\}_{s\in S}$ otrzymujemy pokrycie otwarte $\{X \setminus F_s\}_{s\in S}$ którego nie można wybrać pokrycia skończonego. □

Zwartość, podobnie jak spójność jest zachowywana przez przekształcenia ciągłe.

Stwierdzenie 8.1.2. *Jeśli* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłą surjekcją z przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, to* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Jeśli $\{V_s\}_{s\in S}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni Y, to ich przeciwobrazy $\{f^{-1}(V_s)\}_{s\in S}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni X, a więc można z niego wybrać pokrycie skończone $\{f^{-1}(V_{s_1}), \dots f^{-1}(V_{s_n})\}$, a zatem zbiory $V_{s_1}), \dots V_{s_n}$ tworzą skończone pokrycie przestrzeni X. □

Uwaga 8.1.1. Założenie o tym, że $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa jest konieczne, bowiem obraz ciągły (a nawet iloraz) przestrzeni zwartej nie musi być przestrzenią Hausdorffa (p. Przykład 5.3.1).

8.2 Zwartość a konstrukcje przestrzeni topologicznych

Podprzestrzenie

Twierdzenie 8.2.1.

1. *Jeśli podprzestrzeń w przestrzeni Hausdorffa $(A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$ jest zwarta to $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym.*

2. *Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą i $A \subset X$ podzbiorem domkniętym, to przestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest zwarta.*

Dowód. Ad 1. Załóżmy, że $(A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$ jest zwarta i niech $x \notin A$. Wtedy dla każdego punktu $a \in A$ istnieją rozłączne otoczenia $U_a \ni a$ oraz $V_a \ni x$. Zbiory $\{U_a \cap A\}_{a\in A}$ tworzą otwarte pokrycie A, a więc można z niego wyjąć pokrycie skończone $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} \supset A$. Przecięcie $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$ jest rozłączne z $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$, a zatem $x \in V \subset X \setminus A$.

Ad 2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, a $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym. Z Stw. 5.2.4 wiemy, że $(A, \mathcal{T}|A)$ jest przestrzenią Hausdorffa. Rozpatrzmy więc pokrycie otwarte $\{V_s\}_{s\in S}$ przestrzeni $(A, \mathcal{T}|A)$. Z definicji topologii podprzestrzeni wynika, ze istnieją zbiory $U_s \in \mathcal{T}$ takie, że $V_s = U_s \cap A$. Rozpatrzmy pokryciem otwarte przestrzeni X zbiorami $\{V_s\}_{s\in S} \cup \{X \setminus A\}$. Ponieważ $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone, a więc skończoną liczbę zbiorów $U_{s_1} \cup \dots \cup U_{s_n} \supset A$ co kończy dowód. □

Z ostatniego twierdzenia wynikają wnioski bardzo użyteczne przy sprawdzaniu, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne.

Wniosek 8.2.1. *Niech $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ciągłym określonym na przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T}_X)$ o wartościach w przestrzeni Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wtedy:*

1) f jest odwzorowaniem domkniętym (a więc ilorazowym).

2) jeśli f jest bijekcją, to jest homeomorfizmem. □

Wniosek 8.2.2. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_1)$ jest przestrzenią zwartą a $\mathcal{T}_2$ topologią Hausdorffa w X taką, że $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, to $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$.* □

Iloczyn kartezjański

Twierdzenie 8.2.2 (A.N. Tichonow[1]). *Iloczyn kartezjański przestrzeni topologicznych* $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *są przestrzeniami zwartymi.*

Nieco inny dowód tw. Tichonowa znajduje się w BCPP Rozdział 7.3.

Przestrzeń ilorazowa i suma prosta

Zachowanie zwartości przy pozostałych dwóch operacjach jest znacznie łatwiejsze do sprawdzenia.

Przestrzeń ilorazowa przestrzeni zwartej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią Hausdorffa.

Natomiast suma prosta $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie X_s są zwarte oraz $X_s \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu $s \in S$.

8.3 Lemat o tubie

Lemat 8.3.1 (Lemat o tubie). *Niech* $(X, \mathcal{T}_X)$ *będzie dowolną przestrzenią topologiczną, a* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *przestrzenią zwartą. Dla dowolnego punktu* $x_0 \in X$ *i zbioru otwartego w iloczynie kartezjańskim* $W \supset \{x_0\} \times Y$ *istnieje otocznie otwarte* $U \ni x_0$ *takie, że* $W \supset U \times Y \supset \{x_0\} \times Y$.

Dowód. Dla każdego punktu $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$ istnieją otoczenia $U_y \ni x_0$ oraz $V_y \ni y$ takie, że $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset W$. Zbiory $\{V_y\}_{y\in Y}$ tworzą otwarte pokrycie przestrzeni Y, a więc mozna zeń wyjąć pokrycie skończone: $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = Y$. Zbiór $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ jest otoczeniem x_0 i oczywiście dla każdego y_i, $U \times V_{y_i} \subset W$ a zatem $U \times Y \subset W$. □

Wniosek 8.3.1. *Niech* $(X, \mathcal{T}_X)$ *będzie dowolną przestrzenią topologiczną, a* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *przestrzenią zwartą. Wtedy projekcja* $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}^*) \to (X, \mathcal{T}_X)$ *jest przekształceniem domkniętym.*

Dowód. Niech $A \subset X \times Y$ będzie zbiorem domkniętym. Żeby wykazać, że $p_X(A) \subset X$ jest domknięty trzeba sprawdzić, że dla każdego $x \notin p_X(A)$ istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \cap p_X(A) = \emptyset$ tzn. $p_X^{-1}(U) \cap A = \emptyset$. Oczywiście $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, a więc wystarczy zastosować Lemat o tubie 8.3.1 do zbioru otwartego $X \times Y \setminus A$ oraz punktu $x \notin p_X(A)$. □

Kolejne twierdzenie jest analogiczne do udowodnionego wcześniej Twierdzenia 6.1.3 dotyczącego spójności.

Twierdzenie 8.3.1. *Jeśli* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest przekształceniem domkniętym takim, że* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest przestrzenią Hausdorffa,* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest zwarta i dla każdego* $y \in Y$ *przeciwobraz* $f^{-1}(y)$ *jest zbiorem zwartym, to przestrzeń* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest zwarta.*

[1] Andrei Nikolaevich Tikhonov (Gzhatska, Smoleńsk 1906 – 1993 Moskwa) – matematyk rosyjski [Mac Tutor]

Dowód. Niech $\{U_s\}_{s\in S}$ będzie pokryciem otwartym X. Dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje skończony podzbiór $S_y \subset S$ taki, że $\bigcup\limits_{s\in S_y} U_s \supset f^{-1}(y)$. Ponieważ f jest domknięte, więc istnieje $V_y \ni y$ takie, że $f^{-1}(V_y) \subset \bigcup\limits_{s\in S_y} U_s$. Zbiory $\{V_y\}_{y\in Y}$ tworzą pokrycie przestrzeni Y, zatem można z niego wybrać pokrycie skończone $V_{y_1}, \ldots V_{y_n}$. Zbiory $\{U_s\}_{s\in S'}$ gdzie $S' := S_{y_1} \cup \cdots \cup S_{y_n}$ tworzą pokrycie skończone X. □

Z Tw. 8.3.1 wynika natychmiastowy wniosek, który poprzedzimy definicjami ważnych klas przekształceń:

Definicja 8.3.1.

a) *Przekształcenie domknięte $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ taki, że dla każdego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym nazywa się doskonałe (ang.* perfect map*).*

b) *Przekształcenie $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się właściwe (ang.* proper map*) jeśli dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}(K)$ jest zbiorem zwartym.*

Wniosek 8.3.2. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są przestrzeniami Hausdorffa to dowolne przekształcenie doskonałe $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest także właściwe.* □

Stwierdzenie odwrotne do Wniosku 8.3.2 zachodzi przy dodatkowym założeniu o przeciwdziedzinie przekształcenia (Stw. 8.4.6).

Zauważmy, że z Tw.8.3.1 wynika teza twierdzenia Tichonowa dla skończonych rodzin przestrzeni. W tym przypadku dowód nie wymaga stosowania lematu Kuratowskiego-Zorna, a więc pewnika wyboru. Jak zauważyliśmy wcześniej zwartość iloczynu pociąga zwartość czynników. Odwrotnie, skoro rodzina przestrzeni jest skończona wystarczy wykazać tezę dla iloczynu dwóch przestrzeni. Wynika ona natychmiast z Wniosku 8.3.1 oraz Twierdzenia 8.3.1.

8.4 Lokalna zwartość

Definicja 8.4.1. *Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest* lokalnie zwarta *jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz każdy punkt posiada otoczenie relatywnie zwarte (czyli którego domknięcie jest zwarte).*

Stwierdzenie 8.4.1. *Przestrzeń lokalnie zwarta jest regularna tzn. dla dowolnego punktu $x \in X$ i podzbioru domkniętego F takiego, że $x \notin F$ istnieją rozłączne otoczenia $U \ni x$ oraz $V \supset F$.*

Dowód. Niech $W \ni x$ będzie relatywnie zwartym otoczeniem punktu x. Wtedy przecięcie $\bar{W} \cap F$ jest zbiorem zwartym. Istnieje więc otoczenie $U \ni x$ zawarte w W takie, że $\bar{U} \cap \bar{W} \cap F = \bar{U} \cap F = \emptyset$. Definiujemy $V := X \setminus \bar{U}$. □

Zauważmy najpierw, że własność lokalnej zwartości jest rzeczywiście lokalna, tzn. jest spełniona dla dowolnie małych zbiorów otwartych.

Stwierdzenie 8.4.2. *Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest* lokalnie zwarta*, wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ i otoczenia $U \ni x$ istnieje otoczenie $V \ni x$ takie, że jego domknięcie $\bar{V}$ jest zbiorem zwartym, oraz $x \in V \subset \bar{V} \subset U$.*

Dowód. Niech $W \ni x$ będzie relatywnie zwartym otoczeniem. Rozważmy zwarty zbiór $\bar{W} \cap \bar{U} \supset W \cap U \ni x$. Brzeg $\mathrm{Fr}(\bar{W} \cap \bar{U})$ jest zbiorem zwartym i oczywiście nie zawiera punktu x. Istnieje zatem otoczenie $V \ni x$ takie, że $\bar{V} \cap \mathrm{Fr}(\bar{W} \cap \bar{U}) = \emptyset$, a zatem $\bar{V} \subset U \cap W \subset U$ (p. Stw. 3.4.1). □

Wniosek 8.4.1. *Przestrzeń topologiczna jest lokalnie zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest przestrzenią Hausdorffa i posiada pokrycie otwarte podzbiorami lokalnie zwartymi.* □

Stwierdzenie 8.4.3 (Lokalna zwartość a konstrukcje przestrzeni topologicznych)**.**

a) Podprzestrzeń przestrzeni lokalnie zwartej jest lokalnie zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest przecięciem podzbioru otwartego z podzbiorem domkniętym. W szczególności podzbiory otwarte i podzbiory domknięte są lokalnie zwarte.

b) Produkt kartezjański rodziny przestrzeni lokalnie zwartych jest przestrzenią lokalnie zwartą wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie czynniki są lokalnie zwarte oraz poza skończoną liczbą są zwarte.

c) Suma prosta przestrzeni rodziny przestrzeni lokalnie zwartych jest przestrzenią lokalnie wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie składniki są lokalnie zwarte.

Dowód.

Ad a) Załóżmy, że $A = V \cap F$ jest przecięciem zbioru otwartego U i domkniętego F. Dowolny punkt $x \in A$ posiada relatywnie zwarte otoczenie w $x \in W \subset X$. Rozważmy zbiór domknięty $\bar{W} \setminus U$. Na mocy Stw. 8.4.2 istnieje relatywnie zwarte otoczenie $U \ni x$ takie, że $\bar{U} \subset V \cap W$. Przecięcie $U \cap F$ jest szukanym relatywnie zwartym otoczeniem punktu $a \in A$.

Odwrotnie, niech $A \subset X$ będzie podzbiorem lokalnie zwartym. Dla każdego punktu $a \in A$ wybierzmy otoczenie (w X) V_a takie, że $\bar{V}_a \cap A$ jest zbiorem zwartym, a zatem domkniętym także w X. Zdefiniujmy zbiór otwarty $V := \bigcup_{a \in A} V_a \supset A$. Sprawdzimy, że A jest domkniętym podzbiorem podprzestrzeni V, a zatem jest postaci $V \cap F$ gdzie F jest domkniętym podzbiorem X. Rodzina zbiorów $\{V_a\}_{a \in A}$ jest otwartym pokryciem podprzestrzeni V. Wystarczy zatem wykazać, że dla każdego $a \in A$ zbiór $V_a \cap A$ jest domknięty w V_a (p. Stw. 5.2.2). Istotnie, $V_a \cap A = V_a \cap (\bar{V}_a \cap A)$, a więc jest przecięciem podzbioru V_a ze zwartym, a więc domkniętym w X zbiorem $\bar{V}_a \cap A$.

Ad b) Jeśli produkt rodziny przestrzeni $\prod_{s \in S} X_s$ jest przestrzenią lokalnie zwartą, to wszystkie czynniki są przestrzeniami lokalnie zwartymi, bowiem są homeomorficzne z domkniętymi podprzestrzeniami produktu. Rozpatrzmy zbiory bazowe postaci $\prod_{s \in S} U_s$ gdzie $U_s = X_s$ poza skończoną liczbą wskaźników. Taki zbiór jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie podzbiory $U_s \subset X_s$ są relatywnie zwarte, a więc poza skończoną liczbą przestrzenie X_s są zwarte.

Ad c) Oczywiste. □

Przestrzeń ilorazowa przestrzeni lokalnie zwartej nie musi być lokalnie zwarta, nawet gdy jest przestrzenią Hausdorffa. Przestrzenie Hausdorffa, które są przestrzeniami ilorazowymi przestrzeni lokalnie zwartych nazywają się *k-przestrzeniami* albo przestrzeniami *zwarcie generowanymi* (ang. *compactly generated*). Są one scharakteryzowane przez warunek, że podzbiory domknięte to dokładnie te, których przecięcia z dowolnym podzbiorem zwartym są zwarte. Jeśli przekształcenie ilorazowe jest otwarte, to zachodzi:

Stwierdzenie 8.4.4. *Jeśli $p\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest surjektywnym przekształceniem otwartym lub przekształceniem właściwym określonym na przestrzeni lokalnie zwartej $(X, \mathcal{T}_X)$ o wartościach w przestrzeni Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest lokalnie zwarta.*

Dowód. Znajdziemy relatywnie zwarte otoczenie punktu $y = p(x)$. Niech $U \ni x$ będzie relatywnie zwartym otoczeniem w X. Jego obraz $p(U) \ni y$ jest relatywnie zwartym otoczeniem w Y, bowiem $\overline{p(U)} \subset p(\bar{U})$. □

Dla przekształceń właściwych zachodzi twierdzenie analogiczne do Stw. 8.3.1.

Stwierdzenie 8.4.5. *Jeśli $p\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest surjektywnym przekształceniem domkniętym określonym na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}_X)$ o wartościach w przestrzeni lokalnie zwartej $(Y, \mathcal{T}_Y)$ takim, że dla każdego punktu $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym, to przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest lokalnie zwarta.*

Dowód. Rozpatrzymy punkt $x \in X$ oraz jego obraz $y := p(x) \in Y$. Istnieje relatywnie zwarte otoczenie $V \ni x$. Rozpatrzmy otoczenie $p^{-1}(V) \ni x$. Wykażemy, że jego domknięcie jest zbiorem zwartym: z ciągłości odwzorowania p wynika, że $\overline{p^{-1}(V)} \subset p^{-1}(\bar{V})$ a ten ostatni zbiór jest zwarty na mocy Stw. 8.3.1. □

Dla przestrzeni lokalnie zwartych zachodzi twierdzenie odwrotne do Wniosku 8.3.2.

Stwierdzenie 8.4.6. *Jeśli $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przekształceniem właściwym o wartościach w przestrzeni lokalnie zwartej , to przekształcenie f jest doskonałe.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że przekształcenie f jest domknięte. Trzeba pokazać, że dla każdego punktu $y \in Y$ i otoczenia $U \supset f^{-1}(y)$ istnieje otoczenie $V \ni y$ takie, że $f^{-1}(V) \subset U$. Niech $W \ni y$ będzie relatywnie zwartym otoczeniem punktu y. Jego przeciwobraz $f^{-1}(W)$ jest zbiorem relatywnie zwartym, a więc obcięcie przekształcenia f do $\overline{f^{-1}(W)}$ jest przekształceniem domkniętym. Wynika stąd, że istnieje otoczenie $x \in V \subset W$ takie, że $f^{-1}(V) \subset U \cap \overline{f^{-1}(W)} \subset U$. □

8.5 Uzwarcenie Aleksandrowa

Definicja 8.5.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie dowolną przestrzenią Hausdorffa. Rozpatrzmy następującą konstrukcję nowej przestrzeni $(X^+, \mathcal{T}^+)$. Zbiór $X^+ := X \sqcup \{\infty_X\}$, a topologia $\mathcal{T}^+$ składa się z $\mathcal{T}$ oraz zbiorów $V \subset X^+$ zawierających punkt $\{\infty_X\}$ takich, że $X^+ \setminus V$ jest podzbiorem zwartym w X (sprawdź, że aksjomaty topologii są spełnione)..*

Stwierdzenie 8.5.1.

a) Włożenie $X \subset X^+$ jest zanurzeniem homeomorficznym;

b) Z dowolnego pokrycia otwartego $(X^+, \mathcal{T}^+)$ można wybrać pokrycie skończone;

c) Przestrzeń $(X^+, \mathcal{T}^+)$ jest Hausdorffa (a zatem zwarta) wtedy i tylko wtedy gdy $(X, \mathcal{T})$ jest lokalnie zwarta.

d) Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwarta, to $(X^+, \mathcal{T}^+)$ jest sumą prostą $(X, \mathcal{T})$ i przestrzeni jednopunktowej $\infty_X\}$.

Dowód.

Ad a) Włożenie $X \subset X^+$ jest zanurzeniem homeomorficznym, bowiem $\mathcal{T}^+|X = \mathcal{T}$ - tutaj skorzystaliśmy z własności Hausdorffa; dopełnienia zbiorów zwartych są zbiorami otwartymi.

Ad b) Jeśli $\{U_s\}_{s\in S}$ jest otwartym pokryciem X^+, to istnieje w nim zbiór $U_{s_\infty} \ni \infty_X$, a jego dopełnienie jest podzbiorem zwartym w X. Istnieje zatem skończona liczba zbiorów $U_{s_1}, \dots U_{s_n}$ pokrywających ten zbiór. Wraz z $U_{s_\infty} \ni \infty_X$ stanowią one skończone podpokrycie pokrycia $\{U_s\}_{s\in S}$.

Ad c) Załóżmy, że $(X, \mathcal{T})$ jest lokalnie zwarta. Możliwość oddzielenia punktów $x_1, x_2 \in X$ wynika stąd, że $(X, \mathcal{T})$ jest Hausdorffa. Dowolny punkt $x \in X$ posiada otoczenie relatywnie zwarte $U \ni x$, a więc $X^+ \setminus \bar{U} \ni \infty_X$ jest otoczeniem rozłącznym z U. Implikacja odwrotna wynika z punktów a), b) oraz Stw. 8.4.3 pkt. a).

Ad d) Oczywiste, ale warto o tym pamiętać. □

Nie każda przestrzeń jest zwarta, ale istnieją konstrukcje, zwane *uzwarceniami* pozwalające zanurzyć (prawie) dowolną przestrzeń w przestrzeń zwartą.

Definicja 8.5.2. *Uzwarceniem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ nazywamy przestrzeń zwartą $(Z, \mathcal{T}_Z)$ wraz z zanurzeniem homeomorficznym $j\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ takim, że $j(X) \subset Z$ jest podzbiorem gęstym. Zbiór $Z \setminus j(X)$ nazywamy* narostem *uzwarcenia. Morfizmem uzwarceń $j_s\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Z_s, \mathcal{T}_{Z_s})$ dla $s = 1, 2$ nazywamy odwzorowanie ciągłe $f\colon (Z_1, \mathcal{T}_{Z_1}) \to (Z_2, \mathcal{T}_{Z_2})$ takie, że diagram przekształceń*

$$\begin{tikzcd} & Z_1 \arrow[dd, "f"] \\ X \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & \\ & Z_2 \end{tikzcd}$$

jest przemienny (tzn. $fj_1 = j_2$). Przekształcenie f nazywamy izomorfizmem uzwarceń jeśli jest ono homeomorfizmem.

Przykład 8.5.1. Uzwarceniami odcinka otwartego (prostej rzeczywistej) są m.in. okrąg (narost jednopunktowy), odcinek domknięty (narost dwupunktowy) , sinusoida warszawska $S := \{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leqslant \frac{1}{2\pi},\ x \neq 0\} \cup \{\, (0, y) : |y| \leqslant 1 \,\}$ (narost będący sumą prostą odcinka i punktu).

Twierdzenie 8.5.1 (P.S. Aleksandrow[2])**.** *Dla dowolnej przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ lokalnie zwartej, lecz nie zwartej, istnieje dokładnie jedno z dokładnością do homeomorfizmu jednopunktowe uzwarcenie (zwane uzwarceniem Aleksandrowa).*

[2] Paweł Sergiejewicz Aleksandrow (Bogodorsk (Noginsk) 1896 – 1982 Moskwa) – matematyk rosyjski [Mac Tutor]

Dowód. Opisana wyżej konstrukcja $j\colon (X,\mathcal{T}) \to (X^+,\mathcal{T}^+)$ jest szukanym uzwarceniem. Jeśli $j'\colon (X,\mathcal{T}) \to (Z,\mathcal{T}_Z)$ jest innym uzwarceniem jednopunktowym, to definiujemy homeomorfizm uzwarceń $h\colon (X^+,\mathcal{T}^+) \to (Z,\mathcal{T}_Z)$ następująco: $h(x) := j'(x)$ oraz $h(\infty_X) := z_\infty$ gdzie $\{z_\infty\} := Z \setminus j'(z)$. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że h jest homeomorfizmem. □

Z ostatniego twierdzenia wynika pożyteczny wniosek, pozwalający czasem wykazać homeomorfizm przestrzeni, którego nie widać na pierwszy rzut oka.

Wniosek 8.5.1. *Niech $(Z_s,\mathcal{T}_{Z_s})$ dla $s = 1,2$ będą dwoma przestrzeniami zwartymi, a $z_s \in Z_s$ punktami, takimi że $Z_s\setminus\{z_s\} \subset Z_s$ jest podzbiorem gęstym. Dowolny homeomorfizm $h\colon Z_1 \setminus \{z_1\} \to Z_2 \setminus \{z_2\}$ rozszerza się do homeomorfizmu $h^+\colon (Z_1,\mathcal{T}_{Z_1}) \to (Z_2,\mathcal{T}_{Z_2})$.*

Zajmiemy się jeszcze funktorialnością konstrukcji uzwarcenia Aleksandrowa, a więc pytaniem kiedy przekształceniu ciągłemu $f\colon (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ można przypisać jego ciągłe rozszerzenie $f^+\colon (X^+,\mathcal{T}_X^+) \to (Y^+,\mathcal{T}_Y^+)$, czyli kiedy przekształcenie określone wzorem $f^+(x) := f(x)$ oraz $f(\infty_X) := \infty_Y$ jest ciągłe. Łatwo zauważyć, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy gdy przekształcenie f jest właściwe tzn. przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte.

8.6 Zwartość w przestrzeniach metrycznych

8.6.1 Zwartość metryczna i topologiczna

Definicja 8.6.1. *Przestrzeń metryczna (X,d) nazywa się zwarta jeśli z dowolnego ciągu jej elementów można wybrać podciąg zbieżny.*

Twierdzenie 8.6.1. *Przestrzeń metryczna (X,d) jest zwarta (w sensie metrycznym) wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń topologiczna $(X,\mathcal{T}(d))$ jest zwarta.*

Do dowodu implikacji $\Longrightarrow$ potrzebne będą lematy, które poprzedzimy ważną definicją:

Definicja 8.6.2. *Przestrzeń metryczna (X,d) jest* całkowicie ograniczona *jeśli dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ z pokrycia kulami $\{B(x,\epsilon)\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone $B(x_1,\epsilon),\ldots B(x_k,\epsilon)$. Zbiór punktów $\{x_1,\ldots x_k\}$ nazywamy ϵ-siecią.*

Stwierdzenie 8.6.1. *Jeśli przestrzeń metryczna (X,d) jest całkowicie ograniczona to jest ośrodkowa, a więc posiada bazę przeliczalną.*

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $S_n \subset X$ będzie skończoną $\frac{1}{n}$ -siecią. Wtedy $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ jest zbiorem przeliczalnym, gęstym. Istotnie, dowolna kula $B(x,\frac{1}{n})$ zawiera pewien punkt ze zbioru S_n. W przypadku przestrzeni metryzowalnej ośrodkowość pociąga istnienie bazy przeliczalnej p. Stw. 3.3.1 pkt. 3 □

Stwierdzenie 8.6.2. *Jeśli przestrzeń metryczna (X,d) jest metrycznie zwarta, to jest całkowicie ograniczona.*

Dowód. Wykażemy, ze jeśli przestrzeń (X, d) dla pewnego $\epsilon > 0$ nie posiada ϵ-sieci, to istnieje ciąg elementów $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $d(x_i, x_j) > \epsilon$ dla dowolnych $i \neq j$. Ciąg ten nie zawiera więc podciągu zbieżnego, a więc (X, d) nie jest metrycznie zwarta. Ciąg $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konstruujemy indukcyjnie: wybieramy dowolny punkt $x_1 \in X$ i załóżmy, że skonstruowaliśmy pierwsze n wyrazów ciągu: $x_1, \ldots, x_n$ takich, że $d(x_i, x_j) > \epsilon$ dla dowolnych $i \neq j$. Ponieważ założyliśmy, ze nie istnieje ϵ–sieć, a więc w szczególności istnieje element $x_{n+1} \in X$ taki, że $d(x_i, x_{n+1}) > \epsilon$ dla każdego $i \leqslant n$. W ten sposób otrzymujemy ciąg o żądanych własnościach. □

Wniosek 8.6.1. *Jeśli przestrzeń (X, d) jest zwarta (metrycznie) to z każdego pokrycia otwartego przestrzeni $(X, \mathcal{T}(d))$ można wybrać pokrycie przeliczalne.*

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z poprzednich stwierdzeń oraz Wniosku 2.2.1. □

Lemat 8.6.1. *Przestrzeń Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ taka, że z dowolnego jej pokrycia otwartego można wybrać pokrycie przeliczalne jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda zstępująca rodzina podzbiorów niepustych podzbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Dowód wynika natychmiast z Stw. 8.1.1, bowiem zstępująca rodzina niepustych podzbiorów domkniętych jest scentrowana.

$\Longleftarrow$ Jeśli $\{U_s\}_{s \in S}$ jest dowolnym pokryciem otwartym, to można z niego wyjąc pokrycie przeliczalne, więc do dowodu zwartości wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania otwartych pokryć przeliczalną liczbą zbiorów. Niech więc $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie pokryciem przeliczalnym. Zdefiniujmy zbiory $V_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Wystarczy wykazać, że istnieje N takie, że $V_N = X$. Rozważmy w tym celu zstępującą rodzinę zbiorów domkniętych $F_n := X \setminus V_n$. Ponieważ $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} F_n = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} U_n = \emptyset$, więc istnieje N takie, że $\bigcap\limits_{n=1}^{N} F_n = \emptyset$, a więc $V_N = X$. □

Dowód twierdzenia 8.6.1. $\Longleftarrow$ Niech $A_1 := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Zstępująca rodzina zbiorów domkniętych $F_n := \mathrm{cl}(A_n)$ jest scentrowana, a więc $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ zawiera pewien punkt x_0. Wybierając po jednym punkcie z każdego zbioru $x_{n(k)} \in F_k \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ otrzymujemy podciąg zbieżny do x_0.

$\Longrightarrow$ Na mocy lematów 8.6.1 oraz 8.6.1 wystarczy sprawdzić, że dowolna zstępująca przeliczalna rodzina niepustych zbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie. Z założenia dowolnie wybrany ciąg elementów $x_n \in F_n$ posiada podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$, którego granica musi należeć do $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. □

8.6.2 Liczba Lebesgue'a pokrycia

Stwierdzenie 8.6.3. *Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną a $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ jej pokryciem zbiorami $U_s \in \mathcal{T}(d)$. Wówczas istnieje liczba $\lambda > 0$ – zwana liczbą Lebesgue'a[3] pokrycia – spełniająca warunek: dla każdego $x \in X$ istnieje element $s(x) \in S$ taki, że $B(x, \lambda) \subset U_{s(x)}$.*

[3] Henri Léon Lebesgue, Beauvais (Oise, Picardie, Francja 1875 - 1941 Paryż) formulated the theory of measure in 1901 and the following year he gave the definition of the Lebesgue integral that generalises the notion of the Riemann integral. [Mac Tutor]

Dowód. Dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór U_s i liczba $\epsilon_{s,x} > 0$ taka, że $B(x, 2\epsilon_{s,x}) \subset U_s$. Z pokrycia kulami $\{B(x, \epsilon_{s,x})\}_{x \in X}$ można wybrać pokrycie skończone $\{B(x_i, \epsilon_{s_i,x_i})\}_{i=1}^N$. Liczba $\lambda := \min\{\epsilon_{s_1,x_1}, \ldots, \epsilon_{s_N,x_N}\}$ spełnia tezę twierdzenia. Istotnie, dla dowolnego punktu $y \in X$ istnieje kula $B(x_i, \epsilon_{s_i,x_i}) \ni y$. Zatem dla dowolnego $z \in B(y, \lambda)$ mamy $d(x_i, z) \leqslant d(x_i, y) + d(y, z) \leqslant \epsilon_{s_i,x_i} + \lambda \leqslant 2\epsilon_{s_i,x_i}$, a więc $B(y, \lambda) \subset U_{s_i}$. □

8.6.3 Zwarte podzbiory przestrzeni euklidesowych

Stwierdzenie 8.6.4. *Podzbiór zwarty dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) jest domknięty i ograniczony (tzn. zawarty w pewnej kuli). W przestrzeni przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ podzbiór domknięty i ograniczony jest zwarty.*

Dowód. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem zwartym przestrzeni metryzowalnej, to musi być domknięty, bowiem przestrzeń metryzowalna jest Hausdorffa. Zauważmy najpierw, że podzbiór zwarty prostej musi być ograniczony. Wybierzmy punkt $a_0 \in A$ i rozważmy funkcję $d(a_0, \cdot)\colon X \to \mathbb{R}$. Ponieważ A jest zbiorem zwartym istnieje $R > 0$ takie, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $d(a_0, a) \leqslant R$, stąd zbiór A jest zawarty w kuli $B(a_0, R)$.

Niech teraz $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni euklidesowej (metryka euklidesowa!). Wtedy istnieje odcinek $[a, b]$ taki, że $A \subset [a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ kostka $[a, b]^n$ jest zwarta, a więc A jako jej podzbiór domknięty jest zbiorem zwartym. □

Przykład 8.6.1. Zbiór macierzy ortogonalnych $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ jest zwarty. Istotnie, jako zbiór rozwiązań układu równań dwuliniowych jest on domknięty. Ponieważ kolumny macierzy ortogonalnej są wektorami o długości 1, $O(n)$ jest zbiorem ograniczonym, a więc zwartym.

8.7 Zadania

Przykłady

Zad. 60 (Podzbiory płaszczyzny euklidesowej)**.** BCPP Zad. 2.1

Zad. 61 (Zwarte podzbiory płaszczyzny kolejowej)**.** BCPP Zad. 2.2 (A). Analogicznie, scharakteryzować podzbiory zwarte płaszczyzny ze słabą topologią kolejową tzn. topologią bukietu $\bigvee_{0 \leqslant \alpha < \pi} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ rodziny kontinuum prostych euklidesowych z $0 \in \mathbb{R}$ jako punktem wyróżnionym. (p. Seria 3 Zad. 3).

Zad. 62 (Zwarte podzbiory strzałki)**.** Wykazać, że zwarty podzbiór prostej z topologią strzałki ma puste wnętrze oraz jest przeliczalny. Jeśli $C \subset \mathbb{R}$ jest zwarty w topologii strzałki to jest zwarty w topologii euklidesowej oraz $\mathcal{T}_s|C = \mathcal{T}_e|C$.

Zad. 63 (Zwarte podzbiory płaszczyzny Niemyckiego)**.** Wykazać, że jeśli podzbiór płaszczyzny Niemyckiego jest zwarty to jest zwarty w topologii euklidesowej i przecina oś $\{(x, y) \,|\, y = 0\}$ w skończonej liczbie punktów. Podać przykład zbioru spełniającego te warunki, który nie jest zwarty w topologii Niemyckiego. Wykazać, że jeśli $C \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem zwartym w topologii Niemyckiego, to $\mathcal{T}_{Niem}|C = \mathcal{T}_e|C$.

Zad. 64 (Pawie oczka)**.** Zbadać zwartość przestrzeni opisanych w Serii 3 Zad. 6 oraz scharakteryzować ich zwarte podzbiory.

Zad. 65 (Zbiór Cantora)**.** BCPP Zad. 2.22

Własności

Zad. 66. Wykazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy z dowolnego pokrycia zbiorami pewnej bazy $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ można wybrać pokrycie skończone.

Zad. 67 (Odstęp między podzbiorami przestrzeni metrycznej)**.** BCPP Zad. 2.9

Zad. 68 (Oddzielanie podzbiorów zwartych)**.** BCPP Zad. 2.18

Zad. 69. Złożenie przekształceń doskonałych między przestrzeniami Hausdorffa jest przekształceniem doskonałym. Jeśli $f_i : (X_i, \mathcal{T}_{X_i}) \to (Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})$ są przekształceniami doskonałymi dla $i = 1, 2$, to odwzorowanie $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ jest doskonałe.

Zad. 70 (Sumy podzbiorów zwartych)**.** BCPP Zad. 2.16

Zad. 71 (Wykres funkcji)**.** BCPP Zad. 2.17

Uzwarcenie Aleksandrowa

Zad. 72 (Przestrzeń z jednym punktem skupienia)**.** BCPP Zad. 2.20

Zad. 73 (Modele sfery)**.** Rozpatrzmy zbiór $S_n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ i zdefiniujmy w nim topologię jako generowaną przez podzbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory postaci $\{\infty\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$ gdzie $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym. Udowodnij, że

1. Przestrzeń S_n jest zwarta i homeomorficzna ze sferą $S^n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||\mathbf{v}|| = 1\}$.
2. Istnieje homeomorfizm $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$, gdzie $D^n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid ||\mathbf{v}|| \leqslant 1\}$.

Wsk. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa, to dla dowolnego zbioru zwartego $A \subset X$ przestrzeń ilorazowa X/A jest Hausdorffa, a zatem jeśli przestrzeń X jest zwarta to przestrzeń X/A jest też zwarta.

Zad. 74. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią lokalnie zwartą, to dla dowolne jej uzwarcenie posiada dokładnie jeden morfizm w uzwarcenie jednopunktowe. Zilustrować to na kilku przykładach.

Zad. 75. Zauważyć, że:

1. płaszczyzna rzutowa jest jednopunktowym uzwarceniem otwartej wstęgi Möbiusa;
2. torus i butelka Kleina są uzwarceniami płaszczyzny euklidesowej. Czym są narosty tych uzwarceń?

Rozdział 9

Zupełność

9.1 Zupełność i zwartość przestrzeni metrycznych

Znane z Analizy Matematycznej pojęcie ciągu Cauchy liczb przenosi się na dowolne przestrzenie metryczne:

Definicja 9.1.1. *Ciąg punktów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) , nazywa się ciągiem Cauchy jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje liczba $n(\epsilon)$ taka, że dla dowolnych wskaźnikow $r, s > n(\epsilon)$ zachodzi nierówność $d(x_r, x_s) < \epsilon$, czyli $d(x_r, x_s) \to 0$.*

Zauważmy kilka prostych własności ciągów Cauchy, znanych z Analizy Matematycznej. Ich dowody w przypadku dowolnych przestrzeni metrycznych są analogiczne.

Stwierdzenie 9.1.1. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy:*

1. *Dowolny ciąg zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy.*
2. *Dowolny podciąg ciągu Cauchy jest ciągiem Cauchy.*
3. *Jeśli ciąg Cauchy zawiera podciąg zbieżny do pewnej granicy, to cały ciąg jest zbieżny do tej granicy.*

Zauważmy, że nie każdy ciąg Cauchy musi posiadać granicę; np. w podzbiorze $\mathbb{R}$ składającym się z punktów postaci $\frac{1}{n}$ z metryką euklidesową ciąg $x_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem Cauchy, ale w tej przestrzeni nie ma granicy.

Przypomnijmy, że w dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ punktem skupienia zbioru $A \subset X$ nazywamy dowolny punkt $x \in X$ taki, że w dowolnym otoczeniu $U \ni x$ leżą punkty zbioru A różne od x_0 (ten punkt nie musi należeć do A !).

Stwierdzenie 9.1.2. *Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy w przestrzeni metrycznej (X, d). Dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje punkt $x \in X$ oraz liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_k \in B(x, \epsilon)$ dla każdego $k > n_0$. Jeśli zbiór $\{x_1, x_2, \dots\}$ posiada punkt skupienia x_0, to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x_0.*

Dowód. Niech $\epsilon > 0$. Z definicji ciągu Cauchy istnieje n_0 takie, że dla każdego $n, m \geqslant n_0$ zachodzi $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w kuli $B(x_{n_0}, \epsilon)$.

Jeśli zbiór $\{x_n\}$ posiada punkt skupienia x_0, to w każdej kuli $B(x_0, \frac{1}{k})$ można wybrać element $x_{n_k} \in B(x_0, \frac{1}{k})$. Elementy te tworzą podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do x_0, a więc ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest także zbieżny do x_0. □

Definicja 9.1.2. *Przestrzeń metryczna jest* zupełna *jeśli dowolny ciąg Cauchy jej elementów jest zbieżny (tzn. posiada granicę).*

Stwierdzenie 9.1.3. *Jeśli $h\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest bijekcją zachowującą odległość (tzn. izometrią) oraz (X, d) jest przestrzenią zupełną, to (Y, d_Y) też jest przestrzenią zupełną.* □

Zwarta przestrzeń metryczna jest oczywiście zupełna, a z Twierdzenia 8.6.1 wynika, że dowolna metryka wyznaczająca topologię zwartą jest zupełna. Zachodzi nawet następujące nieco silniejsze twierdzenie:

Stwierdzenie 9.1.4. *Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną. Załóżmy, że istnieje liczba $r > 0$ taka, że dla każdego punktu $x \in X$ domknięcie kuli $\mathrm{cl}(B(x, r))$ jest zbiorem zwartym. Wtedy (X, d) jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy. Z Stwierdzenia 9.1.2 wynika, że prawie wszystkie elementy tego ciągu leżą w pewnej zwartej kuli $\mathrm{cl}(B(x, r))$, a więc ten ciąg jest zbieżny. □

Zupełność jest własnością metryczną pokrewną topologicznej zwartości, co świetnie ilustruje kolejne twierdzenie, analogiczne do Lematu 8.6.1. Należy jednak zauważyć, że w ogólności zupełność nie jest własnością topologiczną: dwie metryki mogą być równoważne, ale jedna zupełna a druga nie. Np. zbiór liczb postaci $\frac{1}{n}$ z metryką euklidesową nie jest zupełny, natomiast z metryką dyskretną jest zupełny, bo każdy ciąg Cauchy jest od pewnego miejsca stały.

Definicja 9.1.3. *Niech A będzie podzbiorem w przestrzeni metrycznej (X, d).* Średnicą zbioru *A nazywa sie liczbę (lub $+\infty$) $d(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$*

Lemat 9.1.1. *Dla dowolnego podzbioru A w w przestrzeni metrycznej (X, d) zachodzi równość średnic: $d(A) = d(\mathrm{cl}(A))$*

Dowód. Niech $a, b \in \bar{A}$ a $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami elementów zbioru A zbieżnymi odpowiednio do punktów a i b. Z nierówności trójkąta wynika, że:

$$d(a, b) \leqslant d(a, a_n) + d(a_n, b) \leqslant d(a, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b)$$

dla każdego $\epsilon > 0$ i dostatecznie dużych $n > n_0$ zachodzi nierówność $d(a, b) \leqslant d(a_n, b_n) + 2\epsilon$, a więc $d(A) = d(\mathrm{cl}(A))$ □

Twierdzenie 9.1.1 (Warunek Cantora[1]). *Przestrzeń (X, d) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie.*

[1] Georg Cantor (St Petersburg 1845 – 1918 Halle) founded set theory and introduced the concept of infinite numbers with his discovery of cardinal numbers. He also advanced the study of trigonometric series. [Mac Tutor]

Dowód. $\Longrightarrow$ Niech (X, d) będzie przestrzenią zupełną. Niech $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ będzie zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych takich, że $d(F_i) \to 0$. Wybierając po jednym punkcie $x_n \in F_n$ otrzymujemy ciąg Cauchy. Na mocy zupełności (X, d) posiada on granicę, która musi należeć do $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie. Jeśli $\{x_i\}$ jest ciągiem Cauchy, to średnice zstępujących zbiorów domkniętych $F_n := \mathrm{cl}\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$ zbiegają do zera na mocy Lematu 9.1.1, a więc $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0$ i punkt z tego zbioru jest granicą ciagu $\{x_i\}$. $\square$

Twierdzenie 9.1.2. *Przestrzeń (X, d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie ograniczona i zupełna.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jak zauważyliśmy dowolna przestrzeń zwarta jest zupełna, a z dowolnego pokrycia kulami $\{B(x, \epsilon)\}_{x \in X}$ można wybrać pokrycie skończone.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że (X, d) jest zupełna i całkowicie ograniczona a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem z którego mamy wybrać podciąg zbieżny. Skonstruujmy indukcyjnie zstępujący ciąg zbiorów domkniętych, w którego przecięciu będzie znajdować się granica pewnego podciągu. Pokryjmy przestrzeń X kulami o promieniu 1: $\{B(x, 1)\}_{x \in X}$ i wybierzmy z niego kule w której znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Załóżmy, że skonstruowaliśmy już ciąg kul domkniętych $\bar{B}(x_1, 1), \ldots, \bar{B}(x_k, \frac{1}{k})$ takich, że w przecięciu $F_k := \bar{B}(x_1, 1) \cap \ldots, \cap B(x_k, \frac{1}{k})$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokryjmy X kulami $\{B(x, \frac{1}{k+1})\}_{x \in X}$. Istnieje wśród nich kula, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ znajdujących się w F_k. Otrzymaliśmy więc zstępujący ciąg zbiorów domkniętych $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ o średnicach zbiegających do 0. Na mocy warunku Cantora 9.1.1 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ a z konstrukcji wynika, że punkt $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ jest punktem skupienia zbioru u $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zatem granicą pewnego podciągu. $\square$

9.2 Twierdzenie Baire'a i topologiczna zupełność

Zupełność przestrzeni metrycznej (X, d) pociąga pewną ważną własność topologii $\mathcal{T}(d)$, która może być przyjęta za definicję zupełności w sensie topologicznym. Zanim sformułujemy odpowiednie twierdzenie dotyczące przestrzeni zupełnych, zauważmy pewną prostą własność otwartych podzbiorów gęstych dowolnej przestrzeni topologicznej:

Stwierdzenie 9.2.1. *Przecięcie skończonej rodziny podzbiorów otwartych gęstych w pewnej przestrzeni topologicznej jest zbiorem otwartym i gęstym.*

Dowód. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Korzystając z indukcji po liczbie zbiorów, wystarczy pokazać, że przecięcie dwóch podzbiorów otwartych gęstych $U_1, U_2 \subset X$ jest zbiorem otwartym i gęstym. Otwartość $U_1 \cap U_2$ wynika z aksjomatów topologii. Żeby wykazać, że zbiór jest gęsty wystarczy pokazać, że dowolny niepusty podzbiór otwarty ma z nim niepuste przecięcie. Dla dowolnego niepustego podzbioru $U \in \mathcal{T}$ mamy:
$U \cap (U_1 \cap U_2) = (U \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. $\square$

Nawet w przestrzeni metrycznej przecięcie nieskończonej rodziny zbiorów otwartych gęstych nie musi być zbiorem gęstym. Dla dowolnej liczby wymiernej $q \in \mathbb{Q}$ definiujemy zbiór $U_q := \mathbb{Q} \setminus \{q\}$. Oczywiście $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} U_q = \emptyset$. W przestrzeni zupełnej zachodzi jednak następujące ważne twierdzenie:

Twierdzenie 9.2.1 (R. Baire[2]). *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to przecięcie dowolnej rodziny $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów otwartych i gęstych w topologii $\mathcal{T}(d)$ jest zbiorem gęstym.*

Dowód. Niech $V \in \mathcal{T}(d)$ będzie niepusty. Trzeba pokazać, że $V \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \emptyset$. Z gęstości U_i wnioskujemy, że dla każdego i zachodzi $V \cap U_i \neq \emptyset$. Można więc wybrać punkt $x_1 \in V \cap U_1 \neq \emptyset$ oraz promień $r_1 > 0$ taki, że $\bar{B}(x_1, r_1)) \subset V \cap U_1$. W ten sam sposób skonstrujemy indukcyjnie zstępujący ciąg domknięć kul: $\bar{B}(x_i, r_i) \subset B(x_{i-1}, r_{i-1}) \cap U_{i-1}$, takich, że $r_i \to 0$. Z zupełności (X, d) mamy

$$V \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}(x_i, r_i) \neq \emptyset.$$

$\square$

Wniosek 9.2.1. *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to suma dowolnej rodziny $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów domkniętych i brzegowych w topologii $\mathcal{T}(d)$ jest zbiorem brzegowym.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z praw de Morgana, bowiem dopełnienia zbiorów domkniętych i brzegowych są zbiorami otwartymi, gęstym. Mamy więc $X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i)$ jest zbiorem gęstym a więc $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ jest zbiorem brzegowym. $\square$

Twierdzenie Baire'a i wnioski z niego, stosowane do przestrzeni odwzorowań ma wiele zastosowań w Analizie Matematycznej i Topologii Różniczkowej.

9.3 Zupełność a konstrukcje przestrzeni metrycznych

Omawiając konstrukcje przestrzeni topologicznych (Rozdział 4) zauważaliśmy które z nich zachowują metryzowalność, pokazując w jaki sposób mogą być przeprowadzane na przestrzeniach metrycznych. W przypadku podprzestrzeni było to po prostu obcięcie metryki, przestrzenie ilorazowe przestrzeni metryzowalnych nie są często metryzowalna, a nawet jeśli są, to nie dziedziczą naturalnej metryki. W przypadku nieskończonego produktu kartezjańskiego i sumy rozłącznej wyjściowe metryki musiały być zamienione na metryki ograniczone z góry przez 1. Zauważmy jednak, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to metryka "obcięta" $d'(x, y) := \min(d(x, y), 1)$ nie tylko wyznacza tę samą topologię, co d, ale także wyznacza tę samą klasę ciągów Cauchy, a więc jeśli d jest zupełna to i d' jest zupełna.

[2] René-Louis Baire (Paryż 1874 - 1918 Chambéry, Francja) worked on the theory of functions and the concept of a limit. [Mac Tutor]

Stwierdzenie 9.3.1 (Podprzestrzenie zupełne)**.** *Jeśli podprzestrzeń przestrzeni metrycznej jest zupełna, to jest domknięta. Dowolna domknięta podprzestrzeń przestrzeni zupełnej jest zupełna.*

Dowód. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) takim, że przestrzeń metryczna $(A, d|A)$ jest zupełna. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów A zbieżnym do elementu $x_0 \in A$. Skoro $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w (X, d) , to jest ciągiem Cauchy, a więc posiada granicę w A. Ponieważ każdy ciąg posiada co najwyżej jedną granicę, $x_0 \in A$, a więc A jest zbiorem domkniętym.

Jeśli podprzestrzeń $(A, d|A) \subset (X, d)$ przestrzeni zupełnej jest domknięta to dowolny ciąg Cauchy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę w X, która na mocy domkniętości zbioru A należy do tego zbioru. □

Stwierdzenie 9.3.2 (Zupełność produktu)**.** *Przeliczalny (w tym skończony) produkt produkt przestrzeni metrycznych jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są przestrzeniami zupełnymi.*

Dowód. Niech $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. Przypomnijmy, że w zbiorze $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definiujemy metrykę:

$$d'(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i, y_i)$$

gdzie $d'_i(x_i, y_i) := \min(d_i(x_i, y_i), 1)$.[3]

Jeśli produkt $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ jest przestrzenią zupełną, to dowolna podprzestrzeń (X, d'_i) (z zatem też (X, d_i) jest zupełna bowiem (po przeskalowaniu metryki czynnikiem $\frac{1}{2^n}$) jest izometryczna z podzbiorem domkniętym $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ (p.Lemat 5.4.1).

Odwrotnie, załóżmy że wszystkie przestrzenie $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ są zupełne. Niech $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy. Z definicji metryki produktowej wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ ciąg $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy w (X_k, d_k), a więc jest zbieżny do pewnego punktu x_k^0. Pokażemy, że ciąg $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x^0. Niech $\epsilon > 0$, dla dostatecznie dużych N i $n > N$ zachodzą nierówności:

$$d'(x^n, x^0) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i^n, x_j^0) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d'(x_i^n, x_j^0) + \frac{1}{2}\epsilon \leqslant \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

□

Stwierdzenie 9.3.3 (Zupełność sumy)**.** *Suma rozłączna przestrzeni zupełnych jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są przestrzeniami zupełnymi.* □

[3] W przypadku skończonego produktu $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_k, d_k)$, można metrykę zdefiniować prościej: $d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$.

9.4 Uzupełnianie przestrzeni metrycznych

Nie każda przestrzeń metryczna jest zupełna, ale każdą można izometrycznie zanurzyć na podzbiór gęsty pewnej przestrzeni zupełnej, zwanej uzupełnieniem.Jest to pojęcie pokrewne uzwarceniu. Przypomnijmy konstrukcję liczb rzeczywistych, biorącą za punkt wyjścia liczby naturalne z zerem $\mathbb{N}$, w którym jest zadane dodawanie i porządek:

- Z liczb naturalnych konstruujemy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ przez dodanie liczb ujemnych (klas równoważności par liczb całkowitych) tak, aby wykonalne było działanie odejmowania.
- Do zbioru liczb całkowitych dołączamy ułamki, tworząc zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, tak aby działanie dzielenia przez liczby różne od zera było wykonalne. Liczby wymierne są reprezentowane przez klasy równoważności par liczb całkowitych, w których druga jest różna od zera.
- Do zbioru liczb wymiernych dołączamy granice ciągów Cauchy. Liczby rzeczywiste są reprezentowane przez klasy równoważności ciągów Cauchy.

W każdym z tych kroków dokonujemy "ulepszenia" struktury. Podobnie postąpimy uzupełniając dowolną przestrzeń metryczną.

Definicja 9.4.1. *Uzupełnieniem przestrzeni metrycznej (X, d_X) nazywamy zupełną przestrzeń metryczną (Z, d_Z) wraz z zachowującym odległość odwzorowaniem $\lambda\colon (X, d_X) \to (Z, d_Z)$ którego obraz jest podzbiorem gęstym w (Z, d_Z).*

Pokażemy jak skonstruować uzupełnienie dowolnej przestrzeni metrycznej, analogicznie do konstrukcji liczb rzeczywistych z liczb wymiernych oraz, że uzupełnienie wyznaczone jest jednoznacznie z dokładnością do izometrii. Niech (X, d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Rozważmy zbiór $C_X \subset \prod_{n=1}^{\infty} X$ składający się z ciągów Cauchy. Zdefiniujemy odległość (jeszcze nie metrykę!) między dwoma ciągami Cauchy: $d^\wedge(\{x_n\}, \{y_n\}) := \lim_{i,j\to\infty} d(x_i, y_j)$. Zauważmy, że jeśli ciągi posiadają granice, odpowiednio x_0, y_0, to

$$d^\wedge(\{x_n\}, \{y_n\}) = d(x_0, y_0).$$

Funkcja $d^\wedge$ nie jest zatem metryką w C_X, bo odległość między dwoma różnymi ciągami Cauchy zbieżnymi do tej samej granicy wynosi 0. Żeby usunąć ten mankament w zbiorze C_X zdefiniujemy relację równoważności: $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje liczba $n(\epsilon)$ taka, że $d(x_i, y_j) < \epsilon$ dla dowolnych $i, j > n(\epsilon)$. Odległość w zbiorze klas równoważności $C_X/\sim$ definiujemy następująco:

$$d^\wedge([\{x_n\}], [\{y_n\}]) := \lim_{i,j\to\infty} d(x_i, y_j)$$

Twierdzenie 9.4.1. *Niech (X, d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Zbiór $X^\wedge := C_X/\sim$ wyposażony w odwzorowanie $d^\wedge\colon X^\wedge \times X^\wedge \to \mathbb{R}$ jest zupełną przestrzenią metryczną. Odwzorowanie diagonalne $\iota\colon X \to X^\wedge$ zachowuje odległość a jego obraz jest podzbiorem gęstym w przestrzeni topologicznej $(X^\wedge, \mathcal{T}_{d^\wedge})$.*

Przestrzeń metryczną $(X^\wedge, d^\wedge)$ wraz z odwzorowaniem $\iota\colon (X,d) \to (X^\wedge, d^\wedge)$ nazywamy *uzupełnieniem* przestrzeni metrycznej (X,d). Wykażemy, że uzupełnienie jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do izometrii. Zauważmy najpierw następującą jego własność "uniwersalną".

Stwierdzenie 9.4.1. *Jeśli dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) i odwzorowania ciągłego $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$, gdzie (Z,d_Z) jest przestrzenią zupełną istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe $f^\wedge\colon (X^\wedge, d_X^\wedge) \to (Y,d_Y)$ takie, że $f^\wedge \iota = f$.*

Dowód. Definiujemy $f^\wedge([\{x_n\}]) := \lim\{f(x_n)\}$. □

Wniosek 9.4.1. *Dowolne dwa uzupełnienia danej przestrzeni metrycznej są izometryczne.* □

Szczegółowe dowody twierdzeń można znaleźć w notatkach z Columbia University.

9.5 Twierdzenie Banacha o punktach stałych

Definicja 9.5.1. *Niech $f : X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem zbioru X w siebie. Punktem stałym f nazywamy taki element $x \in X$, że $f(x) = x$.*

Twierdzenia o istnieniu punktów stałych odgrywają ogromną rolę w wielu działach matematyki. Poniższe twierdzenie mówi nie tylko o istnieniu punktów stałych dla ważnej klasy odwzorowań, ale dostarcza także algorytmu jego poszukiwania.

Definicja 9.5.2. *Niech $(X,d_X), (Y,d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywa się odwzorowaniem zbliżającym jeśli istnieje liczba $0 \leqslant c < 1$ taka, że dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in X$ zachodzi nierówność $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < c d_X(x_1,x_2)$.*

Stwierdzenie 9.5.1. *Dowolne odwzorowanie zbliżające jest ciągłe.*

Dowód. Zauważmy, że przekształcenie zbliżające musi być ciągłe bowiem przeprowadza ciągi zbieżne na ciągi zbieżne: dla dowolnego ciagu zbieżnego $x_n \to x_0$ i dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi nierówność: $d(f(x_n), f(x_0)) < cd(x_n, x_0) < \epsilon$, a więc $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Twierdzenie 9.5.1 (S. Banach[4]). *Jeśli (X,d) jest zupełną przestrzenią metryczną a $f\colon X \to X$ odwzorowaniem zbliżającym, to istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = x_0$ (czyli f posiada dokładnie jeden punkt stały).*

Dowód. Żeby znaleźć punkt stały x_0, wybierzmy dowolny punkt $x \in X$ i rozpatrzmy ciąg $\{x_n\}$ określony rekurencyjnie $x_1 := x$, $x_{n+1} := f(x_n)$. Wykażemy, że jest to ciąg Cauchy: załóżmy, że $n < m$. Wtedy:

$$d(x_n, x_m) = d(f^{(n)}(x), f^{(m)}(x)) \leqslant d(f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)) + \cdots + d(f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x)) =$$

[4] Stefan Banach (Kraków 1892 - 1945 Lwów) Founded modern functional analysis and made major contributions to the theory of topological vector spaces. In addition, he contributed to measure theory, integration, and orthogonal series. [Mac Tutor]

$$= c^n d(x, f(x)) + \cdots + c^m d(x, f(x)) = (c^n + \cdots + c^m) d(x, f(x)) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d(x, f(x)).$$

Ponieważ $0 \leqslant c < 1$ a więc dla dostatecznie dużych liczby n odległość $d(x_n, x_m)$ jest dowolnie mała. Z zupełności przestrzeni (X, d) wynika, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do pewnej granicy x_0, a zatem ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do $f(x_0)$. Zauważmy jednak, że z definicji ciągu $\{x_n\}$ wynika, że $f(x_n) = x_{n+1}$, a więc $f(x_0) = x_0$. □

Uwaga 9.5.1. Inne słynne twierdzenie o punktach stałych to twierdzenie Brouwera[5] które powiada, że dowolne odwzorowanie ciągłe domkniętej kuli euklidesowej $\bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ w siebie $f\colon \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$ posiada punkt stały. Dla $n = 1$ twierdzenie Brouwera sprowadza się do znanej z Analizy Matematycznej I własności Darboux. Twierdzenie Brouwera posiada wiele ważnych uogólnień.

9.6 Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha

Definicja 9.6.1. *Przestrzeń wektorową* $\mathbf{V}$ *nad ciałem* $K = \mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$ *nazywamy* unormowaną *jeśli dana jest funkcja* $\|\cdot\|\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *taka, że*

1. $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ *oraz* $\|\mathbf{v}\| = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\mathbf{v} = 0$,
2. *Dla dowolnego skalara* λ *i wektora* $\mathbf{v}$ *zachodzi równość* $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$,
3. *Dla dowolnych wektorów* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ *zachodzi nierówność (trójkąta)* $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Norma w przestrzeni wektorowej $\|\cdot\|$ zadaje metrykę w zbiorze $d_{\|\cdot\|}\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną jako norma różnicy wektorów $d_{\|\cdot\|}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Zauważmy, że metryka ta jest przesuwalna tzn. przesunięcie o dowolny wektor jest izometrią i przeprowadza kule na kule. Równoważność metryk pochodzących od norm można opisać w terminach tych norm - nory wyznaczające równoważne metryki nazywamy też równoważnymi.

Stwierdzenie 9.6.1. *Niech* $\|\cdot\|_i\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *dla* $i = 1, 2$ *będą dwoma normami na przestrzeni wektorowej* $\mathbf{V}$ *i oznaczmy przez* $\mathcal{T}_i$ *topologie wyznaczone przez metryki pochodzące od tych norm. Topologia* $\mathcal{T}_1$ *jest słabsza od topologii* $\mathcal{T}_2$ *(tzn.* $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$*) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje* $C > 0$ *takie, że dla każdego wektora* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *zachodzi nierówność* $\|\mathbf{v}\|_1 \leqslant C \|\mathbf{v}\|_2$.

Dowód. Jeśli zachodzi zawieranie topologii $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ to dla kuli jednostkowej w sensie metryki wyznaczonej przez pierwszą normę $B_1(0,1)$ istnieje liczba $r > 0$ taka, że $B_2(0,r) \subset B_1(0,1)$. Dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \neq 0$ rozpatrzmy wektor $\mathbf{w} := \frac{r\mathbf{v}}{2\|\mathbf{v}\|_2}$; oczywiście $\mathbf{w} \in B_2(0,r) \subset B_1(0,1)$ czyli $\|\mathbf{w}\|_1 \leqslant 1$, a więc $\|\mathbf{v}\|_1 \leqslant \frac{2}{r}\|\mathbf{v}\|_2$., czyli możemy przyjąć $C := \frac{2}{r}$.

Odwrotna implikacja wynika natychmiast z inkluzji kul - ze względu na przesuwalność topologii wystarczy rozpatrywać kule o środku w $0 \in \mathbf{V}$. □

Wniosek 9.6.1. *Normy* $\|\cdot\|_i\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *dla* $i = 1, 2$ *są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby* $B, C > 0$ *takie, że dla dowolnego wektora* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *zachodzą nierówności* $\frac{1}{B}\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant \|\mathbf{v}\|_1 \leqslant C\|\mathbf{v}\|_2$. □

[5] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Overschie 1881 - 1966 Blaricum, Holandia) A Dutch mathematician best known for his topological fixed point theorem. He founded the doctrine of mathematical intuitionism, which views mathematics as the formulation of mental constructions that are governed by self-evident laws. [Mac Tutor]

Twierdzenie 9.6.1 (Równoważność norm)**.** *Jeśli* $\mathbf{V}$ *jest skończenie wymiarową rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią wektorową to dowolne dwie normy są równoważne.*

Dla dowodu twierdzenia wystarczy rozpatrywać rzeczywiste przestrzenie unormowane, bo dowolna przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$ jest jednocześnie przestrzenią nad podciałem $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, a jej wymiar jest dwukrotnie większy.

Niech $\mathbf{V}$ będzie dalej skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Wybierzmy bazę $\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ i zdefiniujmy normę $\|\mathbf{v}\|_{\sup} := \sup\{|\lambda_i| \mid \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j\}$. Wykażemy, że dowolna norma $\|\cdot\|$ jest równoważna z normą $\|\cdot\|_{\sup}$ tzn. istnieją stałe $B, C > 0$ takie, że dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ zachodzą nierówności $\|\mathbf{v}\| \leqslant B\|\mathbf{v}\|_{\sup}$ oraz $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|$.

Lemat 9.6.1. *Dla dowolnej normy* $\|\cdot\|$ *istnieje liczba* $B > 0$ *taka, że dla każdego* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *zachodzi nierówność* $\|\mathbf{v}\| \leqslant B\|\mathbf{v}\|_{\sup}$*, a więc odwzorowanie* $\|\cdot\| \colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *jest ciągłe w normie* $\|\cdot\|_{\sup}$.

Dowód. Niech $\mu := \max\{\|\mathbf{v}_1\|, ..., \|\mathbf{v}_n\|\}$. Wtedy

$$\|\mathbf{v}\| = \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i^k| \|\mathbf{v}_j\| \leqslant \mu \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant B\|\mathbf{v}\|_{\sup}, \text{ gdzie } \quad B := n\mu$$

$\square$

Lemat 9.6.2. *Dowolna kula domknięta w normie* $\|\cdot\|_{\sup}$*, czyli zbiór* $D(\mathbf{v}, r) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \mid \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant r\}$ *jest zbiorem zwartym w topologii* $\mathcal{T}(d_{\|\cdot\|_{\sup}})$.

Dowód. Wystarczy rozważyć kule o środku w punkcie $\mathbf{v} = 0$. Odwzorowanie liniowe $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e) \to (\mathbf{V}, \mathcal{T}(d_{\|\cdot\|})$ takie, że $f(\lambda_1, .., \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_j$ jest ciągłe na mocy poprzedniego lematu, a więc kula $D(\mathbf{v}, r) = f([-r, r] \times ... \times [-r, r])$ jest zwarta jako obraz zbioru zwartego. $\square$

Lemat 9.6.3. *Istnieje* $C > 0$ *takie, że dla każdego wektora* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *zachodzi nierówność* $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|_{\sup}$

Dowód. Niech $c := \inf\{\|\mathbf{v}\| \mid \|\mathbf{v}\|_{\sup} = 1\}$. Ciągłość normy $\|\cdot\|$ w normie $\|\cdot\|_\infty$ oraz zwartość kuli w normie $\|\mathbf{v}\|_{\sup}$ implikują, że $C > 0$. Dla każdego wektora $\mathbf{v} \neq 0$,

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|_{\sup}} \|\mathbf{v}\|_{\sup} \geqslant c\|\mathbf{v}\|_{\sup},$$

a więc $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|$, gdzie $C := \frac{1}{c}$. $\square$

Dowód twierdzenia o normach 9.6.1. Twierdzenie wynika z lematów 9.6.1, 9.6.3 bowiem jeśli dwie normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ są równoważne, to ciąg jest Cauchy ze względu na normę $\|\cdot\|_1$ wtedy i tylko wtedy gdy jest Cauchy ze względu na normę $\|\cdot\|_2$, a ciąg $\mathbf{w}_i \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \mathbf{w}$ jest zbieżny ze względu na normę $\|\cdot\|_1$ do wektora $\mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{w}_i \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \mathbf{w}$. $\square$

Zauważmy, że zbieżność w sensie normy $\|\cdot\|_\infty$ oznacza zbieżność współrzędnych wektorów ciągu w wybranej bazie, a na mocy twierdzenia w dowolnej bazie.

Nie każda przestrzeń unormowana jest zupełna. Nietrudno się przekonać, że opisana w Rozdziale 8.4 konstrukcja uzupełniania zastosowana do przestrzeni unormowanej daje także przestrzeń unormowaną, zupełną.

Definicja 9.6.2. *Unormowana przestrzeń zupełna nazywa się przestrzenią Banacha.*

Przestrzenie Banacha odgrywają ogromną rolę w wielu działach analizy matematycznej. Do najważniejszych przykładów należą przestrzenie funkcji. Poznamy najprostszy przykład. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ rozważmy zbiór odwzorowań ciągłych i ograniczonych o wartościach rzeczywistych (oznaczenie $C_b(X,\mathbb{R})$) lub zespolonych (oznaczenie $C_b(X,\mathbb{C})$). Dla dowolnej funkcji ograniczonej $f\colon X \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ definiujemy $\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Stwierdzenie 9.6.2. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ przestrzeń funkcji $C_b(X,\mathbb{K})$ wyposażona w odwzorowanie $\|\cdot\|_{\sup}\colon C_b(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Przestrzeń funkcji $C(X)$ jest oczywiście przestrzenią wektorową jeśli położymy: $(f_1+f_2)(x) := f_1(x)+f_2(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$. To, że odwzorowanie $\|\cdot\|_{\sup}\colon C_b(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ jest normą wynika natychmiast z własności wartości bezwzględnej. Pozostaje wykazać, że $C_b(X,\mathbb{K})$ z metryką wyznaczoną przez normę $\|\cdot\|_{\sup}$ jest zupełna. Niech $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy w $C_b(X,\mathbb{K})$. Wynika stąd, że dla każdego $x \in X$ ciąg wartości $f_n(x)$ jest ciągiem Cauchy liczb rzeczywistych lub zespolonych, a więc ma granicę, którą oznaczymy $f(x)$. Otrzymujemy w ten sposób funkcję $f : X \to \mathbb{K}$, która oczywiście jest ograniczona; pozostaje sprawdzić jej ciągłość. Wynika to z następnego, nieco ogólniejszego lematu w którym nie zakładamy ograniczoności funkcji. □

Lemat 9.6.4. *Niech $\{f_n : X \to Y\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych określonych na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ o wartościach w przestrzeni metrycznej (Y, d) a $f\colon X \to Y$ taką funkcją, że ciąg $\sup\{d(f_n(x), f(x))\,|x \in X\}$ jest zbieżny do zera – (tzn. ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do f). Wtedy f jest odwzorowaniem ciągłym.*

Dowód. Niech $x_0 \in X$ i $\epsilon > 0$. Trzeba wskazać otoczenie $U \ni x_0$ takie, że dla każdego $x \in U$ zachodzi nierówność $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Dla dowolnego $x \in U$ zachodzi nierówność:

$$d(f(x), f(x_0)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)).$$

Dobierając dostatecznie duże n zapewnimy, że pierwszy i trzeci składnik bedą dowolnie małe, w szczególności $\frac{1}{3}\epsilon$, dla wszystkich $x \in X$. Z kolei dzięki ciągłości funkcji f_n możemy znaleźć otoczenie $U \ni x_0$ takie, że $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$ dla $x \in U$, co kończy dowód ciągłości f. □

9.7 Zadania

Zad. 76 (Metryka kolejowa i rzeczna)**.** BCPP 3.2

Zad. 77 (Ciągi liczb naturalnych)**.** Czy przestrzeń określona w zadaniu BCPP 1.8 jest zupełna ?

Zad. 78. Niech $A \subset X$ będzie gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) takim, że dowolny ciąg Cauchy punków ze zbioru A posiada granicę w X. Wykazać, że (X, d) jest przestrzenią zupełną.

Zad. 79 (Przestrzenie przeliczalne)**.** BCPP Zad. 3.6.

Zad. 80. Jeśli $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest ciagłą surjekcją oraz

$$\exists_{c>0} \forall_{x_1,x_2 \in X}\, d_X(x_1, x_2) \leqslant c d_Y(f(x_1), f(x_2))$$

(w szczególności jeśli f jest izometrią) to jeśli (X, d_X) jest zupełna, to (Y, d_Y) jest zupełna.

Zad. 81. Jeśli (X, d_X) jest zupełna, to (X, d') gdzie $d'(x_1, x_2) := \min(d_X(x_1, x_2), 1)$ też jest zupełna. Uogólnić ten fakt podając warunki na funkcję $\phi\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gwarantujące, że $d_\phi(x_1, x_2) := \phi(d(x_1, x_2))$ jest metryką oraz, że jest zupełna.(p. zadanie BCPP 1.5)

Zad. 82. Zbadać zachowanie zupełności ze względu na operacje na przestrzeniach metrycznych: podprzestrzeń, przeliczalny iloczyn kartezjański, suma prosta.

Zad. 83 (Metryzowalność w sposób zupełny)**.** BCPP 3.10

Zad. 84 (Tw. Baire'a)**.** BCPP 3.13

Zad. 85 (Tw. Baire'a)**.** BCPP 3.14

Zad. 86 (Tw. Baire'a)**.** BCPP 3.15

Zad. 87 (Punkty stałe)**.** BCPP 3.27

Zad. 88 (Punkty stałe)**.** BCPP 3.28

Zad. 89. Nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha nie ma przeliczalnej bazy.

Zad. 90. Skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni unormowanej jest jej domkniętym podzbiorem.

Zad. 91. W przestrzeni wielomianów nie istnieje zupełna norma.

Zad. 92. Zastosuj twierdzenie Baire'a do dowodu, że płaszczyzna Niemyckiego nie jest przestrzenią normalną.

Rozdział 10

Przestrzenie odwzorowań ciągłych

10.1 Topologia zbieżności punktowej

Przez $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ będziemy oznaczać zbiór przekształceń ciągłych $(X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$, który można utożsamiać z podzbiorem produktu kartezjańskiego $Y^X = \prod_{x\in X} Y_s$ gdzie dla każdego $x \in X$, $Y_x = Y$. Zbiór $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ można więc rozpatrywać z topologią podprzestrzeni produktu kartezjańskiego. Topologia ta nazywa się topologią zbieżności punktowej, bo jak wiadomo zbieżność ciągu elementów iloczynu kartezjańskiego jest równoważna zbieżności wszystkich ciągów współrzędnych. Topologię tę oznaczamy $\mathcal{T}_p$ i nazywamy *topologią zbieżności punktowej.* Topologia ta jest całkowicie wyznaczona przez topologię w Y, a topologia w X określa jedynie jakie funkcje należą do $\mathrm{Map}\,(X,Y)$.

10.2 Topologia zwarto-otwarta

Definicja 10.2.1 (Topologia zwarto – otwarta)**.** $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ *– przestrzenie Hausdorffa.* Topologią zwarto – otwartą, *oznaczaną* $\mathcal{T}_{co}$ *nazywamy topologię w zbiorze* $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ *generowaną przez rodzinę zbiorów*

$$\{\langle A,W\rangle \mid A\subset X \textit{ zwarty},\ W\subset Y \textit{ otwarty}\},$$

gdzie $\langle A,W\rangle := \{f\in \mathrm{Map}\,(X,Y)\ | f(A)\subset W\}$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę podzbiorów wynika, że bazą topologii zwarto – otwartej są skończone przecięcia zbiorów postaci $\langle A,W\rangle$: $\langle A_1,W_1\rangle\cap\cdots\cap\langle A_n,W_n\rangle$ gdzie $A_i\subset X$ są podzbiorami zwartymi, a $W_i\subset Y$ podzbiorami otwartymi.

Stwierdzenie 10.2.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa zachodzi inkluzja topologii* $\mathcal{T}_p\subset\mathcal{T}_{co}$*, a jeśli* $(X,\mathcal{T})$ *jest przestrzenią dyskretną, to* $\mathcal{T}_p=\mathcal{T}_{co}$.

Dowód. Podzbiory skończone przestrzeni Hausdorffa są zbiorami zwartymi. □

Wniosek 10.2.1. $(\mathrm{Map}\,(X,Y),\mathcal{T}_{co})$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*

Zanim przejdziemy do dokładniejszej analizy topologii zwarto-otwartej odnotujmy teoriomnogościowe własności konstrukcji zbiorów postaci $\langle A,W\rangle$.

Lemat 10.2.1. *Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami, a dla ich podzbiorów $A \subset X$, $W \subset W$ $\langle A, W\rangle := \{f \in \operatorname{Map}(X,Y) \,|f(A) \subset W\}$. Dla rodzin podzbiorów zachodzą następujące równości i inkluzje zbiorów:*

$$1)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W) = (\bigcup_{i\in J} A_i, W) \quad 2)\ \bigcap_{i\in J}(A, W_i) = (A, \bigcap_{i\in J} W_i)$$

$$3)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W_i) \subset (\bigcup_{i\in J} A_i, \bigcup_{i\in J} W_i)$$

Dowód. Dowody 1), 2), 3) wynikają natychmiast z definicji. □

Okazuje się, że rodzinę zbiorów potrzebną do generowania topologii zwarto–otwartej można istotnie ograniczyć, korzystając z rodziny generującej topologię w $(Y, \mathcal{T}_Y)$, np. z jej bazy.

Lemat 10.2.2. *Jeśli $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ to rodzina $\{(A, W) \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ generuje topologię zwarto-otwartą na* $\operatorname{Map}(X,Y)$.

Dowód. Oczywiście rodzina $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}} := \{(A, W) \mid A \subset X \,\text{zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ jest zawarta w rodzinie generującej topologię zwarto – otwartą (Def. 10.2.1). Trzeba więc pokazać, że dowolny zbiór postaci $\langle A, W\rangle$ gdzie $A \subset X$ jest zwarty, a $W \subset Y$ jest otwarty jest zawarty w topologii generowanej przez rodzinę $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}$.

Z definicji topologii generowanej wynika, że dowolny zbiór $W \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ jest sumą skończonych przecięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $W = W_1 \cap \cdots \cap W_n$ gdzie $W_i \in \mathcal{F}$, to

$$\langle A, W\rangle = \langle A, \bigcap_1^n W_i\rangle = \bigcap_1^n \langle A, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}).$$

Pokażemy teraz, że jeśli $W = \bigcup_{s\in S} W_s$ oraz dla każdego zwartego podzbioru $A \subset X$ oraz każdego $s \in S$, $\langle A, W_s\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$ to $\langle A, W\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnego $f \in \langle A, W\rangle$ istnieje zbiór taki, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle A, W\rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiorami zwartymi oraz $\langle A_i, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$.

Dla dowolnego punktu $a \in A$ istnieje $s(a) \in S$ taki, że $f(a) \subset W_{s(a)}$, a więc z ciągłości f wynika, ze istnieje otoczenie $a \in \mathrm{cl}_A(V_a) \subset A$ takie, że $f(\mathrm{cl}_A(V_a)) \subset W_{s(a)}$. Zbiory $\{(V_a\}_{a\in A}$ tworzą otwarte pokrycie zbioru zwartego A, można więc wybrać skończone podpokrycie $V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n} = A$. Przecięcie zbiorów $\bigcap_{i=1}^n \langle A_{a_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \langle A_{a_1}, W_{a_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle A_{a_n}, W_{a_n}\rangle \subset (\bigcup_{i=1}^n A_{a_i}, \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}) \subset \langle A, W\rangle.$$

□

Pożyteczne bywa też ograniczenie klasy zbiorów zwartych używanych do generowania topologii zwarto – otwartej:

Lemat 10.2.3. *Niech $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną zwartych zbiorów w $(X, \mathcal{T}_X)$ z następującą własnością: dla każdego zbioru zwartego $A \subset X$ i otwartego $U \supset A$ istnieje skończenie wiele $C_i \in \mathcal{C}$ spełniających $A \subset \bigcup_1^n C_i \subset U$. Niech $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$ będzie pewną bazą. Wtedy rodzina*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) := \{\langle C, W\rangle \mid C \in \mathcal{F}, W \in \mathcal{B}\}$$

generuje topologię zwarto – otwartą w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Dowód. Na mocy Lematu 10.2.2 wiemy, że $\mathcal{T}(\mathcal{F}_{co}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ gdzie All oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zwartych, baza generuje topologię. Ponieważ $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ więc podobnie jak w poprzednim lemacie, wystarczy wykazać że dla każdego elementu zbioru $f \in \langle C, W\rangle$ istnieją zbiory zwarte $C_{s_1}, ..., C_{s_n} \in \mathcal{C}$ oraz otwarte $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{B}$ takie, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle C, W\rangle$. Rozważmy zbiór otwarty $U := f^{-1}(W) \supset C$, z założenia istnieje skończona rodzina zbiorów $C_{s_1}, \dots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$ taka, że $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{s_i} \subset U$. Przecięcie zbiorów $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W\rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} C_{s_i}, W\rangle \subset \langle C, W\rangle.$$

□

Zbadamy przekształcenia ciągłe przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ pochodzące od odwzorowań $X \to X'$ i $Y \to Y'$.

Stwierdzenie 10.2.2. $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X', \mathcal{T}_{X'})$, $g\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ *– odwz. ciągłe. Odwzorowania*

$$f^* : \mathrm{Map}\,(X', Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y),\ f^*(\phi) := \phi \circ f$$

$$g_* : \mathrm{Map}\,(X, Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y')\ g_*(\psi) := g \circ \psi$$

są ciągłe w topologii zwarto-otwartej oraz zachodzą równości $(f_1 \circ f_2)_* = f_2^* \circ f_1^*$, $(g_1 \circ g_2)_* = g_{1*} \circ g_{2*}$, $Id_X^* = Id$, $Id_{Y*} = Id$.

Dowód. Ciągłość wynika łatwo z teorio-mnogościowych własności zbiorów generujących topologię. Żeby sprawdzić, iż f^* jest ciągłe wystarczy zauważyć, że dla zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ zachodzi: $(f^*)^{-1}(\langle C, W\rangle) = \langle f(C), W\rangle$, a więc jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X', Y)$. Podobnie $(g_*)^{-1}(\langle C, W'\rangle) = (\langle C, g^{-1}(W')\rangle)$ jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. □

Uwaga 10.2.1. Jeśli $Y = Y' = \mathbb{R}^n$, to odwzorowanie f^* jest liniowe. Jeśli Y, Y' skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe i $g : Y \to Y'$ jest odwzorowaniem liniowym, to g_* też jest liniowe.

10.3 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański

Stwierdzenie 10.3.1. *Rzutowania na współrzędne* $p_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$, $i = 1, 2$ *zadają homeomorfizm:*

$$(p_{1*}, p_{2*})\colon\ \mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}\,(X, Y_1) \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$$

Dowód. Ciągłość odwzorowania (p_{1*}, p_{2*}) wynika z Stw. 10.2.2 a z definicji produktu kartezjańskiego iż jest bijekcją. Wystarczy więc pokazać iż jest otwarte. Na mocy Lematu 10.2.2 topologia w $\mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2)$ jest generowana przez zbiory postaci $\langle C, p_i^{-1}(W_i)\rangle$ gdzie $i = 1, 2$, $W_i \in \mathcal{T}_{Y_i}$, $C \subset X$ – zwarty. Dla $i = 1$ zachodzi równość zbiorów $(p_{1*}, p_{2*})(\langle C, p_1^{-1}(W_1)\rangle) = \langle C, W_1\rangle \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$ i podobnie dla $i = 2$, a więc obrazy zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2)$ generują topologię w produkcie $\mathrm{Map}\,(X, Y_1) \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$. □

Stwierdzenie 10.3.2. *Włożenia $\iota_k \colon X_k \to X_1 \coprod X_2$, $k = 1, 2$ definiują homeomorfizm*

$$(\iota_1^*, \iota_2^*) \colon \mathrm{Map}\,(X_1 \coprod X_2, Y) \to \mathrm{Map}\,(X_1, Y) \times \mathrm{Map}\,(X_2, Y).$$

Dowód. Dowód, że odwzorowanie (ι_1^*, ι_2^*) jest ciągłą bijekcją jest identyczny jak Stw. 10.3.1. Dowód, że rodzina generująca bazę w $\mathrm{Map}\,(X_1 \coprod X_2, Y)$ przechodzi na rodzinę generującą topologię w produkcie wynika natychmiast z Lematu 10.2.3 oraz faktu, że dowolny zwarty podzbiór $C \subset X_1 \coprod X_2$ jest sumą rozłącznych zwartych zbiorów $C = (C \cap X_1) \cup (C \cap X_2)$. □

Interesujące jest, że w terminach przestrzeni funkcyjnych można opisać odwzorowania dwóch zmiennych $f \colon X \times Y \to Z$ jako rodziny odwzorowań jednej zmiennej $f_x \colon Y \to Z$, $f_x(y) := F(x, y)$ parametryzowanie w sposób ciągły przestrzenią X. O przestrzeni Y musimy jednak poczynić dodatkowe założenie:

Definicja 10.3.1. *Przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się lokalnie zwarta jeśli każdy punkt $y \in Y$ posiada otoczenie $V \ni y$ takie, że jego domknięcie $\mathrm{cl}_Y(V)$ jest zbiorem zwartym.*

Uwaga 10.3.1. Przestrzenie zwarte są lokalnie zwarte. Przestrzenie euklidesowe nie są zwarte, lecz są lokalnie zwarte, bowiem domknięcia kul euklidesowych są zbiorami domkniętymi i ograniczonymi, a więc zwartymi.

Twierdzenie 10.3.1. *Jeśli Y jest jest lokalnie zwarta, to przekształcenie*

$$\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z) \xrightarrow{e} \mathrm{Map}\,(X, \mathrm{Map}\,(Y, Z))$$

$$e(h)(x)(y) := \hat{h}(x)(y) := h(x, y)$$

jest bijekcją, a nawet homeomorfizmem przestrzeni odwzorowań z topologią zwarto-otwartą.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem opisującym topologię w przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Lemat 10.3.1. *Zbiory postaci $\langle A \times B, W\rangle$ gdzie $A \subset X$, $B \subset Y$ są podzbiorami zwartymi, a $W \subset Z$ jest podzbiorem otwartym generują topologię zwarto-otwartą w $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.*

Dowód. Sprawdzimy, że rodzina zbiorów

$$\{A \times B \subset X \times Y \colon A \subset X,\ B \subset Y \text{ zbiory zwarte}\}$$

spełnia założenia Lematu 10.2.3. Niech $X \times Y \supset U \supset C$ będzie otoczeniem podzbioru zwartego. Dla każdego punktu $c \in C$ istnieją zbiory otwarte $U_c \subset X$, $V_c \subset Y$ takie, że $U_c \times V_c \subset U$, a ze zwartości C można wybrać skończone przykrycie otwarte $U \supset (U_{c_1} \times V_{c_1}) \cup \cdots \cup (U_{c_n} \times V_{c_n}) \supset C$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, w to przykrycie można wpisać pokrycie C zbiorami domkniętymi $C_i \subset U_{c_i} \times V_{c_i}$. Zachodzą inkluzje

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_1(C_i) \times p_2(C_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i} \times V_{c_i} \subset U$$

a zatem znaleźliśmy przykrycie zbioru C produktami zbiorów zwartych, zawartymi w danym otoczeniu $U \supset C$. □

Dowód Twierdzenia 10.3.1. Dowód składa się z trzech kroków.

Najpierw musimy wykazać, że przekształcenie e jest dobrze zdefiniowane tzn. dla odwzorowania ciągłego $f : X \times Y \to Z$ przyporządkowane mu odwzorowanie $\hat{h}(x)(y) := h(x, y)$ jest odwzorowaniem ciągłym $X \to \mathrm{Map}\,(Y, Z)$. Zauważmy najpierw, że $\forall_{x \in X} \hat{h}(x) \in \mathrm{Map}\,(Y, Z)$, jest to bowiem obcięcie h do poziomicy $\{x\} \times Y$. Teraz sprawdzimy ciągłość $\hat{h}\colon X \to \mathrm{Map}\,(Y, Z)$. Załóżmy, że $\hat{h}(x) \in \langle C, W\rangle$ co oznacza, że $h(\{x\} \times C) \subset W$. Z ciągłości h wynika, że istnieje zbiór otwarty $G \supset \{x\} \times C$ taki, ze $h(G) \subset W$, a ze zwartości C wynika (p.Lemat o tubie), ze istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \times C \subset G$, a więc $\hat{h}(U) \subset \langle C, W\rangle$. Zauważmy, że dla poprawnego zdefiniowania przekształcenia e założenie lokalnej zwartości Y nie jest potrzebne.

Przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest oczywiście różnowartościowe. Pokażemy, że jest bijekcją tzn. jeśli odwzorowanie $\hat{h}\colon X \to \mathrm{Map}\,(Y, Z)$ jest ciągłe, to odpowiadające mu odwzorowanie $h(x, y) := \hat{h}(x)(y)$ jest ciągłe. Niech $h(x_0, y_0) \in W$ tzn. $\hat{h}(x_0) \in \langle\{y_0\}, W\rangle$, a z ciągłości $\hat{h}(x_0)$ i lokalnej zwartości Y wynika istnienie otoczenia $V \ni y_0$ takiego, że $\bar{V}$ jest zbiorem zwartym i $\hat{h}(x_0) \in \langle\bar{V}, W\rangle$. Z ciągłości $\hat{h}$ wynika, ze istnieje otoczenie $U \ni x_0$ dla którego $\hat{h}(U) \in \langle\bar{V}, W\rangle$, a więc $h(U \times V) \subset W$ co kończy dowód, że przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest bijekcją.

Pozostaje sprawdzić, że jest homeomorfizmem. W tym celu wystarczy zauważyć, że obraz rodziny zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$, opisany w Lemacie 10.3.1 generuje topologię w $\mathrm{Map}\,(X, \mathrm{Map}\,(Y, Z))$. □

10.4 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a zbieżność jednostajna

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. Rozważając zbiór przekształceń ciągłych $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}(d))$ zauważamy, że metrykę $d_{\sup}$ można zdefiniować sensownie jedynie w podzbiorze składającym się z przekształceń ograniczonych, podczas gdy topologia zwarto – otwarta określona jest w całym zbiorze $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. Zajmiemy się obecnie porównaniem topologii $\mathcal{T}(d_{\sup})$ w zbiorze ograniczonych przekształceń ciągłych $\mathrm{Map}_b(X, Y)$ oraz topologii podprzestrzeni pochodzącej z topologii zwarto – otwartej w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Stwierdzenie 10.4.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ i przestrzeni metrycznej (Y, d) w zbiorze $\mathrm{Map}_b(X, Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co} \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$. Jeśli X jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dowolny zbiór generujący topologię $\mathcal{T}_{co}$ należy do topologii $\mathcal{T}(d_{\sup})$. Na mocy Lematu 10.2.2 wystarczy sprawdzić to dla zbiorów postaci $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$

gdzie $C \subset X$ jest podzbiorem zwartym, a $B(y_0, r)$ kulą w przestrzeni (Y, d). Niech $f \in \langle C, B(y_0, r)\rangle$ Odwzorowanie $d(y_0, f(-)) \colon X \to \mathbb{R}$ jest ciągłe, zatem ze zwartości C wynika, że przyjmuje swoje kresy; kres górny oznaczmy $0 < r_0 < r$, a przez $r_1 := \frac{1}{2}(r - r_0) > 0$. Twierdzimy, że kula $B_{d_{\sup}}(f, r_1) \subset \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Niech $g \in B_{d_{\sup}}(f, r_1)$. Dla dowolnego $x \in C$ zachodzą nierówności:

$$d(y_0, g(x)) \leqslant d(y_0, f(x)) + d(f(x), g(x)) \leqslant r_0 + r_1 = r_0 + \frac{1}{2}(r - r_0) < r$$

a więc dla dowolnego elementu $f \in \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$ istnieje kula w metryce $d_{\sup}$ o środku w tym punkcie, zawarta w $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Wykażemy teraz równość topologii $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$, gdy X jest przestrzenią zwartą. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnej kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$ istnieje zbiór postaci $\langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle$ taki, że

$$f \in \langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$$

Dla każdego $x \in X$ wybierzmy otoczenie $U_x \ni x$ takie, że
$f(\bar{U}_x) \subset B_d(f(x), \frac{r}{3}) =: B_x$. Na mocy zwartości X z pokrycia $\{U_x\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X$. Pokażemy, że dowolny element $g \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle$ należy do kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$. Dla dowolnego $x \in X$ wybierzmy $U_i \ni x$. Zachodzą nierówności:

$$d(f(x), g(x)) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x)) \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} < r$$

oraz z definicji $f \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$. □

Topologia zwarto – otwarta jest nazywana także topologią zbieżności niemal jednostajnej. Żeby wyjaśnić skojarzenie z nazwą znaną z Analizy Matematycznej udowodnimy najpierw ogólny fakt dotyczący obcinania przekształceń do podzbiorów zwartych. Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ będą dowolnymi przestrzeniami Hausdorffa. Dla dowolnego zwartego podzbioru $C \subset X$ inkluzja definiuje ciągłe odwzorowanie $\iota_C^* \colon \mathrm{Map}\,(X, Y) \to \mathrm{Map}\,(C, Y)$.

Stwierdzenie 10.4.2. *Niech $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów przestrzeni X. Przekątna rodziny odwzorowań $\{\iota_C^*\}_{C\in\mathcal{C}}$*

$$\iota_{\mathcal{C}}^* \colon \mathrm{Map}\,(X, Y) \to \prod_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{Map}\,(C, Y) \quad \iota_{\mathcal{C}}^*(f) := \{f|_C\}_{C\in\mathcal{C}}$$

jest zanurzeniem homeomorficznym.

Dowód. Odwzorowanie $\iota_{\mathcal{C}}^*$ jest oczywiście różnowartościowe, bo zbiory jednopunktowe są zwarte. Topologia w produkcie $\prod\limits_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{Map}\,(C, Y)$ jest generowana przez zbiory $p_C^{-1}(\langle K, W\rangle)$ gdzie $K \subset C$, $W \in \mathcal{T}_Y$, a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez przecięcia tych zbiorów z obrazem $\iota_{\mathcal{C}}(\mathrm{Map}\,(X, Y))$. Z definicji zachodzi równość zbiorów

$$\iota_{\mathcal{C}}(\mathrm{Map}\,(X, Y)) \cap p_C^{-1}(\langle K, W\rangle) = \iota_{\mathcal{C}}(\langle K, W\rangle)$$

a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez obrazy zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. □

Wniosek 10.4.1. *Ciąg odwzorowań $f_n \in \mathrm{Map}\,(X,Y)$ jest zbieżny w topologii zwarto-otwartej do odwzorowania $f \in \mathrm{Map}\,(X,Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru zwartego $C \subset X$, ciąg $f_n|_C \in \mathrm{Map}\,(C,Y)$ jest zbieżny do $f|_C \in \mathrm{Map}\,(C,Y)$.*

Z ostatniego wniosku wynika, że jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną to zbieżność w sensie topologii zwarto-otwartej w $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ jest dokładnie znaną z Analizy Matematycznej zbieżnością niemal jednostajną (czyli na zbiorach zwartych).

Na zakończenie podsumujmy związki między trzema topologiami w przestrzeniach odwzorowań: zbieżności punktowej, zwarto-otwartą i zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 10.4.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ w zbiorze $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$.*

1) Jeśli $(X,\mathcal{T})$ jest przestrzenią dyskretną, to $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.

2) Jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną i $\mathrm{Map}_b(X,Y)$ zbiorem ograniczonych, ciągłych odwzorowań, to zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co}|\,\mathrm{Map}_b(X,Y) \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$.

3) Jeśli przestrzeń $(X,\mathcal{T}_X)$ jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.

□

10.5 Twierdzenie Stone'a – Weierstrassa

Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(Y,\mathcal{T}_Y)$ oznaczmy $\mathcal{C}(Y) := \mathrm{Map}\,(Y,\mathbb{R})$ z topologią zwarto – otwartą.

Stwierdzenie 10.5.1. *Dodawanie i mnożenie funkcji definiuje w $\mathcal{C}(Y)$ strukturę pierścienia, przy czym oba działania są ciągłe. Zerem jest funkcja stała równa zero; a jednością funkcja stała równa jeden. Mnożenie przez funkcje stałe i dodawanie określają w $\mathcal{C}(Y)$ strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej.* □

Definicja 10.5.1. *Podzbiór $A \subset \mathcal{C}(Y)$ nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebrą jeśli podprzestrzenią liniową oraz jest zamknięty ze względu na iloczyn funkcji.*

Stwierdzenie 10.5.2. *Dla dowolnego podzbioru $D \subset \mathcal{C}(Y)$ istnieje minimalna ze względu na inkluzję $\mathbb{R}$-podalgebra $A(D) \supset D$, którą nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebrą generowaną przez D.*

Dowód. Przecięcie dowolnej rodziny $\mathbb{R}$-podalgebr jest oczywiście $\mathbb{R}$-podalgebrą. Podalgebrę $A(D)$ definiujemy więc jako przekrój rodziny $\mathbb{R}$-podalgebr zawierających zbiór D. □

Twierdzenie 10.5.1 (M. Stone[1]-K. Weierstrass[2]). *Niech $(Y,\mathcal{T}_Y)$ będzie dowolną przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $D \subset \mathcal{C}(Y)$ jest podzbiorem zawierającym niezerową funkcję stałą takim, że funkcje z D rozdzielają punkty w Y tzn. dla dowolnych $y_1 \neq y_2$ istnieje funkcja $f \in D$ taka, że $f(y_1) \neq f(y_2)$, to zbiór $A(D)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(Y)$.*

[1] Marshall Harvey Stone (New York 1903 - 1989 Madras, India) is best known for the Stone-Weierstrass theorem on uniform approximation of continuous functions by polynomials. [Mac Tutor]

[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, Westphalia 1815 - 1897 Berlin) is best known for his construction of the theory of complex functions by means of power series. [Mac Tutor]

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, przypomnimy jego klasyczne zastosowania.

Przykład 10.5.1 (Klasyczne Twierdzenie Weierstrassa.). Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) = ([0,1], \mathcal{T}_e)$ i rozpatrzmy $D := \{1, j\colon j(t) = t\}$. $\mathbb{R}$–podalgebra generowana przez D to po prostu algebra funkcji wielomianowych zmiennej t. Ponieważ topologia zwarto – otwarta w $\mathcal{C}([0,1])$ to topologia wyznaczona przez metrykę $d_{\sup}$, a więc tw. Stone'a – Weierstrassa w tym przypadku powiada, że każda funkcja ciągła jest granicą jednostajną ciagu wielomianów. Zauważmy, że funkcję identycznościową możemy zastąpić dowolną funkcją różnowartościową! Jeśli zamiast odcinka rozpatrzyć całą prosta otrzymujemy wniosek, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciagu wielomianów. (przestrzeń $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ jest metryzowalna!).

Przykład 10.5.2 (Wielomiany trygonometryczne). Zauważmy, że funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π można utożsamiać z funkcjami określonymi na okręgu S^1. Punkty okręgu będziemy parametryzować kątem ϕ między dodatnim kierunkiem osi $y = 0$ oraz półprostą wyznaczoną przez dany wektor. Rozpatrzmy $D := \{\sin n\phi, \cos n\phi\colon n = 0, 1, 2, ..\} \subset \mathcal{C}(S^1)$. Ze wzorów na cosinus i sinus sumy kątów łatwo wynika, że przestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze D jest zamknięta ze względu na mnożenie, czyli jest $\mathbb{R}$–podalgebrą. A z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa wynika, że dowolna funkcja okresowa jest granicą jednostajną ciagu funkcji postaci:

$$f_n(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin n\phi + b_n \cos n\phi)$$

Dowód twierdzenia poprzedzimy ważnym lematem:

Lemat 10.5.1. *Niech $A \subset \mathcal{C}(Y)$ będzie podalgebrą. Jeśli $f \in A$, to $|f| \in \bar{A}$. Dla dowolnych funkcji $f, g \in \bar{A}$ funkcje $\min(f,g)$ i $\max(f,g)$ też należą do $\bar{A}$.*

Dowód. Ponieważ $|f| = \sqrt{f^2}$ kluczowym kluczowym elementem dowodu będzie obserwacja, że funkcja $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := \sqrt{t}$ jest granicą jednostajną ciagu wielomianów $p_n(t)$, co można pokazać bezpośrednio bądź powołać się na klasyczne tw. Weierstrassa zastosowane do funkcji $\phi(t) := \sqrt{t}$.

Niech $f \in A$ oraz $|f| \in \bigcap_1^n \langle C_i, W_i \rangle$. Pokażemy, że to otoczenie zawiera pewną funkcję $g \in A$. Niech $\epsilon := \min\{d_e(|f|(C_i), Y \setminus W_i)\colon i = 1, \ldots, n\} > 0$. Wystarczy znaleźć $g \in A$ taką, że $||f|(c) - g(c)| < \epsilon$ dla $c \in C := \bigcup_1^n C_i$. Ponieważ C jest zwarty, funkcja f jest ograniczona, a więc istnieje $M > 0$ takie, że $|f(c)| \leqslant M$ dla $c \in C$. Stąd wynika, że $|f|$ jest na C granicą jednostajną ciągu wielomianów od funkcji f: $p_n(f^2/B^2) \to \sqrt{f^2/M^2} = |f|/M$.

Teza dla $\min(f,g)$ i $\max(f,g)$ łatwo wynika ze wzorów:

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}((f+g) + |f-g|), \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}((f+g) - |f-g|).$$

□

Dowód tw. Stone'a – Weierstrassa. Będziemy dowodzić, że zbiór $\overline{A(D)}$ jest gęsty, a zatem ponieważ jest domknięty, musi być równy $\mathcal{C}(X)$. W tym celu trzeba sprawdzić, że dowolny zbiór z bazy topologii zwarto–otwartej $\bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$ przecina się z $\overline{A(D)}$. Ustalmy zbiór bazowy i funkcję $f \in \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$. Będziemy konstruować funkcję $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$. Oznaczmy zbiór zwarty $Z := \bigcup_1^n A_i \subset Y$ oraz $\epsilon := \min\{d_e(f(A_i), Y \setminus W_i) \colon i = 1, \ldots, n\} > 0$. Dowód składa się z trzech kroków.

Krok 1. Dla dowolnych punktów w $y_1 \neq y_2$ w Z oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ istnieje $f \in A(D)$ taka, że $f(y_1) = a_1$, $f(y_2) = a_2$.

Niech g będzie funkcją rozdzielającą y_1, y_2. Ponieważ funkcje stałe należą do $A(D)$, a więc funkcja
$$f(y) := a + \frac{b-a}{g(y_1) - g(y_2)}[g(y) - g(y_1)]$$
należy do $A(G)$ i przyjmuje żądane wartości w punktachy_1, y_2.

Krok 2. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(X)$ oraz $z_0 \in Z$ istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $g(z_0) = f(z_0)$ oraz $g(z) < f(z) + \epsilon$ dla $z \in Z$.

Z Kroku 1. dla każdego $z \in Z$ istnieje funkcja $h_z \in A(D)$ taka, że $h_z(z_0) = f(z_0)$ oraz $h_z(z) < f(z) + \frac{\epsilon}{2}$. (Jeśli $z \neq z_0$ można znaleźć funkcję taką, że $h_z(z) = f(z) + \frac{\epsilon}{4}$, w przypadku $z = z_0$, $h_{z_0} = f$.) Z ciągłości h_z i f wynika, że istnieje otoczenie $W(z) \ni z$ takie, że $h_z(y) < f(y) + \epsilon$ dla $y \in V(z)$. Zbiory $\{W(z)\}_{z \in Z}$ tworzą otwarte przykrycie Z, a więc można z niego wybrać przykrycie skończone $W(z_1) \cup \cdots \cup W(z_m) \supset Z$. Niech $g := \min\{h_{z_1}, \ldots, h_{z_m}\}$ Z Lematu 10.5.1 wynika, że $g \in \overline{A(D)}$. Ponieważ dowolny punkt $z \in Z$ należy do pewnego zbioru $W(z_i)$, więc zachodzą nierówności: $g(z) \leqslant h_{z_i}(z) < f(z) + \epsilon$.

Krok 3. Istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$, a zatem $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$.

Dla dowolnego $z \in Z$ niech g_z bedzie funkcją skonstruowaną w Kroku 2. Istnieje otoczenie $V(z) \ni z$ takie, że dla $y \in V(z)$ zachodzi nierówność: $g_z(y) > f(y) - \epsilon$. Zbiory $\{V(z)\}_{z \in Z}$ przykrywają Z a więc można spośród nich wybrać przykrycie skończone $V(z_1), \ldots, V(z_k)$ i zdefiniować $g := \max\{g_{z_1}, \ldots, g_{z_k}\}$. Podobnie jak w Kroku 2. $g \in \overline{A(D)}$ oraz $f(z) - \epsilon < g_{z_i}(z) \leqslant g(z) < f(z) + \epsilon$, czyli $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$ co należało dowieść. $\square$

Rozdział 11

Homotopia

11.1 Homotopia odwzorowań

Definicja 11.1.1. *Niech* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *będą przestrzeniami topologicznymi, a* $I := [0, 1]$ *będzie odcinkiem z topologią euklidesową.* Homotopią *nazywamy dowolne przekształcenie ciągłe* $F: X \times I \to Y$*. Przekształcenia* $f_0, f_1: X \to Y$ *nazywamy* homotopijnymi *jeśli istnieje homotopia* $F: X \times I \to Y$ *taka, że dla każdego* $x \in X$ *zachodzą równości* $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ *i oznaczamy* $f_0 \sim f_1$ *lub jeśli chcemy pamiętać jaka homotopia je łączy* $f_0 \sim_F f_1$ *.*

Stwierdzenie 11.1.1. *Homotopia* $\sim$ *jest relacją równoważności w zbiorze odwzorowań* $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Dowód. Sprawdzimy trzy warunki, które musi spełniać relacja równoważności:

Zwrotność. Każde przekształcenie $f: X \to Y$ jest homotopijne ze sobą przez homotopię stałą: $F: X \times I \to Y$, $F(x, t) := f(x)$.

Symetria. Jeśli $F: X \times I \to Y$ jest homotopią między f_0 i f_1, to $F': X \times I \to Y$, $F'(x, t) := F(x, 1 - t)$ jest homotopią między f_1 i f_0.

Przechodniość. Jeśli $F: X \times I \to Y$ jest homotopią między f_0 i f_1 a $G: X \times I \to Y$ jest homotopią między f_1 i f_2 to $H: X \times I \to Y$ zdefiniowane przez F na dolnej połowie walca i przez G na górnej połowie:

$$H(x, t) := \begin{cases} F(x, 2t) \,\mathrm{dla}\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) \,\mathrm{dla}\, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

jest homotopią między f_0 a f_2. □

Zbiór klas homotopii oznaczamy $[X, Y] := \mathrm{Map}\,(X, Y)/\sim$. Zauważmy, że $[\{p\}, X] = \pi_0(X)$, gdzie $\{p\}$ – przestrzeń jednopunktowa, jest rozważanym poprzednio zbiorem składowych łukowych przestrzeni X.

Stwierdzenie 11.1.2. *Dowolne dwa przekształcenia* $f_0, f_1: X \to W$ *gdzie* $W \subset \mathbb{R}^n$ *jest podzbiorem wypukłym są homotopijne przez homotopię* $F(x, t) := (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$*, zwaną homotopią afiniczną.*

Składanie przekształceń zachowuje relację homotopii:

Stwierdzenie 11.1.3. *Jeśli $f_0, f_1 \colon X \to Y$ oraz $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ oraz $f_0 \sim f_1$ i $g_0 \sim g_1$, to ich złożenia są homotopijne: $g_0 f_0 \sim g_1 f_1$*

Dowód. Skonstruujemy homotopie $g_0 f_0 \sim g_0 f_1 \sim g_1 f_1$ i skorzystamy z przechodniości relacji homotopii. Niech $F \colon X \times I \to Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1 a $G \colon Y \times I \to Z$ homotopią między g_0 i g_1. Wtedy złożenie $X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{g_0} Z$ jest homotopią $g_0 f_0 \sim g_0 f_1$ a złożenie $X \times I \xrightarrow{f_1 \times id} Y \times I \xrightarrow{G} Z$ jest homotopią $g_0 f_1 \sim g_1 f_1$. □

Wniosek 11.1.1. *Jeśli $f : X \to Y$, to dla dowolnej przestrzeni Z są dobrze określone przekształcenia $f^{\#} \colon [Y, Z] \to [X, Z]$, $f^{\#}([\phi]) := [\phi \circ f]$ oraz $f_{\#} \colon [Z, X] \to [Z, Y]$, $f_{\#}([\psi]) := [f \circ \psi]$. Jeśli $f \sim g$ to $f_{\#} = g_{\#}$ i $f^{\#} = g^{\#}$. Jeśli dane są dwa przekształcenia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, to $(gf)_{\#} = g_{\#} f_{\#}$ oraz $(gf)^{\#} = f^{\#} g^{\#}$.*

Dowód. Wynika natychmiast z definicji i z Stw. 11.1.3. □

Następujące twierdzenie powiada, że przekształcenia bliskie o wartościach w otwartych podzbiorach przestrzeni euklidesowych są homotopijne.

Twierdzenie 11.1.1. *Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $W \subset \mathbb{R}^n$ otwartym podzbiorem. Dla każdego przekształcenie $f \colon X \to W$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dowolne przekształcenie $g \colon X \to W$ dla którego $d_{\sup}(g, f) < \varepsilon$ jest homotopijne z f.*

Dowód. Obraz $f(X) \subset G$ jest podzbiorem zwartym. Zatem jego pokrycie

$$f(X) \subset \bigcup_{x \in X} B(f(x), r_x) \subset W$$

ma liczbę Lebesgue'a $\lambda > 0$ tzn. dowolne dwa punkty odległe o mniej niż λ leżą w pewnej kuli $B(f(x), r_x) \subset W$. Zatem jeśli $d_{\sup}(g, f) < \lambda =: \varepsilon$ to afiniczna homotopia $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ jest dobrze określonym odwzorowaniem $F : X \times I \to W$. □

11.2 Przekształcenia i przestrzenie ściągalne

Definicja 11.2.1. *Przekształcenie $f \colon X \to Y$ nazywa się* ściągalne *jeśli jest homotopijne z przekształceniem stałym w pewien punkt. Przestrzeń X nazywa się ściągalna jeśli przekształcenie identycznościowe $Id \colon X \to X$ jest ściągalne.*

Przykład 11.2.1. Podzbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym jeśli istnieje punkt $p_0 \in G$ (środek gwiazdy) taki, że dla każdego $p \in G$ odcinek $[p_0, p] \subset G$. Zbiory wypukłe są gwiaździste. Dowolny podzbiór gwiaździsty jest ściągalny, a ściągnięcie jest dane wzorem $F \colon G \times I \to G$, $F(p, t) = (1 - t)p_0 + tp$.

Stwierdzenie 11.2.1. *Dowolne przekształcenie określone na przestrzeni ściągalnej lub o wartościach w przestrzeni ściągalnej jest ściągalne.* □

11.3 Homotopijna równoważność

Definicja 11.3.1. *Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywa się* homotopijną równoważnością *jeśli istnieje $g : Y \to X$ takie, że $f \circ g \sim Id_Y$ i $g \circ f \sim Id_X$. Mówimy wtedy, że przestrzenie X, Y są homotopijnie równoważne.*

Uwaga 11.3.1. Każdy homeomorfizm jest homotopijną równoważnością. Przestrzeń jest ściągalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.

Stwierdzenie 11.3.1. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest homotopijną równoważnością i Z jest dowolną przestrzenią, to $f^{\#}\colon [Y,Z] \to [X,Z]$, $f^{\#}([\phi]) := [\phi \circ f]$ oraz $f_{\#}\colon [Z,X] \to [Z,Y]$, $f_{\#}([\psi]) := [f \circ \psi]$ są bijekcjami. W szczególności f definiuje bijekcję zbiorów składowych łukowych $f_{\#}\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.*

Dowód. Wykażemy, że $f_{\#}$ jest bijekcją. Niech $g\colon Y \to X$ będzie homotopijną odwrotnością tzn. $fg \sim id_Y$ i $gf \sim id_X$. Z Wniosku 11.1.1 otrzymujemy równości $f_{\#}g_{\#} = (fg)_{\#} = id_{[Z,Y]}$ i $g_{\#}f_{\#} = (gf)_{\#} = id_{[Z,X]}$, a więc $f_{\#}$ jest bijekcją. Podobnie rozumowanie przeprowadzamy dla $f^{\#}$. □

Przykład 11.3.1. Podajemy przykłady ważnych homotopijnych równoważności:

1) Homotopijną odwrotnością włożenia $\iota\colon S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest retrakcja $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $r(x) := \frac{x}{||x||}$

2) Jeśli Y jest ściągalna, to $p_X\colon X \times Y \to X$ jest homotopijną równoważnością.

3) Włożenie równika $S^1 \hookrightarrow M$ we wstęgę Möbiusa jest homotopijną równoważnością.

11.4 Punktowana homotopia

Jak zobaczymy w dalszych rozdziałach bywa pożyteczne rozpatrywanie przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem i odwzorowań zachowujących te punkty. Takie sytuacje spotykamy jeśli w przestrzeni występuje struktura algebraiczna (np. przestrzenie wektorowe lub grupy macierzy). Punktem wyróżnionym jest wtedy element neutralny i jest on zachowywany przez homomorfizmy. Dokładniej, punktowaną przestrzenią (lub przestrzenią z wyróżnionym punktem) nazywamy parę (X, x_0) gdzie X jest przestrzenią topologiczną (oznaczenie topologii pomijamy), a $x_0 \in X$.

Definicja 11.4.1. *Niech (X, x_0), (Y, y_0) będą przestrzeniami z wyróżnionymi punktami.* Homotopią punktowaną *nazywamy przekształcenie ciągłe $F\colon X \times [0,1] \to Y$, takie, że dla każdego $t \in I$, $F(x_0, t) = y_0$.*

Przekształcenia punktowane $f_0, f_1\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ są homotopijne *jeśli istnieje punktowana homotopia $F\colon X \times [0,1] \to Y$ taka, że $F(-,0) = f_0$, $F(-,1) = f_1$.*

Definicja punktowanej homotopii prowadzi w oczywisty sposób do definicji punktowanej homotopijnej równoważności. Np. włożenie $j\colon (S^{n-1}, e_1) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_1)$ jest punktowaną homotopijną równoważnością, gdyż retrakcja $r\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_1) \to (S^{n-1}, e_1)$ jest przekształceniem punktowanym, $rj = id_{S^{n-1}}$ oraz jr i $id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ wiąże punktowana homotopia: $H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zadana wzorem: $H(p,t) := (1-t)\frac{p}{||p||} + tp$.

Podobnie jak zwykła homotopia, punktowana homotopia $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze przekształceń punktowanych $\mathrm{Map}_*(X,Y) \subset \mathrm{Map}\,(X,Y)$. Zbiór klas punktowanej homotopii oznaczamy $[X,Y]_* := \mathrm{Map}_*(X,Y)/\sim$. Konstrukcje w dowodzie Stw. 11.1.1 zachowują homotopie punktowane. Istnieje odwzorowanie zapominania $\Phi\colon [X,Y]_* \to [X,Y]$ przypisujące klasie homotopii punktowanej odwzorowania jego zwykłą klasę homotopii: $\Phi[f]_* = [f]$. Odwzorowanie to w ogólności nie musi być ani surjekcją, ani injekcją. Dla odwzorowań w okrąg S^1 mamy jednak następujące:

Stwierdzenie 11.4.1. *Dla dowolnej przestrzeni punktowanej (X,x_0) i punktowanego okręgu $(S^1,1)$, odwzorowanie $\Phi\colon [X,S^1]_* \xrightarrow{\simeq} [X,S^1]$ jest bijekcją.*

Lemat 11.4.1. *Niech $z_0 \in S^1$. Odwzorowanie $f_{z_0}\colon S^1 \to S^1$, $f_{z_0}(w) = wz_0$ jest homotopijne z identycznością.* □

Dowód 11.4.1. Zastosujemy dwukrotnie powyższy lemat.

Φ jest surjekcją, bo dowolne $f\colon X \to S^1$ jest homotopijne z odwzorowaniem $g\colon X \to S^1$ $g(x) := f(x)f(x_0)^{-1}$ dla którego $g(x_0) = 1$.

Φ jest injekcją. Jeśli $F\colon X \times I \to Y$ jest homotopią między punktowanymi przekształceniami, to $G(x,t) := F(x,t)F(x_0,t)^{-1}$ jest punktowaną homotopią. □

Na przestrzeniach punktowanych można wykonywać konstrukcje opisane w Rozdziale 3. Podprzestrzeń przestrzeni punktowanej zawierająca wyróżniony punkt jest oczywiście przestrzenią punktowaną a włożenie przekształceniem punktowanym, przestrzeń ilorazowa jest przestrzenią punktowana - wyróżnionym punktem jest w niej klasa równoważności punktu wyróżnionego. Podobnie produkt kartezjański rodziny przestrzeni z wyróżnionym punktem $(X_s, x_s^0)_{s\in S}$ posiada naturalny punkt wyróżniony $x^0 := \{x_s^0\}_{s\in S}$, a rzutowania na czynniki są odwzorowaniami punktowanymi. Inaczej jest z konstrukcją sumy prostej; w sumie rozłącznej mamy dwa punkty wyróżnione, które następnie utożsamiamy. Odpowiednik sumy prostej (koproduktu) dla przestrzeni punktowanych nazywa się *bukietem*, co uzasadnia następująca:

Definicja 11.4.2. *Niech (X,x_0), (Y,y_0) będą przestrzeniami z wyróżnionymi punktami. Bukietem tych przestrzeni nazywamy przestrzeń punktowaną $X \vee Y := X \sqcup Y/\sim$ gdzie $(x_0,1) \sim (y_0,2)$ i punktem wyróżnionym jest klasa $[(x_0,1)] = [(y_0,2)]$, wyposażoną w włożenia $j_X\colon X \to X \vee Y$ oraz $j_Y\colon Y \to X \vee Y$ (por. Definicja 5.5.2).*

Zauważmy, że bukiet $X \vee Y$ jest homeomorficzny z podzbiorem produktu kartezjańskiego:

$$X \vee Y = \{(x,y) \in X \times Y\colon x = x_0 \,\mathrm{lub}\, y = y_0\}.$$

i ten podzbiór bywa przyjmowany za definicję bukietu przestrzeni.

Stwierdzenie 11.4.2. *Niech (Z,z_0) będzie przestrzenią z wyróżnionym punktem. Dla dowolnych dwóch przestrzeni Hausdorffa z wyróżnionymi punktami włożenia $j_X\colon X \subset X \vee Y$ oraz $j_Y\colon Y \subset X \vee Y$ definiują bijekcję*

$$(j_1^*, j_2^*)\colon [X \vee Y, Z]_* \to [X,Z]_* \times [Y,Z]_*$$

Dowód. Mamy oczywistą bijekcję $(j_1^*, j_2^*)\colon \operatorname{Map}_*(X\vee Y, Z) \to \operatorname{Map}_*(X,Z)\times\operatorname{Map}_*(Y,Z)$. Trzeba pokazać, że odwzorowanie to pozostaje bijekcją po przejściu do klas homotopii. Oczywiście pozostaje surjekcją. Niech $f, g\colon X\vee Y \to Z$ będą dwoma odwzorowaniami takimi, że $f|X \sim g|X$ oraz $f|Y \sim g|Y$ i niech $H_X\colon X\times I \to Z$ oraz $H_Y\colon Y\times I\to Z$ będą odpowiednimi punktowanymi homotopiami.Definiujemy homotopię $H\colon (X\vee Y)\times I \to Z$ następująco (traktujemy $X\vee Y$ jako podzbiór $X\times Y$):

$$H(x,y,t) = \begin{cases} H_X(x,t) & \text{jeśli} \quad y = y_0 \\ H_Y(y,t) & \text{jeśli} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Ponieważ homotopie H_X i H_Y są punktowane, więc H jest dobrze określone, a ponieważ podzbiory $X\times I \subset (X\vee Y)\times I$ oraz $Y\times I\subset (X\vee Y)\times I$ są domknięte (tu korzystamy z własności Hausdorffa!), więc H jest ciągłe. □

11.5 Jednospójność

Definicja 11.5.1. *Łukowo spójną przestrzeń X nazywamy* jednospójną *jeśli dowolne odwzorowanie $S^1\to X$ jest ściągalne.*

Przykład 11.5.1. Dowolna przestrzeń ściągalna jest jednospójna.

Stwierdzenie 11.5.1. *Dla $n\geqslant 0$ odwzorowanie $f\colon S^n\to X$ jest ściągalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $\bar f\colon D^{n+1}\to X$ ($D^{n+1} := \bar B(0,1)\subset\mathbb{R}^{n+1}$) takie, że $\bar f|S^n = f$.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli f jest ściągalne, to istnieje homotopia $F\colon S^n\times[0,1]\to X$ taka, że $F(x,0) = x_0$ i $F(x,1) = f(x)$. Rozpatrzmy odwzorowanie $q\colon S^n\times[0,1]\to D^{n+1}$, $q(\mathbf{v},t) := t\mathbf{v}$. Ponieważ q jest domknięte (a więc ilorazowe) odwzorowanie $\bar f([\mathbf{v},t]) := F(\mathbf{v},t)$ jest dobrze zdefiniowanym i ciągłym rozszerzeniem f.

$\Longleftarrow$ Jeśli f rozszerza się na D^{n+1} to jest ściągalne, bowiem dysk jest ściągalny jako podzbiór wypukły. Ściągnięcie f można zadać wzorem: $F(\mathbf{v},t) := (1-t)f(\mathbf{v}) + t\mathbf{e_1}$, gdzie $\mathbf{e_1}$ jest wektorem bazy kanonicznej. □

Zamiast odwzorowań zdefiniowanych na okręgu $S^1\subset\mathbb{R}^2$ wygodnie jest rozważać zamknięte drogi (pętle) czyli odwzorowania określone na odcinku $\omega\colon[0,1]\to X$ takie, że $\omega(0)=\omega(1)$. Nawet jeśli interesują nas pętle, to pożyteczne jest też rozpatrywanie dróg o różnych początku i końcu.

Stwierdzenie 11.5.2. *Niech $(X,\mathcal{T}_X)$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $p\colon[0,1]\to S^1$ dane wzorem $q(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ustanawia bijekcję między zbiorem dróg zamkniętych (pętli) w X tzn. odwzorowań $\omega\colon[0,1]\to X$ takich, że $\omega(0)=\omega(1)$ a zbiorem odwzorowań $S^1\to X$.*

Dowód. Dowolnemu odwzorowaniu $\alpha\colon S^1\to X$ przypisujemy drogę zamkniętą $\alpha_q := q\circ\alpha\colon I\to X$. Odwrotnie, jeśli $\omega\colon[0,1]\to X$ jest drogą zamkniętą, to odwzorowanie $\omega^q\colon S^1\to X$, $\omega^q(z) := \omega(t)$ gdzie $q(t) = z$ jest dobrze zdefiniowane i jest ciągłe, ponieważ q jest odwzorowaniem ilorazowym (a nawet domkniętym). □

Przypomnijmy z GAL, że odwzorowanie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nazywa się afiniczne jeśli zachowuje kombinacje wypukłe tzn. dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi równość

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obrazem przekształcenia afinicznego jest odcinek euklidesowy łączący punkty $f(a)$ i $f(b)$.

Definicja 11.5.2.

1) *Drogę $\omega\colon I \to A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy kawałkami afiniczną (lub kawałkami liniową) jeśli istnieje podział odcinka $0 = t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ taki, że obcięcia $\omega|[t_i, t_{i+1}]$ są przekształceniami afinicznymi.*

2) *Drogę $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ nazywamy łamaną jeśli jest kawałkami afiniczna i jest przekształceniem różnowartościowym (a więc homeomorfizmem $\omega\colon [0,1] \xrightarrow{\simeq} \omega([0,1])$).*

Lemat 11.5.1. *Dla dowolnej drogi $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ i liczby $\varepsilon > 0$ istnieje droga kawałkami afiniczna $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ oraz $d_{\sup}(\alpha, \beta) < \varepsilon$.*

Dowód. Pokryjmy obraz $\alpha([0,1])$ kulami euklidesowymi o środkach $x \in \alpha([0,1])$ i promieniach ε: $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in\alpha([0,1])}$ i rozpatrzmy pokrycie odcinka przeciwobrazami $\{\alpha^{-1}(B(x,\varepsilon))\}_{x\in\alpha([0,1])}$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia a $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ podziałem odcinka takim, że $|t_i - t_{i+1}| < \lambda$. Niech $\beta_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$ będzie drogą afiniczną łączącą punkt $\alpha(t_i)$ z $\alpha(t_{i+1})$. Definiujemy kawałkami afiniczną drogę $\beta(s) := \beta_i(s)$ jeśli $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$. Oczywiście $d_{\sup}(\alpha, \beta) < \varepsilon$. □

Twierdzenie 11.5.1. *Dla $n > 1$ sfera S^n jest jednospójna.*

Dowód. Niech $\alpha\colon I \to S^n$ będzie dowolną pętlą (tzn. $\alpha(0) = \alpha(1) = p_0$). Pokażemy, że jest ona homotopijna z pętlą, której obraz nie jest całą sferą, a więc zawartą w zbiorze ściągalnym $S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$. Rozważmy naszą pętlę jako odwzorowanie w całą przestrzeń euklidesową $\alpha\colon I \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i korzystając z Lematu 11.5.1 wybierzmy kawałkami afiniczną pętlę zaczepioną w p_0 $\beta\colon I \to \mathbb{R}^{n+1}$ taką, że $d_{\sup}(\alpha, \beta) < 1$. Wynika stąd, że $\beta\colon I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a także obraz homotopii afinicznej $F(s,t) : (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$ leży w $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Składając tę homotopię z retrakcją $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) := \frac{x}{||x||}$ otrzymujemy homotopię $H := r \circ F\colon I \times I \to S^n$ łączącą pętlę $\alpha\colon I \to S^n$ z pętlą $r \circ \beta\colon I \to S^n$. Zauważmy, że $r(\beta(I))$ jest suma mnogościową skończonej liczby łuków, a więc nie wypełnia sfery, skąd wynika, że $\alpha \sim \beta$ jest ściągalna. □

Uwaga 11.5.1. W istocie dowolne odwzorowanie $S^k \to S^n$ gdzie $k < n$ jest ściągalne. Dowód ściągalności odwzorowań $S^k \to S^n$ może być przeprowadzony podobnie jak w przypadku $k = 1$, zastępując podział odcinka na małe odcinki, podziałem kostki I^k na małe kostki lub sympleksy i afiniczną aproksymację na każdym z nich.

Sfera jednowymiarowa, czyli okrąg S^1 nie jest jednospójny – gdyby był, to każda przestrzeń byłaby jednospójna! W dalszych rozdziałach zajmiemy się zbadaniem zbioru klas homotopii odwzorowań $[S^1, S^1]$ i wykazaniem szeregu wniosków dotyczących topologii powierzchni.

11.6 Grupa Bruschlinsky'ego

W dalszym ciągu będziemy badać własności przestrzeni topologicznych poprzez analizę ich odwzorowań w okrąg euklidesowy $S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Traktując płaszczyznę jako ciało liczb zespolonych możemy traktować $S^1 \subset \mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\}$ jako podgrupę grupy niezerowych liczb zespolonych z działaniem mnożenia.

Dla dowolnej przestrzeni X zbiór odwzorowań $\mathrm{Map}\,(X, S^1)$ posiada strukturę grupy abelowej, wyznaczoną przez mnożenie liczb zespolonych – funkcje mnożymy mnożąc je w każdym punkcie. Jak wiadomo iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą; podobnie odwrotność funkcji nieznikającej. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać zbiór klas homotopii odwzorowań $[X, S^1]$, który tę strukturę grupową dziedziczy, bowiem jeśli $f_0 \sim f_1, g_0 \sim g_1 \colon X \to \mathbb{C}^*$ to ich iloczyny też są homotopijne: $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$.

Definicja 11.6.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X zbiór $B(X) := [X, S^1]$ z wyżej zdefiniowanym działaniem będziemy nazywać grupą Bruschlinsky'ego przestrzeni X.* [1]

Uwaga 11.6.1. Ponieważ jak zauważyliśmy włożenie $S^1 \subset \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest homotopijną równoważnością, oraz włożeniem podgrupy w grupę multyplikatywną liczb zespolonych, a więc w Def. 11.6.1 można zastąpić okrąg przez grupę topologiczną $\mathbb{C}^*$.

Ponieważ mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, więc dla dowolnej przestrzeni X grupa $B(X)$ jest abelowa. Dla dowolnej przestrzeni ściągalnej $B(X) = 0$.

Stwierdzenie 11.6.1. *Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej X grupy $B(X)$ ma następujące własności:*

1. *Dla dowolnego przekształcenia $f \colon X \to Y$ przekształcenie $\phi^* \colon B(Y) \to B(X)$ dane wzorem $\phi^*(f) := f \circ \phi$ jest homomorfizmem grup.*

2. *Jeśli przekształcenia $f_0, f_1 \colon X \to Y$ są homotopijne, to $f_0^* = f_1^*$*

3. *Dla dowolnych dwóch przestrzeni X_1, X_2 włożenia zadają izomorfizm grup*
$$B(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{\simeq} B(X_1) \times B(X_2).$$

4. *Dla dowolnych dwóch przestrzeni punktowanych (X_1, x_1), (X_2, x_2) włożenia zadają izomorfizm grup*
$$B(X_1 \vee X_2) \xrightarrow{\simeq} B(X_1) \times B(X_2).$$

Dowód.
Ad 1. $f^*(\varphi \cdot \psi)(x) := (\varphi \cdot \psi)(f(x)) = \varphi(f(x)) \cdot \psi(f(x)) = f^*(\varphi) \cdot \phi^*(\psi)$.
Ad 2. To jest szczególny przypadek Wniosku 11.1.1.
Ad 3. Włożenia $\iota_1 \colon X_1 \subset X_1 \sqcup X_2$ i $\iota_2 \colon X_2 \subset X_1 \sqcup X_2$ zadają homomorfizm grup
$$(\iota_1^*, \iota_2^*) \colon B(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{\simeq} B(X_1) \times B(X_2).$$

Z definicji sumy prostej wynika natychmiast, że jest on bijekcją.

[1] Grupa Bruschlinsky'ego nazywana jest też (pierwszą) grupą kohomotopii i jest izomorficzna z inaczej definiowaną pierwszą grupą kohomologii przestrzeni X.

Ad 4. Ze Stw. 11.4.2 otrzymujemy bijekcję zbiorów punktowanych klas homotopii

$$(j_1^*, j_2^*)\colon [X \vee Y, S^1]_* \to [X, S^1]_* \times [Y, S^1]_*.$$

Dzięki Stw. 11.4.1 możemy zastąpić zbiory klas punktowanych homotopii przez klasy zwykłej homotopii. □

Uwaga 11.6.2. Dla dowolnych grup abelowych A, B iloczyn kartezjański $A\times B$ z działaniem "po współrzędnych" jest nazywany także sumą prostą grup i oznaczany $A\oplus B$. Zauważmy, że odwzorowania $j_A\colon A \to A\oplus B$ oraz $j_B\colon B \to A\oplus B$ dane wzorami $j_A(a) := (a, 0)$, $j_B(b) := (0, b)$ są homomorficznymi zanurzeniami grup A i B w $A \oplus B$.

11.7 Odwzorowanie wykładnicze i logarytm

This is the most important function in mathematics.
Walter Rudin[2]

Opiszemy jedno z najważniejszych odwzorowań topologii i analizy zespolonej, mające daleko idące uogólnienia w geometrii różniczkowej. Od tej pory wygodnie nam będzie traktować płaszczyznę euklidesową $\mathbb{R}^2$ jako zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ i korzystać z dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Płaszczyznę euklidesową traktowaną jako ciało liczb zespolonych nazywa się płaszczyzną Gaussa[3] a jej jednopunktowe uzwarcenie sferą Riemanna[4].

Część rzeczywistą liczby zespolonej $z = x + iy$ będziemy oznaczać $\Re(z) := x$ a część urojoną $\Im(z) := y$. Przez $\arg(z)$ argument liczby z, czyli liczbę $0 \leqslant \theta < 2\pi$ taką, że $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdzie $|z|$ jest modułem liczby zespolonej z.

Definicja 11.7.1. *Jeśli $z = x + iy$ jest liczbą zespoloną to definiujemy odwzorowanie eksponencjalne*

$$\exp(z) := e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \in \mathbb{C}^*,$$

oznaczane też krócej $p := \exp$.

Stwierdzenie 11.7.1 (Własności exp). *Odwzorowanie eksponencjalne $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ jest ciągłe i ma następujące własności:*

1. *$p(z_1+z_2) = p(z_1)p(z_2)$, $p(0) = 1$, czyli p jest homomorfizmem grupy addytywnej liczb zespolonych w grupę multyplikatywną liczb zespolonych różnych od zera.*
2. *p jest surjekcją oraz $p(z) = p(z')$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita $k \in \mathbb{Z}$ taka, że $z' = z + 2k\pi i$.*

[2]Walter Rudin *Real & Complex Analysis.* Second Edition.McGraw-Hill Series in Higher Mathematics 1966, Prologue.

[3]Carl Friedrich Gauß (Braunschweig 1777 – 1855 Göttingen) worked in a wide variety of fields in both mathematics and physics incuding number theory, analysis, differential geometry, geodesy, magnetism, astronomy and optics. His work has had an immense influence in many areas. [Mac Tutor]

[4]Bernhard Riemann (Breselenz (Hanover) 1826 – 1866 Selasca (Włochy)) Bernhard Riemann's ideas concerning geometry of space had a profound effect on the development of modern theoretical physics. He clarified the notion of integral by defining what we now call the Riemann integral. [Mac Tutor]

3. *Dla ustalonego punktu* $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *oznaczmy półprostą* $L^*_{z_0} := \{tz_0\colon t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{C}^*$. *Przeciwobraz półprostej* $p^{-1}(L^*_{z_0}) = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, *czyli jest sumą rozłączną przeliczalnie wielu prostych równoległych do osi rzeczywistej.*

4. *Przeciwobraz* $p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0})$ *jest sumą rozłączną otwartych pasów*

$$U_k(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \arg(z_0) + 2k\pi < \Im(z) < \arg(z_0) + 2(k+1)\pi\}$$

a każdy z nich jest odwzorowywany przez p *homeomorficznie na* $\mathbb{C}^* \setminus L^*_z$, *a więc* p *jest otwartą surjekcją.*

5. *Przeciwobrazem okręgu o promieniu* $r > 0$, $S^1_r := \{z \in \mathbb{C}^*\colon |z| = r\}$ *jest prosta równoległa do osi urojonej* $x = \log r$.

Dowód. Ciągłość p wynika z twierdzeń znanych z Analizy Matematycznej.

Ad 1,2. Równości wynikają z definicji funkcji wykładniczej przez szereg zespolony bądź z własności rzeczywistych funkcji trygonometrycznych.

Ad 3,4. Z definicji funkcji exp wynika, że

$$p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}) = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) \neq \arg(z_0) + 2k\pi i\}.$$

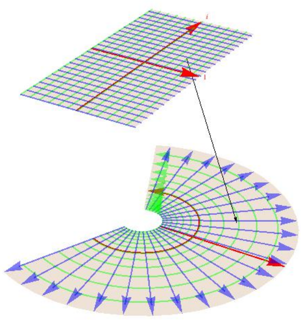
Żeby pokazać, że $p\colon U_k(z_0) \to \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}$ jest homeomorfizmem skonstruujemy odwzorowanie odwrotne $\log_k\colon \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0} \to U_k(z_0)$ dane wzorem

$$\log_k(w) := \log|w| + (\arg(z_0) + \theta(w) + 2k\pi)i$$

gdzie $\theta(w)$ jest kątem między półprostą $L^*_{z_0}$ a wektorem $w \in \mathbb{C}^*$. Ciągłość tego odwzorowania wynika z ciągłości logarytmu rzeczywistego oraz funkcji $\theta\colon \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0} \to (0, 2\pi)$. Ponieważ pasy $U_k(z_0)$ i dopełnienia półprostych $\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}$ są podzbiorami otwartymi, a więc p jest odwzorowaniem otwartym.

Ad 5. Wynika natychmiast z definicji p. □

Działanie odwzorowania p ilustruje następujący rysunek:[5]



na którym proste na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ i ich obrazy są oznaczone tym samym kolorem. Kolorem czerwonym oznaczone są osie rzeczywista i urojona. Obrazami prostych równoległych do osi rzeczywistej są półproste o początku w punkcie 0, a obrazami prostych równoległych do osi urojonej są okręgi o środku w punkcie 0.

[5]Rysunek wykonany w programie *Mathematica* zawdzięczam dr Andrzejowi Kozłowskiemu.

Definicja 11.7.2. *Logarytmem odwzorowania ciągłego $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będziemy nazywać dowolne odwzorowanie ciągłe $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ takie, że $\exp\circ\tilde{f} = f$, czyli dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $\exp(\tilde{f}(x)) = f(x)$ tzn. diagram przekształceń:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Stwierdzenie 11.7.2 (Jednoznaczność logarytmu)**.**

1. *Niech $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Jeśli $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ jest logarytmem f, to dla każdej liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}_k(x) := \tilde{f}(x)+2k\pi i$ jest także logarytmem f.*
2. *Jeśli X jest spójna i $\tilde{f}_k\colon X \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ są logarytmami odwzorowania $f\colon X \to \mathbb{C}^*$, takimi, że dla pewnego punktu $x_0 \in X$ $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ to $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$*
3. *Jeśli X jest spójna i $\tilde{f}_k\colon X \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ są logarytmami odwzorowania $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ to istnieje liczba całkowita $k \in \mathbb{Z}$ taka, że dla każdego $x \in X$ $\tilde{f}_1(x) - \tilde{f}_2(x) = 2k\pi i$.*

Dowód.

Ad 1. Wynika bezpośrednio z Tw. 11.7.1 pkt. 2.

Ad 2. Załóżmy, że X jest przestrzenią spójną. Wykażemy, że zbiór

$$\{x \in X\colon \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$$

jest otwarto – domknięty. Domkniętość wynika stąd, że $\mathbb{C}$ jest przestrzenią Hausdorffa. Wykażemy, że jest także otwarty. Jeśli dla pewnego punktu $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = z_0$ to możemy wybrać pewien pas $U_k(z) \ni z_0$ oraz otoczenie $V \ni x$ takie, że $\tilde{f}_i(V) \subset U_k(z)$ dla $i = 1, 2$. Z definicji logarytmu zachodzą równości $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2 = f$. Ponieważ $p\colon U_k(z) \to \mathbb{C}^*$ jest różnowartościowe, więc stąd wynika, że $\tilde{f}_1(x') = \tilde{f}_2(x')$ dla $x' \in U$. Jedynym niepustym podzbiorem otwarto–domkniętym przestrzeni spójnej jest cała przestrzeń, a więc $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ na X.

Ad 3. Niech $x_0 \in X$; z własności funkcji wykładniczej (Tw. 11.7.1) wynika istnienie liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$ takiej, że $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0) + 2k\pi i$. Z punktów 1,2 wynika, że $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) + 2k\pi i$ dla wszystkich $x \in X$. □

Stwierdzenie 11.7.3. *Identyczność $Id\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nie posiada logarytmu.* □

Wniosek 11.7.1. *Niech $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy, że istnieje pokrycie $X = A_1 \cup A_2$ gdzie oba zbiory są otwarte, albo oba są domknięte, ich przecięcie $A_1 \cap A_2$ jest spójne, oraz obcięcia $f|A_i$, $i = 1, 2$ posiadają logarytm. Wtedy przekształcenie f posiada logarytm.*

Dowód. Niech $\tilde{f}_i\colon A_i \to \mathbb{C}$ dla $i = 1, 2$ będą logarytmami. Oznaczmy $A_{12} := A_1 \cap A_2$. Ze Stw. 11.7.2 wnioskujemy, że istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $\tilde{f}_1|A_{12} + 2k\pi i = \tilde{f}_2|A_{12}$. Stąd formuła

$$\tilde{f}(p) := \begin{cases} \tilde{f}_1|A_{12}(p) + 2k\pi i & \text{dla} \quad p \in A_1 \\ \tilde{f}_2|A_{12}(p) & \text{dla} \quad p \in A_2 \end{cases}$$

określa logarytm f na X. □

Twierdzenie 11.7.1 (S. Eilenberg [6]). *Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną.*

1) *Odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ jest ściągalne wtedy i tylko wtedy, gdy posiada logarytm.*

2) *Dwa odwzorowania ciągłe $f, g\colon X \to \mathbb{C}^*$ są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloraz $f/g\colon X \to \mathbb{C}^*$ posiada logarytm.*

Dowód. Ad 1. $\Longleftarrow$ Niech $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ będzie logarytmem tzn. $p \circ \tilde{f} = f$. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{C}$ jest ściągalna, a więc przekształcenie $\tilde{f}$ jest ściągalne, a zatem złożenie z dowolnym innym przekształceniem jest ściągalna. Nb. homotopia może być łatwo zapisana wzorem $H\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$, $H(x,t) := p(t\tilde{f}(x))$.

$\Longrightarrow$ Niech $F\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$ będzie homotopią taką, że $F(x,0) = z_0$, natomiast $F(x,1) = f$. Pokażemy, że homotopia F ma logarytm $\tilde{F}\colon X \times I \to \mathbb{C}$, a zatem f ma logarytm. W dalszym rozumowaniu będziemy dla wygody zakładać, że $z_0 = 1$; przypadek dowolnego z_0 wynika stąd natychmiast. Dla każdego punktu $x \in X$ znajdziemy otoczenie $U \ni x$ oraz logarytm $\tilde{F}_x\colon U_x \times I \to \mathbb{C}$, a następnie pokażemy zgodność na przecięciach zbiorów takiej postaci. Rozłóżmy przekłutą płaszczyznę na sumę dwóch podzbiorów otwartych na których istnieją logarytmy $\mathbb{C}^* = V_1 \cup V_2$ gdzie

$$V_1 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \neq \pi\}, \quad V_2 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}\}.$$

i rozważmy ich przeciwobrazy:

$$p^{-1}(V_1) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{V}_{1,k} \quad \text{gdzie} \quad \tilde{V}_{1,k} := \{z \in \mathbb{C}\colon (2k-1)\pi < \Im(z) < (2k+1)\pi\}$$

$$p^{-1}(V_2) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{V}_{2,k} \quad \text{gdzie} \quad \tilde{V}_{2,k} := \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \Im(z) < \frac{3\pi}{2} + 2(k+1)\pi\}$$

Na każdym ze zbiorów $\tilde{V}_{1,k}, \tilde{V}_{2,k}$ odwzorowanie p jest homeomorfizmem (p. Stw.11.7.1). Oznaczmy przez $\log_{i,j}\colon V_i \to \tilde{V}_{i,j}$ odpowiednie odwzorowanie odwrotne.

Ciągłość przekształcenia F oraz zwartość odcinka I implikują, że dla ustalonego punktu $x \in X$ istnieją liczby $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_x-1} < t_{n_x} = 1$ oraz otoczenia $U_{x,i} \ni x$ gdzie $i = 1, \ldots, n_x$ takie, że

$$F(U_{x,2k+1} \times [t_{2k}, t_{2k+1}]) \subset V_1 \quad \text{oraz} \quad F(U_{x,2k} \times [t_{2k-1}, t_{2k}]) \subset V_2.$$

Biorąc przecięcie $U_x := \bigcap_i U_{x,i}$ otrzymujemy otoczenie $U_x \ni x$ takie, że

$$F(U_x \times [t_{2k}, t_{2k+1}]) \subset V_1 \quad \text{oraz} \quad F(U_x \times [t_{2k-1}, t_{2k}]) \subset V_2.$$

Będziemy konstruować indukcyjnie odwzorowanie $\tilde{F}^i_x\colon U_x \times [0, t_i] \to \mathbb{C}^*$ będące logarytmem F, czyli takie, że $p \circ \tilde{F}^i_x = F|U_x \times [t_0, t_i])$. Zdefiniujmy $\tilde{F}(x,0) := 0$ dla wszystkich $x \in X$ oraz odwzorowanie $\tilde{F}^1_x\colon U_x \times [0, t_1]) \to \mathbb{C}^*$ wzorem $\tilde{F}^1_x(x,t) := \log_{1,0}(F(x,t))$. Załóżmy teraz, że jest skonstruowane odwzorowanie $\tilde{F}^i_x\colon U_x \times [0, t_i]) \to \mathbb{C}$ będące logarytmem F i zauważmy, że w podobny sposób możemy je rozszerzyć do odwzorowania

[6] Samuel Eilenberg (Warszawa 1913 – 1998 New York) [Mac Tutor]

$\tilde{F}_x^{i+1}\colon U_x\times[0,t_{i+1}])\to\mathbb{C}^*$. Istotnie, $F(U_x\times[t_i,t_{i+1}])\subset V_n$. Rozważmy funkcję $\tilde{f}_i := \tilde{F}(\cdot,t_i)$ oraz rozkład zbioru U_x na sumę rozłącznych zbiorów otwartych:

$$U_x = \tilde{f}_i^{-1}(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{V}_{n,k}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{f}_i^{-1}(\tilde{V}_{n,k})$$

a zatem także

$$U_x\times[t_i,t_{i+1}] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{f}_i^{-1}(\tilde{V}_{n,k})\times[t_i,t_{i+1}].$$

Na każdym ze zbiorów $\tilde{f}_i^{-1}(V_{n,k})\times[t_i,t_{i+1}]$ określamy $\tilde{F}_x^{i+1}(y,t) := \log_{n,k}(f(y,t))$. Oczywiście $\tilde{F}_x^{i+1}(y,t_i) = \tilde{f}_i(y) = F_x^i(y,t_i)$ a więc otrzymujemy logarytm $\tilde{F}_x^{i+1}\colon U_x\times[0,t_{i+1}]\to\mathbb{C}$.

Skonstruowawszy dla każdego punktu $x\in X$ logarytm $\tilde{F}_x\colon U_x\times I\to\mathbb{C}$ zau ważmy, że jeśli $y\in U_x\cap U_{x'}$ to $\tilde{F}_x(y,0) = \tilde{F}_{x'}(y,0)$. Ponieważ $p\tilde{F}_x(y,t) = p\tilde{F}_{x'}(y,t)$ dla każdego $t\in I$ a więc na mocy Stw. 11.7.2 pkt. 2 zachodzi równość $\tilde{F}_x(y,t) = \tilde{F}_{x'}(y,t)$ dla każdego $t\in I$, a więc odwzorowanie $\tilde{F}(y,t) := \tilde{F}_x(y,t)$ gdzie $y\in U_x$ jest dobrze zdefiniowane i ciągłe. Oczywiście $p\tilde{F}(y,t) = F(y,t)$ dla dowolnego $(y,t)\in X\times I$.

Ad 2. Jeśli $f\sim g$ i $F\colon X\times I\to\mathbb{C}^*$ jest homotopią między nimi, to $H(x,t) := F(x,t)/g(x)$ jest homotopią między odwzorowaniem stałym w $1\in\mathbb{C}^*$ a f/g. Odwrotnie, jeśli $H(x,t)$ jest homotopia między f/g a odwzorowaniem stałym w $1\in\mathbb{C}^*$, to iloczyn $H(x,t)g(x)$ jest homotopią między f i g. □

11.8 Homotopijna klasyfikacja pętli $\mathbb{C}^*$.

Zajmiemy się opisem klas homotopii pętli w $\mathbb{C}^*$, czyli grupy $[S^1,\mathbb{C}^*] = [S^1,S^1] = B(S^1)$. Rozpoczniemy od zdefiniowania stopnia przekształcenia $S^1\to\mathbb{C}^*$ (zwanego też indeksem pętli względem punktu 0). Korzystając z Stw.11.5.2 bedziemy utożsamiać odwzorowania $S^1\to X$ z drogami zamkniętymi, czyli pętlami $[0,1]\to X$ i oznaczać je tą samą literą. Przypomnijmy, że pętli $\alpha\colon S^1\to X$ przyporządkujemy złożenie $\alpha\circ q\colon[0,1]\to X$, gdzie $q\colon[0,1]\to S^1$ jest dane wzorem $q(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Niech $\alpha\colon[0,1]\to\mathbb{C}^*$ będzie pętlą. Ponieważ odcinek jest przestrzenią ściągalną, na mocy Twierdzenia 11.7.1 odwzorowanie α posiada logarytm $\tilde{\alpha}\colon[0,1]\to\mathbb{C}$, który jednak nie musi być pętlą! Zdefiniujemy stopień α:

$$\deg(\alpha) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{\alpha}(1)-\tilde{\alpha}(0)).$$

Stwierdzenie 11.8.1. *Przyporządkowanie pętli $\alpha\colon[0,1]\to\mathbb{C}^*$ jej stopnia $\deg(\alpha)$ ma następujące własności:*

1. *Wartość $\deg(\alpha)$ nie zależy od wyboru logarytmu $\tilde{\alpha}$ i jest (rzeczywistą) liczbą całkowitą.*
2. *Jeśli $\alpha_0\sim\alpha_1\colon S^1\to\mathbb{C}^*$ są homotopijne, to $\deg(\alpha_0) = \deg(\alpha_1)$.*
3. *Dla dowolnych $\alpha,\beta\colon S^1\to\mathbb{C}^*$ zachodzi: $\deg(\alpha\beta) = \deg(\alpha)+\deg(\beta)$.*
4. *Dla dowolnej liczby całkowitej $n\in\mathbb{Z}$ odwzorowanie $\phi_n\colon S^1\to\mathbb{C}^*$, $\phi_n(z) := z^n$, ma stopień n.*

Dowód.

Ad 1. Ponieważ odcinek jest przestrzenią spójną, więc na mocy Stw. 11.7.2 logarytm $\tilde{\alpha}$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do składnika $2k\pi i$, a więc $\deg(\alpha)$ nie zależy od wyboru logarytmu. Ponieważ $\alpha(0) = \alpha(1)$ więc $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = 2d\pi i$, dla pewnej liczby całkowitej $d \in \mathbb{Z}$ skąd wynika, że $\deg(\alpha) = d$ jest liczbą całkowitą.

Ad 2. Skoro $\alpha_0 \sim \alpha_1$ to istnieje homotopia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ taka, że $H(\cdot, 0) = \alpha_0$, $H(\cdot, 1) = \alpha_1$, $H(0,t) = H(1,t)$. Ponieważ kwadrat jest zwartą przestrzenią ściągalną więc na mocy Tw. 11.7.1 przekształcenie H posiada logarytm $\tilde{H}\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$. Rozważmy funkcję $d(t) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{H}(1,t) - \tilde{H}(0,t))$. Funkcja ta jest ciągła i na mocy pkt. 1 przybiera wartości całkowite, a więc jest stała. Wynika stąd, że $\deg(\alpha_0) = d(0) = d(1) = \deg(\alpha_1)$

Ad 3. Jeśli $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ i $\tilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ są odpowiednio logarytmami α i β, to $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ jest logarytmem iloczynu $\alpha \cdot \beta$.

Ad 4. Logarytmem funkcji potęgowej $\phi_n(z) := z^n$ traktowanej jako odwzorowanie odcinka $\phi'_n\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$, $\phi'_n(t) = \exp(2n\pi i t)$ jest przekształcenie $\tilde{\phi}'_n(t) = 2n\pi i t$ a więc $\deg(\phi_n) = n$. □

Twierdzenie 11.8.1. *Stopień wyznacza izomorfizm grup* $\deg\colon B(S^1) := [S^1, \mathbb{C}^*] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$.

Dowód. Na mocy Stw. 11.8.1 $\deg\colon [S^1, \mathbb{C}^*] \to \mathbb{Z}$ jest dobrze zdefiniowanym homomorfizmem grup i jest epimorfizmem. Pozostaje zauważyć, że jest monomorfizmem. Niech $\deg(\alpha) = 0$; oznacza to, że dla pewnego logarytmu $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = 0$, czyli logarytm jest drogą zamkniętą, a więc definiuje przekształcenie $\tilde{\alpha}\colon S^1 \to \mathbb{C}$ takie, że $\alpha = p\tilde{\alpha}$. Ponieważ płaszczyzna $\mathbb{C}$ jest ściągalna, więc $\alpha \sim 1$. □

Ostatnie twierdzenie powiada, że dowolne odwzorowanie $\alpha\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ jest homotopijne z jednym z odwzorowań potęgowych ϕ_n i żadne dwa różne takie odwzorowania nie są homotopijne.

Wniosek 11.8.1. *Przyporządkowanie* $[S^1 \vee \cdots \vee S^1, S^1] \ni [f] \mapsto (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ *gdzie d_i jest stopniem odwzorowania f obciętego do i-tego okręgu, jest izomorfizmem grup.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z Wniosku **??** i Tw. 11.8.1. □

Sformułujemy kilka ważnych wniosków wypływających ze znajomości homotopijnej klasyfikacji odwzorowań $S^1 \to \mathbb{C}^*$.

Wniosek 11.8.2. *Okrąg euklidesowy S^1 nie jest ściągalny i nie jest retraktem dysku* $D^2 := \{z \in \mathbb{C}\colon ||z|| \leqslant 1\}$.

Dowód. Dla $n = 1$ twierdzenie wynika ze spójności odcinka oraz niespójności sfery S^0. Odwzorowanie identycznościowe $id : S^1 \to S^1$ ma stopień 1, zatem nie jest ściągalne. Jeśli istniałaby retrakcja $r\colon D^2 \to S^1$, to oznaczałoby to, że identyczność na S^1 jest ściągalna (p. Stw. 11.5.1). □

Uwaga 11.8.1. Sfera S^n nie jest ściągalna dla każdego $n \geqslant 0$. Zauważmy, że $S^0 = \{-1, 1\}$ nie jest spójna. Dowód dla $n > 1$ opiera się na konstrukcji stopnia dla odwzorowań

$S^n \to S^n$.[7]. Poniższe słynne twierdzenie Brouwera[8] o punktach stałych także zachodzi dla dysków dowolnych wymiarów i jest wnioskiem z nieściągalności sfery.

Wniosek 11.8.3 (Twierdzenie Brouwera dla $n \leqslant 2$)**.** *Dowolne odwzorowanie $f\colon D^n \to D^n$, dla $n \leqslant 2$, ma punkt stały.*

Dowód. Jeśli $f\colon D^n \to D^n$ byłoby przekształceniem bez punktów stałych, to istniałaby retrakcja $r\colon D^n \to S^{n-1}$ zdefiniowana następująco: $r(x)$ jest punktem przecięcia półprostej $f(x)+t(x-f(x))$ dla $t \geqslant 1$ ze sferą S^n . Pokazaliśmy, że sfera S^{n-1} nie jest retraktem dysku D^n dla $n \leqslant 2$, więc dla tych wymiarów twierdzenie Brouwera jest w pełni udowodnione. □

Piękną ilustracją jedności matematyki jest to, że kurs topologii kończy się dowodem podstawowego twierdzenia algebry, powiadającego, że ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

Wniosek 11.8.4 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Dowolny wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek zespolony.*

Dowód. Niech $w(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem takim, że $w(z) \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}$, zadaje więc odwzorowanie wielomianowe $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest przestrzenią ściągalną, więc odwzorowanie w obcięte do dowolnego jej podzbioru, w szczególności $S^1 \subset \mathbb{C}$, jest odwzorowaniem ściągalnym. Z drugiej strony formuła

$$H(z,t) := z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{n-1}a_1 z + t^n a_0 = \begin{cases} t^n w(\frac{z}{t}) & \text{dla } t \neq 0 \\ z^n & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

zadaje homotopię $H\colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ między $H(z,0) = z^n := \phi_n(z)$ i $H(z,1) = w(z)$, a więc $\deg(w) = n > 0$, co oznacza, że otrzymaliśmy sprzeczność. □

Uwaga 11.8.2. Zasadnicze twierdzenie algebry oczywiście nie zachodzi dla ciała liczb rzeczywistych, natomiast zachodzi dla wielomianów o współczynnikach w ciele kwaternionów (które nie jest przemienne). Dowód opiera się na nieściągalności sfery $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ gdzie $\mathbb{H}$ oznacza ciało kwaternionów.[9]

Wniosek 11.8.5 (Twierdzenie Borsuka[10] – Ulama[11] o antypodach dla $n \leqslant 2$)**.** *Dla dowolnego odwzorowania ciągłego $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $n \leqslant 2$, istnieje punkt $p \in S^n$ taki, że $f(p) = f(-p)$.*

---

[7] John W. Milnor *Topology from Differentiable Viewpoint* Tłum. polskie PWN 1969

[8] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Overschie, Rotterdam 1881 - 1966 Blaricum, Netherlands) best known for his topological fixed point theorem. He founded the doctrine of mathematical intuitionism, which views mathematics as the formulation of mental constructions that are governed by self-evident laws. [Mac Tutor]

[9] Samuel Eilenberg and Ivan Niven. *The "fundamental theorem of algebra" for quaternions.* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 50, Number 4 (1944), pp. 246-248.

[10] Karol Borsuk (Warszawa 1905 - 1982 Warszawa) [Mac Tutor]

[11] Stanisław Ulam (Lwów 1909 - 1984 Santa Fe, New Mexico, USA) solved the problem of how to initiate fusion in the hydrogen bomb. He also devised the 'Monte-Carlo method' widely used in solving mathematical problems using statistical sampling.[Mac Tutor]

Dowód. Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że dla każdego $p \in S^2$, $f(p) \neq f(-p)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $g\colon S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $g(p) := f(p) - f(-p)$. Sferę S^{n-1} można traltować jako podzbiór S^n ("równik") a obcięcie odwzorowania $g|S^{n-1}$ jest ściągalne (bowiem rozszerza się górną półsferę, czyli dysk) oraz spełnia warunek $g(-z) = -g(z)$.

Dla $n = 1$ jest to niemożliwe, bo odwzorowanie $S^0 \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest homotopijne ze stałym wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje wartości stałego znaku, co warunek $g(-z) = -g(z)$ wyklucza.

Niech teraz $n = 2$. Pokażemy, że odwzorowanie $g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ spełniające warunek $g(-z) = -g(z)$ nie może być ściągalne, bowiem musi mieć nieparzysty stopień. Rozważmy drogę zamkniętą $[0,1] \xrightarrow{p} S^1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^*$, którą będziemy oznaczać g_p i obliczymy jej stopień. Jeśli $g_p(0) = g(1) = z_0 = |z_0| \exp(i\theta_0)$ to

$$g_p(\frac{1}{2}) = g(-1) = -z_0 = |z_0| \exp(i(\theta_0 + \pi)).$$

Niech $\tilde{g}'_p\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}^*$ będzie logarytmem $g_p|[0, \frac{1}{2}]$. Z powyższego wzoru wynika, że dla pewnego $k \in Z$ zachodzi równość: $\tilde{g}'_p(\frac{1}{2}) = \tilde{g}'_p(0) + (2k+1)\pi i$. Warunek $g(-z) = -g(z)$ oznacza, że odwzorowanie g, a więc logarytm g_p jest wyznaczony przez wartości g na górnym półokręgu. Zdefiniujmy więc logarytm $\tilde{g}_p\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ wzorem:

$$\tilde{g}_p(t) := \begin{cases} \tilde{g}'_p(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{g}'_p(t - \frac{1}{2}) + (2k+1)\pi i \quad \text{dla} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Stąd $(2\pi i)\deg(g) = \tilde{g}_p(1) - \tilde{g}_p(0) = \tilde{g}'_p(\frac{1}{2}) + (2k+1)\pi i - \tilde{g}'_p(0) =$
$\tilde{g}'_p(0) + (2k+1)\pi i + (2k+1)\pi i - \tilde{g}'_p(0) = 2(2k+1)\pi i$, a więc $\deg(g) = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą, czyli g nie jest ściągalne. □

Uwaga 11.8.3. Podobnie jak twierdzenie Brouwera, twierdzenie Borsuka – Ulama zachodzi dla dowolnego wymiaru n i także stanowi konsekwencję klasyfikacji homotopijnej odwzorowań $S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przez odpowiednio zdefiniowany stopień.

11.9 Zadania

Zad. 1. Wykazać, że:

1) Jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorficzna z przestrzenią ściągalną, to jest ściągalna.

2) Przestrzeń jest ściągalna $\iff$ jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.

3) Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest ściągalna do punktu x_0, to jest ściągalna do dowolnego punktu $x_1 \in X$.

4) Dowolny gwiaździsty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest ściągalny.

5) Przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.

6) Retrakt przestrzeni ściągalnej jest przestrzenią ściągalną.

7) Produkt kartezjański przestrzeni ściągalnych jest przestrzenią ściągalną. (*Uwaga:* podprzestrzeń, ani przestrzeń ilorazowa przestrzeni ściągalnej nie muszą być ściągalne - podaj przykłady).

8) Jeśli $A \subset X$ jest podprzestrzenią ściągalną i istnieje odwzorowanie $F\colon X \times I \to X$ takie, że dla każdego $x \in X$, $H(x, 0) = x$ oraz $H(x, 1) \in A$, to X jest przestrzenią ściągalną.

Zad. 2. Dowolne przekształcenie o wartościach w przestrzeni ściągalnej, bądź określone na przestrzeni ściągalnej jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Zad. 3. Jeśli przekształcenia ciągłe $f_0, f_1\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ są homotopijne a $C \subset X$ jest składową łukową przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, to istnieje dokładnie jedna składowa łukowa przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zawierająca zbiór $f_0(C) \cup f_1(C)$.

Zad. 4. Niech S^n oznacza sferę euklidesową a $S^k \subset S^n$ będzie sferą k–wymiarową włożoną na pierwszych $(k+1)$ współrzędnych. Wykazać, że dopełnienie $S^n \setminus S^k$ jest homotopijnie równoważne z S^{n-k-1}

Wsk. Zauważyć, że rzut stereograficzny wyznacza homeomorfizm $S^n \setminus S^k \simeq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ a następnie zrzutować ten zbiór na podprzestrzeń prostopadła do $\mathbb{R}^k$.

Zad. 5. BCPP Zad. 6.1.

Zad. 6. Wykazać, że płaszczyzna przekłuta w n punktach jest homotopijnie równoważna z bukietem n okręgów.

Zad. 7. Wykazać, że

1. Wstęga Möbiusa i walec są homotopijnie równoważne z okręgiem;
2. Przekłuta płaszczyzna rzutowa jest homotopijnie równoważna z okręgiem;
3. Przekłuty walec $S^1 \times \mathbb{R}$ i przekłuta wstęga Möbiusa są homotopijnie równoważne z bukietem dwóch okręgów;
4. Przekłuty torus i przekłuta butelka Kleina są homotopijnie równoważne z bukietem dwóch okręgów;
5. Przekłuty produkt dwóch sfer $S^n \times S^k$ jest homotopijnie równoważny z bukietem $S^n \vee S^k$.

Rozważyć co się stanie jeśli przekłuć ww. przestrzenie w n punktach.

Rozdział 12

Powierzchnie

W tym rozdziale zajmiemy się topologią zamkniętych powierzchni, a więc przestrzeni zwartych, lokalnie homeomorficznych z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$. Dokładniej:

Definicja 12.0.1. *Powierzchnią (lub rozmaitością 2-wymiarową) nazywamy przestrzeń Hausdorffa posiadającą przeliczalną bazę taka, że każdy jej punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z podzbiorem otwartym płaszczyzny euklidesowej* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ *(równoważnie z płaszczyzną* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$*). Powierzchnią zamkniętą nazywamy powierzchnię, która jest przestrzenią zwartą.*

Nasze dalsze rozważania ograniczymy do poznanych przykładów powierzchni, czyli: sfery, torusa, płaszczyzny rzutowej, butelki Kleina, a także walca i wstęgi Möbiusa. Wykażemy, że żadne dwie z nich nie są homeomorficzne.

12.1 Walec i wstęga Möbiusa

Otwartą wstęgę będziemy utożsamiać z przestrzenią ilorazową walca $S^1 \times (-1, 1)$ otrzymaną przez utożsamienie punktów antypodycznych: $(z, t) \sim (-z, -t)$. Zauważmy, że istnieje homeomorfizm $M \simeq S^1 \times [0, 1)/\sim$ gdzie $(z, t) \sim (z', t') \iff (z, t) = (z', t')$ lub $t = t' = 0$ oraz $z' = -z$. Równik wstęgi $M_0 \subset M$ tworzą punkty postaci $[z, 0]$ a homeomorfizm $p_0 \colon M_0 \to S^1$ jest dany wzorem $p_0([z, 0]) := z^2$. Te rozważania pozostają w mocy dla domkniętej wstęgi Möbiusa, jeśli zastąpimy odcinek otwarty $(-1, 1)$ odcinkiem domkniętym $[-1, 1]$.

Twierdzenie 12.1.1.

1. *Rzutowanie wstęgi Möbiusa na jej równik* $p \colon M \to S^1$ *zdefiniowane* $p([z, t]) := z^2$ *jest homotopijną równoważnością.*

2. *Jeśli* $0 < t \leqslant 1$ *to odwzorowanie* $\iota_t \colon S^1 \to M$, $\iota_1(z) := [z, t]$ *jest włożeniem okręgu, a złożenie odwzorowań* $S^1 \xrightarrow{\iota_1} M \xrightarrow{p} S^1$ *jest odwzorowaniem stopnia 2.*

3. *Dla dowolnego* $0 < t \leqslant 1$ *włożenie* $\iota_t \colon S^1 \to M$ *definiuje monomorfizm* $\iota_t^* \colon [M, S^1] \to [S^1, S^1]$, *którego obrazem jest podgrupa generowana przez odwzorowanie stopnia 2.*

Dowód. Ad 1. Jak zauważyliśmy wyżej punkty $M_0 := \{[z,0] \in M : z \in S^1\}$ tworzą równik wstęgi, a odwzorowanie $p|M_0 \colon M_0 \to S^1$ jest homeomorfizmem. Oznaczmy odwzorowanie odwrotne $h_0 := (p_| M_0)^{-1} \colon S^1 \to M_0 \subset M$. Złożenie $ph_0 = id_{S^1}$. Złożenie $h_0 \circ p \colon M \to M$ jest homotopijne z $id \colon M \to M$ poprzez homotopię $H([z,t],s) := [z, st]$.
Ad 2. Dla $0 < t \leqslant 1$ odwzorowanie ciągłe ι_t jest różnowartościowe, a zatem ponieważ okrąg jest przestrzenią zwartą, a wstęga Möbiusa przestrzenią Hausdorffa, jest to zanurzenie homeomorficzne. Z definicji wynika, że $(p \circ \iota_t)(z) = p([z,t]) = z^2$ więc to złożenie jest odwzorowaniem stopnia 2.
Ad 3. Złożenie $\mathbb{Z} \simeq [S^1, S^1] \xrightarrow{p^*} [M, S^1] \xrightarrow{\iota_t^*} [S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z}$ przeprowadza $id \colon S^1 \to S^1$ na $\phi_2 \colon S^1 \to S^1$, a więc jest monomorfizmem. Ponieważ p jest homotopijną równoważnością, p^* jest izomorfizmem, a stąd wynika, że ι_t^* jest różnowartościowe a jego obraz jest generowany przez odwzorowanie stopnia 2. □

Uwaga 12.1.1. Zauważmy, że przekształcenie $\iota_0(z) := [z, 0]$ jest dwukrotnym nawinięciem okręgu na równik wstęgi Möebiusa.

12.2 Sfera

Chociaż w tym rozdziale interesujemy się przede wszystkim powierzchniami, to własności sfer przedyskutujemy dla dowolnego wymiaru. Przypomnijmy, że n-wymiarową sferą nazywamy podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$, a n–wymiarowym dyskiem podprzestrzeń $D^n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon ||\mathbf{v}|| \leqslant 1\}$, czyli domknięcie kuli euklidesowej o środku w 0 i promieniu 1. Zauważmy, że brzeg dysku jest sferą: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Stwierdzenie 12.2.1. *Dla $n > 0$ następujące przestrzenie są homeomorficzne są homeomorficzne ze sferą S^n:*

1. *Zbiór $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ z topologią generowaną przez kule euklidesowe zawarte w $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| > r\} \cup \{\infty\}$;*

2. *Zbiór $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ z topologią generowaną przez podzbiory otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz zbiory postaci $\{\infty\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$ gdzie $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym;*

3. *Przestrzeń ilorazowa $D^n/\sim$ gdzie $x \sim y \iff x = y \text{ lub } x, y \in S^{n-1}$.*

Sfera jest przestrzenią zwartą, w której każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Zaczniemy od zauważenia, że sfera jest przestrzenią zwartą, jako ograniczony i domknięty podzbiór $\mathbb{R}^{n+1}$. Także łatwo jest zauważyć, że każdy punkt posiada otocznie homeomorficzne z otwartą kulą $B(0,1) \in \mathbb{R}^n$ pokrywając sferę $2(n+1)$ półsferami. Homeomorfizmy półsfer z $B(0,1)$ są dane przez rzutowania na odpowiednie płaszczyzny. Dalej wykażemy, że sferę można pokryć dwoma zbiorami, z których każdy jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$, a mianowicie wybrawszy dowolny punkt $p \in S^n$, $S^n = (S^n \setminus \{p\}) \cup (S^n \setminus \{-p\})$.

Zauważmy teraz , że topologie w zbiorze $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ opisane w pkt. 1 i 2 są identyczne. Oznaczmy je odpowiednio $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. Ponieważ domknięcia kul euklidesowych są zbiorami zwartymi, więc $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Odwrotnie, dowolny zbiór zwarty jest podzbiorem pewnej kuli domkniętej, a więc zachodzi inkluzja $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$, skąd topologie są równe.

Skonstruujemy ciągłą bijekcję $D^n/\sim \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^+$. Dla $n = 1$ wybierzmy homeomorfizm $h_1\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ np. $h_1(t) := \frac{t}{t^2-1}$ i rozszerzmy do odwzorowania $\bar{h}_1\colon D^1 \to (\mathbb{R}^1)^+$ kładąc $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ Odwzorowanie to jest ciągłe i definiuje odwzorowanie przestrzeni ilorazowej $\bar{h}_1\colon D^1/\sim \longrightarrow (\mathbb{R}^1)^+$ które jest ciągłą bijekcją. Ponieważ $D^1/\sim$ jest przestrzenią zwartą, więc jest homeomorfizmem. W przypadku sfery dowolnego wymiaru przeprowadzamy dokładnie takie samo rozumowanie, uciekając do nieskończoności po prostych przechodzących przez 0. Definiujemy homeomorfizm $h_n\colon B(0;1) \to \mathbb{R}^n$ wzorem $h_n(t\mathbf{v}) := h_1(t)\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in S^{n-1}$ i $0 \leqslant t < 1$. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym rozszerzamy to przekształcenie do $h_n\colon D^n \to (\mathbb{R}^n)^+$ kładąc $h_n(\mathbf{v}) = \infty$ dla $\mathbf{v} \in S^{n-1}$. Przekształcenie to definiuje ciagła bijekcję $\bar{h}_n\colon D^n/\sim \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^+$, która jest homeomorfizmem bo $(\mathbb{R}^n)^+$ jest oczywiście przestrzenią Hausdorffa.

Homeomorfizm $S^n \to (\mathbb{R}^n)^+$ można określić wykorzystując *rzut stereograficzny*, czyli homeomorfizm $h\colon S^n \setminus p \to \mathbb{R}^n$. Wybierzmy punkt $p := (0,\ldots,0,1) \in S^n$ i zdefiniujmy:

$$h(x_1,\ldots,x_{n+1}) := \frac{1}{x_{n+1}-1}(x_1,\ldots,x_n).$$

Łatwo się przekonać, że kładąc $h(p) = \infty$ otrzymujemy ciągłą bijekcję $\bar{h}\colon S^n \to (\mathbb{R}^n)^+$, a więc homeomorfizm. □

Uwaga 12.2.1. Zauważmy, że model sfery opisany w punkcie 2) nie wymaga wyboru metryki w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a jest wyznaczony jedynie przez topologię tej przestrzeni!

Wniosek 12.2.1. *Dla dowolnego punktu $p \in S^n$ przekłuta sfera $S^n \setminus \{p\}$ jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych dwóch punktów $p_1, p_2 \in S^n$ sfery w tych punktach przekłute są homeomorficzne, bowiem istnieje homeomorfizm sfery $h\colon S^n \to S^n$ taki, że $h(p_1) = p_2$. Homeomorfizm p konstruujemy metodami znanymi z algebry liniowej. Niech $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bedzie dwuwymiarową podprzestrzenią zawierającą punkty p_1, p_2. W tej płaszczyźnie można przeprowadzić punkt p_1 na p_2 przy pomocy obrotu, który jest izometrią liniową. Kładąc identyczność na podprzestrzeni prostopadłej $P^\perp$ otrzymujemy izometrię liniową $h\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, która oczywiście zachowuje sferę i przeprowadza p_1 na p_2. Korzystając 12.2.1 pkt. 2 i wyjmując punkt ∞ otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 12.2.1. *Jeśli $n > 1$, to $B(S^n) := [S^n, S^1] = 0$.*

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 11.7.1, pokazując , że dowolne odwzorowanie $f\colon S^n \to \mathbb{C}^*$ posiada logarytm. Zauważmy, że rozkłada się na sumę dwóch podzbiorów domkniętych $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$, z których każdy jest homeomorficzny z dyskiem D^n a ich przecięcie $S := S^n_+ \cap S^n_-$ jest homeomorficzne ze sferą S^{n-1}, a więc jest spójne. Ponieważ dyski są ściągalne, więc odwzorowanie f posiada na nich logarytmy. Z Wniosku 11.7.1 wynika istnienie logarytmu $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$, a więc odwzorowanie f jest ściągalne. □

Uwaga 12.2.2. Zauważmy, ze powyższe rozumowanie nie działa w przypadku $n = 1$ bo sfera S^0 nie jest spójna.

12.3 Torus

Torusem nazywamy produkt dwóch okręgów euklidesowych $S^1 \times S^1$ [1]. Zauważmy, że tak zdefiniowany torus jest w naturalny sposób podprzestrzenią w 4-wymiarowej przestrzeni euklidesowej: $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Można go jednak zanurzyć w $\mathbb{R}^3$ oraz przedstawić jako przestrzeń ilorazową kwadratu w którym dokonano odpowiednich utożsamień na jego bokach.

Zauważmy też, że torus jest grupą (mnożenie po współrzędnych) oraz działanie a także branie elementu odwrotnego są odwzorowaniami ciągłymi.

Stwierdzenie 12.3.1. *Następujące przestrzenie są homeomorficzne z torusem:*

a) T' – powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ otrzymaną przez obrót wokół osi x_3 okręgu położonego w płaszczyźnie $x_2 = 0$, który nie przecina osi x_3.

b) T'' – przestrzeń ilorazowa $[-1,1] \times [-1,1]/\sim$ gdzie $(-1,t) \sim (1,t)$, $(s,1) \sim (s,-1)$ a pozostałe klasy abstrakcji są jednopunktowe.

Torus jest przestrzenią zwartą, w której każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Torus jest zwarty jako produkt kartezjański dwóch przestrzeni zwartych. Dla dowolnego punktu torusa (z_1, z_2) zbiór $(S^1 \setminus \{z_1\}) \times (S^1 \setminus \{z_2\})$ jest zbiorem otwartym, homeomorficznym z $\mathbb{R}^2$ i zbiory tej postaci oczywiście pokrywają torus.

Homeomorfizm $[-1,1] \times [-1,1]/\sim \to S^1 \times S^1$ jest zadany przez odwzorowanie $p(s,t) := (\exp \pi t, \exp \pi s)$. Zanurzenie torusa w przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest opisane w skrypcie z Analizy Matematycznej[2] . □

Stwierdzenie 12.3.2. *Dla dowolnych dwóch punktów torusa (z_1, z_2) i (w_1, w_2) istnieje homeomorfizm $h\colon T \to T$ taki, że $h(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$.*

Dowód. Definiujemy $h(u_1, u_2) := (u_1, u_2)(z_1, z_2)^{-1}(w_1, w_2) = (u_1 z_1^{-1} w_1, u_2 z_2^{-1} w_2)$. □

Stwierdzenie 12.3.3. *Niech $p \in T$ będzie dowolnym punktem. Przekłuty torus $T \setminus \{p\}$ jest homotopijnie równoważny z bukietem okręgów $S^1 \vee S^1$, a więc*

$$B(T \setminus \{p\}) = [S^1 \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Dowód. Wybierzmy model torusa jako przestrzeni ilorazowej kwadratu i punkt $p := (0,0) \in [-1,1] \times [-1,1] =: J^2$. Odwzorowanie $[-1,1] \times [-1,1] \setminus \{p\} \to T$ pozostaje ilorazowe. Oczywista retrakcja przekłutego kwadratu na jego (euklidesowy) brzeg $r\colon J^2 \setminus \{p\} \to \partial J^2$ wyznacza odwzorowanie retrakcję $\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{p\})/\sim \to (\partial J^2)/\sim$. Odwzorowanie

$$\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{p\})/\sim \;\to (\partial J^2)/\sim \subset (J^2 \setminus \{p\})/\sim$$

jest homotopijne z identycznością; homotopia jest wyznaczona przez afiniczną homotopię $r\colon J^2 \setminus \{p\} \to \partial J^2 \subset J^2 \setminus \{p\}$ z identycznością. Z definicji bukietu wnika, że $(\partial J^2)/\sim \subset J^2/\sim$ jest bukietem okręgów. □

[1] Wizualizacja p. Neil Strickland web page

[2] Michał Krych *'AM 2, Funkcje wielu zmiennych - ciągłość'*

Uwaga 12.3.1. Teza Stw. 12.3.2 pozostaje prawdziwa jeśli zamiast punktu wyjmiemy z torusa mały dysk lub kwadrat wokół niego np. $\bar{B}(0;\epsilon)$ lub $[-\epsilon,\epsilon]\times[-\epsilon,\epsilon]$ gdzie $0<\epsilon<1$.

Twierdzenie 12.3.1. *Włożenie $j\colon S^1\vee S^1\subset S^1\times S^1$ definiuje izomorfizm*

$$j^*\colon [S^1\times S^1,S^1]\xrightarrow{\simeq}[S^1\vee S^1,S^1]\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

Dowód. Homomorfizm j^* jest epimorfizmem. Jeśli $f\colon S^1\vee S^1\to S^1$ jest pewnym odwzorowaniem, to definiujemy jego rozszerzenie na cały torus wzorem: $\bar{f}(z_1,z_2):=f(z_1,1)f(1,z_2)$. Wykażemy, że j^* jest monomorfizmem. Załóżmy więc, że obcięcie przekształcenia $g\colon S^1\times S^1\to S^1$ do bukietu $S^1\vee S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym. Podobnie jak w dowodzie Tw. 12.2.1, stosując Tw. 11.7.1, dla takiego g skonstruujemy jego logarytm $\tilde{g}\colon S^1\times S^1\to\mathbb{C}$. Niech $p=(-1,-1)\in T$ i rozłóżmy torus na sumę dwóch podzbiorów otwartych $T=U_1\cup U_2$ gdzie $U_1:=(T\setminus\{p\})$ a $U_2:=((S^1\setminus\{1\})\times(S^1\setminus\{1\}))$. Zbiór U_2 jest oczywiście homeomorficzny z otwartym kwadratem $(-1,1)\times(-1,1)$, a więc jest ściągalny. Na mocy Stw. 12.3.2 włożenie $S^1\vee S^1\subset T\setminus\{p\}$ jest homotopijną równoważnością. Stąd wynika, że dla $i=1,2$ obcięcie $g|U_i$ posiada logarytm. Ponieważ przecięcie $U_1\cap U_2$ jest spójne (homeomorficzne z przekłutym kwadratem), a więc na mocy Wniosku 11.7.1, g posiada logarytm, czyli na mocy Tw. 11.7.1 jest odwzorowaniem ściągalnym. □

Wniosek 12.3.1. *Torus nie jest homeomorficzny ze sferą.*

Dowód. Jeśli $h\colon T\to S^2$ byłoby homeomorfizmem (a nawet tylko homotopijną równoważnością), to $h^*\colon 0=B(S^2)\to B(T)\neq 0$ byłoby bijekcją, co jest niemożliwe. □

12.4 Płaszczyzna rzutowa

Bardzo ważną i interesującą powierzchnią jest płaszczyzna rzutowa. Jak pokazaliśmy sferę można sobie wyobrażać jako płaszczyznę z dodanym jednym punktem w nieskończoności. Płaszczyzna rzutowa to płaszczyzna do której dodano po jednym punkcie w nieskończoności dla każdej prostej przechodzącej przez 0, lub równoważnie dla każdej klasy prostych równoległych (jedna przechodzi przez 0). Ponieważ o dysku $D(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ można myśleć jako o przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (wnętrze dysku) do której dodano po jednym punkcie w nieskończoności dla każdej półprostej o początku w 0, a więc naturalne jest zdefiniowanie płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni ilorazowej dysku, w której antypodyczne punkty na jego brzegu są utożsamione:

$$P:=D(0,1)/\sim\quad\text{gdzie}\quad p_1\sim p_2\iff p_1=p_2\quad\text{lub}\quad p_1,p_2\in S^1\quad\text{oraz}\quad p_1=-p_2$$

Definicja ta i intuicja bez trudu uogólnia się na wyższe wymiary.

Stwierdzenie 12.4.1. *Następujące przestrzenie są homeomorficzne z płaszczyzną rzutową P:*

1) *Przestrzeń ilorazowa $P':=[-1,1]\times[-1,1]/\sim$ gdzie $(t_1,t_2)\sim(s_1,s_2)\iff(t_1,t_2)=(s_1,s_2)$ lub $(t_1,t_2)=-(s_1,s_2)$ gdzie $t_1\in\{-1,1\}$ lub $t_2\in\{-1,1\}$*

2) *Przestrzeń ilorazowa $P'':=S^2/\sim$ gdzie $p_1\sim p_2\iff p_1=p_2$ lub $p_1=-p_2$.*

3) Przestrzeń ilorazowa $P''' := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ *gdzie* $p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2$ *lub* $p_1 = \lambda p_2$ *dla pewnej liczby* $\lambda \in \mathbb{R}$ *.*

Płaszczyzna rzutowa jest zwarta, a każdy jej punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$*.*

Dowód. Żeby sprawdzić zwartość płaszczyzny rzutowej wystarczy wykazać, że jest przestrzenią Hausdorffa, co jest łatwo sprawdzić bezpośrednio z definicji P, P', P'', P'''. To, ze każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$ najłatwiej jest zauważyć w modelu P'': odwzorowanie ilorazowe $q\colon S^2 \to P''$ odwzorowuje homeomorficznie otwarte półsfery na podzbiory otwarte płaszczyzny rzutowej.

Kanoniczny homeomorfizm dysku i kwadratu ("po promieniach") zachowuje antypodyczność punktów, a więc definiuje homeomorfizm $P \to P'$. Z kolei włożenie $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definiuje ciągłą bijekcję $P'' \to P'''$, a ponieważ P'' jest przestrzenią zwartą, jest więc ona homeomorfizmem. Pozostaje wskazać homeomorfizm $P'' \to P$. Niech $p\colon S^2 \to D^2$ będzie projekcją na pierwsze dwie współrzędne: $p(x_0, x_1, x_2) := (x_0, x_1)$. Łatwo zauważyć, że zadaje ona bijekcję na klasach równoważności, a więc ciągłą bijekcję $P'' \to P$, która wobec zwartości P'' jest homeomorfizmem. □

Uwaga 12.4.1. Przestrzeń P'' jest przestrzenią orbit działania grupy $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ na sferze S^2, a przestrzeń P''' jest przestrzenią orbit działania grupy multyplikatywnej liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^*$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Uwaga 12.4.2. Zanurzenie płaszczyzny rzutowej w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ opisane jest w BCPP (p. BCPP[3] Przykład 5.1.3.)

Wniosek 12.4.1. *Dla dowolnych dwóch punktów* $p_1, p_2 \in P$ *istnieje homeomorfizm* $h\colon P \to P$ *taki, że* $h(p_1) = p_2$*.*

Dowód. Skorzystamy z interpretacji płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni ilorazowej sfery S^2 oraz homeomorfizmu sfery skonstruowanego w dowodzie Wniosku 12.2.1. Niech $p_1 = [\mathbf{v}_1]$, $p_2 = [\mathbf{v}_2]$. Liniowa izometria $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że $h(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ zadaje homeomorfizm płaszczyzny rzutowej $\bar{h}\colon P'' \to P''$ taki, że $\bar{h}(p_1) = p_2$). □

Stwierdzenie 12.4.2. *Niech* $p_0 \in P$*. Przekłuta płaszczyzna rzutowa* $P \setminus \{p_0\}$ *jest homeomorficzna z otwartą wstęgą Möbiusa. Istnieje rozkład płaszczyzny rzutowej na sumę dwóch podzbiorów domkniętych* $P = M \cup K$ *gdzie* M *jest domkniętą wstęgą Möbiusa,* K *– zbiorem homeomorficznym z dyskiem a* $M \cap K$ *ich wpólnym brzegiem, czyli podzbiorem homeomorficznym z okręgiem.*

Dowód. Rozpatrzmy odwzorowanie ilorazowe $q\colon S^2 \to P''$ i jego obcięcie do przeciwobrazu przekłutej płaszczyzny rzutowej $q\colon S^2 \setminus \{\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_0\} \to P'' \setminus \{p_0\}$ gdzie $p_0 = [\mathbf{v}_0] = [-\mathbf{v}_0]$. Sfera z wykłutymi punktami antypodycznymi jest homeomorficzna z otwartym walcem $W := S^1 \times (-1, 1)$, przy czym punkty antypodyczne na sferze przechodzą na punkty antypodyczne na walcu, skąd otrzymujemy homeomorfizm $W/\sim \simeq P'' \setminus \{p_0\}$, a jak wiemy (otwarty) walec z utożsamieniem antypodycznych punktów jest homeomorficzny z (otwartą) wstęgą Möbiusa.

[3] BCPP = S. Betley, J. Chaber, E.Pol, R.Pol TOPOLOGIA I, wykłady i zadania, wrzesień 2012

Rozkład przestrzeni rzutowej na sumę dwóch podzbiorów domkniętych $P = M \cup D$ gdzie M jest domkniętą wstęgą Möbiusa, D – dyskiem a $M \cap D$ ich wspólnym brzegiem otrzymujemy rozkładając "duży" dysk $D^2 = \bar{B}(0, \frac{1}{2}) \cup (D^2 \setminus B(0, \frac{1}{2}))$. $\square$

Twierdzenie 12.4.1. $B(P) := [P, S^1] = 0$.

Dowód Tw. 12.4.1. Tak jak w przypadku sfery i torusa skorzystamy z Tw. 11.7.1, konstruując logarytm dla dowolnego odwzorowania $g\colon P \to \mathbb{C}^*$. Skorzystamy z rozkładu przestrzeni rzutowej skonstruowanego w Stw.12.4.2 $P = M \cup K$ i pokażemy, że g posiada logarytm na obu składnikach, a stąd wobec spójności przecięcia $M \cap K$, na całej płaszczyźnie rzutowej, a więc g jest ściągalne (p.Wniosek 11.7.1). Ponieważ K jest zbiorem ściągalnym, więc $g|K$ posiada logarytm, skąd wynika, że $g|\partial K$ jest odwzorowaniem ściągalnym. Żeby pokazać, że $g|M$ posiada logarytm, wykażemy że jest ściągalne. Ponieważ brzeg dysku $\partial K = \partial M$, a więc g obcięte do brzegu wstęgi Möbiusa jest ściągalne. Z Tw. 12.1.1 pkt.3 wynika, że $g|M$ jest ściągalne. $\square$

Wniosek 12.4.2. *Płaszczyzna rzutowa nie jest homeomorficzna ani ze sferą, ani z torusem.*

Dowód. Nie istnienie homeomorfizmu płaszczyzny rzutowej z torusem jest natychmiastowe, bowiem $B(P) = 0$, a $B(T) \neq 0$. Jeśli istniałby homeomorfizm $h\colon P \to S^2$, to dawałby homeomorfizm przekłutych przestrzeni. To jest jednak niemożliwe, bo przekłuta sfera jest ściągalna, a przekłuta płaszczyzna rzutowa jest homotopijnie równoważna z okręgiem, a więc ściągalna nie jest. $\square$

12.5 Butelka Kleina

Butelkę Kleina[4] zazwyczaj definiuje się jako przestrzeń powstała z następujących utożsamień na bokach kwadratu $J^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$: $(1, t) \sim (-1, -t)$ oraz $(s, 1) \sim (s, -1)$. Podobnie jak sfera, torus i płaszczyzna rzutowa butelka Kleina posiada także inne użyteczne modele.

Uwaga 12.5.1. Zanurzenie butelki Kleina w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ opisane jest w BCPP (p. BCPP Zad. 5.8). Można wykazać, że w odróżnieniu od torusa nie istnieje zanurzenie butelki Kleina w przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Stwierdzenie 12.5.1. *Nastepujące przestrzenie są homeomorficzne z butelką Kleina.*

1) K' *– przestrzeń ilorazowa walca* $S^1 \times [-1, 1]/\sim$ *w którym utożsamiamy punkty* $(z, 1) \sim (\bar{z}, -1)$,

2) K'' *– przestrzeń ilorazowa torusa* $S^1 \times S^1/\sim$ *w którym utożsamiamy punkty* $(z_1, z_2) \sim (\bar{z}_1, -z_2)$, *gdzie* $\bar{z}$ *oznacza sprzężenie zespolone.*

3) K''' *– przestrzeń ilorazowa sumy prostej dwóch domkniętych wstęg Möbiusa* $M_1 \sqcup M_2$ *w której utożsamiamy punty* $([z, 1], 1) \sim ([z, 1], 2)$ *– czyli dwie wstęgi Möbiusa sklejone wzdłuż brzegów.*

[4] Felix Christian Klein (Duesseldorf 1849 - Goettingen 1925) is best known for his work in non-euclidean geometry, for his work on the connections between geometry and group theory, and for results in function theory. [Mac Tutor]

Butelka Kleina jest przestrzenią zwartą, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z płaszczyzną euklidesową.

Dowód. W celu sprawdzenia zwartości, wystarczy zauważyć, że butelka Kleina jest przestrzenią Hausdorffa. Odwzorowanie ilorazowe $q\colon T \to B''$ jest homeomorfizmem na górnych i dolnych "ćwiartkach" torusa, które są homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. Czytelnik, który dobrnął do tego miejsca bez trudu wyobrazi sobie i zapisze powyższe homeomorfizmy ;). □

Uwaga 12.5.2. Podobnie jak poprzednio rozważane powierzchnie, butelka Kleina jest topologicznie jednorodna tzn. dla dowolnych dwóch punktów $p_1, p_2 \in K$ istnieje homeomorfizm $h\colon K \to K$ taki, że $h(p_1) = p_2$. Przekłuta butelka Kleina jest homotopijnie równoważna z bukietem dwóch okręgów.

Twierdzenie 12.5.1. *Przekształcenie okręgu na wspólny brzeg wstęg Möbiusa z których sklejona jest butelka Kleina* $\iota\colon S^1 \to K'''$, $\iota(z) := [[z,1],1] = [[-z,-1],1] = [[z,1],2] = [[-z,-1],2]$ *(dwukrotne nawinięcie) definiuje monomorfizm* $\iota^*\colon B(K''') \to B(S^1)$, *którego obrazem jest podgrupa cykliczna generowana przez klasę homotopii odwzorowanie stopnia 2, a więc* $B(K) \simeq \mathbb{Z}$.

Dowód. Oznaczmy $E := \iota(S^1) = M_1 \cap M_2$ i nazwijmy ten zbiór, homeomorficzny z okręgiem, równikiem butelki Kleina. Niech $g\colon B \to S^1$ będzie odwzorowaniem, które po obcięciu do równika jest ściągalne. Z Tw. 12.1.1 wynika, że jest ono ściągalne na obu wstęgach Möbiusa, a więc na obu można określić jego logarytm. Ponieważ przecięcie tych wstęg jest spójne, więc na mocy Wniosku 11.7.1 istnieje logarytm g określony na całej butelce, a więc g jest ściągalne. □

Wniosek 12.5.1. *Butelka Kleina nie jest homeomorficzna (a nawet homotopijnie równoważna) ze sferą, torusem, ani z płaszczyzną rzutową.*

Dowód. Grupy kohomologii wymienionych przestrzeni nie są izomorficzne, a więc nie są one homotopijnie równoważne. □

Rozdział 13

Dodatek. Rachunek zbiorów.

W tym rozdziale zgromadziliśmy podstawowe pojęcia i definicje, których znajomość jest niezbędna do korzystania z *Pomocnika Studenta.*

Definicja 13.0.1 (Iloczyn kartezjański). *Iloczynem kartezjańskim (produktem) dwóch zbiorów X, Y nazywamy zbiór par uporządkowanych $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$.*

Definicja 13.0.2 (Odwzorowanie). *Odwzorowanie (przekształcenie) $f\colon X \to Y$ to przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y. Formalnie, odwzorowanie definiujemy jako jego wykres, czyli podzbiór $\Delta(f) \subset X \times Y$ taki, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in \Delta(f)$. Zbiór wszystkich odwzorowań $X \to Y$ oznacza się Y^X lub* Map (X, Y).

Definicja 13.0.3 (Składanie odwzorowań). *Jeśli $f\colon X \to Y$ oraz $g\colon Y \to Z$ to złożeniem nazywamy odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ takie, że dla każdego $x \in X$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.*

Definicja 13.0.4 (Obraz). *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem zbiorów, to* obrazem *podzbioru $A \subset X$ nazywamy podzbiór $f(A) := \{y \in Y \mid \exists_{x \in X}\, y = f(x)\}$.*

Definicja 13.0.5 (Przeciwobraz). *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem zbiorów, to* przeciwobrazem *podzbioru $B \subset Y$ nazywamy podzbiór $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.*

Definicja 13.0.6 (Surjekcja, injekcja, bijekcja). *Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywa się:*

1. surjekcją *jeśli $f(X) = Y$, czyli dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$*
2. injekcją *jeśli dla dowolnych punktów x_1, x_2 równość $f(x_1) = f(x_2)$ pociąga, że $x_1 = x_2$, czyli dla dowolnego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest co najwyżej jednopunktowy.*
3. bijekcją *jeśli jest jednocześnie surjekcją i injekcją (czyli jest wzajemnie jednoznaczne i "na").*

Definicja 13.0.7 (Odwracanie odwzorowań). *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem zbiorów to odwzorowanie $g\colon Y \to X$ nazywamy:*

1. prawą odwrotnym *jeśli złożenie $f \circ g = id_Y$, (id_Y identyczność na Y)*
2. lewą odwrotnym *jeśli złożenie $g \circ f = id_X$, (id_X identyczność na X)*

3. odwrotnym *jeśli jest jednocześnie lewą i prawą odwrotnością.*

Zad. 93. Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest surjekcją (odp. injekcją, bijekcją) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przekształcenie prawo odwrotne do niego (odp. lewo odwrotne, odwrotne).

Definicja 13.0.8 (Zbiór potęgowy)**.** Zbiorem potęgowym *zbioru X nazywamy zbiór $\mathcal{P}(X)$ którego elementami są podzbiory $A \subset X$. Dla dowolnego podzbioru $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ (czyli rodziny podzbiorów) określone są następujące działania:*

1. suma mnogościowa rodziny $\mathcal{A}$ oznaczana $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A := \{x \in X \mid \exists_{A\in\mathcal{A}}\, x \in A\}$

2. iloczyn (przecięcie) rodziny $\mathcal{A}$ oznaczany $\bigcap \mathcal{A} := \bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A := \{x \in X \mid \forall_{A\in\mathcal{A}}\, x \in A\}$

Zad. 94. Czy istnieją rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie, że $\bigcup \mathcal{A} \nsubseteq \bigcup \mathcal{B}$, ale $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Czy istnieją rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie, że $\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{B}$, ale $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Zad. 95. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ to $(\bigcup \mathcal{A}) \cap (\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup\limits_{(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} A \cap B$

Zad. 96. Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem zbiorów to:

1. Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$f(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A) \quad \text{oraz} \quad f(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$$

2. Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$:

$$f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}(B) \quad \text{oraz} \quad f^{-1}(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B) = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}(B)$$

Definicja 13.0.9. *Produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{Y_i\}_{i\in J}$ (indeksowanej zbiorem J) nazywa się podzbiór $\prod\limits_{i\in J} Y_i \subset (\bigcup_{i\in J} Y_i)^J$ złożony z funkcji $\phi\colon J \to \bigcup_{i\in J} Y_i$ takich, że dla każdego $i \in J$, $\phi(i) \in X_i$. Na zbiorze $\prod\limits_{i\in J} Y_i$ są określone odwzorowania $p_i\colon \prod\limits_{i\in I} Y_i \to Y_i$, $p_i(\phi) := \phi(i)$, nazywane rzutowaniami na czynniki produktu.*

Zad. 97.

1. Jeżeli zbiory X_i są niepuste, to odwzorowania p_i są surjekcjami.
2. Dla dowolnej rodziny odwzorowań $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in J}$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $f\colon X \to \prod\limits_{i\in J} Y_i$ takie, że dla każdego $i \in J$ zachodzi równość $p_i \circ f = f_i$.

Uwaga 13.0.1. Jeśli A, B są dowolnymi zbiorami to istnieje diagonalne odwzorowanie $A \cap B \to A \times B$, które po złożeniu z rzutowaniami jest odpowiednio włożeniem $A \cap B \subset A$ i $A \cap B \subset B$.

Definicja 13.0.10. *Sumą prostą (koproduktem, sumą rozłączną) rodziny zbiorów* $\{X_i\}_{i\in J}$ *(indeksowanej zbiorem* J*) nazywa się podzbiór* $\coprod_{i\in J} X_i \subset (\bigcup_{i\in J} X_i) \times J$ *złożony z par* (x,i) *takich, że* $x \in X_i$*. Na każdym zbiorze* X_i *jest określone odwzorowania* $s_i\colon X_i \to \coprod_{i\in J} X_i$*,* $s_i(x) := (x,i)$*, nazywane włożeniem składnika.*

Zad. 98.

1. Odwzorowania s_i są injekcjami.

2. Dla dowolnej rodziny odwzorowań $\{f_i\colon X_i \to Y\}_{i\in J}$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $f\colon \coprod_{i\in J} X_i \to Y$ takie, że dla każdego $i \in J$ zachodzi równość $f \circ s_i = f_i$.

Uwaga 13.0.2. Jeśli A, B są dowolnymi zbiorami to istnieje surjekcja (ale w ogólności nie injekcja!) $A \sqcup B \to A \cup B$, która po złożeniu z włożeniami składników jest odpowiednio włożeniem $A \subset A \cup B$ i $B \subset A \cup B$.

Definicja 13.0.11 (Relacja równoważności)**.** Relacją równoważności *w zbiorze* X *nazywamy podzbiór* $R \subset X \times X$ *taki, że*

1. *(zwrotność) dla każdego* $x \in X$*,* $(x,x) \in R$*,*

2. *(symetria) dla dowolnego* $(x_1, x_2) \in R$ *także* $(x_2, x_1) \in R$

3. *(przechodniość) dla dowolnych elementów* $(x,y), (y,z) \in R$ *także* $(x,z) \in R$*.*

Klasą abstrakcji elementu $x \in X$ *nazywamy podzbiór* $[x]_R := \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$*. Zbiór klas abstrakcji oznaczamy* $X/R \subset \mathcal{P}(X)$ *i definiujemy surjekcję* $\pi_R\colon X \to X/R$*,* $\pi_R(x) := [x]_R$*. (Jeśli* $(x,y) \in R$ *to oznaczamy także* $x \sim_R y$ *lub krócej* $x \sim y$*.)*

Zad. 99.

1. Jeśli $R \subset X \times X$ jest relacją równoważności a $f\colon X \to Y$ odwzorowaniem takim, że jeśli $x_1 \sim_R x_2$ pociąga $f(x_1) = f(x_2)$, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\bar{f}\colon X/R \to Y$ takie, że $\bar{f} \circ \pi_R = f$.

2. Dla dowolnego odwzorowania $f\colon X \to Y$ relacja $x_1 \sim_f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ jest relacją równoważności, a odwzorowanie $\bar{f}\colon X/\sim_f \to Y$ jest injekcją. Jeśli f jest surjekcją, to $\bar{f}$ jest bijekcją między zbiorem klas abstrakcji $X/\sim_f$ i zbiorem Y.

Definicja 13.0.12. *Zbiór* X *jest* przeliczalny *jeśli istnieje bijekcja* $f\colon \mathbb{N} \to X$*, czyli elementy zbioru* X *można ponumerować liczbami naturalnymi. W przeciwnym razie zbiór nieskończony nazywamy nieprzeliczalnym. (Uwaga. Czasem nazwa* przeliczalny *obejmuje zbiory skończone.)*

Twierdzenie 13.0.1.

1. *Podzbiór zbioru przeliczalnego jest skończony lub przeliczalny;*

2. *suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;*

3. *iloczyn kartezjański skończenie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;*

4. *jeśli X jest zbiorem przeliczalnym, to zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$ jest nieprzeliczalny;*

5. *zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.*

Zad. 100. Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem zbiorów, to dla dowolnego podzbioru przeliczalnego $A \subset X$ jego obraz $f(A)$ jest zbiorem przeliczalnym.