Topologia *

Mateusz Zugaj, Michal Zmyslowski

Listopad 2017

Definicja 1 (Topologie na prostej)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów $\mathcal{T}_i$:

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ – topologia dyskretna
2. $\mathcal{T}_2 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s\in U} \exists_{t>s} [s,t) \subset U\}$ – topologia prawej strzałki
3. $\mathcal{T}_3 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s\in U} \exists_{t<s} (t,s] \subset U\}$ – topologia lewej strzałki
4. $\mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s\in U} \exists_{r<s<t} (r,t) \subset U\}$ – topologia euklidesowa
5. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia lewych przedziałów
6. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia prawych przedziałów
7. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U$ jest zbiorem skończonym$\}$ – topologia Zariskiego
8. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ – topologia antydyskretna

Zadanie 1. *Niech $\mathcal{T}_i$ będą rodzinami podzbiorów prostej rzeczywistej opisanymi w Definicji 1.*
a) Sprawdź, że rodziny $\mathcal{T}_i$ są topologiami.
b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i$, rysując diagram inkluzji tych Topologii i zbadaj ich przecięcia.
c) Zbadaj, które topologie $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.
d) O których parach przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$,$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij tabelkę.

Rozwiązanie b) Ewidentnie $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1$. Następnie $[0,1) \in \mathcal{T}_2$, ale $[0,1) \notin \mathcal{T}_3$. Podobnie $(0,1] \in \mathcal{T}_3$, ale $(0,1] \notin \mathcal{T}_2$. Mamy, że $(0,1) \in \mathcal{T}_4$, jak również $(0,1) \in \mathcal{T}_3$ i $(0,1) \in \mathcal{T}_2$. Jednak $[0,1) \notin \mathcal{T}_4$ i $(0,1] \notin \mathcal{T}_4$. Czyli $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_3$. Teraz $(-\infty,1) \in \mathcal{T}_5$, jak również $(-\infty,1) \in \mathcal{T}_4$. Podobnie $(1,\infty) \in \mathcal{T}_6$ i $(1,\infty) \in \mathcal{T}_4$. Jednak $(0,1) \notin \mathcal{T}_5$ i $(0,1) \notin \mathcal{T}_6$. Tak więc, $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_4$ i $\mathcal{T}_6 \subset \mathcal{T}_4$. Mamy $(-\infty,1) \notin \mathcal{T}_7$ i $(1,\infty) \notin \mathcal{T}_7$. Teraz $\mathbb{R} \setminus \{1\} \in \mathcal{T}_7$, ale $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{T}_5$ i $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{T}_6$. Jednak $\mathbb{R} \setminus \{1\} \in \mathcal{T}_4$. Czyli $\mathcal{T}_7 \subset \mathcal{T}_4$. Ostatecznie $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_6$, $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_7$. c) Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $x < y$. Teraz $\mathcal{T}_1$ ma własność Hausdorffa, bo $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{T}_1$. Następnie dobierzmy $s, t, r \in \mathbb{R}$, że $x \in (s,t)$ i $y \in (t,r)$. Teraz

$(s,t) \in \mathcal{T}_4$ i $(t,r) \in \mathcal{T}_4$. Więc $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ i $\mathcal{T}_4$ mają własność Hausdorffa. Pokażemy, że przestrzeń $\mathcal{T}_5$ nie ma własności Hausdorffa, z czego przez analogiczny sposób rozumowania będzie wynikało, że $\mathcal{T}_6$ też nie ma. Weźmy $x, y \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności, załóżmy, że $x < y$. Zbiór otwarty w $\mathcal{T}_5$ zawierający y będzie miał postać $(-\infty, s)$ dla $s \in \mathbb{R}$. Z założenia, że $x < y$ dostajemy $x \in (-\infty, s)$. Teraz udowodnimy, że $\mathcal{T}_7$ nie ma własności Hausdorffa. Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_7$ takie, że $x \in \mathcal{U}$ i $y \in \mathcal{V}$. Teraz $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{T}_7$, z czego wynika, że $\mathbb{R} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ jest skończony. Tak więc, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$, bo w przeciwnym przypadku $\mathbb{R} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ byłby nieprzeliczalny. W $\mathcal{T}_8$ jedynymi zbiorami otwartymi są $\varnothing$ i $\mathbb{R}$, czyli dowolne dwa punkty leżą w tym samym zbiorze, mianowicie $\mathbb{R}$. Tak więc, $\mathcal{T}_8$ nie jest Hausdorffa.
d) Od razu można powiedzieć, że każda $\mathcal{T}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ nie jest homeomorficzna z żadną z $\mathcal{T}_j$ dla $j = 5, 6, 7, 8$, bo wcześniejsze mają własność Hausdorffa, a późniejsze nie. Również $\mathcal{T}_1$ nie jest homeomorficzna z $\mathcal{T}_8$, bo moc pierwszej jest większa od drugiej, co wiadomo ze Wstępu do Matematyki. $\square$

Definicja 2 (Topologie na płaszczyźnie)**.** Na płaszczyźnie rzeczywistej $\mathbb{R}^2$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów. $\mathcal{F}_i$: (punkty płaszczyzny oznaczamy $x = (x_1, x_2)$).

1. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ – topologia dyskretna
2. $\mathcal{F}_2 = \{(a,b) \times \mathbb{R} \colon a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times (a,b) \colon a < b\}$
3. $\mathcal{F}_3 = \{(a,b) \times (c,d) \colon a < b,\, c < d\}$ – topologia euklidesowa
4. $\mathcal{F}_4 = \{B(x,r) \subset \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}^2,\, r > 0\}$
5. $\mathcal{F}_5 = \{B(x,r) \subset \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}^2,\, r > 0\} \cup \{B((x_1,x_2),|x_2|) \cup \{(x_1,0)\} \cup B((x_1,-x_2),|x_2|) \mid x_2 \neq 0\}\}$ – płaszczyzna motylków Niemyckiego[1]
6. $\mathcal{F}_6 := \{\{a\} \times (c,d) \colon a \in \mathbb{R},\, c < d < 0 \,\mathrm{lub}\, 0 < c < d\} \cup \{(a,b) \times (-c,c) \colon a < b,\, c > 0\}$ – topologia rzeczna
7. $\mathcal{F}_7 = \{I(\mathbf{v},\epsilon) \colon \mathbf{v} \neq 0,\, 0 < \epsilon < 1\} \cup \{(-a,a) \times (-a,a) \colon a > 0\}$, gdzie dla wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ i $\epsilon > 0$, $I(\mathbf{v},\epsilon) := \{t\mathbf{v} \mid 1 - \epsilon < t < 1 + \epsilon\}$ – topologia kolejowa
8. $\mathcal{F}_8 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^2\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 \colon \mathbb{R}^2 \setminus U$ jest zbiorem skończonym$\}$ – topologia Zariskiego
9. $\mathcal{F}_9 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ – topologia antydyskretna

Topologie generowane przez te rodziny będziemy oznaczać $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}(\mathcal{F}_i)$.

Zadanie 2. *Niech $\mathcal{F}_i$ dla $i = 1..9$ będą rodzinami podzbiorów płaszczyzny opisanymi w Definicji 2.*

1. *Które z rodzin $\mathcal{F}_i$ są topologiami, a które bazami topologii przez nie generowanymi?*

[1] Zazwyczaj płaszczyzna Niemyckiego nazywa się górną półpłaszczyznę z opisaną topologią. Opisana przestrzeń to sklejenie dwóch podprzestrzeni Niemyckiego wzdłuż osi poziomej $x_2 = 0$.

2. *Porównaj topologie $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}(\mathcal{F}_i)$, rysując diagram ich inkluzji i zbadaj przecięcia$\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$.*

3. *Zbadaj, które z topologii $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.*

4. *O których przestrzeniach $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij odpowiednią tabelkę.*

5. *Dla wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definiujemy przekształcenie przesunięcia (translację) $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) := \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Dla każdego $i = 1..9$ zbadać dla jakich wektorów $\mathbf{v}$ translacja $T_{\mathbf{v}} \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$ jest przekształceniem ciągłym (homeomorfizmem).*

6. *Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$ spełniają I, a które II aksjomat przeliczalności?*

7. *Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$ są metryzowalne? Wskaż odpowiednie metryki i zbadaj jak wyglądają kule w tych metrykach.*

Rozwiązanie

1. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ jest już topologią i spełnia warunek Hausdorffa, ponieważ każdy singleton jest otwarty. Spełnia I aksjomat przeliczalności, ponieważ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, zbiór $\{\{x\}\}$ jest bazą w punkcie x. Nie spełnia, jednak, II aksjomatu przeliczalności. Wynika to z faktu, że w topologii dyskretnej każdy singleton jest otwarty, a jest ich nieprzeliczalnie wiele. Nie jest również ośrodkowa, ponieważ każdy zbiór jest w niej domknięty, więc równość $cl(A) = A$ jest spełniona wyłącznie dla $A = \mathbb{R}$. Przestrzeń jest metryzowalna przy użyciu metryki dyskretnej, tj. $d(x, y) = 0$, jeśli $x = y$ i $d(x, y) = 1$, jeśli $x \neq y$. Wszystkie przesunięcia są ciągłe, bo ogólnie każde przekształcenie z przestrzeni dyskretnej na dowolną jest ciągłe.

2. $\mathcal{F}_2 = \{(a, b) \times \mathbb{R} \colon a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times (a, b) \colon a < b\}$ nie jest topologią, ponieważ przecięcia $(a, b) \times \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \times (a, b)$ nie należą do niej. Jest natomiast podbazą. $\mathcal{F}_3 = \{(a, b) \times (c, d) \colon a < b,\, c < d\}$ również nie jest topologią, ale jest bazą, podobnie jak $\mathcal{F}_4 = \{B(x, r) \subset \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}^2,\, r > 0\}$. Wynika to z faktu, że suma rozłącznych ze sobą zbiorów z tych rodzin nie należy do nich. Następnie zauważymy, że topologie $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$ są identyczne. Dowód tego faktu polega na wybraniu dowolnego zbioru otwartego w jednej topologii i pokazaniu, że należy on do drugiej. W tym celu należy wybrać dowolny punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ze zbioru otwartego $\mathcal{U}$ w jednej topologii i wskazać zbiór otwarty $\mathcal{V}_x$ w drugiej topologii, taki, że $x \in \mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}$ jest właściwym podzbiorem. Suma zbiorów $\mathcal{V}_x$ będzie otwarta w drugiej topologii i da nam zbiór $\mathcal{U}$. Tak więc, każda z tych rodzin generuję topologię euklidesową. Topologia euklidesowa jest metryzowalna, np. $d(x, y) = \|x - y\|_2$. Jest Hausdorffa, ponieważ kule $\mathcal{B}(x_1, d(x_1, x_2)/4)$ i $\mathcal{B}(x_2, d(x_1, x_2)/4)$ są rozłącznymi otoczeniami dowolnych dwóch punktów $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. Zbiór $\mathcal{U}_x = \{\mathcal{B}(x, 1/n) \ : \ n = 1, 2, ...\}$ jest przeliczalną bazą w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}^2$, więc przestrzeń spełnia pierwszy aksjomat

przeliczalności. Teraz $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \mathcal{U}_x$ jest przeliczalną sumą zbiorów przeliczalnych, więc jest przeliczalna i jest bazą, więc topologia euklidesowa spełnia drugi askjomat przeliczalności. Z tego wynika, że jest ośrodkowa, ponieważ wybierając z każdego zbioru bazy po jednym punkcie otrzymamy przeliczalny zbiór, który ma niepuste przecięcie z każdym zbiorem otwartym (każdy zbiór otwarty jest sumą zbiorów z bazy). Weźmy dowolny zbiór $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_e$. Wiemy, już że istnieje $r_x > 0$ taki, że $\mathcal{U} = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{B}(x, r_x)$. Teraz $T_{\mathbf{v}}^{-1}[\mathcal{U}] = T_{\mathbf{v}}^{-1}[\bigcup_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{B}(x, r_x)] = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} T_{\mathbf{v}}^{-1}[\mathcal{B}(x, r_x)] = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{B}(x - \mathbf{v}, r_x)$. Tak więc, każde przesunięcie jest ciągłe.

3. $\mathcal{F}_5 = \{B(x, r) \subset \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}^2,\, r > 0\} \cup \{B((x_1, x_2), |x_2|) \cup \{(x_1, 0)\} \cup B((x_1, -x_2), |x_2|) \mid x_2 \neq 0\}\}$ nie jest topologią, ale jest bazą. Jest Hausdorffa, ponieważ zawiera w sobie topologię euklidesową, która jest Hausdorffa. Baza w punktach leżących poza osią x jest taka sama jak w topologii euklidesowej. Baza w punktach leżących na osi x to baza euklidesowa w sumie z "motylkami" o promienach $r = 1/n$ dla $n = 1, 2, ...$ Z tego wynika, że bazy w punktach są przeliczalne, czyli przestrzeń spełnia I aksjomat przeliczalności. Jednak baza tej przestrzeni jest nieprzeliczalna. Jedynymi zbiorami otwartymi pozwalającymi pokryć "motylka" jest tylko on sam, ponieważ tylko "motylki" zawierają punkty na osi x. Jako, że mamy nieprzeliczalnie wiele punktów na osi x, to mamy nieprzeliczalnie wiele "motylków" do pokrycia. Tak więc, przestrzeń nie spełnia II aksjomatu przeliczalności. Przestrzeń jest jednak ośrodkowa. Weźmy przeliczalny zbiór gęsty w topologii euklidesowej, który skonstruowaliśmy w poprzednim przykładzie. Płaszczyzna motylków Niemyckiego powstaje przez dołożenie do topologii euklidesowej "motylków". W każdym motylku jesteśmy wstanie wskazać kulę euklidesową, z którą wiemy, że skonstruowany zbiór ma niepuste przecięcie, więc również ma niepuste przecięcie z każdym z motylków. Tak więc, jest on również przeliczalnym zbiorem gęstym w tej przestrzeni. Przesunięcia poziome są ciągłe, a przesunięcia pionowe nie, ponieważ przesuwając motylka z osi x otrzymamy zbiór który nie jest otwarty.

4. $\mathcal{F}_6 := \{\{a\} \times (c, d) \colon a \in \mathbb{R},\, c < d < 0 \,\text{lub}\, 0 < c < d\} \cup \{(a, b) \times (-c, c) \colon a < b,\, c > 0\}$

□

Zadanie 3 (Bukiet prostych)**.** *Niech J będzie dowolnym zbiorem. W zbiorze $\mathbb{R} \times J$ rozpatrzmy relację równoważności*

$$(t, i) \sim (s, j) \quad \textit{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad t = s = 0 \quad \textit{lub} \quad (t, i) = (s, j)$$

a zbiór klas abstrakcji oznaczmy $\mathbb{R} \wedge J^+$. Zauważmy, że $\mathbb{R} \wedge J^+ = \mathbb{R} \times J/0 \times J$ tzn. powstaje z iloczynu $\mathbb{R} \times J$ przez utożsamienie do punktu podzbioru $0 \times J$. W zbiorze $\mathbb{R} \wedge J^+$ rozpatrzymy dwie topologie:

1. *Topologię $\mathcal{T}_k$ wyznaczoną przez metrykę węzła* $d_k((t, i), (s, j)) = \begin{cases} |t - s| \,\textit{jeśli}\, i = j \\ |t| + |s| \,\textit{jeśli}\, i \neq j \end{cases}$

2. *Topologię słabą $\mathcal{T}_w$ tzn. taką, że zbiór $U \subset \mathbb{R} \wedge J^+$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $i \in J$ zbiór $U \cap \mathbb{R} \times \{i\}$ jest otwarty w topologii euklidesowej prostej.*

Udowodnij, że

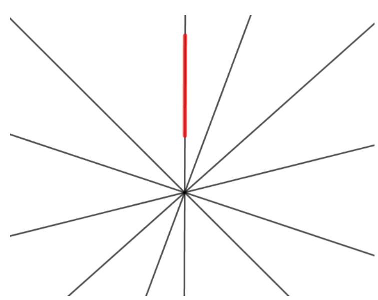
1. $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_w$
2. *Jeśli $|J| \geqslant \aleph_0$, to topologia słaba nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności.*
3. *Jeśli topologia nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności, to nie jest metryzowalna.*

Rozwiązanie

1. Niech $U \in \mathcal{T}_k$. Zauważmy, że kule $B((x,i),r)$ w metryce d_k występują w dwóch postaciach

   (a) $B((x,i),r)$ dla $r \leqslant |x|$ jest odcinkiem otwartym na i-tej prostej, tj.

   $$B((x,i),r) \cap (\mathbb{R} \times i) = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{przedział otwarty!}} \times \{i\}$$

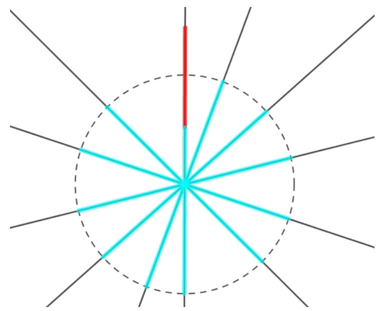
   

   (b) Dla $r > |x|$ jest to suma dwóch zbiorów, odcinka otwartego zdefiniowanego tak samo jak wyżej [”patyczka”]

   $$B((x,i),r) \cap (\mathbb{R} \times i) = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{przedział otwarty!}} \times \{i\}$$

   oraz zbioru [”lizaka”]

   $$(-(r-|x|), r-|x|) \times (J \setminus \{i\})$$



Z definicji przestrzeni wyznaczanej przez metrykę każdy zbiór otwarty jest sumą kul w tej metryce, tj. $U = \bigcup_{u \in U} B_u$, gdzie $B_u = B(u, r)$ są zawarte w U.
Chcemy pokazać, że $U \in \mathcal{T}_w$, czyli że dla każdego i zbiór $U \cap (\mathbb{R} \times \{i\})$ jest otwarty w topologii euklidesowej. Skoro $U = \bigcup B_u$ to wystarczy, że B_u będzie otwarte w $\mathcal{T}_w$ - wtedy U jako suma zbiorów otwartych w $\mathcal{T}_w$ będzie otwarta.
Ale każda kula jest otwarta w $\mathcal{T}_w$. Dla dowolnej zachodzi

$$B((x,j),r) \cap (\mathbb{R} \times \{i\}) = \begin{cases} (x-r, x+r) & r < |x| \vee j = i \\ (-(r-|x|), r-|x|) & r \geqslant |x| \wedge j \neq i \end{cases}$$

W każdym przypadku, iloczyn jest przedziałem otwartym w topologii euklidesowej. Zatem $B((x,j),r) \in \mathcal{T}_w$, więc $U \in \mathcal{T}_w$ zgodnie z tym co wcześniej ustaliliśmy.

2. Udowodnimy, że topologia słaba nie ma punktowej bazy przeliczalnej w 0. Załóżmy, że istnieje taka baza $= \{U_1, U_2, U_3, \cdots\}$. Niech $J_0 \subseteq J$ będzie zbiorem przeliczalnym w J i $J_0 = \{j_1, j_2, \cdots\}$. Skonstruujemy taki zbiór otwarty U, że $0 \in V$ ale $\forall k \in \mathbb{N}\ U_k \nsubseteq V$. Mianowicie bierzemy zbiory

$$V_k \subsetneq U_k \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\})$$

I teraz $V = \bigcup V_k \cup ((J \setminus J_0) \times \mathbb{R})$. Widzimy, że gdyby $U_k \subseteq V$, to musiałoby być $U_k \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\}) \subseteq V \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\}) = V_k$, co jest sprzeczne z definicji V_k. Zatem założenie o istnieniu bazy przeliczalnej w zerze jest fałszywe.

3. Gdyby przestrzeń była metryzowalna, to zbiór kul o promieniach wymiernych o środku w 0 byłaby bazą punktową przeliczalną w zerze, co przy tych założeniach jest niemożliwe na mocy poprzedniego podpunktu.

□

Zadanie 4. *Niech d_i dla $i = 1, 2$ będą dwoma metrykami w zbiorze X. Następujące warunki są równoważne:*
1. Topologia wyznaczona przez d_2 jest drobniejsza niż wyznaczona przez d_1, tzn. $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.

2. Dla każdej kuli $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$ istnieje liczba $r_2 > 0$ taka, że $\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$.
3. Jeśli ciąg jest zbieżny w metryce d_2 to jest zbieżny w metryce d_1 do tej samej granicy.

Rozwiązanie
$1 \implies 2$
Załóżmy, że $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Niech $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_1)$. Z założenia $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_2)$. Z definicji topologii $\mathcal{T}(d_2)$ istnieje $r_2 > 0$ takie, że
$\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$.
$2 \implies 1$
Załóżmy, że dla każdej kuli $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$ istnieje liczba $r_2 > 0$ taka, że
$\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$. Weźmy dowolny $y_s \in \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$. Z definicji topologii $\mathcal{T}(d_1)$ istnieje $r > 0$ takie, że $\mathcal{B}_{d_1}(y_s, r) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$. Z założenia istnieje $r_s > 0$ takie, że $\mathcal{B}_{d_2}(y_s, r_s) \subset \mathcal{B}_{d_1}(y_s, r)$. Z tego wynika, że $\bigcup_s \mathcal{B}_{d_2}(y_s, r_s) = \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_1)$. Z definicji topologii $\bigcup_s \mathcal{B}_{d_2}(y_s, r_s) \in \mathcal{T}(d_2)$. Tak, więc $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.
$1 \implies 3$
Załóżmy, że $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Niech ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbieżny do x w metryce d_2. Załóżmy, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do x w metryce d_1. Z tego wynika, że istnieje $\epsilon > 0$, taki, że dla każdego n_ϵ istnieje $n > n_\epsilon$, że $x_n \notin \mathcal{B}_{d_1}(x, \epsilon)$. Z założenia $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$ wynika jednak, że istnieje liczba $r > 0$ taka, że $\mathcal{B}_{d_2}(x, r) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, \epsilon)$. Jako, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x w metryce d_2, to z definicji zbieżności prawie wszystkie wyrazy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ znajdują się w $\mathcal{B}_{d_2}(x, r)$, co jest sprzeczne z faktem, że $x_n \notin \mathcal{B}_{d_1}(x, \epsilon)$. Z tego wynika, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x w metryce d_1.
$3 \implies 1$
Załóżmy, że jeśli ciąg jest zbieżny w metryce d_2 to jest zbieżny w metryce d_1. Zawieranie się topologii jest równoważne zawieraniu się rodziny zbiorów domkniętych, tzn. $\mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)} \iff \mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Udowodnimy ten fakt w "prawą" stronę. Niech $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)}$. Jako, że A jest zbiorem domkniętym to $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, więc $X \setminus A \in \mathcal{T}(d_1)$. Z założenia wynika, że $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$, więc również $X \setminus A \in \mathcal{T}(d_2)$. Niech $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)}$. Z definicji domknięcia dostajemy, że $M \subset cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M)$. Jeżeli $x \in cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M)$, to istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, taki, że $d_2(x_n, x) \to 0$. Z założenia dostajemy, że $d_1(x_n, x) \to 0$. Z tego wynika, że $x \in cl_{\mathcal{T}(d_1)}(M)$. M jest domknięty w $\mathcal{T}(d_1)$, czyli $M = cl_{\mathcal{T}(d_1)}(M)$. A z tego mamy, że $x \in M$, co daje $cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M) \subset M$. Wtedy $cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M) = M$, a z tego wynika, że $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$, czyli $\mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$. Tak więc, na mocy faktu, który wcześniej udowodniliśmy $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.

□

Definicja 3. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Przez $C(X)$ oznaczamy zbiór funkcji ciągłych $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, a przez $C_b(X)$ jego podzbiór składający się z funkcji ograniczonych. Dla dowolnej funkcji $f \in C_b(X)$ definiujemy $\|f\|_{sup} := sup\{|f(x)| : x \in X\}$ oraz $\|f\|_{L^1} := \int_0^1 |f(t)|dt$.

Zadanie 5. *Porównać topologię wyznaczoną przez normę $\|f\|_{sup}$ z topologią wyznaczoną przez normę $\|f\|_{L^1}$.*

Rozwiązanie Niech

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx \ , \ x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \ , \ x \in (\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Wtedy $f_n \in C_b([0,1])$ i $\|f_n(x)\|_{L^1} = \frac{1}{2n} \to 0$, ale $\|f_n(x)\|_{sup} = 1 \not\to 0$.
Rozważmy $g_n \in C_b([0,1])$ taką, że $\|g_n(x)\|_{sup} \to 0$. Wtedy na mocy 9.31 $\|g_n(x)\|_{L^1} \leqslant sup(|g_n(x)|)(1-0) \to 0$.
Niech $d_{sup}(f,g) = \|f-g\|_{sup}$ i $d_{L^1}(f,g) = \|f-g\|_{L^1}$. Rozpatrzmy $(C_b(X), d_{sup})$ i $(C_b(X), d_{L^1})$. Jeżeli f_n jest zbieżny do f w przestrzeni $(C_b(X), d_{sup})$, tzn. $d_{sup}(f_n, f) \to 0$, to z wcześniejszych obserwacji $d_{L^1}(f_n, f) \to 0$, czyli jest zbieżny, również do f, w $(C_b(X), d_{L^1})$. Z poprzedniego zadania wiemy już, że wtedy $\mathcal{T}(d_{L^1}) \subset \mathcal{T}(d_{sup})$. $\square$

Definicja 4. Grupą topologiczną nazywamy zbiór G wyposażony w topologię i strukturę grupową tak, że działanie grupowe $G \times G \to G$ oraz branie elementu odwrotnego $-^{-1}\colon G \to G$ są odwzorowaniami ciągłymi. Homomorfizmem grup topologicznych nazywamy homomorfizm grup, który jest ciągły.

Zadanie 6. *Przestrzeń grupy topologicznej jest jednorodna tzn. dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in G$ istnieje homeomorfizm $f\colon G \to G$ taki, że $f(y) = x$.*

Rozwiązanie Udowodnimy ogólniejsze prawdę, która przyda nam się również w późniejszych rozważaniach. Niech $\phi_g : G \to G$ takie, że $\phi_g(x) = gx$. Pokażemy, że ϕ_g jest homeomorfizmem. Jest bijekcją, ponieważ $\phi_{g^{-1}}$ jest przekształceniem do niego odwrotnym. Niech $U \subset G$ będzie otwarty. Działanie grupowe jest ciągłe, więc $V = \{(x,y) \in G \times G : xy \in U\}$ jest otwarty w $G \times G$. Niech $\pi : G \times G \to G$ takie, że $\pi(x,y) := y$ i $G_g := \{g\} \times G$ traktujemy jako podprzestrzeń grupy topologicznej G. Odwzorowanie π jest otwarte (Wniosek 5.4.1). Teraz $V \cap G_g$ jest otwarte w G_g, więc $\pi[V \cap G_g]$ jest otwarte w G. Mamy, $\pi[V \cap G_g] = \{x \in G : (g,x) \in V\} = \{x \in G : gx \in U\} = \phi_g^{-1}[U]$. Przeciwobraz $\phi_g^{-1}[U]$ jest otwarty, więc ϕ_g jest ciągłe. Również $\phi_{g^{-1}}$ jest ciągłe, bo g było dowolne. Tak więc, ϕ_g jest homeomorfizmem. Funkcja, o której mowa w zadaniu to $f(a) := \phi_{xy^{-1}}(a)$. Pozostaje już tylko zauważyć, że $f(y) = xy^{-1}y = x$. $\square$

Zadanie 7. *Jeśli $H \subset G$ jest podgrupą normalną, to grupa ilorazowa G/H z topologią ilorazową jest grupą topologiczną. (Wsk. Odwzorowanie ilorazowe $p\colon G \to G/H$ jest otwarte).*

Rozwiązanie Odwzorowanie ilorazowe $\pi : G \to G/H$ jest zdefiniowane następująco $\pi(g) := gH$. Ciągłość π wynika z definicji topologii ilorazowej. Pokażemy, że π jest przekształceniem otwartym, co przyda nam się w późniejszych rozważaniach. Niech $U \subset G$ będzie otwarty. Jako, że π jest przekształceniem ilorazowym to z definicji $\pi[U]$ jest otwarty $\iff \pi^{-1}[\pi[U]]$ jest otwarty. Mamy $\pi^{-1}[\pi[U]] = \pi^{-1}[\{uH : u \in U\}]$ i zauważmy, że $\pi[uH] = uH$. Z tego wynika, że $\pi^{-1}[\{uH : u \in U\}] = \bigcup_{h \in H} Uh$. Zbiór Uh jest otwarty na mocy faktu, który udowodniliśmy w poprzednim zadaniu, co daje, że $\bigcup_{h \in H}$ Uh jest otwarty. Tak więc, $\pi^{-1}[\pi[U]]$ jest otwarty, czyli $\pi[U]$ jest otwarty.

Niech $m : G/H \times G/H \to G/H$ będzie działaniem grupowym. Musimy pokazać, że m jest ciągłe. Niech $\pi \times \pi : G \times G \to G/H \times G/H$ będzie takie, że $\pi \times \pi(g_1, g_2) := (\pi(g_1), \pi(g_2))$ oraz $\mu : G \times G \to G$ będzie zwykłym mnożeniem w grupie topologicznej G. Mamy

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi \times \pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "m"] & G/H \end{tikzcd}$$

Powyższy diagram jest przemienny, tzn. $m \circ \pi \times \pi = \pi \circ \mu$. Przekształcenie $\pi \circ \mu$ jest ciągłe, bo π i μ są ciągłe, gdzie ciągłość drugiego wynika z faktu, że G jest grupą topologiczną. Na mocy przemienności diagramu, $m \circ \pi \times \pi$ jest ciągłe. Niech $U \subset G/H$ będzie otwarty. Przeciwobraz $V = m \circ \pi \times \pi^{-1}[U]$ jest otwarty.

$$\pi \times \pi \ otwarty$$

Z tego wynika, że $\pi \times \pi[V]$ jest otwarty.

$$\pi \times \pi[V] otwarte \implies m^{-1}[U] otwarte$$

Tak więc, przeciwobraz $m^{-1}[U]$ jest otwarty, czyli m jest ciągłe. $\square$

Zadanie 8. *Udowodnij, że odwzorowanie* $p : \mathbb{R} \to S^1$, *gdzie* $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, *dane wzorem* $p(t) := \cos 2\pi t + (\sin 2\pi t)i = e^{2\pi i t}$ *jest homomorfizmem grup topologicznych (w* $\mathbb{R}$ *struktura addytywna, w* S^1 *multiplikatywna) oraz definiuje izomorfizm grup topologicznych* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$.