

# **Analiza matematyczna II**

## **(skrypt wykładu)**

Wydział MIiM UW, 2011/12

wersja z dnia: 5.01.2016

# Spis treści

<b>1 Ciągłość funkcji wielu zmiennych</b>	<b>1</b>
1.1 Topologia w $\mathbb{R}^n$ . Zbiory otwarte, domknięte i zwarte . . . . .	1
1.2 Funkcje ciągłe: definicje, własności, przykłady . . . . .	7
<b>2 Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych</b>	<b>20</b>
2.1 Pochodne cząstkowe, kierunkowe i różniczka zupełna . . . . .	20
2.2 Arytmetyczne własności różniczki . . . . .	26
2.3 Gradient. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji i punkty krytyczne . . . . .	29
2.4 Twierdzenie o wartości średniej . . . . .	38
2.5 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora . . . . .	40
2.5.1 Przykład Peano i twierdzenie Schwarza o równości pochodnych mieszanych . . . . .	41
2.5.2 Druga różniczka . . . . .	43
2.5.3 Różniczki wyższych rzędów . . . . .	46
2.5.4 Wzór Taylora. Funkcje klasy $C^k$ i notacja wielowskaźnikowa. . . . .	47
2.5.5 Ekstrema lokalne. . . . .	50
2.6 Funkcje gładkie . . . . .	56
<b>3 Odwzorowania klasy <math>C^1</math> i rozmaitości zanurzone</b>	<b>58</b>
3.1 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym . . . . .	58
3.2 Twierdzenie o funkcji odwrotnej . . . . .	60
3.3 Twierdzenie o funkcji uwikłanej . . . . .	64
3.4 Dyfeomorfizmy zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	68
3.5 Rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	69
3.6 Ekstrema warunkowe i mnożniki Lagrange'a . . . . .	73
<b>4 Elementy teorii miary</b>	<b>80</b>
4.1 Podstawowe pojęcia. Twierdzenie Carathéodory'ego . . . . .	81
4.2 Konstrukcja i własności miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	88
4.3 Funkcje mierzalne . . . . .	99
<b>5 Całka Lebesgue'a</b>	<b>106</b>
5.1 Całkowanie funkcji nieujemnych . . . . .	106
5.2 Całkowanie funkcji dowolnego znaku . . . . .	111
5.2.1 Związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna . . . . .	115
5.3 Zamiana zmiennych. Twierdzenie Fubiniego . . . . .	117

5.3.1	Dowód twierdzenia o zamianie zmiennych . . . . .	121
5.3.2	Dowód twierdzenia Fubiniego . . . . .	124
5.4	Przestrzeń $L^1$ funkcji całkowalnych. . . . .	130
5.5	Splot . . . . .	132
5.5.1	Aproksymacja funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi . . . . .	133
5.5.2	Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji wielu zmiennych . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Miara powierzchniowa na rozmaitościach zanurzonych</b>	<b>140</b>
6.1	Definicja miary powierzchniowej . . . . .	141
6.1.1	Wyznacznik Grama. Intuicje geometryczne . . . . .	141
6.1.2	Parametryczny opis rozmaistości zanurzonych . . . . .	144
6.1.3	Twierdzenie o rzędzie. Poprawność definicji miary $\sigma_m$ . . . . .	146
6.2	Wzór Cauchy'ego–Bineta. Przykłady. . . . .	149
6.3	Otoczenia tubularne i twierdzenie o materacu . . . . .	154
<b>7</b>	<b>Formy różniczkowe i twierdzenie Stokesa</b>	<b>159</b>
7.1	Formy rzędu 1 i twierdzenie Greena . . . . .	159
7.2	Formy wieloliniowe antysymetryczne . . . . .	168
7.3	Formy różniczkowe . . . . .	172
7.3.1	Przeciąganie form różniczkowych. Różniczka zewnętrzna. . . . .	173
7.3.2	Formy różniczkowe w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	177
7.4	Orientacja rozmaistości. Całka z formy różniczkowej . . . . .	179
7.4.1	Całka z formy różniczkowej . . . . .	182
7.5	Twierdzenie Stokesa . . . . .	183
<b>A</b>	<b>Gładki rozkład jedności</b>	<b>192</b>
<b>B</b>	<b>Lemat Poincarégo w obszarach gwiaździstych</b>	<b>194</b>
<b>C</b>	<b>Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym</b>	<b>197</b>
<b>D</b>	<b>Pakiety do obliczeń symbolicznych II</b>	<b>199</b>
D.1	Wstęp . . . . .	199
D.2	Funkcje wielu zmiennych . . . . .	200
D.2.1	Wizualizacja funkcji . . . . .	200
D.2.2	Granica i ciągłość funkcji . . . . .	204
D.3	Macierze . . . . .	206
D.4	Pochodna funkcji wielu zmiennych i jej zastosowania . . . . .	208
D.4.1	Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych . . . . .	208
D.4.2	Dyfeomorfizmy . . . . .	212
D.5	Rozwinięcie w szereg Taylora . . . . .	222
D.6	Rozmaistości zanurzone . . . . .	224
D.6.1	Wizualizacja . . . . .	224
D.6.2	Objętość i miara powierzchniowa . . . . .	228
D.7	Ekstrema funkcji wielu zmiennych . . . . .	230
D.7.1	Ekstrema funkcji wielu zmiennych . . . . .	230
D.7.2	Ekstrema warunkowe . . . . .	235
D.8	Formy różniczkowe . . . . .	239

# Zamiast wstępu

1. Ten tekst powstał w roku akademickim 2011–12, jako dość wierny, bieżący zapis wykładu z Analizy Matematycznej II. Proszę pamiętać, że *jest to wciąż materiał w budowie*: mogą w nim być błędy, zarówno literówki, jak i poważniejsze usterki; mogą stopniowo pojawiać się pewne (niezbyt wielkie) zmiany układu treści.

Wszelkie uwagi Czytelników ( zgłoszenie błędów, a także sugestie, co zmienić, gdzie warto napisać dokładniejsze wyjaśnienie, gdzie umieścić dodatkowy rysunek itp.) są mile widziane. Z góry za nie serdecznie dziękuję.

2. Część rysunków, zwłaszcza w rozdziałach 1, 2, 6 i 7, wykonałem w programie *Mathematica* (składiną: dostępnym dla wszystkich użytkowników laboratorium komputerowego Wydziału MIM), zastanawiając się, jak w sposób możliwie czytelny, po-główny i nietrywialny zilustrować jakieś pojęcie, twierdzenie, lub przykład nietypowego (na pierwszy rzut oka) zachowania funkcji wielu zmiennych.

Gorąco zachęcam Czytelników do samodzielnego eksperymentowania z podobnymi wykresami i rysunkami – jestem przekonany, że każdy, kto naprawdę sam je wykonuje, pogłębia zarówno swoją wyobraźnię, jak i zrozumienie tematu. To ma sens także dlatego, że Analiza II różni się istotnie od Analizy I: mniej jest w niej ważnych twierdzeń, natomiast istotnie więcej niełatwych pojęć, wymagających spokojnego ‘przetrawienia’ oraz dobrych intuicji geometrycznych (i obycia z algebrą liniową).

3. Co jakiś czas publikuję nową wersję skryptu na stronie

<http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/>

(w zakładce z notatkami). W roku akademickim 2013–14, gdy ponownie prowadziłem wykład z Analizy Matematycznej II, poprawki miały głównie charakter redakcyjny (literówki, drobne zmiany etc.), tzn. nie dotyczyły ani samego układu, ani wyboru treści.

Paweł Strzelecki

## Rozdział 1

# Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Zajęcia z Analizy Matematycznej II poświęcone są funkcjom wielu zmiennych rzeczywistych. Dlatego zaczniemy od opisania najważniejszych z punktu widzenia podstaw Analizy własności przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i pewnych klas jej podzbiorów. Dzięki temu będziemy mogli później zobaczyć, że uogólnienia pewnych pojęć, które poznaliśmy dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, są w gruncie rzeczy jasne i naturalne (choć, dla  $n > 3$ , mogą zdaniem Czytelnika mieć dość abstrakcyjny charakter).

Podkreślmy jednak, że nawet z punktu widzenia w miarę naturalnych zastosowań matematyki nie warto ograniczać studiowania funkcji  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  do ‘fizycznych’ przypadków  $n, m \in \{1, 2, 3\}$ . Na przykład, opis temperatury, ciśnienia, prędkości wiatru i wilgotności powietrza w punktach pewnego obszaru przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  i w czasie  $t \in (t_0, t_1)$  – a więc, po ludzku mówiąc, możliwe wierne prognozowanie pogody – wymaga w istocie, jak widać, konstrukcji pewnego przekształcenia z podzbioru przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  w przestrzeń  $\mathbb{R}^6$ : temperatura, ciśnienie i wilgotność powietrza to trzy liczby, a prędkość wiatru jest wektorem o trzech współrzędnych. Choćby dlatego, ale i ze względów teoretycznych, będziemy zajmować się funkcjami  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dla dowolnych  $m, n$  naturalnych.

### 1.1 Topologia w $\mathbb{R}^n$ . Zbiory otwarте, domknięte i zwarte

Przestrzeń kartezjańska  $n$ -wymiarowa,  $\mathbb{R}^n$ , to iloczyn  $n$  kopii prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ . Elementy przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  będziemy zamiennie nazywać punktami lub wektorami i oznaczać je  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  itp., starając się – w skrypcie, nie na tablicy – konsekwentnie używać pogrubionych liter dla zasygnalizowania, że chodzi o *punkt* w  $\mathbb{R}^n$ , niepogrubionych zaś dla oznaczenia *współrzędnych* punktu.

#### Norma i iloczyn skalarny

**Definicja 1.1 (iloczyn skalarny).** (Standardowym) iloczynem skalarnym w  $\mathbb{R}^n$  nazywamy funkcję

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Jak wiadomo z wykładów Algebry Liniowej, iloczyn skalarny jest dwuliniowy (liniowy względem każdej zmiennej z osobna), symetryczny (tzn.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  dla wszystkich

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ) i dodatnio określony, tzn.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$  dla wszystkich  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definicja 1.2 (norma euklidesowa).** Funkcję

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2 \equiv \|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \in [0, \infty)$$

nazywamy normą euklidesową.

Przymiotnik *euklidesowa*, a także dolny indeks 2, będziemy zwykle opuszczać, pisząc po prostu  $\|\mathbf{x}\|$ . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że dla  $n = 2$  (odpowiednio,  $n = 3$ ) liczba  $\|\mathbf{x}\|$  jest po prostu odległością punktu  $\mathbf{x}$  od początku układu współrzędnych na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  (odpowiednio, w trójwymiarowej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ ).

Liczبę  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  nazywamy, zgodnie z naturalną geometryczną interpretacją, *odległośćą* punktów  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

**Stwierdzenie 1.3 (własności normy i iloczynu skalarnego w  $\mathbb{R}^n$ ).**

(i) (**Nierówność trójkąta**). Dla wszystkich  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  jest

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

(ii) (**Jednorodność**). Dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  i  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  jest  $\|t\mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|$ .

(iii) Równość  $\|\mathbf{x}\| = 0$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

(iv) (**Nierówność Schwarza**). Dla wszystkich  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  jest

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|, \quad (1.1)$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$  lub  $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$  dla pewnego  $t \in \mathbb{R}$ .

Dowód. Własności (ii) oraz (iii) są oczywiste. Nierówność Schwarza i nierówność trójkąta Czytelnik miał okazję poznać wcześniej, ale naszkicujemy dla porządku krótkie dowody.

Zaczniemy od nierówności Schwarza. Niech  $t \in \mathbb{R}$ . Z definicji normy oraz dwuliniowości i symetrii iloczynu skalarnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Trójmian kwadratowy  $P(t) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2$  jest więc nieujemny dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ . Wyróżnik tego trójmianu musi zatem być niedodatni, tzn.

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \leq 0.$$

Stąd już wynika nierówność (1.1). Zauważmy, że równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  lub  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  lub gdy  $P(t)$  ma pierwiastek, tzn. gdy  $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$  dla pewnego  $t \in \mathbb{R}$ . To jest równoważne warunkowi, podanemu w punkcie (iv).

Nierówność trójkąta łatwo wyprowadzić z nierówności Schwarza: ponieważ  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ , więc jest

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 - \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2) \\ &= 2(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dowód stwierdzenia jest zakończony.  $\square$

**Uwaga 1.4.** Ogólnie, normą w  $\mathbb{R}^n$  nazywa się każdą funkcję  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , która spełnia warunki (i)–(iii) Stwierdzenia 1.3. Zauważmy, że w dowodzie tego stwierdzenia wystarczyło korzystać ze związku  $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  i z tego, że przekształcenie  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  jest dwuliniowe, symetryczne i dodatnio określone. Nie było ważne, że chodzi akurat o standardowy iloczyn skalarny.

Ponadto, normy można definiować w dowolnych przestrzeniach liniowych, także nieśkończonego wymiaru. Przykład, bardzo ważny zarówno w analizie, jak i w topologii, to tzw. *norma supremum*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

określona na przestrzeni liniowej funkcji ciągłych na odcinku domkniętym  $I \subset \mathbb{R}$ . Czytelnik zna tę normę z wykładów Analizy I (patrz rozdział o zbieżności jednostajnej). Inne przykłady norm spotkamy wielokrotnie później.

**Wniosek 1.5.** Dla każdego przekształcenia dwuliniowego, symetrycznego i dodatnio określonego

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$$

funkcja  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$  jest normą na przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

Można podać inne przykłady norm.

**Przykład 1.6.** Dla  $p \in [1, \infty)$  położmy

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

a dla  $p = \infty$  niech

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

**Zadanie 1.7.** Wykazać, że  $\|\mathbf{x}\|_p$  jest normą dla każdego  $p \in [1, \infty]$ .

**Wskazówka.** Dla dowodu nierówności trójkąta przypomnieć sobie nierówność Höldera i zauważać, że  $|x_i + y_i|^p \leq |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$ .

**Zadanie 1.8.** Czy dla  $p \neq 2$  norma  $\|\cdot\|_p$  pochodzi od pewnego (niekoniecznie standardowego) ilocznego skalarnego na  $\mathbb{R}^n$ ?

**Wskazówka.** W każdym równoległoboku suma kwadratów długości obu przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków. Zapisać to twierdzenie w języku normy i spróbować je wykorzystać.

## Kule. Zbiory otwarte i domknięte.

**Definicja 1.9.** Kulą otwartą o środku  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Zbiór  $\overline{B}(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$  to kula domknięta o środku  $\mathbf{x}$  i promieniu  $r$ .

Dla  $n = 1$  kule są po prostu przedziałami: norma euklidesowa w  $\mathbb{R}$  to wartość bezwzględna liczby, zaś warunki  $|y - x| < r$  i  $y \in (x - r, x + r)$  są równoważne. Kule w normie euklidesowej na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  to koła: warunek  $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2$  oznacza, że  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  leży wewnątrz okręgu o środku w punkcie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  i promieniu  $r > 0$ .

**Definicja 1.10.** Zbiór  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $\mathbf{x} \in \Omega$  istnieje promień  $r > 0$  taki, że  $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ .

Inaczej mówiąc, zbiór otwarty to taki zbiór, który wraz z każdym swoim punktem zawiera pewną kulę otwartą wokół tego punktu.

**Przykład 1.11.** Cała przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym (dla każdego  $\mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n$  można wziąć w warunku z definicji np.  $r = 2011$ ). Zbiór pusty jest otwarty; warunek z definicji jest wtedy pusto spełniony.

Kula otwarta  $B(\mathbf{a}, r)$  jest zbiorem otwartym: jeśli  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$  i  $0 < \rho < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ , to kula  $B(\mathbf{x}, \rho) \subset B(\mathbf{a}, r)$ , gdyż dla  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho)$  mamy z nierówności trójkąta

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \rho + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r.$$

(Proszę samodzielnie zrobić rysunek, ilustrujący to oszacowanie).  $\square$

### Stwierdzenie 1.12 (własności zbiorów otwartych).

(i) Jeśli zbiory  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ , gdzie  $i \in I$ , a  $I$  jest dowolnym zbiorem, są otwarte, to zbiór  $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$  jest otwarty.

(ii) Jeśli zbiory  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \subset \mathbb{R}^n$  są otwarte, to zbiór  $\bigcap_{i=1}^N \Omega_i$  jest otwarty.

Zauważmy od razu, że własność (ii) nie zachodzi dla nieskończonych rodzin zbiorów otwartych: przecięcie wszystkich kul  $B(0, 1/j) \subset \mathbb{R}^n$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots$ , jest zbiorem jednopunktowym  $\{0\}$ , a zbiór jednopunktowy w  $\mathbb{R}^n$  nie jest otwarty (bo każda kula otwarta w  $\mathbb{R}^n$  jest zbiorem nieskończonym).

Dowód. Wykażemy najpierw pierwszą własność. Jeśli  $\mathbf{x} \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ , to  $\mathbf{x} \in \Omega_{i_0}$  dla pewnego  $i_0 \in I$ . Ponieważ zbiór  $\Omega_{i_0}$  jest otwarty, więc istnieje  $r > 0$  takie, że  $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega_{i_0}$ . Zatem,  $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ , a więc zbiór  $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$  jest otwarty.

Jeśli  $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1, \dots, N} \Omega_i$ , to  $\mathbf{x} \in \Omega_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, N$ . Zatem, wobec otwartości  $\Omega_i$ , znajdziemy liczby  $r_i > 0$  (gdzie  $i = 1, 2, \dots, N$ ) takie, że  $B(\mathbf{x}, r_i) \subset \Omega_i$ . Niech  $r > 0$  będzie najmniejszą<sup>1</sup> spośród liczb  $r_1, r_2, \dots, r_N$ . Mamy

$$B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, r_i) \subset \Omega_i \quad \text{dla każdego } i = 1, 2, \dots, N,$$

a więc  $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcap_{i=1, \dots, N} \Omega_i$ .  $\square$

---

<sup>1</sup>Tu właściwie korzystamy z tego, że zbiorów  $\Omega_i$  jest tylko skończenie wiele!

**Uwaga 1.13.** Rodzinę zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^n$  nazywamy topologią (euklidesową).

**Definicja 1.14.** Zbiór  $F \subset \mathbb{R}^n$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie  $\mathbb{R}^n \setminus F$  jest zbiorem otwartym.

Cała przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  i zbiór pusty są domknięte, istnieją więc zbiory, które są jednocześnie otwarte i domknięte. Nietrudno sprawdzić, że każda kula domknięta jest zbiorem domkniętym. Nie należy oczywiście uważyć, że każdy zbiór w  $\mathbb{R}^n$  jest albo otwarty, albo domknięty: np. przedział  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$  nie jest ani domknięty, ani otwarty. Podobnie, koło otwarte  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  z dołączonym punktem  $(1, 2)$  nie jest ani domknięte, ani otwarte.

Korzystając z praw de Morgana (dopełnienie iloczynu zbiorów jest sumą dopełnień, a dopełnienie sumy jest iloczynem dopełnień) i definicji zbioru domkniętego, otrzymujemy natychmiast następujący odpowiednik Stwierdzenia 1.12.

**Stwierdzenie 1.15 (własności zbiorów domkniętych).**

- (i) Jeśli zbiory  $F_i \subset \mathbb{R}^n$ , gdzie  $i \in I$ , a  $I$  jest dowolnym zbiorem, są domknięte, to zbiór  $\bigcap_{i \in I} F_i$  jest domknięty.

- (ii) Jeśli zbiory  $F_1, F_2, \dots, F_N \subset \mathbb{R}^n$  są domknięte, to zbiór  $\bigcup_{i=1}^N F_i$  jest domknięty.  $\square$

Podamy teraz definicję zbieżnego ciągu punktów przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Czytelnik miał już z nią do czynienia dla  $n = 2$ , gdy mówiliśmy o zbieżności ciągów liczb zespolonych.

**Definicja 1.16.** Mówimy, że ciąg  $(\mathbf{x}_j) \subset \mathbb{R}^n$  jest zbieżny do punktu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$  dla  $j \rightarrow \infty$ .

Definicja ma, jak widać, bardzo naturalny sens: zbieżność  $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}$  oznacza, że odległości punktów  $\mathbf{x}_j$  i  $\mathbf{x}$  są zbieżne do zera dla  $j \rightarrow \infty$ . Okazuje się, że badanie zbieżności ciągów punktów  $\mathbb{R}^n$  można sprowadzić do badania zbieżności ciągów poszczególnych współrzędnych tych punktów.<sup>2</sup>

**Stwierdzenie 1.17.** Niech  $\mathbf{x}_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$  dla  $j \in \mathbb{N}$ . Następujące warunki są równoważne:

- (i) Ciąg  $(\mathbf{x}_j) \subset \mathbb{R}^n$  jest zbieżny do punktu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii) Dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  jest  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,i} = x_i$ .

Dowód. Dla każdego  $i_0 = 1, 2, \dots, n$  jest

$$0 \leq |x_{j,i_0} - x_{i_0}| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_{j,i} - x_i|^2 \right)^{1/2} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\|. \quad (1.2)$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach, warunek (i) pociąga za sobą  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,i_0} = x_{i_0}$ .

Na odwrót, jeśli każdy z  $n$  składników skończonej sumy w (1.2) zbiega do zera dla  $j \rightarrow \infty$ , to, wobec arytmetycznych własności granicy ciągu i ciągłości pierwiastka, ciąg  $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$  dla  $j \rightarrow \infty$ . Zatem, warunek (ii) pociąga za sobą (i).  $\square$

Podamy jeszcze wygodną charakteryzację zbiorów domkniętych przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>2</sup>Wnikliwy Czytelnik zechce zauważyć, że do określenia pojęcia ciągu zbieżnego nie jest potrzebna metryka – wystarczy topologia. Jednak w analizie zwykle wygodniej posługiwać się jest normą lub odległością.

**Stwierdzenie 1.18.** *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Zbiór  $F \subset \mathbb{R}^n$  jest domknięty.*
- (ii) *Dla każdego ciągu  $(\mathbf{x}_j) \subset F$ , który jest zbieżny, zachodzi warunek  $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_j \in F$ .*

**Dowód.** Obu implikacji (i)  $\Rightarrow$  (ii) oraz (ii)  $\Rightarrow$  (i) dowiedziemy przez zaprzeczenie.

Załóżmy najpierw, że  $F$  jest domknięty, ale warunek (ii) nie zachodzi. Istnieje wtedy ciąg  $(\mathbf{x}_j) \subset F$ , który jest zbieżny do punktu  $\mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$ . Z definicji zbioru domkniętego wynika, że  $\Omega$  jest zbiorem otwartym, tzn. dla pewnego  $r > 0$  kula  $B(\mathbf{x}, r)$  jest zawarta w  $\Omega$  (i oczywiście nie ma punktów wspólnych ze zbiorem  $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ). Jednak  $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ , a więc  $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| < r$  dla wszystkich  $j$  dostatecznie dużych; dla takich  $j$  mamy  $\mathbf{x}_j \in B(\mathbf{x}, r)$ , tzn.  $\mathbf{x}_j \notin F$ , sprzeczność.

Na odwrót, założymy, że (ii) zachodzi, ale  $F$  nie jest domknięty. Wówczas zbiór  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$  nie jest otwarty. Zaprzeczając warunkowi, podanemu w Definicji 1.10, wskażemy taki punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$ , że dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  kula  $B(\mathbf{x}, 1/j)$  zawiera pewien punkt  $\mathbf{x}_j \notin \Omega$ , tzn. punkt  $\mathbf{x}_j \in F$ .<sup>3</sup> Wtedy  $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| < 1/j$ , a więc  $F \ni \mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$ . Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem: warunek (ii) nie zachodzi.  $\square$

**Uwaga 1.19.** Czytelnik mógłby zadać pytanie: czy, zmieniając w definicjach normę euklidesową  $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$  na jakąś inną, otrzymalibyśmy w  $\mathbb{R}^n$  tę samą rodzinę zbiorów otwartych (i tę samą rodzinę zbiorów domkniętych)? Okazuje się, że tak: to, czy zbiór jest otwarty, nie zależy od tego, jaką normą się posłużymy, określając kule w Definicji 1.10. Wróćmy do tej sprawy później, mówiąc o równoważności norm w  $\mathbb{R}^n$ . Najpierw jednak potrzebne nam będą pojęcia zbioru zwarte i funkcji ciągłej.

## Zbiory zwarte.

Mówiąc o własnościach funkcji ciągłych jednej zmiennej rzeczywistej, wprowadziliśmy bardzo ważną klasę zbiorów zwartych. Tak samo definiuje się zbiory zwarte w  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 1.20.** Zbiór  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu  $(\mathbf{x}_j) \subset K$  można wybrać podciąg  $(\mathbf{x}_{j_k})$  zbieżny do pewnego punktu  $\mathbf{x} \in K$ .

**Definicja 1.21.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^n$  nazywa się ograniczony, jeśli zawiera się w pewnej kuli.

**Stwierdzenie 1.22.** *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Zbiór  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest zwarty.*
- (ii) *Zbiór  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest domknięty i ograniczony.*

**Dowód.** Dla każdego zbioru zwartego zachodzi warunek (ii) Stwierdzenia 1.18 (gdyż dowolny podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, co cały ciąg). Dlatego zwartość pociąga za sobą domkniętość.

Gdyby zbiór  $K$  był zwarty i nieograniczony, to dla każdego  $j$  znaleźćlibyśmy punkt  $\mathbf{x}_j \in K \setminus B(0, j)$ . Bez zmniejszenia ogólności, przechodząc w razie potrzeby do podciągu

<sup>3</sup>Można myśleć o tym tak: punkt  $\mathbf{x}$  jest ‘świadkiem’, że zbiór  $\Omega$  nie jest otwarty, natomiast punkt  $\mathbf{x}_j$  jest ‘świadkiem’, że kula  $B(\mathbf{x}, 1/j)$  nie jest cała zawarta w  $\Omega$ .

zbieżnego, można założyć, że  $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x} \in K$ . Wtedy jednak, z nierówności trójkąta i definicji granicy,

$$j \leq \|\mathbf{x}_j\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow \|\mathbf{x}\| < \infty \quad \text{dla } j \rightarrow \infty.$$

To jest sprzeczność, gdyż lewa strona nie jest ograniczona.

Załóżmy teraz, że zachodzi (ii). Niech  $(\mathbf{x}_j) \subset K$ . Aby wskazać podciąg  $(\mathbf{x}_j)$  zbieżny do pewnego punktu w  $K$ , posłużymy się Stwierdzeniami 1.18 i 1.17.

Dla każdego numeru  $i = 1, 2, \dots, n$  ciąg współrzędnych  $(x_{j,i})_{j=1,2,\dots}$  jest ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Możemy wybrać podciąg  $j'_k$  tak, aby otrzymać zbieżność na pierwszej współrzędnej, tzn. zbieżność  $x_{j'_k,1} \rightarrow x_1$ . Następnie, z  $j'_k$  można wybrać kolejny podciąg  $j''_k$  tak, aby otrzymać zbieżność także na drugiej współrzędnej, itd. Po  $n$  krokach wybierzemy ostatecznie podciąg  $j_k$  taki, że  $x_{j_k,i} \rightarrow x_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$ .<sup>4</sup> Na mocy Stwierdzenia 1.17,  $\mathbf{x}_{j_k} \rightarrow \mathbf{x}$ , a na mocy Stwierdzenia 1.18 i domkniętości  $K$ , punkt  $\mathbf{x} \in K$ .  $\square$

## 1.2 Funkcje ciągłe: definicje, własności, przykłady

**Definicja 1.23.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{a} \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że jeśli  $\mathbf{x} \in A$  i  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ , to  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ .

Jak widać, jest to wierny odpowiednik definicji Cauchego funkcji ciągłej jednej zmiennej rzeczywistej. Można też definiować ciągłość funkcji wielu zmiennych, posługując się ciągową definicją Heinego: funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{a} \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $A \ni \mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{a}$  jest  $f(\mathbf{x}_j) \rightarrow f(\mathbf{a})$ . Dowód równoważności obu definicji jest taki sam, jak w przypadku jednowymiarowym. Nie będziemy go powtarzać.

Mówimy, że funkcja  $f$  jest ciągła na zbiorze  $A$ , jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Również jednostajną ciągłość funkcji wielu zmiennych definiuje się tak samo, jak w przypadku jednowymiarowym.

**Definicja 1.24.** Funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest jednostajnie ciągła na  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że jeśli  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  i  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ , to  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$ .

W zeszłym roku poznaliśmy trzy ogólne twierdzenia, podające własności funkcji ciągłych: twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów, twierdzenie Cantora o jednostajnej ciągłości oraz własność Darboux. Pierwsze dwa dotyczyły własności funkcji ciągłych  $f: \mathbb{R} \supset K \rightarrow \mathbb{R}$  na zwartych podzbiorach prostej. Przenoszą się one bez zmian, z takimi samymi dowodami, na przypadek funkcji wielu zmiennych. Oto ich sformułowania.

**Twierdzenie 1.25 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów).** Jeśli  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest nie-pustym zbiorem zwanym, a funkcja  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to istnieją punkty  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$  takie, że

$$f(\mathbf{x}_1) = \sup_K f, \quad f(\mathbf{x}_2) = \inf_K f.$$

---

<sup>4</sup>Czytelnik może pamiętać, że z podobnym kolejnym wybieraniem podciągów mieliśmy do czynienia w dowodzie twierdzenia Arzeli i Ascoliego – tylko tam proces niekończył się po  $n$  krokach i trzeba było używać metody przekątniowej.

**Twierdzenie 1.26 (Cantora o jednostajnej ciągłości).** Jeżeli  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem zwartym, a funkcja  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $K$ .

Wspomnijmy jeszcze, zanim przejdziemy do przykładów, że Twierdzenie 1.25 można traktować jako wniosek z ogólniejszego rezultatu.

**Twierdzenie 1.27.** Jeżeli  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem zwartym, a funkcja  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła, to zbiór  $f(K)$  jest zwarty w  $\mathbb{R}^m$ .

Dowód. Ustalmy dowolny ciąg punktów  $(\mathbf{y}_j) \subset f(K)$ . Z definicji obrazu zbioru, istnieją punkty  $\mathbf{x}_j \in K$  takie, że  $\mathbf{y}_j = f(\mathbf{x}_j)$  dla każdego  $j \in \mathbb{N}$ . Zbiór  $K$  jest zwarty, więc istnieje podciąg  $j_k$  taki, że  $\mathbf{x}_{j_k} \rightarrow \mathbf{x} \in K$ . Wobec ciągłości  $f$ , otrzymujemy  $\mathbf{y}_{j_k} = f(\mathbf{x}_{j_k}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \in f(K)$ . Zatem, zbiór  $f(K)$  jest zwarty.  $\square$

Poznaliśmy formalną definicję ciągłości i trzy proste, choć bardzo ważne twierdzenia, opisujące własności tych funkcji. Przejdzmy teraz do przykładów.

**Definicja 1.28 (warunek Lipschitza).** Powiemy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  spełnia na zbiorze  $A$  warunek Lipschitza ze stałą  $L$  wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

zachodzi dla wszystkich  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

Nieformalnie mówiąc, funkcja lipschitzowska to taka funkcja, która wszystkie odległości między punktami zwiększa co najwyżej  $L$ -krotnie.

**Stwierdzenie 1.29.** Jeżeli  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$ , to  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $A$ .

Dowód. (Jest taki sam, jak w przypadku jednowymiarowym). Dla  $L = 0$  teza jest oczywista. Założmy więc, że  $L > 0$ .

Niech  $\varepsilon > 0$ ; weźmy  $\delta = \varepsilon/L$ . Jeżeli  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  i  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ , to mamy wtedy

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < L\delta = \varepsilon,$$

a zatem, dzięki dowolności  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $A$ .  $\square$

**Przykład 1.30.** Funkcja  $f(\mathbf{x}) = x_i$ , przypisująca każdemu punktowi wartości jego  $i$ -tej współrzędnej, jest ciągła na  $\mathbb{R}^n$ , gdyż spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Istotnie,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |x_i - y_i| \leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Na przypadek wielowymiarowy przenoszą się bez żadnych istotnych zmian (analizę szczegółów w prostych dowodach pozostawiamy dla Czytelnika jako ćwiczenie) twierdzenia o ciągłości sumy, iloczynu, ilorazu czy złożenia funkcji ciągłych, które poznaliśmy dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Sformułujmy je dla porządku.

**Stwierdzenie 1.31.** Jeżeli  $f, g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  są ciągłe w punkcie  $a \in A$ , to wówczas funkcja  $f + g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  też jest ciągła w punkcie  $a \in A$ .  $\square$

Wynika stąd w szczególności, że przestrzeń funkcji ciągłych  $C(A, \mathbb{R}^m)$ , określonych na zbiorze  $A \subset \mathbb{R}^n$  i przyjmujących wartości w  $\mathbb{R}^m$ , jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$ .

**Stwierdzenie 1.32.** *Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe w punkcie  $a \in A$ , to wówczas funkcja  $g \cdot f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  też jest ciągła w punkcie  $a \in A$ .  $\square$*

**Stwierdzenie 1.33.** *Jeśli  $g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  jest ciągła w punkcie  $a \in A$ , to wówczas funkcja  $\frac{1}{g}: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  też jest ciągła w punkcie  $a \in A$ .  $\square$*

**Stwierdzenie 1.34 (ciągłość złożenia).** *Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła w punkcie  $a \in A$ , zaś  $g: \mathbb{R}^m \subset B \rightarrow \mathbb{R}^k$ , gdzie  $B \supset f(A)$  (tzn. wszystkie wartości funkcji  $f$  należą do dziedziny funkcji  $g$ ) jest ciągła w punkcie  $b = f(a)$ , to wówczas funkcja  $g \circ f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest ciągła w punkcie  $a \in A$ .  $\square$*

Wreszcie, zachodzi następujący prosty odpowiednik Stwierdzenia 1.17, dzięki któremu można sprowadzić badanie ciągłości odwzorowania o wartościach w  $\mathbb{R}^m$  do badania ciągłości poszczególnych współrzędnych tego odwzorowania.

**Stwierdzenie 1.35.** *Niech  $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $\mathbf{a} \in A$ . Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{a}$ .*
- (ii) *Dla każdego  $j = 1, 2, \dots, m$  funkcja  $f_j$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{a}$ .*

**Dowód.** Dla każdego  $j_0 = 1, 2, \dots, m$  i każdego ciągu  $(\mathbf{x}_k) \subset A$ ,  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$  mamy oczywiście

$$0 \leq |f_{j_0}(\mathbf{x}_k) - f_{j_0}(\mathbf{a})| \leq \left( \sum_{j=1}^m |f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{a})|^2 \right)^{1/2} = \|f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{a})\|.$$

Dlatego implikacja (i)  $\Rightarrow$  (ii) wynika natychmiast z twierdzenia o trzech ciągach, a implikacja w drugą stronę jest konsekwencją arytmetycznych własności granicy i ciągłości pierwiastka kwadratowego.  $\square$

**Uwaga 1.36.** W powyższym stwierdzeniu ciągłość  $f_j$  wynika także stąd, że  $f_j$  jest złożeniem  $f$  i rzutu na  $j$ -tą oś układu współrzędnych. To minimalnie inny sposób wypowiedzenia tego samego faktu.

**Wniosek 1.37.** *Każdy wielomian  $n$  zmiennych rzeczywistych jest funkcją ciągłą.*

**Dowód.** To wynika natychmiast z ciągłości funkcji współrzędnych i funkcji stałej, oraz z ciągłości sumy i iloczynu funkcji ciągłych.  $\square$

**Wniosek 1.38.** *Wyznacznik macierzy jest funkcją ciągłą na zbiorze  $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  wszystkich macierzy kwadratowych  $n \times n$ .*

**Dowód.** Z permutacyjnej definicji wyznacznika wiadomo, że

$$\det X = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}, \quad X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n},$$

gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich permutacji  $\sigma \in S_n$  zbioru  $n$ -elementowego, a  $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$  oznacza *znak permutacji*. Zatem, wyznacznik jest po prostu wielomianem  $n^2$  zmiennych rzeczywistych (wyrazów macierzy  $X$ ), a więc jest funkcją ciągłą.  $\square$

Z ostatniego wniosku wynika łatwo, że zbiór wszystkich macierzy odwracalnych jest otwartym podzbiorem  $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ . Wiąże się z tym następująca ważna intuicja: mała zmiana wyrazów macierzy odwracalnej daje macierz odwracalną. Sformułujmy tościśle.

**Stwierdzenie 1.39.** *Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, a  $\Omega$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ , to dla każdego przedziału otwartego  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  (dopuszczamy też możliwość  $a = -\infty$  lub  $b = +\infty$ ) zbiór  $U = f^{-1}((a, b))$  jest otwarty.*

Dowód. Wybierzmy  $\mathbf{x} \in U$ . Znajdziemy taką liczbę  $\delta > 0$ , że  $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$ , co zakończy dowód otwartości tego zbioru.

Skoro  $\mathbf{x} \in U$ , to z definicji  $a < f(\mathbf{x}) < b$ . Wybierzmy taką liczbę  $\varepsilon > 0$ , żeby przedział  $(f(\mathbf{x}) - \varepsilon, f(\mathbf{x}) + \varepsilon)$  był zawarty w  $(a, b)$ . Następnie, dobierzmy  $\delta > 0$  tak, aby dla  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$  zachodziła nierówność  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$  (uwaga: tu właśnie korzystamy z ciągłości  $f$ ). Wtedy

$$f(\mathbf{y}) \in (f(\mathbf{x}) - \varepsilon, f(\mathbf{x}) + \varepsilon) \subset (a, b),$$

a więc, wprost z definicji przeciwbrazu,  $\mathbf{y} \in f^{-1}((a, b)) = U$ . Wykazaliśmy więc, że jeśli  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$ , to  $\mathbf{y} \in U$ , tzn.  $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$ . Zgodnie z początkową zapowiedzią, dowód jest zakończony.  $\square$

**Wniosek 1.40.** *Zbiór macierzy odwracalnych  $n \times n$  jest otwartym podzbiorem  $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ .*

Dowód. Zbiór, o który chodzi, jest sumą dwóch zbiorów:

$$\{X \in M_{n \times n}: \det X > 0\} \quad \text{oraz} \quad \{X \in M_{n \times n}: \det X < 0\}.$$

Ze Stwierdzenia 1.39 i ciągłości wyznacznika wnioskujemy, że każdy z tych zbiorów jest otwarty, a więc ich suma też jest zbiorem otwartym.  $\square$

## Ciągłość norm i przekształceń liniowych

**Stwierdzenie 1.41.** *Każde przekształcenie liniowe  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  spełnia warunek Lipschitza (w szczególności: jest ciągłe).*

Dowód. Niech  $A = (a_{ij})$ , bez zbytnich obaw o kolizję oznaczeń, oznacza macierz przekształcenia  $A$  w standardowych bazach  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$ . Wektory standardowej bazy w  $\mathbb{R}^n$  będziemy oznaczać

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że zapis  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  oznacza tyle samo, co  $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$ . Posługując się najpierw nierównością trójkąta i własnościami normy, następnie zaś nierównością Schwatta

rza, łatwo sprawdzamy, że

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i A\mathbf{e}_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A\mathbf{e}_i\| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \|A\mathbf{e}_i\|^2 \right)^{1/2} \\ &= C\|\mathbf{x}\|,\end{aligned}$$

gdzie

$$C \equiv C_A = \left( \sum_{i=1}^n \|A\mathbf{e}_i\|^2 \right)^{1/2}$$

jest pewną stałą, zależną tylko od przekształcenia  $A$ , nie zaś od punktu  $\mathbf{x}$ .

Zastępując w powyższym rachunku wektor  $\mathbf{x}$  wektorem  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ , otrzymujemy

$$\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Przekształcenie  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  spełnia więc warunek Lipschitza.  $\square$

**Uwaga 1.42.** Definicję ciągłości można formalnie, bez najmniejszych zmian, przenieść na przypadek funkcji  $f: V \rightarrow W$ , gdzie  $V, W$  są przestrzeniami liniowymi unormowanymi. Jednak, gdy  $V$  ma wymiar nieskończony, to istnieją przekształcenia *liniowe*  $A: V \rightarrow \mathbb{R}$ , które nie są ciągłe. Czytelnik, zapoznawszy się do końca z treścią tego rozdziału, może samodzielnie zastanowić się nad (prostymi) przykładami.

**Uwaga 1.43.** Stała  $C_A$ , którą uzyskaliśmy w powyższym dowodzie, jest (na ogólnie) nieoptimalna. Zauważmy, że  $A\mathbf{e}_i$  to po prostu  $i$ -ta kolumna macierzy  $A$ . Dlatego

$$C_A = \left( \sum_{i=1}^n \|A\mathbf{e}_i\|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

jest po prostu normą euklidesową macierzy  $A$ , traktowanej jako wektor o  $n \cdot m$  współrzędnych. Np. dla  $n = m = 3$  i  $A = \text{Id}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  otrzymujemy tu wynik  $C_{\text{Id}} = \sqrt{3}$ , a widać wszak, że dla przekształcenia identycznościowego odpowiednia nierówność zachodzi ze stałą równą 1 (i jest po prostu równością).

**Zadanie 1.44.** Wykazać, że dla przekształcenia liniowego  $A: V \rightarrow W$ , gdzie  $V, W$  są przestrzeniami liniowymi unormowanymi, następujące warunki są równoważne:

- (i)  $A$  jest ciągłe na  $V$ ;
- (ii)  $A$  jest ciągłe w jednym punkcie przestrzeni  $V$ ;
- (iii) Istnieje taka stała  $C$ , że  $\|A\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|$  dla wszystkich  $\mathbf{x} \in V$ .

Nietrudno sprawdzić, że wśród wszystkich stałych, spełniających warunek (iii) z powyższego zadania, istnieje zawsze najmniejsza (nierówności nieostre zachowują się w granicy). Tę stałą nazywamy normą<sup>5</sup> przekształcenia liniowego  $A$  i oznaczamy  $\|A\|$ . Ma ona poglądową interpretację geometryczną: dla  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  liczba  $\|A\|$  jest równa

$$\sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|,$$

tz. jest długością najdłuższej półosi elipsoidy, która jest obrazem kuli jednostkowej pod działaniem przekształcenia  $A$ .

**Stwierdzenie 1.45.** *Niech  $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|'$  będzie dowolną normą na przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Wówczas  $f$  spełnia warunek Lipschitza w normie euklidesowej  $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$ . W szczególności, dowolna norma jest funkcją ciągłą na  $\mathbb{R}^n$ .*

Dowód. Dla każdego  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ , postępując tak samo, jak w początkowej części dowodu Stwierdzenia 1.41, otrzymujemy

$$\|\boldsymbol{x}\|' = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i \right\|' \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|\boldsymbol{e}_i\|' \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{e}_i\|')^2 \right)^{1/2} = C\|\boldsymbol{x}\|_2,$$

gdzie stała

$$C = \left( \sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{e}_i\|')^2 \right)^{1/2}$$

zależy tylko od nieznanej normy  $\|\cdot\|'$ , nie zaś od konkretnego punktu  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ . Dlatego, z nierównością trójkąta,

$$|\|\boldsymbol{x}\|' - \|\boldsymbol{y}\|\'| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|' \leq C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2,$$

tz. funkcja  $f = \|\cdot\|'$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $C$ .  $\square$

**Definicja 1.46 (równoważność norm).** Powiemy, że normy  $\|\cdot\|$  i  $\|\cdot\|'$  określone na tej samej przestrzeni liniowej  $V$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała  $C \geq 1$  taka, że

$$\frac{1}{C} \|\boldsymbol{x}\|' \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq C\|\boldsymbol{x}\|' \quad \text{dla wszystkich } \boldsymbol{x} \in V.$$

**Twierdzenie 1.47.** *Wszystkie normy na przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  są równoważne.*

Dowód tego twierdzenia pozostawimy jako **zadanie** dla Czytelnika. Oto wskazówka: wystarczy umieć porównać każdą normę z normą euklidesową; porównanie  $\|\cdot\|' \leq C\|\cdot\|_2$  przeprowadziliśmy w ostatnim dowodzie. Wystarczy zatem wykazać, że zachodzi, być może z inną stałą, nierówność przeciwna. Można w tym celu wykorzystać twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów i fakt, że sfera  $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  jest zbiorem zwartym.

Inne z eleganckich zastosowań twierdzenia Weierstrassa opisuje poniższy

---

<sup>5</sup>lub normą operatorową

**Przykład 1.48 (dowód nierówności między średnimi).** Założmy, że  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Wykażemy nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną,

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (1.3)$$

a także sprawdzimy, że równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby  $x_i$  są równe.

Zauważmy najpierw, że rozważania wystarczy ograniczyć do przypadku, gdy  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ . To wynika z jednorodności: jeśli każdą z liczb  $x_i$  pomnożymy przez ten sam współczynnik  $t > 0$ , to lewa i prawa strona (1.3) też zostaną pomnożone przez  $t$ .

Oznaczmy teraz

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ dla wszystkich } i, \text{ a ponadto } x_1 + \dots + x_n = n\}.$$

Zbiór  $K$  jest zwarty.<sup>6</sup> Dla  $\mathbf{x} \in K$  prawa strona nierówności (1.3) jest równa 1. Wystarczy więc wykazać, że

$$f(\mathbf{x}) := x_1 x_2 \dots x_n \leq 1 = f(1, 1, \dots, 1) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in K,$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy  $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1) \in K$ .

Funkcja  $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \dots x_n$  jest ciągła, osiąga zatem w pewnym punkcie  $\mathbf{a} \in K$  swój kres gorny. Przypuśćmy, że ów punkt ma pewne dwie współrzędne różne, np. dla ustalenia uwagi niech  $a_1 < a_2$ . Z pewnością  $\sup f \geq 1$ , więc  $a_i > 0$  dla wszystkich  $i$ . Rozważmy pomocniczy punkt

$$\mathbf{a}' = ((a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2)/2, a_3, \dots, a_n).$$

Suma jego współrzędnych jest równa  $\sum a_i = n$ , więc także  $\mathbf{a}' \in K$ . Nietrudno jednak sprawdzić, że z uwagi na ostrą nierówność  $a_1 < a_2$  jest<sup>7</sup>

$$\left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 > a_1 a_2$$

stąd zaś, ponieważ  $a_i > 0$  dla wszystkich  $i$ ,

$$f(\mathbf{a}') = \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 a_3 \dots a_n > a_1 a_2 a_3 \dots a_n = f(\mathbf{a}) = \sup_K f,$$

sprzeczność. Punkt  $\mathbf{a}$ , w którym  $f$  osiąga największą wartość, musi więc mieć wszystkie współrzędne równe. W  $K$  jest tylko jeden taki punkt, mianowicie  $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1)$ .

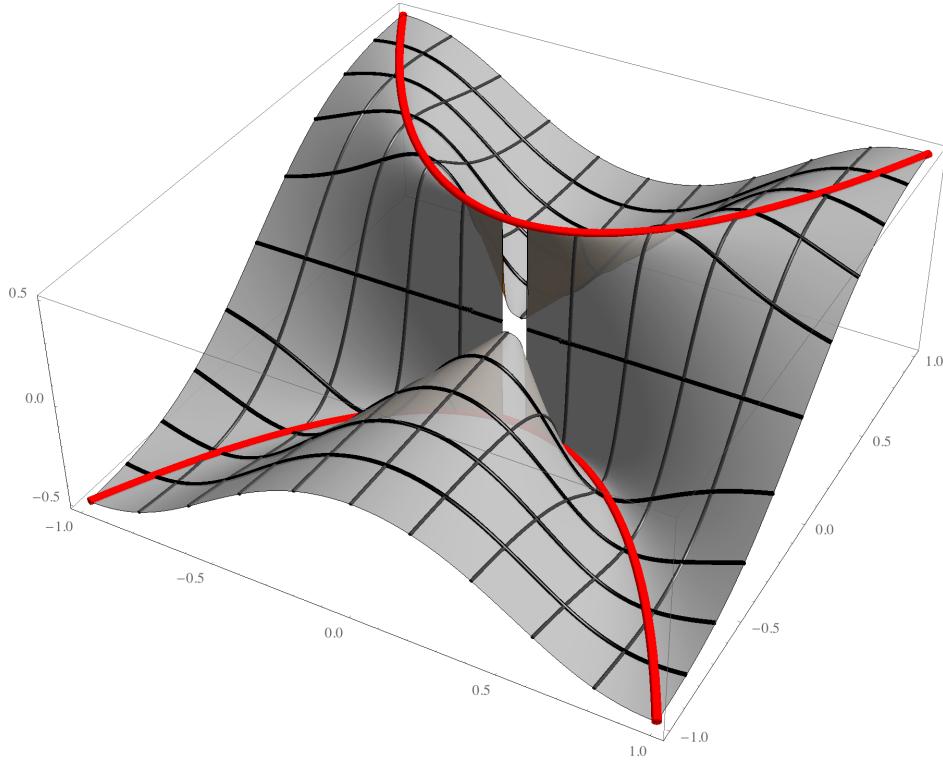
Ostatecznie więc

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq 1 \quad \text{na } K,$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ .  $\square$

**Przykład 1.49.** Rozważmy teraz funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$



Wykres funkcji  $f$  z Przykładu 1.49; na rysunku jest  $x^2 + y^2 > 1/500$  (tzn. z dziedziny  $f$  wycięty został niewielki dysk o środku w zerze) i  $x, y \in [-1, 1]$ . Grubymi liniami zaznaczono parabole, złożone z punktów  $(t, t^2, 1/2)$  oraz  $(t, -t^2, -1/2)$ , gdzie  $t \in [-1, 1]$ : z dokładnością do punktów  $(0, 0, \pm 1/2)$ , obie są położone na wykresie  $f$ .

Funkcja  $f$  jest ciągła na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ; to wynika z ciągłości licznika i mianownika.

Na osiach układu współrzędnych w  $\mathbb{R}^2$ , tzn. tam, gdzie  $x = 0$  lub  $y = 0$ ,  $f$  przybiera wartość 0. Na prostej o równaniu  $y = kx$  funkcja  $f$  ma wartość

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{k^2 x^2 + x^4} = \frac{kx}{k^2 + x^2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Zatem, analizując zachowanie  $f$  na wszystkich prostych przechodzących przez  $0 \in \mathbb{R}^2$ , nie widzimy jeszcze powodu, dla którego  $f$  miałaby być nieciągła w zerze. Jednak na paraboli o równaniu  $y = x^2$  jest, poza punktem  $(0, 0)$ ,

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{(x^2)^2 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Nie jest więc prawdą, że  $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$  dla każdego ciągu  $(x_n, y_n)$  zbieżnego do  $0 \in \mathbb{R}^2$ : wystarczy wędrować do zera po paraboli i wtedy  $f(x_n, y_n) \equiv \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>  $K$  jest określony przez układ nierówności nieostrych, więc jego domkniętość uzysujemy np. ze Stwierdzenia 1.18. Jeśli  $\mathbf{x} \in K$ , to  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i| \leq n$ ; stąd ograniczoność i ostatecznie zwartość  $K$ .

<sup>7</sup> To w istocie nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dwóch liczb.

## Zbiory spójne

Aby zakończyć krótki przegląd podstawowych własności funkcji ciągłych, podamy jeszcze wielowymiarowy odpowiednik własności Darboux. Potrzebne nam będzie w tym celu pojęcie *zbioru spójnego*. Oto odpowiednia definicja.

**Definicja 1.50.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^n$  jest *niespójny* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa zbiory otwarte  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  takie, że

$$\Omega_1 \cap A \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap A, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset, \quad A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2. \quad (1.4)$$

Zbiór  $B$  nazywa się *spójny*, jeśli nie jest niespójny.

**Przykład 1.51 (spójność odcinka).** Sprawdzmy, że dla dowolnych punktów  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  odcinek

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z}(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\}$$

jest zbiorem spójnym. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Niech  $\Omega_1, \Omega_2$  będą zbiorami otwartymi, spełniającymi (1.4) dla  $A = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ . Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy, że  $\mathbf{x} \in \Omega_1$ . Z otwartości  $\Omega_1$  wynika, że punkt  $\mathbf{z}(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \Omega_1$  dla wszystkich dostatecznie małych<sup>8</sup>  $t \geq 0$ . Oznaczmy teraz

$$S_1 = \{s \in [0, 1] : \text{dla wszystkich } t \in [0, s] \text{ punkt } \mathbf{z}(t) \in \Omega_1\}.$$

To jest niepusty i ograniczony podzbiór odcinka  $[0, 1]$ . Niech  $\sigma = \sup S_1$ . Mamy  $\sigma \in (0, 1]$ .

Gdyby  $\sigma < 1$ ,  $\sigma \in S_1$ , to odcinek  $[\mathbf{x}, \mathbf{z}(\sigma)]$  zawierałby się w  $\Omega_1$ . Biorąc  $\rho > 0$  takie, że  $B(\mathbf{z}(\sigma), \rho) \subset \Omega_1$ , sprawdzamy, że

$$\|\mathbf{z}(\sigma) - \mathbf{z}(s)\| = |\sigma - s| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho \quad \text{dla } |\sigma - s| < \rho / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, s \in [0, 1],$$

tz.  $\mathbf{z}(s) \in \Omega_1$  dla wszystkich  $s$  dostatecznie bliskich  $\sigma$ , co przeczy temu, że  $\sigma = \sup S_1$ .

Gdyby  $\sigma = 1 \in S_1$ , to mielibyśmy  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \Omega_1$ , co przeczy definicji niespójności: zbiory  $\Omega_i \cap [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  powinny być oba *niepuste i rozłączne*.

Zatem  $0 < \sigma \notin S_1$ , stąd zaś wynika, że  $\mathbf{z}(\sigma) \in \Omega_2$ . Wtedy jednak, tym razem wobec otwartości  $\Omega_2$ , dla wszystkich  $s$  dostatecznie bliskich  $\sigma$  jest  $\mathbf{z}(s) \in \Omega_2$ , co przeczy równości  $\sigma = \sup S_1$  i definicji  $S_1$ .  $\square$

**Przykład 1.52 (spójność łamanych).** Łamana w  $\mathbb{R}^n$  nazwiemy sumę skończenie wielu odcinków  $I_1, \dots, I_N$ , o tej własności, że koniec odcinka  $I_k$  jest początkiem  $I_{k+1}$  dla każdego  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . (Odcinki mogą mieć inne punkty wspólne: nie wymagamy, żeby łamana nie przecinała siebie samej).

Każda łamana też jest zbiorem spójnym. Można to wykazać na kilka sposobów.

Po pierwsze, łamana jest ciągłym obrazem odcinka, a ciągły obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym (oba fakty nietrudno udowodnić samemu; szczegóły, które pojawią się na zajęciach z topologii, pozostawimy Czytelnikowi).

Po drugie, można wykorzystać spójność odcinka i stosować przez indukcję następujący lemat:

**Lemat 1.53.** Jeśli zbiory  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  są spójne i  $A \cap B \neq \emptyset$ , to  $S = A \cup B$  jest zbiorem spójnym.

---

<sup>8</sup>Czytelnik sprawdzi, że jest tak dla  $0 \leq t < \delta / \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ , gdzie  $\delta > 0$  jest taką liczbą, że  $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega_1$ .

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieją wtedy zbiory otwarte  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  takie, że

$$\Omega_1 \cap S \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap S, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap S = \emptyset, \quad S \subset \Omega_1 \cup \Omega_2. \quad (1.5)$$

Niech  $\mathbf{x} \in A \cap B$ . Bez zmniejszenia ogólności,  $\mathbf{x} \in \Omega_1$ . Zbiór  $A$  jest zawarty w sumie  $S$  zbiorów  $A$  i  $B$ ; dlatego, wobec drugiego i trzeciego warunku w (1.5),

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset, \quad A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Jednak  $A$  jest spójny, dlatego – z definicji! – któryś ze zbiorów  $\Omega_i \cap A$  musi być pusty. Ponieważ  $\mathbf{x} \in A \cap \Omega_1$ , tzn.  $A \cap \Omega_1$  nie jest pusty, więc  $A \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Ponieważ  $\mathbf{x} \in B$ , więc, powtarzając powyższe rozumowanie, wnioskujemy, że  $B \cap \Omega_2 = \emptyset$ .

Skoro jednak  $A \cap \Omega_2 = B \cap \Omega_2 = \emptyset$ , to  $(A \cup B) \cap \Omega_2 = S \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Otrzymaliśmy sprzeczność z pierwszym warunkiem w (1.5).  $\square$

**Uwaga 1.54.** Proszę sprawdzić, że powyższy lemat zachodzi nie tylko dla dwóch zbiorów spójnych, ale i dla dowolnej rodziny zbiorów spójnych, mających choć jeden punkt wspólny. W dowodzie trzeba dopasować tylko oznaczenia.

**Twierdzenie 1.55.** Założmy, że zbiór  $U \subset \mathbb{R}^n$  ma następującą własność: dla każdych  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$  istnieje zbiór spójny  $A \subset U$  taki, że  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ . Wtedy  $U$  jest spójny.

Dowód. Przypuśćmy, że  $U$  nie jest spójny. Weźmy zbiory otwarte  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  takie, że

$$\Omega_1 \cap U \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap U, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap U = \emptyset, \quad U \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Niech  $\mathbf{x} \in \Omega_1 \cap U$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega_2 \cap U$ . Dobierzmy zbiór spójny  $A \subset U$  taki, że  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ . Wtedy

$$\Omega_1 \cap A \supset \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset \neq \{\mathbf{y}\} \subset \Omega_2 \cap A, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset, \quad A \subset U \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

To jednak przeczy spójności  $A$ , zatem  $U$  nie może być niespójny.  $\square$

**Wniosek 1.56.** Jeśli dowolne dwa punkty zbioru  $U$  można połączyć łamana (ogólniej: krzywą) zawartą w tym zbiorze, to  $U$  jest zbiorem spójnym.

Okazuje się, że jeśli zbiór  $U$  jest otwarty, to implikację z ostatniego wniosku można odwrócić. Zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.57 (spójność zbiorów otwartych).** Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie otwarty. Wówczas  $U$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa punkty zbioru  $U$  można połączyć łamana, zawartą w tym zbiorze.

Łamane można w tym twierdzeniu zastąpić ogólniejszymi krzywymi (definiując krzywą jako ciągły obraz odcinka). Zanim przejdziemy do dowodu, podkreślmy ważną rzeczą: teza tego twierdzenia nie zachodzi dla zbiorów, które nie są otwarte. Różne przykłady Czytelnik pozna na zajęciach z Topologii; w szczególności, zbiór

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$$

jest spójny, ale nie każde jego dwa punkty można połączyć krzywą zawartą w  $A$ .

Dowód. Wobec Wniosku 1.56 wystarczy wykazać, że jeśli  $\mathbf{x} \in U$ , to dla każdego  $\mathbf{y} \in U$  istnieje łamana zawarta w  $U$  i łącząca punkty  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

Dla  $\mathbf{x} \in U$  niech

$$U(\mathbf{x}) = \{\mathbf{z} \in U : \text{istnieje łamana } L \subset U, \text{ łącząca } \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{z}\}.$$

Zauważmy:

$$\text{dla każdego } \mathbf{x} \in U \text{ zbiór } U(\mathbf{x}) \text{ jest niepusty, otwarty i spójny.} \quad (1.6)$$

Istotnie, jeśli  $z \in U(\mathbf{x}) \subset U$ , to wobec otwartości  $U$  pewna kula  $B(z, \delta) \subset U$ . Każdy punkt  $y$  tej kuli można połączyć odcinkiem (promieniem) ze środkiem kuli, punktem  $z$ . Dodając ten odcinek do zawartej w  $U$  łamanej o końcach  $\mathbf{x}, z$ , otrzymamy łamana, która łączy w zbiorze  $U$  punkty  $y$  i  $\mathbf{x}$ . Dlatego  $B(z, \delta) \subset U(\mathbf{x})$ , a więc  $U(\mathbf{x})$  jest otwarty. Spójność  $U(\mathbf{x})$  wynika z Wniosku 1.56: jeśli dwa punkty  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in U(\mathbf{x})$ , to istnieje łamana, łącząca je w  $U(\mathbf{x})$ . Łączymy po prostu łamana w  $U$  punkty  $\mathbf{z}_1$  i  $\mathbf{x}$ , a następnie  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}_2$ ; każdy punkt takiej łamanej z definicji należy do  $U(\mathbf{x})$ .

Rozumując podobnie, stwierdzamy, że jeśli  $U(\mathbf{y}) \cap U(\mathbf{x})$  jest zbiorem niepustym, to  $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x})$ , a zatem cały zbiór  $U(\mathbf{y}) \subset U(\mathbf{x})$ . Czytelnik sam zechce wskazać łamane, łączące odpowiednie punkty. Zamieniając rolami  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ , otrzymujemy inkluzję przeciwną. Zatem:

$$\text{jeśli } U(\mathbf{x}) \cap U(\mathbf{y}) \neq \emptyset, \text{ to } U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{y}). \quad (1.7)$$

Ustalmy teraz  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Przypuśćmy, że punktu  $\mathbf{y}_0 \in U$  nie można z  $\mathbf{x}_0$  połączyć łamana. Niech  $\Omega_1$  będzie sumą tych zbiorów  $U(\mathbf{z})$ , które mają punkty wspólne z  $U(\mathbf{x}_0)$ . Wobec (1.7), mamy  $\Omega_1 = U(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$ . Niech  $\Omega_2$  będzie sumą tych zbiorów  $U(\mathbf{z})$ , które nie mają punktów wspólnych z  $U(\mathbf{x}_0)$ . Z założenia,  $U(\mathbf{y}_0) \subset \Omega_2$ , więc  $U \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .

Z określenia  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  wnioskujemy łatwo, że  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  są rozłączne. Są też otwarte; to wynika z otwartości  $U(\mathbf{x})$  i Stwierdzenia 1.12. Są też niepuste ( $\mathbf{x}_0 \in \Omega_1$ , a  $\mathbf{y}_0 \in \Omega_2$ ), a ich suma jest zbiorem  $U$ . To przeczy spójności  $U$ . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.  $\square$

**Twierdzenie 1.58 (własność Darboux).** Założmy, że zbiór  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty i spójny, a funkcja  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Jeśli  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  i

$$f(\mathbf{x}) < c < f(\mathbf{y})$$

dla pewnego  $c \in \mathbb{R}$ , to wówczas istnieje punkt  $\mathbf{z} \in \Omega$  taki, że  $f(\mathbf{z}) = c$ .

**Dowód.** Wybierzmy łamana  $L$ , która łączy w zbiorze  $\Omega$  punkty  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ . Niech  $\gamma: [0, 1] \rightarrow L$  będzie funkcją ciągłą<sup>9</sup> taką, że  $\gamma(0) = \mathbf{x}$  i  $\gamma(1) = \mathbf{y}$ .

Funkcja  $g = f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i spełnia

$$g(0) = f(\gamma(0)) = f(\mathbf{x}) < c < f(\mathbf{y}) = f(\gamma(1)) = g(1).$$

Dlatego istnieje  $s \in (0, 1)$  takie, że  $g(s) = c$ . Zatem  $f(\mathbf{z}) = c$  dla  $\mathbf{z} = \gamma(s)$ .  $\square$

**Uwaga 1.59.** Czytelnik zechce zauważyć, że wykazaliśmy w istocie, że przy założeniach Twierdzenia 1.58 punkt pośredni  $\mathbf{z}$ , o którym mowa w tezie, można znaleźć na każdej łamanej, łączącej w  $\Omega$  punkty  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

---

<sup>9</sup>Można wybrać funkcję  $\gamma$ , która jest kawałkami aficzna: po prostu parametryzujemy kolejne odcinki łamanej  $L$ , np. dzieląc  $[0, 1]$  na tyle przedziałów, z ilu odcinków składa się  $L$ .

Na zakończenie powiemy kilka słów o ciągłości funkcji odwrotnej do funkcji wielu zmiennych (i założeniach, których wymaga odpowiednik jednowymiarowego twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej).

**Twierdzenie 1.60.** Założmy, że zbiór  $K \subset \mathbb{R}^n$  jest zwarty, a funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset K \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i różnowartościowa. Wówczas  $g = f^{-1}: \mathbb{R}^m \supset f(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest ciągła.

Dowód. Założymy, że  $\mathbf{y}_j \rightarrow \mathbf{y} \in f(K)$ . Wykażemy, że  $g(\mathbf{y}_j) \rightarrow g(\mathbf{y})$  dla  $j \rightarrow \infty$ .

Niech  $\mathbf{x}_j = g(\mathbf{y}_j) \in K$ . Ponieważ  $K$  jest zwarty, więc istnieje podciąg  $\mathbf{x}_{j_k} \rightarrow \mathbf{x} \in K$ . Zatem, wobec ciągłości  $f$ , ciąg  $\mathbf{y}_{j_k} = f(\mathbf{x}_{j_k})$  ma granicę  $f(\mathbf{x})$ , a ponieważ ciąg nie może mieć dwóch granic, więc  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ , tzn.  $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ . Wiemy zatem, że  $g(\mathbf{y}_{j_k}) = \mathbf{x}_{j_k} \rightarrow g(\mathbf{y})$ .

Rozumując podobnie, można wykazać, że każdy podciąg ciągu  $g(\mathbf{y}_j)$  zawiera podciąg  $g(\mathbf{y}_{j_s})$  taki, że  $g(\mathbf{y}_{j_s}) \rightarrow g(\mathbf{y})$ . Stąd już wynika, że cały ciąg  $g(\mathbf{y}_j)$  jest zbieżny do  $g(\mathbf{y})$ .  $\square$

Okazuje się, że założenie zwartości jest w Twierdzeniu 1.60 istotne. Oto przykłady.

**Przykład 1.61.** Niech

$$f: [0, \infty) \ni t \longmapsto f(t) = \exp(2\pi i \cdot e^{-t}) \equiv (\cos 2\pi e^{-t}, \sin 2\pi e^{-t}) \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2.$$

Czytelnik bez trudu sprawdzi, że funkcja  $f$  jest ciągła różnowartościowa (to wynika z własności funkcji wykładniczej w  $\mathbb{C}$ ), a zbiorem jej wartości jest okrąg jednostkowy  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Jednak

$$f(0) = (1, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

a więc funkcja odwrotna do  $f$  nie jest ciągła w  $(1, 0)$ .  $\square$

**Przykład 1.62 (gęste krzywe na torusie).** Niech  $R > r > 0$  i niech  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie dana wzorem

$$F(\theta, \varphi) = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^3.$$

Można sprawdzić, że obrazem funkcji  $F$  jest torus obrotowy  $\mathbb{T}$ , który powstaje przez obrót (położonego w płaszczyźnie  $x_2 = 0$ ) okręgu

$$\gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - (R, 0, 0)\| = 0\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$$

wokół osi  $x_3$  układu współrzędnych. Oczywiście,  $F$  jest ciągła. Rozpatrzmy teraz złożenie  $F$  z funkcją  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (t, at)$ , gdzie  $a$  jest (jakąkolwiek) ustaloną liczbą niewymierną, tzn. przekształcenie

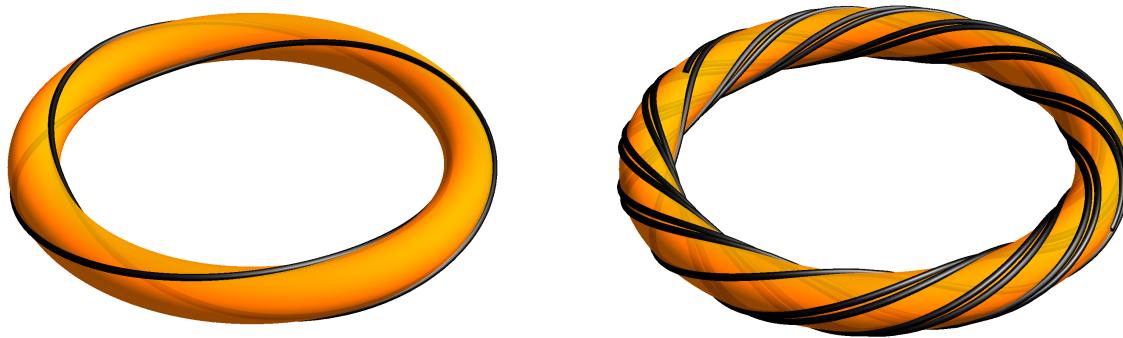
$$g(t) = F(t, at) = ((R + r \cos at) \cos t, (R + r \cos at) \sin t, r \sin at)$$

Nietrudno sprawdzić, że  $g$  jest różnowartościowa (to wynika z niewymierności  $a$ ), zaś obraz funkcji  $g$ , tzn. krzywa  $g(\mathbb{R})$ , jest gęstym<sup>10</sup> podzbiorem torusa  $\mathbb{T}$ .

Z geometrycznego punktu widzenia,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$  to różnowartościowe, równomierne nawinięcie (nieskończoność cienkiej i długiej) nitki na torus obrotowy.

Funkcja  $g$  jest ciągła. Jednak przekształcenie  $g^{-1}$  nie jest ciągle w żadnym punkcie zbioru  $g(\mathbb{R})$ , bo dowolnie blisko punktu  $g(s)$  znajdują się punkty  $g(t)$ , dla których liczba  $|t - s|$  może być dowolnie duża.  $\square$

<sup>10</sup>Proszę wykazać, że dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{T}$  i każdego  $\varepsilon > 0$  istnieją dowolnie duże liczby  $t \in \mathbb{R}$  takie, że  $g(t) \in \mathbb{T} \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\}$ . Można wcześniej przypomnieć sobie dowód gęstości – dla niewymiernych  $b \in \mathbb{R}$  – ciągu  $c_n = nb - [nb]$  w odcinku  $[0, 1]$ ; Czytelnik zapewne widział ten dowód podczas ćwiczeń z Analizy Matematycznej I.



Oba obrazki uzyskano dla  $R = 8$ ,  $r = 1$ . Po lewej stronie: obraz przekształcenia  $g_1(t) = F(2t, 3t)$  to krzywa zamknięta na torusie (węzeł, nazywany trójkątnikiem). Funkcja  $g_1$  jest okresowa.

Po prawej: obraz przekształcenia  $g_2(t) = F(t, at)$  dla  $a = 1 + \sqrt{5}$ ,  $t \in [0, 15\pi]$ . Funkcja  $g_2$  jest różnowartościowa i ciągła na  $\mathbb{R}$ , ale odwrotna do niej nie jest ciągła na zbiorze  $A = g_2(\mathbb{R})$  w  $\mathbb{R}^3$ . Podobne krzywe na torusie nazywa się czasem obmotkami.

Założenie zwartości w Twierdzeniu 1.60 można zastąpić założeniem otwartości dziedziny oraz równości wymiarów dziedziny i przeciwdziedziny przekształcenia  $f$ . Zachodzi następujące twierdzenie, udowodnione przez holenderskiego matematyka L.E.J. Brouwera w 1912 roku.

**Twierdzenie 1.63** (Brouwera o niezmienności obszaru). *Przypuśćmy, że zbiór  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty, a funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest różnowartościowa i ciągła. Wtedy  $V = f(U)$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ , a funkcja  $f^{-1}: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  jest ciągła.*

Dowód wykracza poza ramy tego wykładu i należy do topologii, a nie do analizy.

## Rozdział 2

# Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych

### 2.1 Pochodne cząstkowe, kierunkowe i różniczka zupełna

**Definicja 2.1 (pochodna cząstkowa).** Mówimy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie zbiór  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty, ma w punkcie  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$  pochodną cząstkową względem zmiennej  $x_i$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja jednej zmiennej rzeczywistej

$$F_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad F_i: (a_i - \delta, a_i + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

ma pochodną w punkcie  $a_i$ , gdzie  $\delta > 0$  wybieramy tak, aby odcinek  $(\mathbf{a} - \delta \mathbf{e}_i, \mathbf{a} + \delta \mathbf{e}_i) \subset \Omega$ . Przyjmujemy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = F'_i(a_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (2.2)$$

Używa się także innych oznaczeń:

$$D_i f(\mathbf{a}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Jak widać, pochodną cząstkową  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  obliczamy, traktując wszystkie zmienne oprócz  $x_i$  jako ustalone parametry i wykonując różniczkowanie względem  $x_i$ . Obowiązują przy tym oczywiście wszystkie reguły, które Czytelnik poznał, ucząc się rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Np. jeśli

$$f(x, y, z) = x^2 + x \cos(yz) + z \exp(x^2),$$

to

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + \cos(yz) + 2zx \exp(x^2), & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= -xz \sin(yz), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -xy \sin(yz) + \exp(x^2). \end{aligned}$$

**Uwaga 2.2.** Ze wzoru (2.2) wynika, że gdy wartości  $f$  są liczbami rzeczywistymi, tzn.  $m = 1$  w Definicji 2.1, to także  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$  – tam, gdzie jest określona – jest liczbą rzeczywistą. Jeśli  $m > 1$ , to  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$  jest wektorem z przestrzeni  $\mathbb{R}^m$ .

Podkreślmy od razu, że samo istnienie pochodnych cząstkowych funkcji  $f$  nie gwarantuje ciągłości funkcji.

**Przykład 2.3.** (i) Niech  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją charakterystyczną zbioru  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, y \neq 0\}$ , tzn. niech  $f \equiv 1$  na  $A$  i  $f \equiv 0$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ . Na obu osiach układu współrzędnych mamy  $f \equiv 0$  i dlatego, wprost z definicji,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}).$$

Jednak  $f$  nie jest ciągła w zerze, gdyż  $f(\mathbf{0}) = 0 \neq \lim_{j \rightarrow \infty} f(1/j, 1/j^2)$ .

(ii) Rozpatrzmy ponownie funkcję z Przykładu 1.49:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Jeśli  $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(y^2 + x^4) - 4x^3 \cdot yx^2}{(y^2 + x^4)^2} = \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(y^2 + x^4)^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(y^2 + x^4) - 2y \cdot yx^2}{(y^2 + x^4)^2} = \frac{-x^2(y^2 - x^4)}{(y^2 + x^4)^2}. \quad (2.5)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie,  $f \equiv 0$  na obu osiach układu współrzędnych mamy i dlatego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}).$$

Jednak wiemy już, że  $f$  nie jest ciągła w punkcie  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ .

**Przykład 2.4.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją różniczkowalną i niech  $G(x) = (x, f(x))$ ,  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Wówczas  $\frac{\partial G}{\partial x} = G'(x) = (1, f'(x))$ . Interpretacja geometryczna jest prosta:  $G'(x)$  jest wektorem stycznym do wykresu  $f$  w punkcie  $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ .

**Definicja 2.5 (pochodna kierunkowa).** Mówimy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie zbiór  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty, ma w punkcie  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$  pochodną kierunkową względem wektora  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja jednej zmiennej rzeczywistej

$$F_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}), \quad F_{\mathbf{v}}: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.6)$$

ma pochodną w zerze. (Liczę  $\delta > 0$  wybieramy tak, by odcinek  $(\mathbf{a} - \delta\mathbf{v}, \mathbf{a} + \delta\mathbf{v}) \subset \Omega$ .) Przyjmujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = (F_{\mathbf{v}})'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (2.7)$$

Używa się także innych oznaczeń:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

**Uwaga 2.6.** Zauważmy, że pochodna kierunkowa względem  $\mathbf{e}_i$  jest tym samym, co pochodna cząstkowa względem  $\mathbf{e}_i$ :

$$D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

**Przykład 2.7.** Raz jeszcze rozpatrzmy funkcję z Przykładu 1.49, daną wzorem (2.3). Dla  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  i dowolnego wektora  $\mathbf{v} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ , gdzie  $\xi, \eta \neq 0$ , iloraz

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 \xi^2 \eta}{h^2 \eta^2 + h^4 \xi^4} = \frac{\xi^2 \eta}{\eta^2 + h^2 \xi^4} \rightarrow \frac{\xi^2}{\eta^2} \quad \text{dla } h \rightarrow 0.$$

Zatem  $f$  ma w zerze *wszystkie* pochodne kierunkowe (sprawdzaliśmy już istnienie pochodnych cząstkowych). Nietrudno stwierdzić, że w pozostałych punktach  $\mathbb{R}^2$  funkcja  $f$  też ma wszystkie pochodne kierunkowe. Wynika stąd, że nawet istnienie wszystkich pochodnych kierunkowych w każdym punkcie dziedziny nie gwarantuje ciągłości funkcji wielu zmiennych rzeczywistych.

Właściwym odpowiednikiem pojęcia pochodnej jest, dla funkcji wielu zmiennych, pojęcie różniczki.

**Definicja 2.8 (różniczkowalność funkcji wielu zmiennych).** Mówimy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym, jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  takie, że

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (2.8)$$

Przekształcenie  $A$  nazywamy *różniczką (lub pochodną, lub różniczką zupełną)  $f$  w punkcie  $\mathbf{a}$*  i oznaczamy  $Df(\mathbf{a})$  lub  $f'(\mathbf{a})$ .

**Stwierdzenie 2.9.** Niech  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym. Następujące warunki są równoważne:

- (i)  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ ;
- (ii) istnieje przekształcenie liniowe  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  i funkcja

$$r: \Omega_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} + \mathbf{h} \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ciągła w punkcie  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ,  $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , dla których zachodzi równość

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + A\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \cdot r(\mathbf{h}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{h} \in \Omega_{\mathbf{a}}. \quad (2.9)$$

Jeśli zachodzi warunek (ii), to  $Df(\mathbf{a}) = A$ .

**Dowód.** Jeśli różniczka  $A = Df(\mathbf{a})$  istnieje, to wystarczy określić

$$r(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \quad \text{dla } \mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \quad r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Funkcja  $r$  jest określona, gdy  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \Omega$ . Ponadto, dzięki warunkowi (2.8),

$$\|r(\mathbf{h})\| = \frac{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0, \quad \text{dla } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0,$$

tzn. równoważnie  $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ . Na odwrót, jeśli zachodzi (ii), to warunek  $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0 = r(0)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  implikuje, że granica we wzorze (2.8) jest równa zero, tzn.  $A = Df(\mathbf{a})$ .

□

**Uwaga 2.10.** Jeśli różniczka  $Df(\mathbf{a})$  istnieje, to jest określona jednoznacznie. Istotnie, gdyby wzór (2.9) zachodził dla  $A_i, r_i$ , gdzie  $i = 1, 2$ , to mielibyśmy  $A_1\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r_1(\mathbf{h}) = A_2\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r_2(\mathbf{h})$  dla wszystkich  $\mathbf{h}$  z pewnej kuli  $B(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ . Stąd, kładąc  $\mathbf{h} = t \cdot \mathbf{v}$ , gdzie  $\|\mathbf{v}\| = 1$  i  $t > 0$ , a następnie dzieląc obie strony przez  $t$ , otrzymujemy

$$(A_1 - A_2)\mathbf{v} = r_2(t\mathbf{v}) - r_1(t\mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow 0.$$

Jednak lewa strona strona nie zależy od  $t$ . Zatem przekształcenia liniowe  $A_1$  i  $A_2$  pokrywają się na całej sferze jednostkowej  $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ , a więc są równe.

**Wniosek 2.11.** Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , to dla każdego niezerowego wektora  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  jest

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

W szczególności, dla  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$  jest

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Dowód.** Podstawiając w równości (2.9) wektor  $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$ , gdzie  $\mathbf{v}$  jest ustalony i  $t \neq 0$ , otrzymujemy

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{t} Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \pm \|\mathbf{v}\|r(t\mathbf{v}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}), \quad t \rightarrow 0.$$

Lewa strona nie zależy od  $t$ ; dlatego zachodzi pierwsza równość z tezy wniosku. Druga równość to jej przypadek szczególny (wspominaliśmy już, że pochodna  $f$  w kierunku  $\mathbf{e}_i$  i pochodna cząstkowa  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  są równe). □

**Wniosek 2.12.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym i niech

$$f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ ;
- (ii) każda z funkcji  $f_i$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ .

W standardowych bazach przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  macierz  $Df_i(\mathbf{a}) \in M_{1 \times n}$  jest wtedy  $i$ -tym wierszem macierzy  $Df(\mathbf{a}) \in M_{m \times n}$ .

Dowód. Posługujemy się Stwierdzeniem 2.9. Obie strony równości (2.9) są wektorami z  $\mathbb{R}^m$ . Równość  $i$ -tych współrzędnych tych wektorów ( $i = 1, \dots, m$ ) jest równoważna różniczkowalności  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) w punkcie  $\mathbf{a} \in A$  oraz równości  $Df_i(\mathbf{a})\mathbf{h} = (Df(\mathbf{a})\mathbf{h})_i$  dla  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ , tzn. – po utożsamieniu przekształceń liniowych z ich macierzami w standardowych bazach – temu, że  $Df_i(\mathbf{a})$  jest  $i$ -tym wierszem macierzy  $Df(\mathbf{a})$ .  $\square$

**Uwaga 2.13 (terminologia: macierz Jacobiego).** Jak wiadomo z wykładów Algebry Liniowej, przekształcenie liniowe  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ma w standardowych bazach macierz (oznaczaną zwykle tą samą literą) o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach, której  $j$ -tą kolumnę stanowi wektor  $A\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^m$ , gdzie  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) są wektorami standardowej bazy w  $\mathbb{R}^n$ . Z dwóch ostatnich wniosków wynika zatem następująca obserwacja: jeśli

$$f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $i = 1, \dots, m$ , jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , to jej różniczka ma w standardowych bazach przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  macierz

$$Df(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Kolumny tej macierzy to wektory

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Macierz (2.10) nazywamy *macierzą Jacobiego* przekształcenia różniczkowalnego  $f$ . Dla  $n = m$  wyznacznik tej macierzy nazywamy *jakobianem* przekształcenia  $f$  w punkcie  $\mathbf{a}$ .

**Wniosek 2.14.** Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , to  $f$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{a}$ .

Dowód. Korzystamy ze Stwierdzenia 2.9 (ii) oraz ciągłości przekształceń liniowych: dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  jest

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \cdot r(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m,$$

to zaś oznacza, że  $f$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{a}$ .  $\square$

**Uwaga 2.15.** Wiemy już zatem, że istnienie pochodnych cząstkowych funkcji  $f$  w danym punkcie jest warunkiem *koniecznym* różniczkowalności  $f$  w tym punkcie. Nie jest jednak warunkiem dostatecznym, gdyż z istnienia pochodnych cząstkowych (a nawet wszystkich pochodnych kierunkowych) nie wynika ciągłość! Poniżej podajemy warunek *dostateczny* różniczkowalności, wyrażony w języku pochodnych cząstkowych.

**Twierdzenie 2.16.** Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  i wszystkie pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  istnieją na całej kuli  $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$  i są ciągłe w punkcie  $\mathbf{a}$ , gdzie  $r > 0$ , to  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ . Zachodzi wtedy wzór

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wobec Stwierdzenia 2.12, wystarczy przeprowadzić dowód dla  $m = 1$ .

Dla uproszczenia<sup>1</sup> przyjmiemy  $n = 2$ . Niech odtąd  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ,  $\|\mathbf{h}\| < r$ .

Aby skorzystać z istnienia pochodnych cząstkowych, wyrazimy przyrost  $f$  na odcinku  $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$  jako sumę przyrostów wzdłuż dwóch odcinków równoległych do osi układu współrzędnych. Stosując twierdzenie Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych do funkcji

$$F_1(t) = f(a_1 + t, a_2 + h_2), \quad t \in [0, h_1],$$

oraz

$$F_2(t) = f(a_1, a_2 + t), \quad t \in [0, h_2]$$

sprawdzamy, że dla pewnych punktów posrednich  $\theta_i = \theta_i(\mathbf{h}) \in [0, h_i]$  ( $i = 1, 2$ ) jest

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \left( F_1(h_1) - F_1(0) \right) + \left( F_2(h_2) - F_2(0) \right) \\ &= h_1 F'_1(\theta_1) + h_2 F'_2(\theta_2) \\ &= h_1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1, a_2 + h_2)}_{\text{punkt } \mathbf{p}_1} + h_2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2)}_{\text{punkt } \mathbf{p}_2} \\ &= \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})}_{\text{część liniowa przyrostu}} + R(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

gdzie reszta

$$R(\mathbf{h}) = h_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \right) + h_2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \right).$$

Z nierówności Schwarza wynika, że dla  $\|\mathbf{h}\| < \delta < r$  jest

$$0 \leq |R(\mathbf{h})| \leq \sqrt{2} \|\mathbf{h}\| \cdot \max_{i=1,2} \left( \sup_{\mathbf{p} \in B(\mathbf{a}, \delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right| \right).$$

Jednak

$$\sup_{\mathbf{p} \in B(\mathbf{a}, \delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right| \quad \text{dla } \delta \rightarrow 0$$

dzięki ciągłości  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  w punkcie  $\mathbf{a}$ . Zatem

$$R(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\| \cdot r(\mathbf{h}),$$

---

<sup>1</sup>Chodzi o uproszczenie zapisu, a nie istotnych trudności – Czytelnik zechce się nad tym zastanowić. W ogólnym przypadku mielibyśmy w dowodzie do czynienia z sumą  $n$  przyrostów, a nie dwóch.

gdzie  $r(\mathbf{0}) = 0$  i  $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Ze Stwierdzenia 2.9 wynika teraz, że

$$Df(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \right).$$

Dowód został zakończony.  $\square$

Na zakończenie tego podrozdziału podkreślmy jedno. Czytelnikowi może wydawać się, że pochodna cząstkowa i być może pochodna kierunkowa to pojęcia naturalniejsze od różniczki. Tak nie jest. Pochodne cząstkowe i kierunkowe określa się po to, żeby badać zachowanie funkcji na prostych. Z przytoczonych przykładów wynika jasno, że nie daje to dostatecznych informacji o zachowaniu funkcji w całym *otoczeniu* danego punktu. Naturalnym uogólnieniem pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej jest właśnie różniczka. Jej istnienie oznacza, że odwzorowanie  $f$  można lokalnie przybliżać przekształceniami

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) \approx f(\mathbf{x}).$$

Ponadto, przekształcenie liniowe  $Df(\mathbf{a})$  koduje w sobie pełną информацию o pochodnych kierunkowych i cząstkowych  $f$ .

## 2.2 Arytmetyczne własności różniczki

**Stwierdzenie 2.17 (różniczka sumy funkcji).** *Jeśli  $f, g: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  są różniczkowalne w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , to funkcja  $f + g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w  $\mathbf{a}$  i zachodzi wzór*

$$D(f + g)(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) + Dg(\mathbf{a}).$$

Dowód. Stosujemy Stwierdzenie 2.9. Wzory 2.9 dla funkcji  $f, g$  dodajemy stronami; ponieważ  $o(\|\mathbf{h}\|) + o(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$ , więc uzyskujemy warunek (ii) Stwierdzenia 2.9 dla funkcji  $f + g$ . Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.  $\square$

Uogólnimy teraz wzór  $(fg)' = f'g + fg'$  na przypadek wielowymiarowy. Okazuje się, że jeśli można zdefiniować ‘iloczyn’ przekształceń różniczkowalnych  $f, g$  (to może być np. iloczyn funkcji o wartościach w  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R}^m$ , albo iloczyn skalarny wektorów z  $\mathbb{R}^m$ , albo iloczyn wektorowy wektorów z  $\mathbb{R}^3$ , albo iloczyn macierzy o odpowiednich rozmiarach, gdy wartości  $f, g$  są macierzami itp.), to ów iloczyn jest różniczkowalny, a jego pochodną oblicza się podobnie, jak dla funkcji z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{R}$ .

**Twierdzenie 2.18 (różniczka ‘iloczynu’).** *Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $g: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  są różniczkowalne w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , a przekształcenie*

$$B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto B[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathbb{R}^l$$

*jest dwuliniowe<sup>2</sup>, to wówczas funkcja*

$$B[f, g]: \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto B[f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^l$$

*jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$  i zachodzi równość*

$$DB[f, g](\mathbf{a})\mathbf{h} = B[Df(\mathbf{a})\mathbf{h}, g(\mathbf{a})] + B[f(\mathbf{a}), Dg(\mathbf{a})\mathbf{h}] \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Oznaczenie  $B[f, g]$  Czytelnik może zastąpić przez  $f \cdot g$  – wtedy analogia z przypadkiem jednowymiarowym będzie widoczna jak na dloni.

**Uwaga 2.19.** Nie zakładamy, że  $B[f, g] = B[g, f]$  (bo np. mnożenie macierzy nie jest działaniem przemiennym). Dlatego we wzorze (2.11) nie wolno zamieniać kolejności argumentów  $B$  w składnikach prawej strony.

Dowód Twierdzenia 2.18. Wobec Stwierdzenia 2.9,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h}), \quad (2.12)$$

$$g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_g(\mathbf{h}), \quad (2.13)$$

gdzie  $\|R_f(\mathbf{h})\| = \|R_g(\mathbf{h})\| = o(\|\mathbf{h}\|)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ . Ustalmy zatem liczbę  $\delta > 0$  tak, aby dla wszystkich  $\|\mathbf{h}\| < \delta$  mieć

$$\|R_f(\mathbf{h})\| + \|R_g(\mathbf{h})\| < \|\mathbf{h}\|. \quad (2.14)$$

Korzystając z dwuliniowości  $B$ , piszemy

$$\begin{aligned} & B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] \\ &= B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] \\ &\quad + B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] \\ &= B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] + B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a})] \\ &= B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] + B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a})] \\ &\quad + B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a})] \stackrel{\text{ozn.}}{=} S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Do prawej strony wstawiamy teraz równości (2.12) i (2.13). Składnik

$$S_1 = B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] = B[Df(\mathbf{a})\mathbf{h}, g(\mathbf{a})] + B[R_f(\mathbf{h}), g(\mathbf{a})],$$

gdzie  $B[R_f(\mathbf{h}), g(\mathbf{a})] = o(\|\mathbf{h}\|)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  (to łatwo wynika z dwuliniowości  $B$ ). Podobnie,

$$S_2 = B[f(\mathbf{a}), Dg(\mathbf{a})\mathbf{h}] + B[f(\mathbf{a}), R_g(\mathbf{h})] = B[f(\mathbf{a}), Dg(\mathbf{a})\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \mathbf{h} \rightarrow 0.$$

Dlatego suma  $S_1 + S_2$  daje prawą stronę wzoru (2.11) z tezy, z błędem  $o(\|\mathbf{h}\|)$ . Wreszcie, składnik  $S_3 = o(\|\mathbf{h}\|)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ . Istotnie, każde przekształcenie dwuliniowe  $B$  spełnia nierówność

$$\|B[\mathbf{x}, \mathbf{y}]\| \leq C\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

z pewną stałą  $C$  zależną od  $B$ .<sup>3</sup> Dlatego

$$\begin{aligned} \|S_3\| &\leq C\|Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h})\| \cdot \|Dg(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_g(\mathbf{h})\| \\ &\leq C \cdot M^2 \|\mathbf{h}\|^2 \quad \text{dla } \|\mathbf{h}\| < \delta, \end{aligned}$$

gdzie, wobec oszacowania (2.14), można wziąć np. stałą  $M = \|Df(\mathbf{a})\| + \|Dg(\mathbf{a})\| + 1$ . Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} & B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] = \\ &= S_1 + S_2 + S_3 = \text{prawa strona wzoru (2.11)} + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{dla } \mathbf{h} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wobec Stwierdzenia 2.9, dowód jest zakończony.  $\square$

---

<sup>3</sup>Czytelnik może to udowodnić samodzielnie, naśladowując dowód Stwierdzenia 1.41.

**Twierdzenie 2.20 (różniczka złożenia funkcji).** *Niech  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  i  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$  będą zbiorami otwartymi. Jeśli  $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalne w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega_1$ , a  $\Omega_2 \supset f(\Omega_1)$  i  $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest różniczkowalne w punkcie  $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ , to złożenie  $g \circ f$  jest różniczkowalne w punkcie  $\mathbf{a}$  i zachodzi wzór*

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a}). \quad (2.15)$$

Dowód. Wobec Stwierdzenia 2.9,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h}), \quad (2.16)$$

$$g(\mathbf{b} + \mathbf{w}) - g(\mathbf{b}) = Dg(\mathbf{b})\mathbf{w} + R_g(\mathbf{w}), \quad (2.17)$$

gdzie  $\|R_f(\mathbf{h})\| = o(\|\mathbf{h}\|)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  i  $\|R_g(\mathbf{w})\| = o(\|\mathbf{w}\|)$  dla  $\mathbf{w} \rightarrow 0$ . Do (2.17) podstawmy  $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$  oraz  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ . Korzystając z (2.16), otrzymujemy

$$\begin{aligned} g \circ f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g \circ f(\mathbf{a}) &= g(\mathbf{b} + \mathbf{w}) - g(\mathbf{b}) \\ &= Dg(\mathbf{b})\mathbf{w} + R_g(\mathbf{w}) \\ &= Dg(\mathbf{b})(Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h})) + R_g(\mathbf{w}) \\ &= [Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a})]\mathbf{h} + R, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdzie reszta

$$R = Dg(\mathbf{b})(R_f(\mathbf{h})) + R_g(\mathbf{w}).$$

Niech  $M = \|Dg(\mathbf{b})\| + \|Df(\mathbf{a})\| + 1$ . Dla małych  $\|\mathbf{h}\|$  jest  $\|R_f(\mathbf{h})\| < \|\mathbf{h}\|$  i dlatego

$$\|\mathbf{w}\| = \|Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h})\| \leq \|Df(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \|R_f(\mathbf{h})\| \leq M\|\mathbf{h}\|.$$

Zatem  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , gdy  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  i mamy

$$\begin{aligned} \frac{\|R\|}{\|\mathbf{h}\|} &\leq \frac{M\|R_f(\mathbf{h})\| + \|R_g(\mathbf{w})\|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= M \frac{\|R_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \frac{\|R_g(\mathbf{w})\|}{\|\mathbf{w}\|} \\ &\leq M \left( \frac{\|R_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|R_g(\mathbf{w})\|}{\|\mathbf{w}\|} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{dla } \mathbf{h} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

tz.  $R = o(\|\mathbf{h}\|)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ . Wobec równości (2.18) i Stwierdzenia 2.9, zachodzi równość  $D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a})$ .  $\square$

**Uwaga 2.21.** Zgodnie z definicją różniczka  $D(g \circ f)(\mathbf{a})$  złożenia  $g \circ f: \mathbb{R}^n \supset \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$  powinna być przekształceniem liniowym z  $\mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}^k$ . Istotnie tak jest:  $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $Dg(\mathbf{b}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ , więc ich złożenie jest przekształceniem liniowym z  $\mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}^k$ .

Twierdzenie 2.20 ma następującą interpretację: macierz Jacobiego różniczki przekształcenia  $g \circ f$  jest iloczynem macierzy Jacobiego przekształceń  $g$  i  $f$ , wziętych w odpowiednich punktach. Z wieloma zastosowaniami tej interpretacji Czytelnik spotka się w konkretnych przykładach.

### 2.3 Gradient. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji i punkty krytyczne

**Definicja 2.22 (gradient funkcji wielu zmiennych).** Gradientem funkcji różniczkowalnej  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $\mathbf{x} \in \Omega$  nazywamy wektor

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Z tej definicji oraz definicji macierzy Jacobiego wynika, że dla  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mamy

$$\langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Czytelnik może więc uważać, że rozróżnianie gradientu i różniczki to niepotrzebna maniera. Podkreślmy jednak, że  $\text{grad } f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ , natomiast  $Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ . Przywykliśmy utożsamiać przestrzeń  $(\mathbb{R}^n)^*$  i  $\mathbb{R}^n$ ; to wymaga odwołania się do konkretnego *układu współrzędnych*. Na gładkich powierzchniach w  $\mathbb{R}^n$  – powiedzmy na torusie czy na sferze – nie sposób jednak zwykle wskazać jakiegoś wyróżnionego układu współrzędnych. Dlatego odróżnianie gradientu i różniczki ma sens. Czytelnik zetknie się z tym później w bieżącym roku, a także na zajęciach z geometrii różniczkowej.

**Stwierdzenie 2.23.** Dla każdej funkcji różniczkowej  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  i każdego wektora  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  takiego, że

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|, \quad \text{gdzie } \mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

zachodzi nierówność

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}) \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

Ponadto, równość w (2.19) zachodzi jedynie dla  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ .

Dowód. Wobec Wniosku 2.11 i nierówności Schwarza, mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{w} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|^2,$$

natomiast

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Stąd już wynika nierówność (2.19).

W nierówności Schwarza  $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$  dla wektorów  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  o równych długościach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{v} = \pm \mathbf{w}$ . Jednak dla  $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$  jest

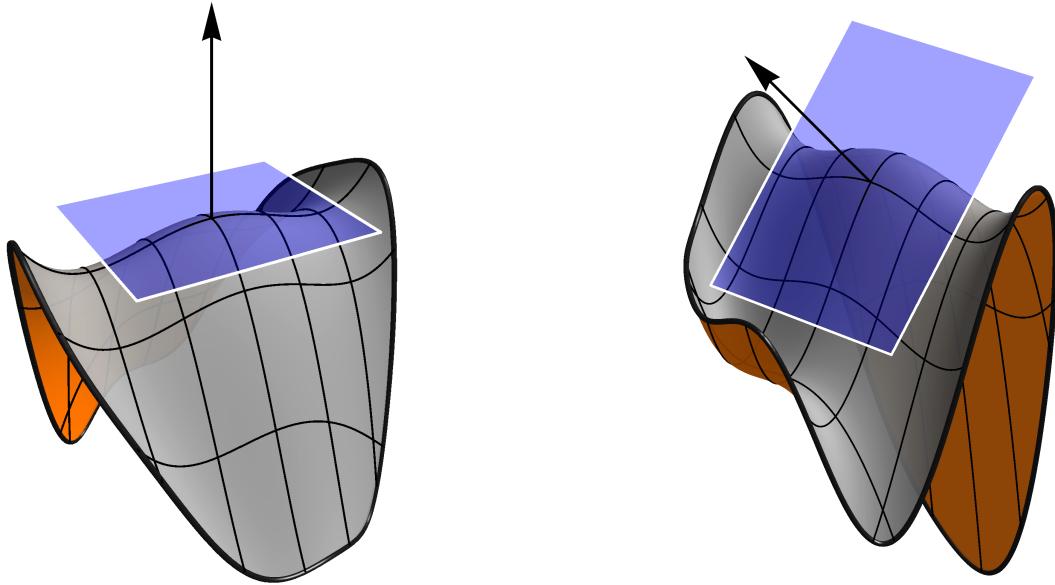
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\|\mathbf{v}\|^2 < 0 < \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}).$$

Ta obserwacja kończy dowód.  $\square$

Powyższe stwierdzenie ma następującą interpretację geometryczną: gradient funkcji w punkcie wyznacza kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie. Długość wektora gradientu odpowiada za tempo wzrostu w tym kierunku.

**Definicja 2.24 (płaszczyzna styczna do wykresu funkcji).** Jeśli  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a}$ , to płaszczyzną styczną do wykresu  $f$  w punkcie  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$  nazywamy zbiór

$$T = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = x_{n+1} - f(\mathbf{a})\}$$



Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji różniczkowej  $f: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})) \in \mathbb{R}^3$  ma równanie

$$f_{x_1}(\mathbf{p})(x_1 - p_1) + f_{x_2}(\mathbf{p}) \cdot (x_2 - p_2) = x_3 - f(\mathbf{p})$$

Wektor  $(-f_{x_1}(\mathbf{p}), -f_{x_2}(\mathbf{p}), 1) \in \mathbb{R}^3$  jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.

Po lewej: w punkcie ekstremum lokalnego  $f_x = f_y = 0$  i tam płaszczyzna styczna jest pozioma.

Innymi słowy, zbiór  $T$  jest wykresem odwzorowania aficznego

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in \mathbb{R}.$$

Wprost z definicji różniczki wynika, że dla  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$  jest  $f(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$ . Widzieliśmy też, że ten warunek określa odwzorowanie  $\phi$  jednoznacznie. To uzasadnia nazwę *płaszczyzna styczna*. Zauważmy, że jeśli  $Df(\mathbf{a}) = 0$ , to przekształcenie  $\phi$  jest stałe, a więc jego wykresem jest hiperpłaszczyzna  $x_{n+1} = \text{const.}$

Podamy teraz warunek konieczny istnienia ekstremum<sup>4</sup> funkcji w punkcie wewnętrznym dziedziny.

**Stwierdzenie 2.25 (lemat Fermata).** Jeśli funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$  i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$Df(\mathbf{a}) = 0,$$

lub równoważnie  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

---

<sup>4</sup>Definicja maksimum (minimum) lokalnego jest analogiczna, jak w wymiarze 1; trzeba tylko przedziały wokół danego punktu w dziedzinie zastąpić kulą o środku w tym punkcie.

Dowód. Jeśli  $f$  ma ekstremum lokalne w  $\mathbf{a}$ , to dla każdego  $i = 1, \dots, n$  funkcja

$$F_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

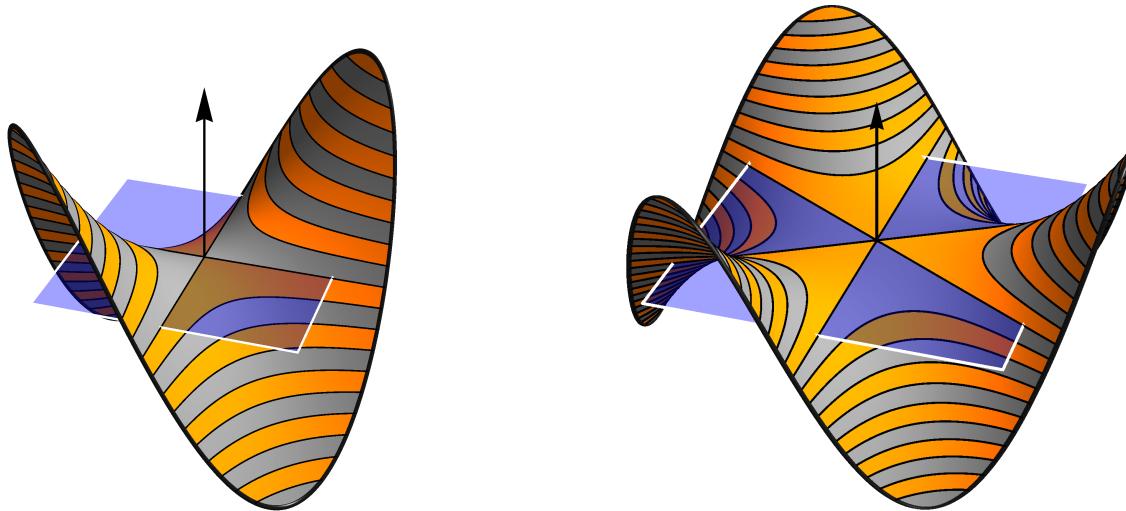
określona w pewnym przedziale  $(a_i - \delta, a_i + \delta) \subset \mathbb{R}$ , ma ekstremum lokalne w  $a_i$ . Dlatego  $F'_i(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{e}_i = 0$ .  $\square$

W wielu sytuacjach wykorzystywane jest następujące ogólne pojęcie.

**Definicja 2.26.** Przypuśćmy, że odwzorowanie  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalne na  $\Omega$ . Powiemy, że  $\mathbf{a} \in \Omega$  jest punktem krytycznym  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe  $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ma rzad mniejszy, niż  $\min(m, n)$ .<sup>5</sup>

Gdy  $m = 1$ , to  $\mathbf{a} \in \Omega$  jest punktem krytycznym funkcji  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ma rzad mniejszy, niż  $\min(n, 1) = 1$ , tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy  $Df(\mathbf{a})$  jest przekształceniem zerowym. Jest to równoważne temu, że wszystkie pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  znikają w punkcie  $\mathbf{a}$ . Zachodzi zatem następujące:

**Stwierdzenie 2.27.** Wszystkie ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnej  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  są jej punktami krytycznymi.  $\square$

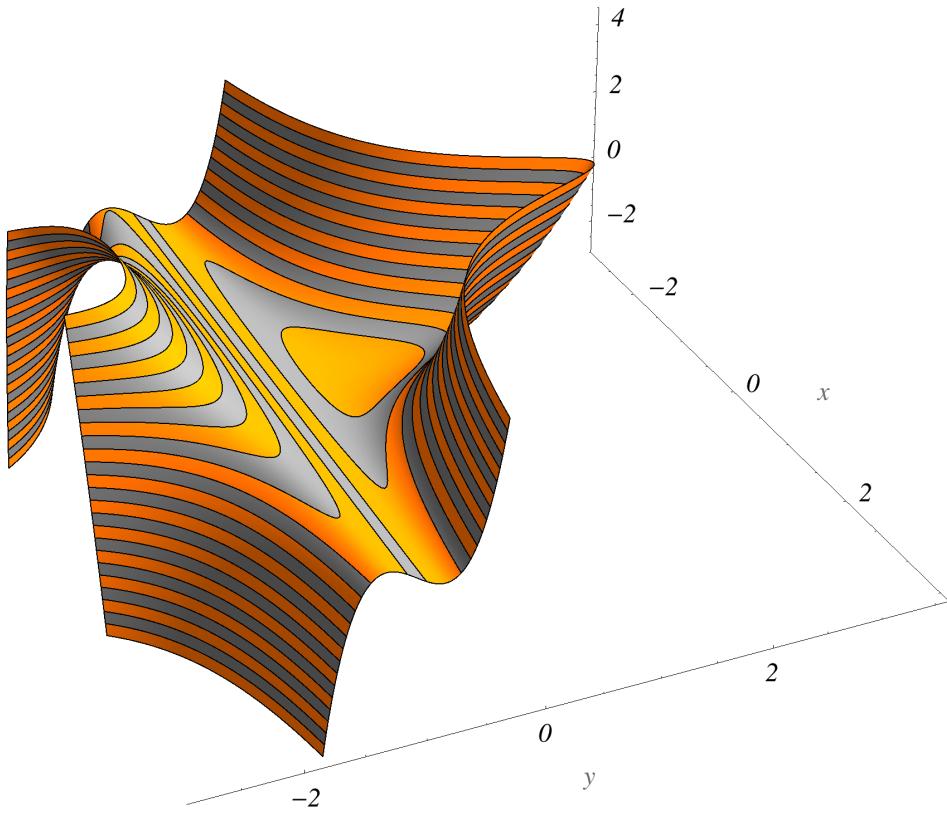


Po lewej: wykres funkcji  $f(x, y) = xy$ . Płaszczyzna styczna przecina wykres funkcji wzduż osi  $x$  i  $y$ . Po prawej: tzw. małpie siodło, wykres funkcji  $g(x, y) = x^3 - 3y^2x$ . Płaszczyzna styczna przecina wykres wzduż trzech prostych. Na obu rysunkach brzegi kolorowych pasów to poziomice (linie, na których funkcja ma stałą wartość).

Oczywiście nie zachodzi implikacja odwrotna. Funkcja  $f(x, y) = xy$  ma pochodne cząstkowe  $f_x(x, y) = y$  i  $f_y(x, y) = x$ , które znikają jednocześnie wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y = 0$ . Jednak w punkcie  $(0, 0)$  funkcja  $f$  nie ma ani minimum, ani maksimum lokalnego (równego zero), gdyż w każdym otoczeniu tego punktu przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Podobnie,

$$g(x, y) = x^3 - 3y^2x = x(x - y\sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) \quad (2.20)$$

<sup>5</sup>Zauważmy:  $k = \min(m, n)$  jest maksymalnym możliwym rzędem przekształcenia liniowego z  $\mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}^m$ .



Wykres funkcji  $f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2$ . Zaznaczone linie to poziomice. W środku widoczne minimum lokalne. Dla  $x = \text{const} > 0$  funkcja  $f(\text{const}, y)$  jest wielomianem stopnia 3; proszę zwrócić uwagę na kształt przedniej krawędzi tego fragmentu wykresu  $f$ .

ma pochodne cząstkowe  $g_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2$  i  $g_y(x, y) = 6xy$ . Łatwo zauważyc, że jedynym punktem krytycznym tej funkcji jest  $(0, 0)$ , jednak w każdym otoczeniu tego punktu  $f$  przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Nawet dla  $n = 2$  zachowanie funkcji różniczkowalnych  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  potrafi odbiegać od naiwnych oczekiwani, jakie Czytelnik mógłby mieć dzięki wcześniejszym jednowymiarowym intuicjom. Należy o tym pamiętać, szukając kresów zbioru wartości funkcji.

**Przykład 2.28.** Istnieją funkcje różniczkowalne  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (o ciągłych pochodnych cząstkowych), które spełniają dwa warunki:

- $f$  ma na  $\mathbb{R}^2$  tylko jeden punkt krytyczny, w którym jest jej ekstremum lokalne;
- $f$  nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Taka funkcja w punkcie jedynego swego ekstremum lokalnego nie osiąga ani kresu dolnego, ani kresu górnego! Spójrzmy na dwa konkretne przykłady takich sytuacji.

Niech

$$f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2. \quad (2.21)$$

Funkcja  $f$  jest wielomianem, więc ma ciągłe pochodne cząstkowe. Wyznaczymy teraz

jej punkty krytyczne. Łatwo obliczamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1+y)^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2(1+y)^2 + 2y.$$

Jeśli  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , to  $x = 0$  lub  $y = -1$ . Jednak dla  $y = -1$  jest  $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv -2 \neq 0$ , tzn.  $f$  nie ma żadnych punktów krytycznych postaci  $(a, -1)$ . Natomiast  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 2y = 0$  dla  $y = 0$ . Dlatego jedynym punktem krytycznym  $f$  jest  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

Nietrudno zauważać, że dla  $|y| < 1/2$  jest  $2 \geq 1+y \geq 1/2$  i dlatego

$$8(x^2 + y^2) \geq f(x, y) \geq \frac{1}{8}(x^2 + y^2), \quad |y| < \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stąd wynika, że  $f$  ma w punkcie  $(x, y) = (0, 0)$  minimum lokalne właściwe. Jednak  $f$  nie jest na  $\mathbb{R}^2$  ograniczona ani z góry, ani z dołu, gdyż funkcja

$$h(y) = f(1, y) = (1+y)^3 + y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

jest wielomianem trzeciego stopnia, a więc nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Innego przykładu tego zjawiska dostarcza funkcja

$$g(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}, \tag{2.22}$$

która jest nieograniczona z góry i z dołu na  $\mathbb{R}^2$ , gdyż  $g(x, 0) = 3x - x^3 - 1$  jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej  $x$ . Mamy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3(e^y - x^2), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3e^y(x - e^{2y}).$$

Z równań  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$  otrzymujemy  $y = \ln x^2$  i  $x = e^{2y} = x^4$ , stąd zaś  $x = 1$  i  $y = 0$  (innych rozwiązań nie ma). Zachowanie funkcji  $g$  w otoczeniu punktu  $(1, 0)$  można przeanalizować, korzystając ze wzoru Taylora.<sup>6</sup> Wskażemy tylko kroki w rachunkach; Czytelnik zechce sprawdzić (nietrudne) szczegóły samodzielnie. Najpierw piszemy

$$g(x, y) = 3(x-1)e^y - x^3 + 3e^y - e^{3y},$$

podstawiamy  $x^3 = (1 + (x-1))^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$  i otrzymujemy

$$g(x, y) = 3e^y - e^{3y} - 1 + 3(x-1)(e^y - 1) - 3(x-1)^2 - (x-1)^3.$$

Następnie wykorzystujemy rozwinięcie Taylora–Maclaurina funkcji wykładniczej. Przewodzi to do wyniku

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 - 3(x-1)^2 - 3y^2 \\ &\quad + 3y(x-1) + \frac{3}{2}y^2(x-1) + o(y^2) + o((x-1)^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Nie znamy jeszcze wprawdzie wzoru Taylora dla funkcji wielu zmiennych, tu jednak nietrudno jest znaleźć najpierw rozwinięcie Taylora względem  $x$  (traktując  $y$  jako parametr), potem zaś skorzystać ze znanego rozwinięcia  $e^y = 1 + y + y^2/2! + \dots$

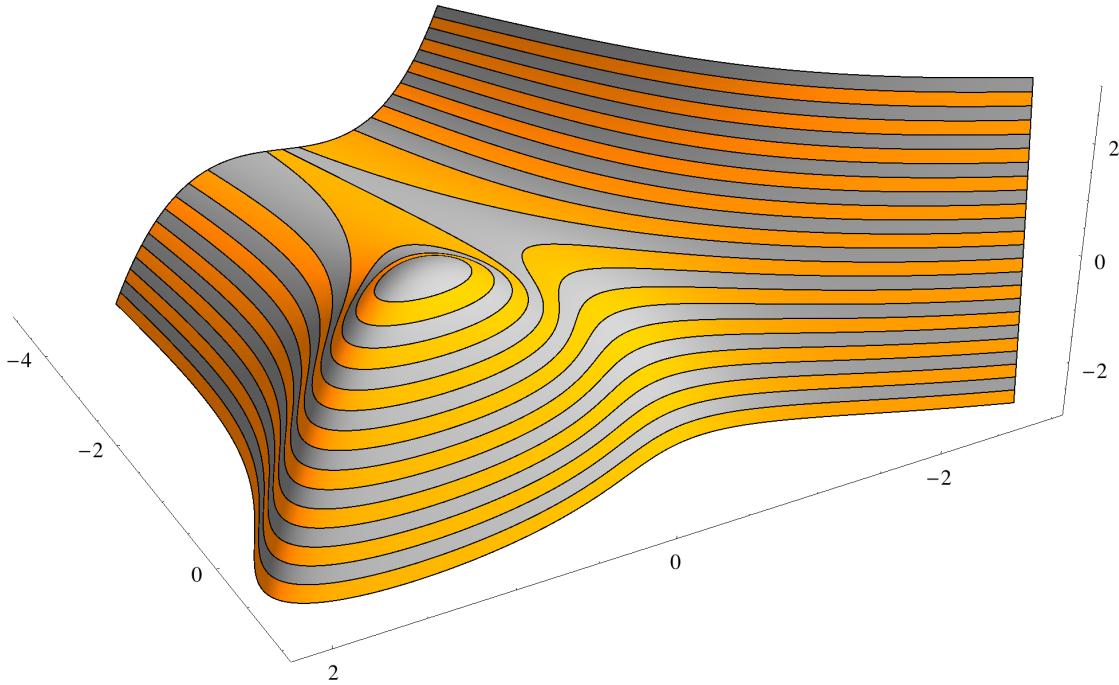
Jednak  $|3y(x-1)| \leq \frac{3}{2}(y^2 + (x-1)^2)$ , a z nierówności Younga  $ab \leq a^p/p + b^q/q$  (gdzie  $a, b \geq 0, p, q > 1$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , patrz wykłady Analizy Matematycznej z I roku) zastosowanej dla  $p = 3/2$  i  $q = 3$  otrzymujemy

$$\frac{3}{2}|y^2(x-1)| \leq |y|^3 + \frac{1}{2}|x-1|^3 = o(y^2) + o((x-1)^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0.$$

Dlatego

$$g(x, y) \geq 1 - \frac{3}{2}(y^2 + (x-1)^2) + o(y^2) + o((x-1)^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0,$$

stąd zaś wynika, że  $g$  ma w punkcie  $(1, 0)$  maksimum lokalne właściwe. Odpowiedni fragment wykresu funkcji  $g$  przedstawiony jest na rysunku.  $\square$



Wykres funkcji  $g(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ . Widoczny garb to jedyne maksimum lokalne tej funkcji. Innych punktów krytycznych  $g$  nie ma. Pomysł na prezentację wykresu zaczerpnięty z książki: Stan Wagon, *Mathematica in action*, wydanie 3, Springer Verlag 2010.

**Przykład 2.29 (Nierówność między średnimi raz jeszcze).** Udowodnimy ponownie nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną. Jak wcześniej w Przykładzie 1.48, założymy, że

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n, \quad x_i \geq 0.$$

Wykażemy, że  $x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$  (przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy wszystkie  $x_i$  są równe).

Tym razem niech

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \underbrace{(n - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}))}_{=x_n \geq 0}$$

dla

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : x_i \geq 0, \quad x_1 + \dots + x_{n-1} \leq n\}.$$

Zbiór  $K$  jest zwarty w  $\mathbb{R}^{n-1}$ , a funkcja  $f$  jest ciągła na  $K$ , zatem  $f$  osiąga swój kres górnny. Na brzegu  $K$  jest  $f \equiv 0$ , a  $f$  przyjmuje wartości dodatnie, np. w punkcie  $(1, \dots, 1)$ , dlatego  $\sup f = f(\mathbf{a})$  dla pewnego punktu  $\mathbf{a}$  należącego do wnętrza zbioru  $K$ . W tym punkcie musi być  $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ .

Stosując wzór na pochodną iloczynu, łatwo sprawdzić, że wewnątrz  $K$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{f(\mathbf{a})}{a_i} - a_1 \dots a_{n-1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Dlatego układ równań  $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$  jest równoważny innemu:

$$n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Sumując te równania, otrzymujemy  $n(n-1) = (n-1) \sum a_j + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ , a stąd  $\sum a_j = n-1$  i dlatego

$$n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_i = 1 - a_i,$$

ostatecznie więc  $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$  jedynie wtedy, gdy  $a_i = 1$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, n-1$ . Właśnie w punkcie  $(1, \dots, 1)$  funkcja  $f$  przyjmuje więc swój kres górnny, równy 1.  $\square$ .

Opisaliśmy już geometryczną interpretację gradientu: jest to kierunek, w którym funkcja rośnie najszybciej. Okazuje się, że można powiedzieć więcej: przy nieznacznych dodatkowych założeniach funkcja “jest stała w kierunkach prostopadłych do gradientu”. Aby wyjaśnić to bliżej i ściślej, będziemy potrzebowali dwóch definicji.

**Definicja 2.30 (poziomica funkcji).** Poziomicą funkcji  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  nazywamy zbiór

$$M = \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\},$$

gdzie  $\mathbf{a} \in \Omega$  jest ustalonym punktem.

Innymi słowy, poziomica składa się z tych punktów, gdzie funkcja przybiera konkretną, ustaloną wartość (równą  $f(\mathbf{a})$  dla danego punktu  $\mathbf{a} \in \Omega$ ).

**Definicja 2.31 (wektory styczne do zbioru w punkcie).** Mówimy, że wektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  jest styczny do zbioru  $A \subset \mathbb{R}^n$  w punkcie  $\mathbf{a} \in A$  (i piszemy  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}} A$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg punktów  $\mathbf{x}_j \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$  takie, że  $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{a}$  dla  $j \rightarrow \infty$ , a ponadto

$$\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}. \quad (2.23)$$

Przyjmiemy także, że wektor  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  jest, dla dowolnych  $A$  i  $\mathbf{a} \in A$ , styczny do zbioru  $A$  w punkcie  $\mathbf{a}$ . Zbiór  $T_{\mathbf{a}} A$  nazywamy przestrzenią styczną do  $A$  w punkcie  $\mathbf{a}$  (lub, czasem, stożkiem stycznym do  $A$  w punkcie  $\mathbf{a}$ ).

W literaturze matematycznej można spotkać różne (niekoniecznie równoważne) definicje wektora stycznego do zbioru. Przytoczona wyżej ma tę zaletę, że można się nią posługiwać, nie przyjmując żadnych dodatkowych założeń o zbiorze  $A$ .

**Uwaga 2.32.** Lewa strona wzoru (2.23) nie zmienia się, gdy wektor  $\mathbf{w}$  mnożymy przez liczbę  $t > 0$ . Dlatego jeśli  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}} A$ , to  $t \cdot \mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}} A$  dla  $t > 0$ . To przestaje być prawdą dla  $t < 0$ : jeśli zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  jest wykresem funkcji  $y = |x|^{1/2}$  i  $\mathbf{a} = (0, 0)$ , to nietrudno sprawdzić, że  $\mathbf{w} = (0, 1) \in T_{\mathbf{a}} A$ , natomiast  $-\mathbf{w} \notin T_{\mathbf{a}} A$ .

**Uwaga 2.33.** Przypuśćmy, że  $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$  jest funkcją różniczkowalną zmiennej jednej zmiennej rzeczywistej  $t \in I$ , gdzie  $I$  jest jakimś przedziałem otwartym wokół zera. Wówczas wektor  $\gamma'(0)$  jest styczny do zbioru  $A$  w punkcie  $\mathbf{a} = \gamma(0)$ . Jeśli  $\gamma'(0) = 0$ , to nie ma czego dowodzić. Przypuśćmy więc, że  $\mathbf{w} \equiv \gamma'(0) \neq 0$ . Z definicji pochodnej

$$\mathbf{w} = \gamma'(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma(1/j) - \gamma(0)}{1/j}.$$

Ponieważ norma jest funkcją ciągłą, więc

$$0 \neq \|\mathbf{w}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\gamma(1/j) - \gamma(0)\|}{1/j}$$

(i wyrazy ciągu po prawej stronie są różne od zera dla dużych  $j$ ). Dlatego

$$\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\gamma(1/j) - \gamma(0)}{1/j} \cdot \frac{1/j}{\|\gamma(1/j) - \gamma(0)\|} \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma(1/j) - \gamma(0)}{\|\gamma(1/j) - \gamma(0)\|},$$

a więc warunek (2.23) jest spełniony w punkcie  $\mathbf{a} = \gamma(0)$  dla punktów  $\mathbf{x}_j = \gamma(1/j)$ .

Interpretacja fizyczna powyższego spostrzeżenia jest jasna: jeśli podróżujemy w zbiorze  $A \subset \mathbb{R}^n$  (i położenie jest różniczkowalną funkcją czasu  $t$ ), to wektor prędkości jest cały czas styczny do zbioru  $A$ .

**Twierdzenie 2.34 (prostopadłość gradientu do poziomicy).** Założmy, że  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$  i ciągła na pewnej kuli  $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ , gdzie  $r > 0$ . Niech

$$A = \{x \in \Omega : f(x) = f(\mathbf{a})\}.$$

Jesli  $\mathbf{v} := \text{grad } f(\mathbf{a}) \neq 0$ , to następujące warunki są równoważne:

(i)  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}} A$ ;

(ii) wektor  $\mathbf{w}$  jest prostopadły do  $\mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{a})$ , tzn.  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

Dowód. Jeśli  $\mathbf{w} = 0$ , to oba warunki są spełnione. Niech więc odstęp  $\mathbf{w} \neq 0$ . Założymy także, że  $f(\mathbf{a}) = 0$ ; to nie zmniejsza ogólności rozważań, gdyż dodając do  $f$  stałą, nie zmieniamy gradientu.

Najpierw wykażemy, że (i)  $\Rightarrow$  (ii). Niech  $\mathbf{x}_j \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$  będzie zbieżnym do  $\mathbf{a}$  ciągiem punktów, dla którego zachodzi warunek (2.23). Ponieważ  $\mathbf{x}_j \in A$ , więc z definicji  $f(\mathbf{x}_j) = 0$ . Wobec różniczkowalności  $f$  w  $\mathbf{a}$ , mamy

$$\begin{aligned} 0 = f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{a} + (\mathbf{x}_j - \mathbf{a})) &= f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|) \\ &= \underbrace{f(\mathbf{a})}_{=0} + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x}_j - \mathbf{a} \rangle + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|) \\ &= \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x}_j - \mathbf{a} \rangle + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|), \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

a zatem

$$0 = \left\langle \operatorname{grad} f(a), \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \right\rangle + \frac{o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}.$$

Zgodnie z (2.23),  $(\mathbf{x}_j - \mathbf{a})/\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\| \rightarrow \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ , gdy  $j \rightarrow \infty$ . Zatem

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\langle \operatorname{grad} f(a), \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \right\rangle = \left\langle \operatorname{grad} f(a), \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right\rangle = \langle \operatorname{grad} f(a), \mathbf{w} \rangle.$$

Dowód implikacji (ii)  $\Rightarrow$  (i) jest nieco trudniejszy. Niech  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f(a) \neq 0$ . Ustalmy najpierw, posługując się wprost definicją różniczki i gradientu, liczbę  $t > 0$  tak, aby mieć

$$f(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}) > 0 = f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{v}) \quad \text{oraz} \quad t \cdot \|\mathbf{v}\| < \frac{r}{2};$$

można to zrobić, gdyż  $Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle$  i dla małych  $|t|$  jest

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(t\mathbf{v}) + o(|t|) = Df(\mathbf{a})(t\mathbf{v}) + o(|t|) = t\|\mathbf{v}\|^2 + o(|t|),$$

a więc znak liczby  $f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$  jest taki, jak znak  $t$ .

Dalszy ciąg dowodu polega na tym, by wybrać punkty  $\mathbf{x}_j \in A$ , dla których zachodzi warunek z definicji wektora stycznego. Kluczowy krok pod koniec rozumowania wykonujemy nie wprost; w dowodzie istotną rolę odgrywa ciągłość  $f$  w całym otoczeniu  $\mathbf{a}$ . Czytelnik zechce wykonać rysunek, zakładając, że płaszczyzna kartki jest rozpięta na  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$ , i zaznaczać położenia kolejnych rozpatrywanych punktów.

Niech  $j \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \frac{1}{j} < t$ . Korzystając z ciągłości  $f$  w punktach  $\mathbf{a} \pm \frac{1}{j}\mathbf{v}$ , wybierzmy liczbę  $\delta_j \in (0, 1/j)$  tak, aby

$$f(\mathbf{a} + \frac{1}{j}\mathbf{v} + s\mathbf{w}) > 0 \quad \text{dla wszystkich } |s| \leq \delta_j \tag{2.24}$$

i jednocześnie

$$f(\mathbf{a} - \frac{1}{j}\mathbf{v} + s\mathbf{w}) < 0 \quad \text{dla wszystkich } |s| \leq \delta_j. \tag{2.25}$$

Założymy też, że punkty  $\mathbf{a} \pm \frac{1}{j}\mathbf{v} + \delta_j\mathbf{w} \in B(\mathbf{a}, r)$ .

Dla każdego dostatecznie dużego  $j \in \mathbb{N}$  funkcja

$$[-1/j, 1/j] \ni \theta \mapsto \phi_j(\theta) = f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{v} + \delta_j\mathbf{w}) \in \mathbb{R}$$

jest ciągła i na końcach odcinka  $[-1/j, 1/j]$  ma wartości różnych znaków, zatem istnieje punkt  $\theta_j \in (-1/j, 1/j)$  taki, że  $\phi_j(\theta_j) = 0$ , lub równoważnie

$$\mathbf{x}_j \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{a} + \theta_j\mathbf{v} + \delta_j\mathbf{w} \in A = \{f = 0\}.$$

Ponieważ  $\delta_j \in (0, 1/j)$  i  $|\theta_j| < 1/j$ , więc  $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{a}$  i  $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{a}$  dla  $j \rightarrow \infty$ . Korzystając ze zwartości sfery jednostkowej  $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| = 1\}$ , możemy założyć (przechodząc w razie potrzeby do odpowiedniego podciągu), że

$$\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} = \alpha_j\mathbf{v} + \beta_j\mathbf{w} \longrightarrow \mathbf{u}_0 = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad j \rightarrow \infty$$

gdzie współczynniki  $\alpha_j \rightarrow \alpha$ ,  $\beta_j \rightarrow \beta$  dla  $j \rightarrow \infty$ . Zauważmy, że  $\beta_j = \delta_j/\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\| > 0$ . Dlatego  $\beta = \lim \beta_j \geq 0$ .

Z definicji, wektor  $\mathbf{u}_0 \in T_{\mathbf{a}} A$ . Gdyby  $\alpha \neq 0$ , to mielibyśmy

$$\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle = \alpha \|\mathbf{v}\|^2 + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \stackrel{(i)}{=} \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \neq 0.$$

Byłoby więc  $\mathbf{u}_0 \in T_{\mathbf{a}} A$  i nie zachodziłby warunek (ii), co przeczyłoby udowodnionej już implikacji (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Dlatego musi być  $\alpha = 0$ . Ponieważ  $\mathbf{u}_0 \neq 0$ , więc  $\beta \neq 0$ , czyli  $\beta > 0$ . Wykazaliśmy zatem, że

$$\mathbf{u}_0 = \beta \mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}} A, \quad \beta > 0.$$

Zgodnie z Uwagą 2.32,  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}} A$ .  $\square$

**Zadanie 2.35.** Wskazać przykład funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalnej w  $\mathbf{a} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{grad } f(0, 0) = (1, 0)$ , dla której nie zachodzi implikacja (ii)  $\Rightarrow$  (i) w ostatnim twierdzeniu.

**Wskazówka.** Podzielić płaszczyznę na trzy obszary (dolną półpłaszczyznę  $y < 0$  i dwie ćwiartki górnej półpłaszczyzny); na jednym z nich przyjąć  $f(x, y) = x$ , a na dwóch pozostałych  $f(x, y) = x \pm y^2$ , tak, aby zbiór  $A = \{f = 0\}$  był półprostą domkniętą o końcu w punkcie  $\mathbf{a}$ .

**Przykład 2.36 (styczna do okręgu).** Niech  $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ , gdzie  $R > 0$ . Zbiór  $\{f = 0\}$  to okrąg  $\gamma_R$  o promieniu  $R > 0$ . Gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(x, y) \in \gamma_R$  to wektor  $2(x, y)$ , współliniowy z promieniem okręgu  $\gamma_R$ , prowadzącym do punktu  $(x, y)$ . Twierdzenie 2.34 implikuje więc, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, poprowadzonego w punkcie styczności.

**Zadanie 2.37.** Proszę wykazać, że jeśli  $P$  jest płaszczyzną styczną (w sensie Definicji 2.24) do wykresu funkcji różniczkowalnej  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ , to dla każdego punktu  $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in P$  wektor

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}, x_{n+1}) - (\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

jest styczny (w sensie Definicji 2.31) do wykresu funkcji  $f$ . Można posłużyć się Twierdzeniem 2.34, tzn. przedstawić wykres funkcji  $n$  zmiennych jako poziomice pewnej funkcji  $n + 1$  zmiennych.

## 2.4 Twierdzenie o wartości średniej

**Definicja 2.38 (Funkcje klasy  $C^1$ ).** Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , jeśli  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  ma na  $\Omega$  ciągłe pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Uwaga 2.39.** Jeśli  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , to wobec twierdzenia 2.16  $f$  jest różniczkowalna w każdym punkcie  $\Omega$ , a ponadto odwzorowanie

$$\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m \times n}$$

jest ciągłe (tu korzystamy ze Stwierdzenia 1.35). Ponieważ z istnienia różniczki wynika ciągłość funkcji, więc funkcje klasy  $C^1$  są ciągłe.

Na odwrót, jeśli założymy, że  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i ma ciągłą różniczkę  $Df: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , to oczywiście spełnione są warunki Definicji 2.38. To wynika ze Stwierdzenia 1.35.

Podamy teraz odpowiednik twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji wielu zmiennych.

**Twierdzenie 2.40 (o wartości średniej).** *Niech  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Założmy, że dla pewnych  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  odcinek  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \Omega$  i  $f$  jest różniczkowalna we wszystkich punktach tego odcinka. Wówczas*

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\theta \in [0,1]} \|Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\|. \quad (2.26)$$

Geometriczny sens tego twierdzenia jest następujący: jeśli różniczka  $Df(\mathbf{p})$  zwiększa długość wektorów co najwyżej  $k$ -krotnie, to norma przyrostu funkcji wzduż odcinka  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , zawartego w dziedzinie, nie przekracza iloczynu liczby  $k$  i długości tego odcinka.

Dowód. Wprowadźmy dwie funkcje pomocnicze,

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x}), \quad t \in [0, 1], \quad (2.27)$$

$$\Phi(t) = \langle g(1), g(t) \rangle, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.28)$$

Dla  $t \in [0, 1]$  punkt  $\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , zatem  $g$  jest funkcją różniczkowalną zmiennej  $t$  (jako złożenie funkcji różniczkowalnych). Podobnie,  $\Phi$  jest funkcją różniczkowalną. Ponadto,  $\Phi(1) = \|g(1)\|^2 = \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\|^2$  i  $\Phi(0) = 0$ . Wyraźmy przyrost funkcji  $\Phi$ , stosując twierdzenia Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej, a następnie obliczmy pochodną  $\Phi'(\theta)$ , korzystając z twierdzeń o pochodnej iloczynu i różniczce złożenia. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\|^2 &= \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= \Phi'(\theta) \quad \text{dla pewnego } \theta \in (0, 1) \\ &= \langle g(1), g'(\theta) \rangle \\ &= \langle f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}), Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \\ &\leq \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \cdot \|Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \cdot \|Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

(Pierwsza nierówność to nierówność Schwarza; druga wynika z definicji normy przekształcenia liniowego). Jeśli  $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| = 0$ , to teza jest oczywista. W przeciwnym przypadku dzielimy otrzymaną nierówność przez  $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| > 0$  i biorąc kres góry prawej strony względem  $\theta \in [0, 1]$  otrzymujemy (2.26).  $\square$

Podamy jeszcze drugi dowód tego ważnego twierdzenia. Wymaga on wprawdzie nieco mocniejszych założeń, jednak użyty w nim sposób postępowania jest bardzo naturalny i często wykorzystywany w wielu działach analizy.

**DRUGI DOWÓD TWIERDZENIA O WARTOŚCI ŚREDNIEJ.** Niech  $g$  nadal oznacza funkcję pomocniczą, określona wzorem (2.27). Założymy dodatkowo, że  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Wtedy  $g'(t)$  jest funkcją ciągłą. Wyrazimy przyrost  $f$ , tzn. przyrost  $g$  na odcinku  $[0, 1]$ , całkując  $g'$ .

**Uwaga.** Wartościami  $g'$  są wektory z przestrzeni  $\mathbb{R}^m$ . Przyjmujemy naturalną umowę: całka oznaczona  $\int_a^b h(t) dt$  z (ciągłej) funkcji wektorowej  $h = (h_1, \dots, h_m): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest wektorem o współrzędnych  $\int_a^b h_j(t) dt$ . Zachodzi wtedy nierówność

$$\left\| \int_a^b h(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|h(t)\| dt, \quad (2.29)$$

która Czytelnik może udowodnić samodzielnie.<sup>7</sup>

Mamy

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = g(1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt.$$

Korzystając z nierówności 2.29 i obliczając  $g'$  (jak w pierwszym dowodzie), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| &= \left\| \int_0^1 g'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|g'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| dt \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \cdot \int_0^1 \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| dt \\ &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\|. \end{aligned}$$

(Pisząc ostatnią nierówność, oszacowaliśmy całkę przez iloczyn kresu górnego funkcji i długości odcinka).  $\square$

## 2.5 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora

Zajmiemy się teraz określeniem pochodnych cząstkowych rzędu wyższego niż pierwszy, różniczek wyższych rzędów, oraz uogólnieniem wzoru Taylora na funkcje wielu zmiennych. Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, wzór Taylora pozwala znajdować najlepsze przybliżenia wielomianowe funkcji, a także prowadzi do warunków dostatecznych, gwarantujących, że w punkcie krytycznym funkcja ma ekstremum lokalne.

Jak można się spodziewać, pochodne cząstkowe wyższych rzędów definiuje się indukcyjnie.

**Definicja 2.41 (pochodne cząstkowe drugiego rzędu).** Założymy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  ma na  $\Omega$  pochodną cząstkową  $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Jeśli funkcja  $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  ma w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$  pochodną cząstkową względem  $x_j$ , to przyjmujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right](\mathbf{a}).$$

Będziemy też używać innych oznaczeń:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = D_j D_i f(\mathbf{a}) = f_{x_i x_j}(\mathbf{a}).$$

---

<sup>7</sup>Wskazówka: Całkę można przybliżać sumami Riemanna, a dla sum Riemanna mamy tu do czynienia po prostu z nierównością trójkąta dla normy.

**Uwaga.** Posługując się oznaczeniami  $f_{x_i x_j}$ , przestrzegamy naturalnej mnemotechnicznej konwencji: najpierw różniczkujemy względem tej zmiennej, która jest zapisana bliżej  $f$ .

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów definiuje się analogicznie, np.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right](\boldsymbol{a});$$

stosując inne oznaczenia, napisalibyśmy  $D_k D_j D_i f(\boldsymbol{a}) = D_k(D_j D_i f)(\boldsymbol{a})$  oraz

$$(f_{x_i x_j})_{x_k}(\boldsymbol{a}) = f_{x_i x_j x_k}(\boldsymbol{a}).$$

Stosowanie wszelkich oznaczeń tego typu dla pochodnych cząstkowych rzędu wyższego niż drugi jest w praktyce dość niewygodne. Dlatego później poznamy jeszcze inną, wygodną i bardzo skrótną konwencję notacyjną. Najpierw jednak omówimy najważniejsze własności pochodnych cząstkowych drugiego rzędu.

### 2.5.1 Przykład Peano i twierdzenie Schwarza o równości pochodnych mieszanych

Bardzo naturalne jest pytanie: czy, wprowadzając oznaczenia pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, trzeba rzeczywiście koniecznie odróżniać  $f_{x_i x_j}$  od  $f_{x_j x_i}$ ? Czytelnik, oswajony już nieco z przykładami patologicznego zachowania funkcji wielu zmiennych, może spodziewać się, że odpowiedź jest twierdząca.

**Przykład 2.42 (G. Peano, 1884).** Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

W punktach  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  funkcja  $f$  jest różniczkowalna. Ponadto,

$$|f(x, y)| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2);$$

korzystając z tej nierówności, sprawdza się łatwo (wprost z definicji różniczki), że  $Df(0, 0) = (0, 0) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Obliczymy teraz pochodne mieszane  $f_{xy}(0, 0)$  i  $f_{yx}(0, 0)$ .

Mamy

$$f_{xy}(0, 0) = (f_x)_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y)}{y},$$

gdyż  $f_y(0, 0) = 0$  (pamiętajmy: różniczka  $f$  znika w zerze). Wartość  $f_x(0, y)$  obliczamy, posługując się definicją  $f$ ; aby nie wykonywać długich rachunków, zauważmy, że  $f(x) = x^2$  ma w zerze pochodną 0 i dlatego

$$f_x(0, y) = y \cdot \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)_{|x=0} = -y.$$

Zatem  $f_{xy}(0, 0) = -1$ . Zamieniając  $x, y$  rolami, otrzymujemy w ten sam sposób  $f_y(x, 0) = x$  i  $f_{yx}(0, 0) = 1$ . Jest więc  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ .

Podobny (bardziej skomplikowany) przykład podał H.A. Schwarz nieco wcześniej. Okazuje się jednak, że takie zachowanie jest wykluczone wówczas, gdy pochodne mieszane są ciągłe.

**Twierdzenie 2.43 (Schwarza o równości pochodnych mieszanych).** *Ustalmy  $i, j \in 1, \dots, n$ . Jeśli funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest klasy  $C^1$  i ma na  $\Omega$  ciągłą pochodną  $f_{x_i x_j}$ , to pochodna  $f_{x_j x_i}$  istnieje we wszystkich punktach  $\Omega$  i  $f_{x_j x_i} = f_{x_i x_j}$ .*

Dowód poprzedzimy kilkoma lematami.

**Lemat 2.44.** *Niech  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ . Jeśli funkcja  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  zmiennych  $(x, y) \in Q$  jest ciągła i ma ciągłą pochodną cząstkową  $f_y: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ , to*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór

$$\Phi'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (2.30)$$

**Dowód.** Z definicji całki oznaczonej,

$$f(x, y + h) - f(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, y + sh) ds = h \int_0^1 f_y(x, y + sh) ds.$$

Dlatego iloraz różnicowy funkcji  $\Phi$  jest równy

$$\begin{aligned} \Delta_h \Phi(y) &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{\Phi(y + h) - \Phi(y)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y)) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 f_y(x, y + sh) ds \right) dx. \end{aligned}$$

Oznaczmy literą  $I$  całkę po prawej stronie wzoru (2.30). Ponieważ  $f_y(x, y) = \int_0^1 f_y(x, y) ds$ , więc

$$\begin{aligned} \|\Delta_h \Phi(y) - I\| &= \left\| \int_a^b \left( \int_0^1 f_y(x, y + sh) ds \right) dx - \int_a^b \left( \int_0^1 f_y(x, y) ds \right) dx \right\| \\ &= \left\| \int_a^b \left( \int_0^1 (f_y(x, y + sh) - f_y(x, y)) ds \right) dx \right\| \\ &\leq \int_a^b \left( \int_0^1 \|f_y(x, y + sh) - f_y(x, y)\| ds \right) dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Funkcja  $f_y$  jest ciągła na zbiorze zwartym  $Q = [a, b] \times [c, d]$ , a więc jest jednostajnie ciągła na  $Q$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i dobierzmy  $\delta > 0$  tak, aby  $\|f_y(\mathbf{p}_1) - f_y(\mathbf{p}_2)\| < \varepsilon/(b-a)$  dla  $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| < \delta$ . Wówczas, dla  $|h| < \delta$ , funkcja podcałkowa w (2.31) jest w każdym punkcie mniejsza od  $\varepsilon/(b-a)$  i otrzymujemy

$$\|\Delta_h \Phi(y) - I\| < \int_a^b \left( \int_0^1 \frac{\varepsilon}{b-a} ds \right) dx = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Wprost z definicji granicy,  $\Delta_h \Phi(y) \rightarrow I$  dla  $h \rightarrow 0$ , tzn. istotnie zachodzi wzór (2.30).  $\square$

**Uwaga 2.45.** Oczywiście, wzór analogiczny do (2.30) zachodzi także wtedy, gdy zmienne zamienimy rolami.

**Lemat 2.46.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym i niech  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$ . Jeśli  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  ma pochodną cząstkową  $f_{yx}$  ciągłą na  $Q$ , to wówczas  $f_{xy}$  istnieje w punktach prostokąta  $Q$  i  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  dla  $(x, y) \in Q$ .

Dowód. Założymy najpierw, że  $m = 1$ . Niech  $(x, y), (x, y_0) \in Q$ . Napiszmy

$$f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y f_y(x, z) dz = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y g(x, z) dz,$$

gdzie funkcja  $g = f_y$  jest ciągła na  $\Omega$  i ma pochodną  $g_x = f_{yx}$  ciągłą na  $Q$ . Różniczkując powyższy wzór względem  $x$  i stosując poprzedni lemat do  $g$ , otrzymujemy

$$f_x(x, y) = f_x(x, y_0) + \int_{y_0}^y g_x(x, z) dz = f_x(x, y_0) + \int_{y_0}^y f_{yx}(x, z) dz.$$

Zatem

$$\frac{f_x(x, y) - f_x(x, y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y f_{yx}(x, z) dz.$$

Dla  $y \rightarrow y_0$  lewa strona dąży do  $f_{xy}(x, y_0)$ , prawa zaś do wartości funkcji podcałkowej w punkcie  $y_0$ , tzn. do  $f_{yx}(x, y_0)$  (tu ponownie korzystamy z ciągłości  $f_{yx}$  i z twierdzenia o wartości średniej dla całki). Dowód jest zakończony w przypadku  $m = 1$ .

Gdy  $m > 1$ , to z pierwszej części dowodu wynika, że wszystkie współrzędne pochodnej  $f_{xy}$  są dobrze określone i równe odpowiednim współrzędnym  $f_{yx}$ .  $\square$

Dowód TWIERDZENIA 2.43. Dla zbiorów  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  twierdzenie wynika natychmiast z ostatniego lematu. Jeśli  $n > 2$ , to zauważmy, że aby określić pochodne  $f_{x_i x_j}$  oraz  $f_{x_j x_i}$  w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , wystarczy znać wartości  $f$  jedynie na dwuwymiarowej płaszczyźnie afanicznej  $\mathbf{a} + \text{span}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . Stosując Lemat 2.46 na przecięciach zbioru  $\Omega$  z takimi płaszczyznami, łatwo otrzymujemy tezę.  $\square$

## 2.5.2 Druga różniczka

Zacznijmy od objaśnienia, jakim obiektem matematycznym miałaby być druga różniczka  $D^2 f$  funkcji wielu zmiennych. Przypuśćmy, że  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna na  $\Omega$ . Dla ustalonego  $\mathbf{x} \in \Omega$  jej różniczka  $Df(\mathbf{x})$  jest elementem przestrzeni  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , którą, ustaliwszy bazy w  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$ , można utożsamiać z  $M_{m \times n}$  lub  $\mathbb{R}^{mn}$ . Inaczej mówiąc,

$$Df: \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{mn}.$$

Naturalnie byłoby określić drugą różniczkę  $D^2 f$  jako  $D^2 f = D(Df)$  (wszędzie tam, gdzie  $Df$  sama jest funkcją różniczkowalną). Zgodnie z definicją różniczki, powinno wtedy być

$$D^2 f = D(Df): \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^2 f(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)).$$

tzn.  $D^2 f(\mathbf{x}) = D(Df)(\mathbf{x})$  powinna być, dla ustalonego  $\mathbf{x}$ , przekształceniem liniowym z  $\mathbb{R}^n$  w przestrzeń, do której należą wartości różniczkowanej funkcji  $Df$ , tzn.  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

Brzmi to zawile i widać od razu, że definiowanie różniczek wyższych rzędów prowadziłoby do coraz dłuższych napisów (i coraz bardziej skomplikowanych przestrzeni liniowych). Dlatego korzysta się z naturalnego izomorfizmu

$$L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \equiv L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

między przestrzenią  $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  i przestrzenią  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  przekształceń dwuliniowych  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Jest to izomorfizm *kanoniczny*, tzn. zdefinowany bez odwoływania się do układu współrzędnych, za pomocą wzoru

$$L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \ni F \longmapsto B_F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \quad (2.32)$$

gdzie

$$B_F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{u})\mathbf{v} \quad \text{dla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

Sprawdzenie, że to rzeczywiście izomorfizm, jest łatwym ćwiczeniem.

**Definicja 2.47.** Przypuśćmy, że różniczka  $Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  funkcji  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest określona w każdym punkcie zbioru otwartego  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Jeśli funkcja

$$g = Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m \times n}$$

jest różniczkowalna w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , to przekształcenie dwuliniowe

$$D^2f(\mathbf{a}) = D(Df)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{a}) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \equiv L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

nazywamy drugą różniczką funkcji  $f$  w punkcie  $\mathbf{a}$ .

**Uwaga 2.48.** Dla  $m = 1$  różniczka  $Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$  ma jako współrzędne pochodne cząstkowe  $f_{x_i}(\mathbf{x})$ . Dlatego przekształcenie dwuliniowe  $D^2f(\mathbf{x})$  ma, w standardej bazie  $\mathbb{R}^n$ , macierz, której wyrazami są pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji  $f$ ; ponadto,

$$D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T D^2f(\mathbf{x})\mathbf{w},$$

gdzie lewą stronę interpretujemy jako wartość przekształcenia dwuliniowego dla pary wektorów  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ , prawą zaś jako wynik mnożenia trzech macierzy, o rozmiarach (odpowiednio)  $1 \times n$ ,  $n \times n$  i  $n \times 1$ .

Z twierdzenia Schwarza o równości pochodnych mieszanych wynika natychmiast, że jeśli  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu 2 włącznie, to  $Df: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  jest funkcją różniczkowalną i dla każdego  $\mathbf{a} \in \Omega$  macierz przekształcenia dwuliniowego  $D^2f(\mathbf{a})$  jest macierzą symetryczną, gdyż  $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ . Okazuje się jednak, że tak jest również wtedy, gdy  $D^2f(\mathbf{a})$  po prostu istnieje; nie trzeba zakładać ciągłości pochodnych mieszanych w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{a}$ .

**Twierdzenie 2.49 (Schwarza o symetrii drugiej różniczki).** Założmy, że różniczka  $Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  funkcji  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest określona w każdym punkcie zbioru otwartego  $\Omega$ . Jeśli  $D^2f(\mathbf{a}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  istnieje dla pewnego  $\mathbf{a} \in \Omega$ , to jest przekształceniem dwuliniowym symetrycznym, tzn.

$$D^2f(\mathbf{a})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = D^2f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

**Dowód.** Ustalmy  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ . Niech  $\max(\|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{w}\|) = M$ . Rozpatrzmy funkcję pomocniczą

$$\phi(s, t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{a} + s\mathbf{v}) + f(\mathbf{a}) - ts D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

określoną dla  $s, t$  w pewnym otoczeniu zera. Mamy  $\phi(0, t) = 0$ ; z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$\begin{aligned} \|\phi(s, t)\| &= \|\phi(s, t) - \phi(0, t)\| \leq |s| \sup_{\sigma \in [0, s]} \|\phi_s(\sigma, t)\| \\ &= |s| \sup_{\sigma \in [0, s]} \left\| \left( Df(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) - Df(\mathbf{a} + \sigma\mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{v} - tD^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \right\|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ponieważ  $D^2 f(\mathbf{a})$  istnieje, więc  $Df(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = Df(\mathbf{a}) + D^2 f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|h\|r(\mathbf{h})$ , gdzie  $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  (patrz Stwierdzenie 2.9). Podstawiając w tej równości wektory  $\mathbf{h}_1 = t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}$  i  $\mathbf{h}_2 = \sigma\mathbf{v}$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) &= Df(\mathbf{a}) + D^2 f(\mathbf{a}) \cdot (t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) + \|\mathbf{h}_1\|r(\mathbf{h}_1), \\ Df(\mathbf{a} + \sigma\mathbf{v}) &= Df(\mathbf{a}) + D^2 f(\mathbf{a}) \cdot \sigma\mathbf{v} + \|\mathbf{h}_2\|r(\mathbf{h}_2). \end{aligned}$$

Odejmując oba wzory stronami i pamiętając o izomorfizmie przestrzeni  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  oraz  $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ , sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \left( Df(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) - Df(\mathbf{a} + \sigma\mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{v} - tD^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ = (\|\mathbf{h}_1\|r(\mathbf{h}_1) - \|\mathbf{h}_2\|r(\mathbf{h}_2)) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Niech odtąd  $s = t$ . Wtedy  $|\sigma| \leq |s| = |t|$ , co daje oszacowania  $\|h_i\| \leq 2M|t|$  dla  $i = 1, 2$  oraz

$$\|r(\mathbf{h}_i)\| \leq \sup_{\|\mathbf{h}\| \leq 2Mt} \|r(\mathbf{h})\| = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.36)$$

Korzystając ze wzorów (2.35)–(2.36), przepisujemy dla  $s = t$  nierówność (2.34) w postaci

$$\phi(t, t) \leq |t| \cdot (2Mt \cdot 2 \sup_{\|\mathbf{h}\| \leq 2Mt} \|r(\mathbf{h})\|) \cdot \|v\| = t^2 o(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Innymi słowy,  $\phi(t, t)/t^2 \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow 0$ , lub równoważnie

$$D^2 f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) + f(\mathbf{a})}{t^2}. \quad (2.37)$$

Prawa strona wzoru (2.37) nie zmienia się, gdy zamienimy wektory  $\mathbf{w}, \mathbf{v}$  rolami. Dlatego lewa strona też musi być symetryczną funkcją  $\mathbf{w}$  i  $\mathbf{v}$ , tzn.  $D^2 f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = D^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .  $\square$

**Przykład 2.50.** a) Jeśli  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , gdzie  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  jest ustalonym przekształceniem liniowym, to  $Df(\mathbf{x}) = A$  jest przekształceniem stałym i dlatego  $D^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ .

b) Jeśli

$$f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie  $A$  jest macierzą  $n \times n$ , to ze wzoru na pochodną ‘iloczynu’ otrzymujemy

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \langle Ah, \mathbf{x} \rangle + \langle A\mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = \langle A^T \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle + \langle A\mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = \langle (A + A^T)\mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle,$$

co oznacza, że  $Df(\mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x}$  dla wszystkich  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .<sup>8</sup> Zatem,  $Df$  zależy od  $\mathbf{x}$  liniowo i mamy  $D^2 f(\mathbf{x}) = A + A^T$ . Jeśli  $A = A^T$ , tzn. macierz  $A$  jest symetryczna, to  $D^2 f(\mathbf{x}) = 2A$ .

<sup>8</sup>Pisząc wzór  $Df(\mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x}$ , utożsamiamy funkcjonal liniowy  $Df(\mathbf{x})$  z wektorem  $(A + A^T)\mathbf{x}$ .

### 2.5.3 Różniczki wyższych rzędów

Różniczki wyższych rzędów definiuje się indukcyjnie, wzorem

$$D^k(f)(\mathbf{a}) = D(D^{k-1}f)(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \Omega, \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Aby definicja  $D^k(f)(\mathbf{a})$  miała sens, różniczka rzędu  $(k-1)$  powinna być funkcją określona w otoczeniu punktu  $\mathbf{a}$  i różniczkowalną w  $\mathbf{a}$ . Różniczka  $k$ -tego rzędu,  $D^k(f)(\mathbf{a})$  jest przekształceniem  $k$ -liniowym z  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}^m$ , tzn.

$$D^k f(\mathbf{a}): \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}} \ni (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \mapsto D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^m.$$

Wartość  $D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ , która jest wektorem z  $\mathbb{R}^m$ , zależy liniowo od każdego z wektorów  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) z osobna. Taka interpretacja różniczki  $k$ -tego rzędu jest rzeczą naturalną: jeśli

$$D^{k-1}f: \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^{k-1}f(\mathbf{x}) \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ razy}}, \mathbb{R}^m),$$

gdzie

$$L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)$$

oznacza przestrzeń przekształceń  $(k-1)$ -liniowych z  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}^m$ , to zgodnie z definicją różniczki

$$D^k f: \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^k f(\mathbf{x}) = D(D^{k-1}f)(\mathbf{x}) \in L\left(\mathbb{R}^n, L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)\right).$$

Jednak przestrzenie

$$V_1 := L\left(\mathbb{R}^n, L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)\right) \quad \text{oraz} \quad V_2 := L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)$$

można utożsamić; ich naturalnym izomorfizmem jest przekształcenie  $V_1 \ni F \mapsto B_F \in V_2$ , gdzie  $F$  i  $B_F$  powiązane są zależnością

$$F(\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = B_F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k).$$

**Uwaga 2.51.** Jeśli  $D^k f(\mathbf{a})$  istnieje, to jest przekształceniem wieloliniowym symetrycznym, tzn.

$$D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

dla każdej permutacji  $\sigma \in S_k$  zbioru  $k$ -elementowego. Można to udowodnić przez indukcję względem  $k$ , posługując się twierdzeniem Schwarza o symetrii drugiej różniczki.

**Uwaga 2.52.** Będziemy odtąd używać oznaczenia

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{h}^k = Df(\mathbf{a})(\underbrace{\mathbf{h}, \dots, \mathbf{h}}_{k \text{ razy}}) \tag{2.38}$$

dla oznaczenia wartości  $k$ -tej różniczki (która jest przekształceniem  $k$ -liniowym) na układzie  $k$  identycznych wektorów.

Aby wszystkie rachunki w następnym podrozdziale Czytelnik mógł prześledzić ze zrozumieniem, wprowadzimy jeszcze jedną definicję.

**Definicja 2.53 (norma przekształcenia wieloliniowego).** Normą przekształcenia  $k$ -liniowego

$$B \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)$$

nazywamy najmniejszą stałą  $C = \|B\| \geq 0$  taką, że

$$\|B(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)\| \leq \|B\| \cdot \|\mathbf{v}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{v}_k\| \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n.$$

Zapisywanie różniczek wyższych rzędów we współrzędnych jest zajęciem niewdzięcznym i nie będziemy tego robić. Wygodną metodę oznaczania pochodnych cząstkowych wyższych rzędów podamy w następnym podrozdziale.

#### 2.5.4 Wzór Taylora. Funkcje klasy $C^k$ i notacja wielowskaźnikowa.

Okazuje się, że przy odpowiedniej notacji, wprowadzonej wyżej, wzór Taylora w najprostszej wersji, z resztą w postaci Peano, wygląda zupełnie tak samo, jak dla funkcji jednej zmiennej.

**Twierdzenie 2.54 (wzór Taylora z resztą w postaci Peano).** Założmy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest  $(k-1)$ -krotnie różniczkowalna na  $\Omega$ , kula  $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$  dla pewnego  $r > 0$  i  $D^k f(\mathbf{a})$  istnieje. Wówczas, dla  $\|\mathbf{h}\| < r$ ,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2!}D^2f(\mathbf{a})\mathbf{h}^2 + \dots + \frac{1}{k!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^k + R(\mathbf{h}), \quad (2.39)$$

gdzie  $R(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^k \rightarrow \mathbf{0}$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

**Dowód.** Oszacujemy resztę

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \left( f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2!}D^2f(\mathbf{a})\mathbf{h}^2 + \dots + \frac{1}{k!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^k \right),$$

stosując  $k-1$  razy twierdzenie o wartości średniej. Zauważmy, że  $R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , a ponadto

$$\begin{aligned} DR(\mathbf{h}) &= Df(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - Df(\mathbf{a}) - \frac{1}{1!}D^2f(\mathbf{a})\mathbf{h} - \dots - \frac{1}{(k-1)!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^{k-1}, \\ D^2R(\mathbf{h}) &= D^2f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - D^2f(\mathbf{a}) - \dots - \frac{1}{(k-2)!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^{k-2}, \\ &\vdots \\ D^{k-1}R(\mathbf{h}) &= D^{k-1}f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - D^{k-1}f(\mathbf{a}) - D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}. \end{aligned}$$

Mamy więc  $DR(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \dots, D^{k-1}R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Korzystając z Twierdzenia 2.40, otrzymujemy nierówności

$$\begin{aligned}\|R(\mathbf{h})\| &= \|R(\mathbf{h}) - R(\mathbf{0})\| \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \sup_{\theta \in [0,1]} \|DR(\theta \mathbf{h})\| \\ &\leq \|\mathbf{h}\|^2 \sup_{\theta \in [0,1]} \|D^2R(\theta \mathbf{h})\| \\ &\vdots \\ &\leq \|\mathbf{h}\|^{k-1} \sup_{\theta \in [0,1]} \|D^{k-1}R(\theta \mathbf{h})\|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Normę  $\|D^{k-1}R(\theta \mathbf{h})\|$  trzeba oszacować inaczej, gdyż  $D^k f$  istnieje tylko w punkcie  $\mathbf{a}$ . Można jednak skorzystać po prostu z definicji różniczki; wobec wzoru na  $D^{k-1}R$  mamy

$$\begin{aligned}\sup_{\theta \in [0,1]} \|D^{k-1}R(\theta \mathbf{h})\| &= \sup_{\theta \in [0,1]} \left( |\theta| \cdot \|\mathbf{h}\| \frac{\|D^{k-1}f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - D^{k-1}f(\mathbf{a}) - D^k f(\mathbf{a})\theta \mathbf{h}\|}{\|\theta \mathbf{h}\|} \right) \\ &\leq \|\mathbf{h}\| \sup_{\theta \in [0,1]} \frac{\|D^{k-1}f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - D^{k-1}f(\mathbf{a}) - D^k f(\mathbf{a})\theta \mathbf{h}\|}{\|\theta \mathbf{h}\|} = \|\mathbf{h}\| \cdot o(1) \quad \text{dla } \mathbf{h} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Łącząc tę nierówność z (2.40), otrzymujemy  $\|R(\mathbf{h})\| = \|\mathbf{h}\|^k o(1)$  dla  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ .  $\square$

W praktyce wygodnie jest znać także inne postacie wzoru Taylora. Jedną z nich, używającą tzw. notacji wielowskaźnikowej, podajemy niżej.

### Notacja wielowskaźnikowa. Funkcje klasy $C^k$ .

**Definicja 2.55.** Wielowskaźnik  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  to wektor o współrzędnych  $\alpha_i$  całkowitych nieujemnych, lub równoważnie element zbioru  $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ . Dla wielowskaźników  $\alpha, \beta$  i każdego punktu  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  piszemy:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad (2.42)$$

$$\beta \leq \alpha \iff \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{dla wszystkich } i = 1, \dots, n, \quad (2.43)$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!} (\alpha - \beta)! \quad \text{dla } \beta \leq \alpha, \quad (2.44)$$

gdzie  $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ .

Z pomocą wielowskaźników wygodnie jest oznaczać pochodne cząstkowe wyższych rzędów w takich sytuacjach, gdy kolejność wykonywania poszczególnych różniczkowań nie ma znaczenia.

**Definicja 2.56.** Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu  $k$  ciągłe na zbiorze  $\Omega$ .

**Uwaga 2.57.** Podobnie jak w przypadku funkcji klasy  $C^1$ , powyższa definicja jest równoważna temu, że  $f$  jest ciągła na  $\Omega$  i wszystkie przekształcenia  $j$ -liniowe

$$D^j f: \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^j f(\mathbf{x}) \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{j \text{ razy}}, \mathbb{R}^m) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

są dobrze określone i ciągłe na zbiorze  $\Omega$ . Można to udowodnić, posługując się Twierdzeniem 2.16. Jest to dość łatwe: rozumowanie wymaga tylko znajomości pojęć i nie są potrzebne żadne rachunki.

**Umowa.** Dla funkcji  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  symbol

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} (D_1)^{\alpha_1} (D_2)^{\alpha_2} \dots (D_n)^{\alpha_n} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.45)$$

oznacza pochodną cząstkową tej funkcji, rzędu  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , przy czym różniczkowanie względem zmiennej  $x_i$  wykonujemy  $\alpha_i$ -krotnie ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Z twierdzenia Schwarza o równości pochodnych mieszanych wynika, że dla funkcji klasy  $C^k$  kolejność wykonywania różniczkowań nie odgrywa roli; można więc w ten sposób oznaczać wszystkie pochodne cząstkowe takiej funkcji, bez obawy, że nie wiadomo, o jaką pochodną chodzi. Przyjmujemy także

$$D^{(0,0,\dots,0)} f \equiv f.$$

**Twierdzenie 2.58 (wzór Taylora z resztą całkową).** Założmy, że  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym i  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Jeśli kula  $B(\mathbf{a}, \delta) \subset \Omega$  dla pewnego  $\delta > 0$ , to wówczas

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{a}) \mathbf{h}^\alpha + R_k(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \quad (2.46)$$

dla  $\|\mathbf{h}\| < \delta$ , gdzie reszta

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = k \int_0^1 (1-t)^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - D^\alpha f(\mathbf{a})) \mathbf{h}^\alpha dt. \quad (2.47)$$

**Uwaga.** We wzorze (2.46) sumowanie po prawej stronie odbywa się względem *wszystkich* wielowskaźników długości  $|\alpha| \leq k$ .

**Dowód.** Skorzystamy ze wzoru Taylora z resztą całkową dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej (patrz Skrypt z Analizy Matematycznej I). Ustalmy  $\mathbf{a} \in \Omega$  i  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ ,  $\|\mathbf{h}\| < \delta$ . Niech  $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$  dla  $t \in [0, 1]$ . Funkcja  $g$  jest klasy  $C^k$  na pewnym odcinku otwartym  $I \supset [0, 1]$ . Dlatego

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} g^{(k)}(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} (g^{(k)}(t) - g^{(k)}(0)) dt. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aby zakończyć pracę, wyrazimy pochodne funkcji  $g$  przez pochodne cząstkowe funkcji  $f$ . Posługując się wzorem na pochodną złożenia, dowodzimy przez indukcję, że

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i, \quad g''(t) = \sum_{i_1, i_2=1}^n D_{i_2} D_{i_1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2}$$

itd.; ogólnie,

$$g^{(s)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s=1}^n D_{i_s} \dots D_{i_2} D_{i_1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_s}, \quad s = 1, \dots, k. \quad (2.49)$$

Ostatnią sumę zapiszemy, używając notacji wielowskaźnikowej. Ustalmy wielowskaźnik  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  taki, że  $|\alpha| = s \in [1, k]$ . Liczba takich ciągów  $(i_1, i_2, \dots, i_s)$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , w których  $1, 2, \dots, n$  występują (odpowiednio)  $\alpha_1$ -krotnie,  $\alpha_2$ -krotnie,  $\dots, \alpha_n$  krotnie, wynosi, zgodnie ze znanym wzorem kombinatorycznym,

$$\binom{s}{\alpha_1} \cdot \binom{s - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \binom{s - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!} = \frac{s!}{\alpha!}.$$

Dla każdego z tych ciągów mamy

$$D_{i_s} \dots D_{i_2} D_{i_1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_s} = D^\alpha f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^\alpha,$$

a więc wzór (2.49) można przepisać w postaci

$$\frac{g^{(s)}(t)}{s!} = \sum_{|\alpha|=s} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^\alpha, \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (2.50)$$

Podstawiając (2.50) do wzoru (2.48), otrzymujemy tezę twierdzenia.  $\square$

W szczególnym przypadku  $k = 2$ , dla funkcji  $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalnej dwukrotnie w sposób ciągły, można podobnie (stosując wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla funkcji  $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$  jednej zmiennej  $t$ ) uzyskać następujący fakt.

**Wniosek 2.59.** Jeśli  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  i odcinek  $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subset \Omega$ , gdzie  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ , to istnieje wówczas punkt  $\theta \in (0, 1)$  taki, że

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{a}) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) h_i h_j. \quad (2.51)$$

Dowód. Ćwiczenie dla Czytelnika.

**Zadanie 2.60.** Wykazać, że dla każdego  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  i dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  jest

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha.$$

**Wskazówka.** Oznaczyć lewą stronę  $f(\mathbf{x})$  i zastosować wzór Taylora.

### 2.5.5 Ekstrema lokalne.

Wiemy już, że warunkiem koniecznym, by funkcja różniczkowalna  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  miała ekstremum w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ , jest znikanie jej gradientu w tym punkcie. Zajmiemy się teraz sformułowaniem warunków dostatecznych istnienia ekstremum lokalnego funkcji klasy  $C^2$ . Wyrazimy je za pomocą własności drugiej różniczki.

**Definicja 2.61.** Niech  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Macierz

$$H_f(\mathbf{a}) = D^2 f(\mathbf{a}) = (f_{x_i x_j}(\mathbf{a}))_{i,j=1,2,\dots,n} \in M_{n \times n}$$

nazywamy *hesjanem* funkcji  $f$  w punkcie  $\mathbf{a} \in \Omega$ .

Z twierdzenia Schwarza o równości pochodnych mieszanych wynika natychmiast, że  $H_f(\mathbf{a})$  jest macierzą symetryczną. Jak wiadomo z wykładów Algebry Liniowej, wszystkie wartości własne macierzy symetrycznej  $A$  są rzeczywiste, a w  $\mathbb{R}^n$  istnieje baza ortonormalna, złożona z wektorów własnych  $A$ .

Przypomnijmy, że macierz symetryczna  $A \in M_{n \times n}$  nazywa się dodatnia (ujemna) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$  dla  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  (odpowiednio  $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$  dla  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ). Macierze nieujemne i niedodatnie definiuje się analogicznie, za pomocą nierówności nieostrych. Jeśli  $A$  jest dodatnia (ujemna, nieujemna, niedodatnia), to piszemy  $A > 0$  (odpowiednio:  $A < 0$ ,  $A \geq 0$ ,  $A \leq 0$ ).

**Stwierdzenie 2.62.** Założmy, że  $\mathbf{a} \in \Omega$  jest punktem krytycznym funkcji  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Jeśli  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  minimum (odpowiednio: maksimum) lokalne, to  $H_f(\mathbf{a}) \geq 0$  (odpowiednio:  $H_f(\mathbf{a}) \leq 0$ ).

Dowód. Dla ustalenia uwagi założmy, że  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  minimum lokalne. W punkcie krytycznym  $f_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dlatego ze wzoru Taylora (2.51) (patrz Wniosek 2.59) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) h_i h_j = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq 0$$

dla wszystkich  $\|\mathbf{h}\|$  dostatecznie małych. Ustalmy  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  i podstawmy w tej nierówności  $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$ , gdzie  $t \in \mathbb{R}$  i  $|t| \ll 1$ . Dzieląc obie strony przez  $\frac{1}{2}t^2 > 0$ , otrzymujemy

$$\langle H_f(\mathbf{a} + \theta t \mathbf{v}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0.$$

Przechodząc do granicy  $t \rightarrow 0$  i korzystając z ciągłości drugich pochodnych cząstkowych  $f$  otrzymujemy  $\langle H_f(\mathbf{a}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ .

Jeśli  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  maksimum lokalne, to rozpatrujemy funkcję  $-f$ , która ma w tym punkcie minimum lokalne.  $\square$

Przydatna w praktyce jest oczywiście implikacja odwrotna.

**Twierdzenie 2.63 (warunki dostateczne ekstremów lokalnych).** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym. Przypuśćmy, że  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  ma w  $\mathbf{a} \in \Omega$  punkt krytyczny, tzn.  $\text{grad } f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . Wówczas:

(i) Jeśli  $H_f(\mathbf{a}) \geq 0$  w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{a}$ , to  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  minimum lokalne.

(ii) Jeśli  $H_f(\mathbf{a}) > 0$ , to  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  minimum lokalne właściwe.

(iii) Jeśli  $H_f(\mathbf{a}) \leq 0$  w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{a}$ , to  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  maksimum lokalne.

(iv) Jeśli  $H_f(\mathbf{a}) < 0$ , to  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  maksimum lokalne właściwe.

Dowód. Ponieważ  $f_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , więc ze wzoru Taylora (2.51) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}),$$

gdzie  $\theta = \theta(\mathbf{h}) \in (0, 1)$ . Z tej równości natychmiast wynikają podpunkty (i) oraz (iii) Twierdzenia 2.63.

Załóżmy teraz, że  $A := H_f(\mathbf{a}) > 0$ . Funkcja  $\mathbb{S}^{n-1} \ni \mathbf{v} \mapsto \phi(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  jest wtedy dodatnia i ciągła na sferze jednostkowej  $\mathbb{S}^{n-1}$ , która jest zbiorem zwartym. Wobec twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów, istnieją stałe  $\alpha, \beta > 0$  takie, że

$$\beta \geq \phi(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \alpha > 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Podstawiając w tej nierówności  $\mathbf{v} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ , gdzie  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  jest dowolnym wektorem różnym od 0, otrzymujemy

$$\beta \|\mathbf{w}\|^2 \geq \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \geq \alpha \|\mathbf{w}\|^2 > 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Dlatego, z nierówności Schwarza i definicji normy macierzy,

$$\begin{aligned} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle &= \langle A\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle + \langle (H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - A)\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \\ &\geq \alpha \|\mathbf{h}\|^2 - \| (H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - A) \mathbf{h} \| \cdot \|\mathbf{h}\| \\ &\geq \alpha \|\mathbf{h}\|^2 - \| (H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - A) \| \cdot \|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Ponieważ  $f \in C^2$ , więc wszystkie współrzędne macierzy  $H_f(\mathbf{x})$  zależą od  $\mathbf{x}$  w sposób ciągły. Istnieje zatem liczba  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$  i  $\theta \in (0, 1)$ , to

$$\| (H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - H_f(\mathbf{a})) \| = \| (H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) - A) \| < \frac{\alpha}{2}.$$

Wtedy jednak, wobec (2.52),

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle > \frac{\alpha}{4} \|\mathbf{h}\|^2 > 0.$$

To dowodzi punktu (ii). Dowód (iv) jest taki sam.  $\square$

**Uwaga 2.64.** W dowodach podpunktów (ii) oraz (iv) w Twierdzeniu 2.63 nie trzeba zakładać, że  $f \in C^2$ . Wystarczy po prostu, żeby  $f$  była różniczkowalna na zbiorze  $\Omega$  i jej druga różniczka  $D^2f(\mathbf{a})$  istniała w punkcie krytycznym  $\mathbf{a}$  i była w nim dodatnia (wtedy  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  minimum lokalne właściwe) bądź ujemna (wtedy  $f$  ma w  $\mathbf{a}$  maksimum lokalne właściwe). W dowodzie wykorzystuje się wzór Taylora z resztą Peano. Zainteresowany Czytelnik zdoła sam uzupełnić szczegóły rozumowania.

Zanim przejdziemy do przykładów, przytoczymy jeszcze twierdzenie, które pozwala wnioskować, kiedy  $f$  z pewnością nie ma ekstremum lokalnego w punkcie krytycznym.

**Twierdzenie 2.65.** Założmy, że  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  ma w  $\mathbf{a} \in \Omega$  punkt krytyczny i  $D^2f(\mathbf{a})$  istnieje. Jeśli  $H_f(\mathbf{a}) = D^2f(\mathbf{a})$  ma wartość własną  $\lambda_1 > 0$  i wartość własną  $\lambda_2 < 0$ , to  $f$  nie ma ekstremum lokalnego w punkcie  $\mathbf{a}$ .

Dowód. Niech  $\mathbf{v}_i$  będzie unormowanym wektorem własnym macierzy  $H_f(\mathbf{a})$ , odpowiadającym wartości własnej  $\lambda_i$ , gdzie  $i = 1, 2$ . Dla dostatecznie małej liczby  $\delta > 0$  rozpatrzmy dwie funkcje pomocnicze,

$$g_i(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}_i), \quad |t| < \delta, \quad i = 1, 2.$$

Mamy  $g'_i(t) = Df(\mathbf{a} + t\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i$ , tzn.  $g'_i(0) = 0$ , oraz

$$g''_i(t) = \langle D^2f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Zatem  $g''_1(0) = \langle D^2f(\mathbf{a})\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \lambda_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 = \lambda_1 > 0$ . Podobnie,  $g''_2(0) = \lambda_2 < 0$ . Dlatego  $g_1$  ma minimum lokalne właściwe w zerze, a  $g_2$  ma maksimum lokalne właściwe w zerze. Wynika stąd, że  $f$  nie ma ekstremum lokalnego w punkcie  $\mathbf{a}$  (gdyby miała, to każda z funkcji  $g_{\mathbf{v}} = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$  miałaby w zerze ekstremum lokalne tego samego typu, co  $f$ ).  $\square$

To, czy macierz  $H_f(\mathbf{a}) = D^2f(\mathbf{a})$  jest dodatnia (ujemna), można rozpoznawać za pomocą kryterium Sylvestera.

**Twierdzenie 2.66 (kryterium Sylvester'a).** *Niech  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  i  $a_{ij} = a_{ji}$  dla wszystkich  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Oznaczmy*

$$d_\ell = \det \left( a_{ij} \right)_{i,j=1,\dots,\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

- (i) *Jeśli  $d_\ell > 0$  dla każdego  $\ell = 1, 2, \dots, n$ , to  $A > 0$ .*
- (ii) *Jeśli  $(-1)^\ell d_\ell > 0$  dla każdego  $\ell = 1, 2, \dots, n$ , to  $A < 0$ .*
- (iii) *Jeśli  $d_\ell \neq 0$  dla każdego  $\ell = 1, \dots, n$ , ale nie zachodzi ani założenie (i), ani założenie (ii), to macierz  $A$  ma wartości własne różnych znaków.*

Dowód Czytelnik miał okazję poznać na wykładach z Algebry Liniowej. Zainteresowanym polecam książkę A. Mostowskiego i M. Starka *Elementy algebry wyższej*.

**Uwaga 2.67.** Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^2$ , ma punkt krytyczny  $\mathbf{a} \in \Omega$  i wszystkie wartości własne macierzy  $D^2f(\mathbf{a})$  są różne od zera, to mówimy, że  $\mathbf{a}$  jest *niezdegenerowanym punktem krytycznym*. Z Twierdzeń 2.65 i 2.63 wynika, że o tym, czy funkcja  $f$  ma w niezdegenerowanym punkcie krytycznym ekstremum lokalne, można jednoznacznie przesądzić, badając znaki wartości własnych macierzy  $D^2f(\mathbf{a})$ .

**Uwaga 2.68.** Podkreślimy wyraźnie: założenie ostrych nierówności w punktach (ii) i (iv) Twierdzenia 2.63 jest istotne. Każda z funkcji

$$f_1(x, y) = x^4 + y^4, \quad f_2(x, y) = -x^4 - y^4, \quad f_3(x, y) = x^4 - y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ma (jedyny) punkt krytyczny w  $(0, 0)$ . Jest oczywiste, że dla funkcji  $f_1$  ten punkt jest minimum lokalnym właściwym, dla  $f_2$  – maksimum lokalnym właściwym, natomiast  $f_3$  w ogóle nie ma tym punkcie ekstremum lokalnego. Mamy jednak

$$D^2f_i(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Biorąc

$$f_4(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_5(x, y) = x^2, \quad f_6(x, y) = x^2 - y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

otrzymamy

$$\operatorname{grad} f_i(0,0) = (0,0) \quad \text{oraz} \quad D^2 f_i(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 4, 5, 6.$$

Łatwo zauważyc, że w punkcie  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  funkcja  $f_4$  ma minimum lokalne właściwe,  $f_5$  – minimum lokalne (które nie jest właściwe), natomiast  $f_6$  w ogóle nie ma ekstremum.

**Przykład 2.69.** Niech  $h(x,y) = ay(e^x - 1) + x \sin x + 1 - \cos y$  dla  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wykażemy, że  $h$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $(0,0)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

Pochodne cząstkowe funkcji  $h$  są równe

$$h_x(x,y) = aye^x + \sin x + x \cos x, \quad h_y(x,y) = a(e^x - 1) + \sin y,$$

więc (niezależnie od wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ ) jest  $h_x(0,0) = h_y(0,0) = 0$  i  $h$  ma w zerze punkt krytyczny. Dalej, obliczamy

$$\begin{aligned} h_{xx}(x,y) &= aye^x + 2 \cos x - x \sin x, \\ h_{xy}(x,y) &= ae^x, \quad h_{yy}(x,y) = \cos y. \end{aligned}$$

Podstawiając  $x = y = 0$  otrzymujemy

$$D^2 h(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D^2 h(0,0) = 2 - a^2.$$

Jeśli  $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , to  $\det D^2 h(0,0) = 2 - a^2 > 0$  i z kryterium Sylvester wynika, że macierz  $D^2 h(0,0)$  jest dodatnio określona, a więc  $h$  ma minimum lokalne właściwe w punkcie  $(0,0)$  (patrz Twierdzenie 2.63 (ii)).

Jeśli  $a \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , to  $\det D^2 h(0,0) = 2 - a^2 < 0$ . Macierz  $D^2 h(0,0)$  ma więc wartości własne różnych znaków i wobec Twierdzenia 2.65  $h$  nie ma w zerze ekstremum lokalnego.

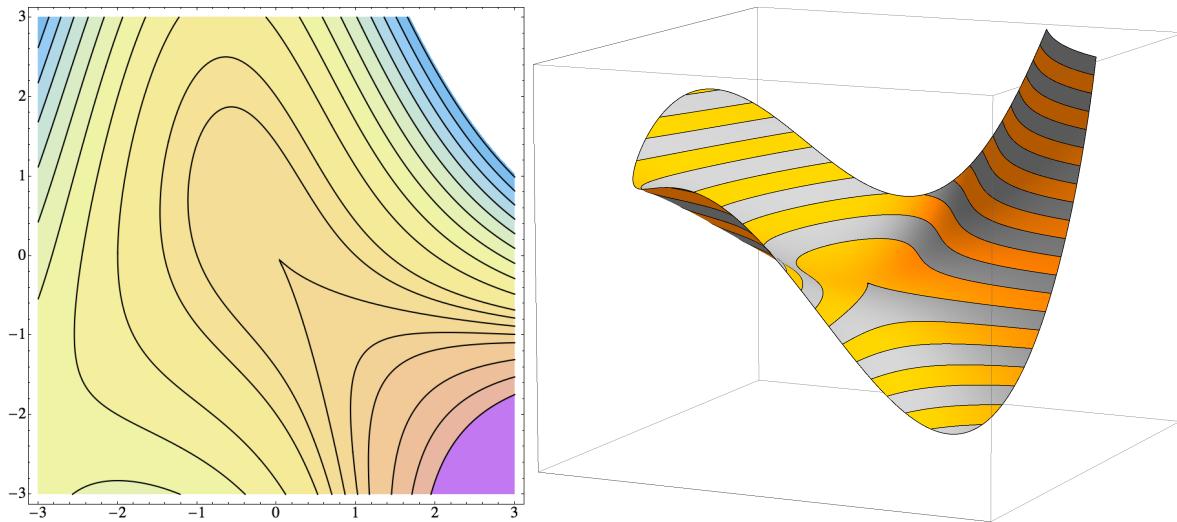
Przypadek  $a = \pm\sqrt{2}$  trzeba rozpatrzyć osobno. Macierz  $D^2 h(0,0)$  ma wtedy wartości własne 3 i 0, więc nie jest dodatnia i nie wolno stosować Twierdzenia 2.63 (ii); jak wynika z wcześniejszych przytoczonych przykładów, w takiej sytuacji funkcja może zarówno mieć ekstremum lokalne, jak i go nie mieć.

Dla ustalenia uwagi, niech  $a = \sqrt{2}$ . Użyjemy wzoru Taylora (najprościej jest w tym przypadku wykorzystać znane rozwinięcia funkcji elementarnych) i napiszemy

$$\begin{aligned} h(x,y) &= y\sqrt{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!} + o(y^4) \\ &= x^2 + xy\sqrt{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{yx^2}{\sqrt{2}} + o(x^3) + o(y^3) \\ &= \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{yx^2}{\sqrt{2}} + o(x^3) + o(y^3). \end{aligned}$$

Na prostej  $y = -x\sqrt{2}$  mamy więc  $h(x, -x\sqrt{2}) = -x^3 + o(x^3)$ ,  $x \rightarrow 0$ . Zatem,  $h$  nie ma ekstremum w zerze: wyrazy trzeciego rzędu we wzorze Taylora powodują, że  $h(x, -x\sqrt{2})$  zmienia znak w każdym otoczeniu  $0 \in \mathbb{R}$ , a przecież  $h(0,0) = 0$ . Przypadek  $a = -\sqrt{2}$  sprawdza się tak samo; Czytelnik łatwo uzupełni szczególne obliczenia.

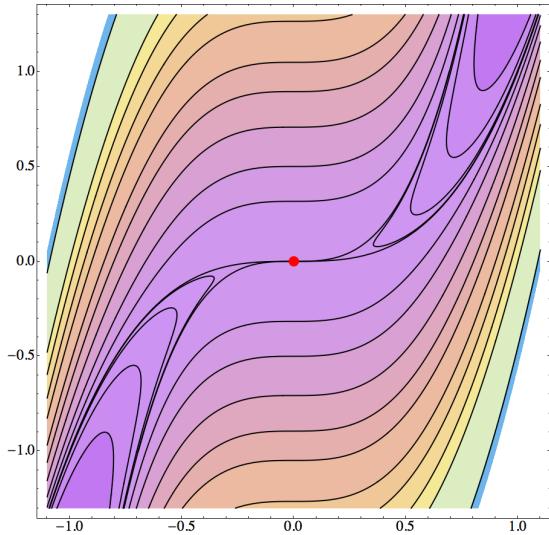
Czytelnik może sprawdzić, że kierunek prostej  $y = -x\sqrt{2}$  jest wyznaczony przez wektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$  taki, że  $D^2 h(0,0)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ . W innych kierunkach hesjan ma dodatnie wartości. Sprawdzaliśmy więc w istocie, jak zachowuje się funkcja  $h$  wokół zera “w podejrzany kierunku” – i to wystarczyło, by stwierdzić brak ekstremum lokalnego.  $\square$



Ilustracja do Przykładu 2.69. Parametr  $a = \sqrt{2}$ . Mamy wówczas  $h(x, y) = P(x, y) + o(x^3) + o(y^3)$  dla  $x, y \rightarrow 0$ , gdzie

$$P(x, y) = \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{yx^2}{\sqrt{2}}$$

jest wielomianem Taylora rzędu 3 funkcji  $h$  wokół zera. Po lewej: poziomice funkcji  $P$ , narysowane na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  (w dziedzinie funkcji). Zbiór punktów w  $\mathbb{R}^2$ , opisany równaniem  $P(x, y) = 0$ , to krzywa z wyraźnym dziobkiem. Po prawej: fragment wykresu funkcji  $P$ , tzn. powierzchnia w  $\mathbb{R}^3$  o równaniu  $z = P(x, y)$ .



Ilustracja do Przykładu 2.70. Krzywe  $g(x, y) = \text{const}$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . W punkcie krytycznym  $(0, 0)$  spotykają się dwa szerokie grzbiety i dwie wąskie, wygięte doliny.

W Przykładzie 2.69 wystarczyło użyć twierdzeń 2.63 i 2.65 (dających automatyczne kryteria badania funkcji wokół punktu krytycznego), a w wątpliwym przypadku zbadać zachowanie funkcji na prostych, przechodzących przez punkt krytyczny. Podkreślimy jednak, że z zachowania funkcji na poszczególnych takich prostych *nie wolno* wnioskować, że ma ona ekstremum lokalne!

**Przykład 2.70.** Niech

$$g(x, y) = (y - x^3)(y - 3x^3)$$

dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wtedy

$$g_x(x, y) = 18x^5 - 12x^2y,$$

$$g_y(x, y) = -4x^3 + 2y,$$

$$g_{xx}(x, y) = 90x^4 - 24xy,$$

$$g_{xy}(x, y) = -12x^2,$$

$$g_{yy}(x, y) = 2.$$

Zatem funkcja  $g$  ma w zerze (jedyny) punkt krytyczny;

$$D^2g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Na każdej prostej  $y = kx$  jest  $g(kx, x) = k^2x^2 + o(x^3)$  dla  $x \rightarrow 0$ , a więc obcięcie funkcji  $g$  do takiej prostej ma w zerze *minimum* lokalne (właściwe). Na prostej  $x = 0$  jest  $g(x, y) = g(0, y) = y^2$  (tzn. znów mamy funkcję jednej zmiennej, która ma minimum w zerze). Jednak na krzywej  $y = 2x^3$  jest  $g(x, y) = g(x, 2x^3) = -x^6$ , a więc w dowolnie małym otoczeniu zera funkcja  $g$  przyjmuje nie tylko wartości dodatnie, ale także ujemne.

**Zadanie 2.71.** Sprawdzić, że funkcja  $f(x, y) = e^{-x}(xe^{-x} + \cos y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  ma nieskończenie wiele punktów krytycznych, a w każdym z nich – maksimum lokalne właściwe. Za pomocą dowolnie wybranego pakietu obliczeń symbolicznych narysować jej wykres i jej poziomice na płaszczyźnie.

## 2.6 Funkcje gładkie

**Definicja 2.72.** Jeśli  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym, to przyjmujemy

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Funkcje  $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$  nazywamy funkcjami klasy  $C^\infty$  lub *funkcjami gładkimi*. Są to funkcje, które mają ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów (a zatem, mają ciągłe różniczki wszystkich rzędów).

Dla krótkości, pisze się  $C^\infty(\Omega)$  zamiast  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ .

**Definicja 2.73.** Nośnikiem  $\text{supp } f$  funkcji  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nazywamy domknięcie zbioru tych punktów, w których  $f$  ma wartości różne od zera:

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

**Twierdzenie 2.74.** Istnieją funkcje klasy  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , których nośnik jest niepustym zbiorem zwartym. Ścisłe mówiąc, dla każdego punktu  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  i każdych liczb  $0 < r < R$  istnieje funkcja  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  taka, że  $f \equiv 1$  na kuli  $B(\mathbf{a}, r)$  i  $f \equiv 0$  na  $\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{a}, R)$ .

**SZKIC DOWODU.** *Krok 1.* Niech  $n = 1$ . Nietrudno wykazać, że istnieje funkcja  $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest klasy  $C^\infty$  i znika poza przedziałem  $[-1, 1]$ , ale  $\varphi_1(0) = 1$ . Taką funkcją jest np.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \exp(-\operatorname{tg}^2(\pi x/2)), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Sprawdzenie, że  $\varphi_1$  istotnie spełnia podane warunki, pozostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika.

*Krok 2.* Funkcja

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_1(t) dt$$

jest dobrze określona (całkujemy tylko po przedziale skończonym), nieujemna i gładka. Mamy  $\varphi_2 \equiv 0$  na  $(-\infty, -1]$  i  $\varphi_2(x) \equiv c := \int_{-1}^1 \varphi_1$  dla  $x \geq 1$ . Na przedziale  $[-1, 1]$  funkcja  $\varphi_2$  jest rosnąca.

Teraz wykorzystamy przesuwanie, skalowanie i mnożenie funkcji gładkich.

*Krok 3.* Ustalmy  $R > r > 0$ . Dobierzmy  $a > 0$  tak, żeby  $\frac{a+2}{a} = \frac{R}{r}$ . Funkcja

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{c^2} \varphi_2(1 + a + x) \varphi_2(1 + a - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

jest gładka, znika poza przedziałem  $[-a - 2, a + 2]$  i jest równa 1 na przedziale  $[-a, a]$  (patrz załączony rysunek). Funkcja

$$\varphi_4(x) = \varphi_3\left(\frac{(a+2)x}{R}\right)$$

też jest gładka. Wobec doboru  $a$ ,  $\varphi_4 \equiv 1$  na  $[-r, r]$  i  $\varphi_4 \equiv 0$  poza przedziałem  $[-R, R]$ .

*Krok 4.* Funkcja  $f_1(\mathbf{x}) = \varphi_4(\|\mathbf{x}\|)$  spełnia warunki twierdzenia dla  $\mathbf{a} = 0$ . (Zauważmy, że dla  $\|\mathbf{x}\| < r$  funkcja  $f$  ma stałą wartość 1, więc jej pochodne cząstkowe znikają w punktach kuli otwartej  $B(0, r)$ . Norma  $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$  jest funkcją gładką na zbiorze  $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| > r/2\}$ , i dlatego  $f$  jest gładka na całej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .) Przesuwając  $f_1$ , tzn. biorąc  $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ , kończymy dowód w ogólnym przypadku.  $\square$

**Uwaga 2.75.** Zbiór wszystkich funkcji gładkich o zwartym nośniku w  $\mathbb{R}^n$  oznacza się symbolem  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Samodzielne rozwiązywanie poniższych zadań pozwoli Czytelnikowi lepiej oswoić się z pojęciem funkcji gładkiej.

**Zadanie 2.76.** Niech  $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Załóżmy, że zbiór  $K$  jest zwarty, a zbiór  $\Omega$  jest otwarty. Wykazać, że istnieje funkcja  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  taka, że  $f \equiv 1$  na  $K$  i  $\text{supp } f \subset \Omega$ .

**Zadanie 2.77.** Niech  $F$  będzie dowolnym zbiorem domkniętym w  $\mathbb{R}^n$ . Istnieje wówczas funkcja  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  taka, że  $f \geq 0$  i  $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$ .

## Rozdział 3

# Odwzorowania klasy $C^1$ i rozmaitości zanurzone

### 3.1 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

W tym podrozdziale  $(X, \varrho)$  oznacza przestrzeń metryczną.

**Definicja 3.1 (warunek Cauchy'ego).** Mówimy, że ciąg  $(x_n) \subset X$  spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $n, m > n_0$  jest  $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Łatwo wykazać, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ograniczony.

**Definicja 3.2 (zupełność).** Przestrzeń metryczna  $(X, \varrho)$  nazywa się zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg  $(x_n) \subset X$  spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny w  $X$ .

**Przykład 3.3.** 1. Przestrzeń  $\mathbb{R}$  z metryką  $\varrho(x, y) = |x - y|$  jest zupełna. Podobnie,  $\mathbb{R}^n$  z metryką zadaną przez (jakąkolwiek) normę jest przestrzenią zupełną.

2.  $Y = [0, 1]$  z metryką  $\varrho(x, y) = |x - y|$  jest przestrzenią zupełną. Ogólnie, każdy domknięty podzbiór  $Y$  przestrzeni metrycznej zupełnej  $(X, \varrho)$ , z odziedziczoną metryką  $\varrho$ , jest przestrzenią metryczną zupełną. Natomiast podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej, który nie jest domknięty, nie jest zupełny (są w  $Y$  ciągi zbieżne, których granice nie należą do  $Y$ ).

3. Przestrzeń funkcji ciągłych  $C([0, 1], \mathbb{R})$  z metryką

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

jest zupełna. Zbieżność w metryce  $\varrho$  to zbieżność jednostajna; jeśli ciąg funkcji ciągłych spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, to jest jednostajnie zbieżny, a jego granica też jest funkcją ciągłą.<sup>1</sup>

4. Przestrzeń  $C_b^1(\mathbb{R})$  tych funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^1$ , które są ograniczone i mają ograniczoną pochodną, wyposażona w metrykę

$$\varrho_1(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x) - g'(x)|,$$

---

<sup>1</sup>Patrz skrypt z Analizy Matematycznej I, rozdział 7.

jest zupełna. Zbieżność ciągu funkcji  $(f_m)$  w metryce  $\varrho_1$  to zbieżność jednostajna wraz z pochodnymi. Dowód zupełności  $C_b^1(\mathbb{R})$  (wskazówka: skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

5. Niech  $r > 0$  i  $B = B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^n$ . Przestrzeń  $C(\overline{B}, \mathbb{R}^m)$  wszystkich funkcji ciągłych  $f: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^m$  z metryką

$$\varrho(f, g) = \sup_{\mathbf{x} \in \overline{B}} \|f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\|$$

jest zupełna. Formalny dowód tego faktu wymaga określenia zbieżności jednostajnej funkcji wielu zmiennych i powtórzenia dowodów twierdzeń, które poznaliśmy na I roku studiów. Jednak rozumowania są identyczne: zupełność prostej zastępuje się zupełnością  $\mathbb{R}^n$ , a nierównością trójkąta dla modułu – nierównością trójkąta dla normy. Dlatego ten przykład nie różni się szczególnie od podanego w punkcie 3.

**Definicja 3.4.** Niech  $(X, \varrho)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $T: X \rightarrow X$ . Mówimy, że odwzorowanie  $T$  jest *zwężające* (albo inaczej: jest *kontrakcją*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała  $\lambda \in (0, 1)$  taka, że

$$\varrho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

**Uwaga 3.5.** Każda kontrakcja jest ciągła na  $X$ , gdyż spełnia warunek Lipschitza.

**Definicja 3.6.** Punkt  $\mathbf{x} \in X$  nazywa się *punktem stałym* odwzorowania  $T: X \rightarrow X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

**Twierdzenie 3.7 (Banacha o punkcie stałym).** *Jeśli  $(X, \varrho)$  jest przestrzenią metryczną zupełną, zaś  $T: X \rightarrow X$  jest kontrakcją, to  $T$  ma dokładnie jeden punkt stały  $\mathbf{x} \in X$ .*

Dowód tego twierdzenia, nazywanego także *zasadą odwzorowań zwężających*, jest krótki i nietrudny, a samo twierdzenie — opublikowane w wersji abstrakcyjnej w roku 1922, w pracy doktorskiej Banacha<sup>2</sup> — ma mimo swojej prostoty wiele zastosowań, w których  $X$  bywa zwykle jakąś przestrzenią funkcyjną, a równanie  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  — równaniem różniczkowym lub całkowym.

Podamy jeszcze poglądową interpretację twierdzenia Banacha: jeśli rozłożony plan miasta upuśćmy na jednej z ulic w tym mieście, to jest dokładnie jeden taki punkt planu, który znalazł się idealnie w tym miejscu, które przedstawia. Czytelnik zechce zastanowić się nad prawdziwością tego zdania i dopiero później przeczytać poniższy dowód.

**Dowód.** Odwzorowanie zwężające nie może mieć dwóch różnych punktów stałych: gdyby  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  i  $T(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ , to mielibyśmy

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varrho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ponieważ  $\lambda \in (0, 1)$ , więc musi zachodzić równość  $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , tzn.  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Pozostaje wykazać *istnienie* punktu stałego. Niech  $\mathbf{x}_0 \in X$  będzie dowolnym punktem. Rozpatrzmy zdefiniowany rekurencyjnie ciąg  $\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n)$ , gdzie  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ponieważ  $T$  jest kontrakcją, więc

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) &= \varrho(T(\mathbf{x}_n), T(\mathbf{x}_{n-1})) \leq \lambda \varrho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}) \\ &\leq \lambda^2 \varrho(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^n \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

<sup>2</sup>Fundamenta Math., tom 3, rok 1922, str. 133–181.

dla pewnej liczby  $\lambda \in (0, 1)$ . Jeśli  $m > n$ , to na mocy nierówności trójkąta

$$\begin{aligned}\varrho(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) &\leq \varrho(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}) + \cdots + \varrho(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \lambda^j \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^j \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) = \lambda^n \frac{\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)}{1-\lambda} = C\lambda^n,\end{aligned}$$

gdzie stała  $C$  nie zależy od  $n$ . Zatem ciąg  $(\mathbf{x}_n)$  spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny, gdyż przestrzeń  $(X, \varrho)$  jest zupełna. Niech  $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_n$ . Wobec ciągłości  $T$ ,

$$T(\mathbf{x}) = T(\lim \mathbf{x}_n) = \lim T(\mathbf{x}_n) = \lim \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}.$$

Dowód jest zakończony.  $\square$

Okazuje się, że jeśli dwie kontrakcje są bliskie, to ich punkty stałe są bliskie. Z powyższego faktu skorzystamy w następującym podrozdziale.

**Lemat 3.8.** *Jeśli  $(X, \varrho)$  jest przestrzenią metryczną zupełną, a  $T_1, T_2: X \rightarrow X$  spełniają warunek Lipschitza ze stałą  $\lambda < 1$  i ponadto*

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \varrho(T_1(\mathbf{x}), T_2(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

*to punkty stałe  $\mathbf{x}_j$  kontrakcji  $T_j$ , gdzie  $j = 1, 2$ , spełniają nierówność  $\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \varepsilon/(1-\lambda)$ .*

Dowód. Na mocy nierówności trójkąta,

$$\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \varrho(T_1(\mathbf{x}_1), T_2(\mathbf{x}_2)) \leq \varrho(T_1(\mathbf{x}_1), T_1(\mathbf{x}_2)) + \varrho(T_1(\mathbf{x}_2), T_2(\mathbf{x}_2)) < \lambda \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varepsilon.$$

Przenosząc pierwszy składnik na lewą stronę, łatwo otrzymujemy tezę.  $\square$

## 3.2 Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Udowodnimy w tym podrozdziale jedno z najważniejszych twierdzeń, jakie Czytelnik poznaje w ciągu całego wykładu.

**Twierdzenie 3.9 (o funkcji odwrotnej).** *Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$  i  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Założmy, że dla pewnego  $\mathbf{a} \in \Omega$  różniczka  $Df(\mathbf{a}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  jest izomorfizmem liniowym. Istnieją wówczas liczba  $\delta > 0$  i zbiór otwarty  $V \subset \mathbb{R}^n$  takie, że*

- (i)  $f: B(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow V$  jest bijekcją;
- (ii) przekształcenie  $g = f^{-1}: V \rightarrow B(\mathbf{a}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  jest klasy  $C^1$  na  $V$ ;
- (iii) Jeśli  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$ , to  $Dg(\mathbf{y}) = (Df(\mathbf{x}))^{-1}$ .

Zanim przejdziemy do dowodu, podkreślmy ważną rzecz: dla  $n = 1$  podobne twierdzenie ma charakter *globalny*. Jeśli  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  i  $f'$  nie znika w żadnym punkcie, to  $f'$  ma stały znak, a  $f$  jest ściśle monotoniczna na  $\mathbb{R}$ . Zatem funkcja  $g = f^{-1}$  jest określona na przedziale otwartym  $I = f(\mathbb{R})$ . Dla  $n > 1$  jest inaczej: może się okazać, że różniczka  $Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  jest odwracalna dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , ale  $f$  nie jest różnowartościowe!

**Przykład 3.10.** Niech

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \ni (x, y) = x + iy = z \mapsto \exp z = (e^x \cos y, e^x \sin y) =: F(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

To przekształcenie jest gładkie i oczywiście nie jest różnowartościowe, gdyż każda liczba  $2\pi ik$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , jest okresem funkcji wykładniczej w  $\mathbb{C}$ . Jednak

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

a więc  $\det DF(x, y) = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} > 0$ . Dlatego  $DF(x, y)$  jest macierzą odwracalną dla każdego  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**DOWÓD TWIERDZENIA 3.9.** *Krok 1.* Niech  $A = Df(\mathbf{a})$ . Rozpatrując zamiast  $f$  nową funkcję

$$\Omega - \mathbf{a} \ni \mathbf{x} \mapsto A^{-1} \cdot (f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^n,$$

można sprowadzić dowód do przypadku  $Df(\mathbf{a}) = \text{Id} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbf{a} = f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \Omega$ . Takie założenia odtąd przyjmujemy.

*Krok 2: różnowartościowość  $f$  i odwracalność  $Df$  w otoczeniu zera.* Zapiszmy  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})$ , gdzie  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Zatem  $Df(\mathbf{x}) = \text{Id} + D\varphi(\mathbf{x})$  i  $D\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Przekształcenie  $\mathbf{p} \mapsto D\varphi(\mathbf{p})$  jest ciągłe na  $\Omega$ , więc istnieje taka liczba  $\delta_1 > 0$ , że  $\|D\varphi(\mathbf{p})\| < \frac{1}{2}$  dla wszystkich  $\mathbf{p} \in B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$ . Wynika stąd, że  $Df(\mathbf{p})$  jest macierzą odwracalną dla wszystkich  $\mathbf{p} \in B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$ .

Ponadto, wobec twierdzenia o wartości średniej,

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \sup_{\mathbf{p} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \|D\varphi(\mathbf{p})\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, 2\delta_1). \quad (3.2)$$

(W szczególności,  $\|\varphi(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|$  na kuli domkniętej  $\overline{B}(\mathbf{0}, 2\delta_1)$ ). Przeto

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \\ &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{aligned}$$

dla wszystkich  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$ . Stąd wynika różnowartościowość  $f$  na kuli  $B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$ . Na obrazie tej kuli przekształcenie  $g = f^{-1}$  jest dobrze określone i spełnia warunek Lipschitza ze stałą 2, a więc jest ciągłe.

Kluczową trudnością dowodu jest wykazanie, że dla pewnego  $\delta > 0$  zbiór  $f(B(\mathbf{0}, \delta))$  jest otwarty w  $\mathbb{R}^n$ . Aby ją pokonać, wykorzystamy twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

*Krok 3: funkcję  $g = f^{-1}$  można określić na pewnym zbiorze otwartym.* Wykażemy, że istnieje funkcja ciągła

$$\gamma: \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1) \rightarrow \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$$

taka, że

$$f(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1). \quad (3.3)$$

Wyniknie stąd, że kula  $B(\mathbf{0}, \delta_1)$  jest zawarta w obrazie  $f(B(\mathbf{0}, 2\delta_1))$ .

Funkcję  $g = f^{-1}$  można będzie określić wzorem  $g(\mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})$  właśnie na  $B(\mathbf{0}, \delta_1)$ . Zbiór  $U = f^{-1}(B(\mathbf{0}, \delta_1))$  jest otwarty w  $\mathbb{R}^n$ , gdyż  $f$  jest ciągła. Ponadto,  $\mathbf{0} \in U$ ,

więc dla pewnego  $\delta_2 > 0$  kula  $B(\mathbf{0}, \delta_2) \subset U$ . Biorąc  $V = g^{-1}(B(\mathbf{0}, \delta_2)) = f(B(\mathbf{0}, \delta_2))$ , otrzymamy – wobec ciągłości  $g$ ! – otwarty podzbiór  $\mathbb{R}^n$ . Zakończy to dowód punktu (i) oraz części punktu (ii) twierdzenia o funkcji odwrotnej. Pozostanie do wykazania, że  $g \in C^1$  i różniczki obu funkcji wiąże zależność (iii).

Mamy

$$f(\underbrace{\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})}_{=\mathbf{x}}) = \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})).$$

Zatem warunek (3.3) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma(\mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1). \quad (3.4)$$

Ustalmy teraz  $\mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$  i rozpatrzmy pomocnicze przekształcenie

$$T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = -\varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1).$$

Ponieważ  $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , więc na mocy (3.2) jest  $\|T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})\| \leq \|\varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z})\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y} + \mathbf{z}\| \leq \delta_1$  dla  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$ . Innymi słowy,

$$T_{\mathbf{y}} : \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1) \rightarrow \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1).$$

Nietrudno też sprawdzić, że  $T$  jest kontrakcją, gdyż

$$\|T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_1) - T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_2)\| = \|\varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}_1) - \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}_2)\| \stackrel{(3.2)}{\leq} \frac{1}{2}\|(\mathbf{y} + \mathbf{z}_1) - (\mathbf{y} + \mathbf{z}_2)\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|.$$

Na mocy Twierdzenia 3.7,  $T_{\mathbf{y}}$  ma dokładnie jeden punkt stały  $\mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$ . Wobec Lemma 3.8 (jego założenia sprawdzamy łatwo, podobnie jak wyżej), przekształcenie

$$\overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1) \ni \mathbf{y} \longmapsto \gamma(\mathbf{y}) = \mathbf{z} = \text{punkt stały kontrakcji } T_{\mathbf{y}} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$$

jest ciągłe. Oczywiście,  $T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} = \gamma(\mathbf{y})$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (3.4), tzn. równoważny mu warunek (3.3).

*Krok 4: różniczkowalność  $g$  i wzór  $Dg(\mathbf{y}) = Df(\mathbf{x})^{-1}$  dla  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ .* Przypuśćmy, że byłoby już wiadomo, że  $g = f^{-1}$  jest przekształceniem różniczkowalnym. Stosując twierdzenie o różniczce złożenia do funkcji

$$g \circ f = \text{Id} : B(\mathbf{0}, \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

otrzymalibyśmy wtedy równość

$$Dg(f(\mathbf{x})) \cdot Df(\mathbf{x}) = \text{Id} \quad \text{dla } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \delta_2), \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in V = f(B(\mathbf{0}, \delta_2)),$$

tzn.  $Dg(f(\mathbf{x})) = Df(\mathbf{x})^{-1}$  na  $B(\mathbf{0}, \delta_2)$ . Operacja odwracania macierzy jest ciągła na zbiorze macierzy odwracalnych w  $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  (przypomnijmy: jest to zbiór otwarty!), więc przekształcenie

$$V \ni \mathbf{y} \mapsto Dg(\mathbf{y}) = (Df(g(\mathbf{y})))^{-1} \in M_{n \times n}$$

jest ciągłe. Aby zakończyć cały dowód Twierdzenia 3.9, pozostaje więc wykazać, że  $Dg(\mathbf{y})$  istnieje, gdy  $\mathbf{y} \in V$ . Udowodnimy w tym celu następujący

**Lemat 3.11 (o różniczce przekształcenia odwrotnego).** *Niech  $U, V$  będą zbiorami otwartymi w  $\mathbb{R}^n$ , a  $f: U \rightarrow V$  — bijekcją różniczkowalną w punkcie  $\mathbf{x} \in U$ . Założymy, że różniczka  $Df(\mathbf{x}) = A$  jest izomorfizmem liniowym. Jeśli funkcja  $g = f^{-1}: V \rightarrow U$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ , to  $Dg(\mathbf{y})$  istnieje i jest równa  $A^{-1}$ .*

**DOWÓD LEMATU.** Oznaczmy  $B = A^{-1} = (Df(\mathbf{x}))^{-1}$  i  $M = \|A\| + 2\|B\| + 1$ . Różniczka  $Df(\mathbf{x}) = A$  istnieje, więc

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = A\mathbf{h} + r(\mathbf{h}), \quad \text{gdzie } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Niech  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{v}\| \ll 1$ . Wtedy  $\mathbf{v} = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$  dla pewnego  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ : wystarczy zapisać ostatnią równość jako  $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$ , a stąd  $\mathbf{h} = g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - \mathbf{x}$ ; wobec ciągłości  $g$  w  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  jest  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  dla  $\mathbf{v} \rightarrow 0$ . Pokażemy, że w małym otoczeniu zera wektory  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{v}$  mają porównywalne długości. Wybierzmy  $\delta > 0$  tak, aby  $\|r(\mathbf{h})\| < \frac{1}{2M}\|\mathbf{h}\|$  dla  $\|\mathbf{h}\| < \delta$ . Po pierwsze,

$$\|\mathbf{v}\| = \|A\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \frac{1}{2M}\|\mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{h}\|.$$

Po drugie,  $A\mathbf{h} = \mathbf{v} - r(\mathbf{h})$  na mocy (3.5) i dlatego

$$\|\mathbf{h}\| = \|B \cdot A \cdot \mathbf{h}\| = \|B\mathbf{v} - B \cdot r(\mathbf{h})\| \leq \|B\| \left( \|\mathbf{v}\| + \frac{1}{2M}\|\mathbf{h}\| \right) \leq \|B\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{h}\|,$$

stąd zaś  $\|\mathbf{h}\| \leq 2\|B\| \cdot \|\mathbf{v}\| \leq M\|\mathbf{v}\|$ . Ostatecznie

$$\frac{1}{M}\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{v}\| \quad \text{dla } \|\mathbf{h}\| < \delta. \quad (3.6)$$

Ponieważ  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ , więc

$$g(\mathbf{y} + \mathbf{v}) - g(\mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{h} = B(A\mathbf{h}) = B\mathbf{v} - B(r(\mathbf{h})).$$

Częścią liniową przyrostu  $g$  jest  $B\mathbf{v}$ , zaś reszta  $r_1(\mathbf{v}) = B(r(\mathbf{h}))$  spełnia warunek

$$\frac{\|B(r(\mathbf{h}))\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \frac{M \cdot \|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq M^2 \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \mathbf{v} \rightarrow 0,$$

gdziż wobec (3.6) warunki  $\mathbf{v} \rightarrow 0$  i  $\mathbf{h} \rightarrow 0$  są równoważne. Z definicji różniczki,  $Dg(\mathbf{y}) = B = A^{-1}$ . Dowód lematu, a także dowód całego Twierdzenia 3.9, jest zakończony.  $\square$

**Uwaga 3.12.** W dowodzie twierdzenia o lokalnej odwracalności twierdzenie Banacha o punkcie stałym można stosować do przestrzeni funkcyjnej  $X = C(\overline{B}(0, \delta_1), \overline{B}(0, \delta_1))$  z metryką ‘supremum’. Określamy przekształcenie

$$T: X \rightarrow X, \quad (T\gamma)(\mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})).$$

Sprawdzenie, że  $T: X \rightarrow X$  jest kontrakcją, wykonujemy tak samo, jak rachunki w 3. kroku dowodu. Funkcja  $\gamma$ , która jest punktem stałym  $T$ , spełnia równanie (3.4) — i od razu, bez powoływania się na Lemat 3.8, wiadomo, że  $\gamma$  jest ciągła.

Czytelnik może się zastanowić, czy udałoby się stosować twierdzenie Banacha od razu do pewnego podzbioru funkcji klasy  $C^1$ .

### 3.3 Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Poznamy teraz kolejne twierdzenie, które w ścisły sposób wypowiada naturalne oczekiwanie: jeśli mamy  $m$  równań, w których występuje  $n + m$  niewiadomych, to ‘zwykle’  $m$  spośród tych niewiadomych można wyznaczyć za pomocą pozostałych  $n$ . (Oczywiście nie zawsze tak jest – równania mogą np. być sprzeczne).

**Oznaczenia.** W tym podrozdziale będziemy rozpatrywać funkcję

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Punkty  $\mathbb{R}^n$  będziemy oznaczać literą  $\mathbf{x}$ , a punkty  $\mathbb{R}^m$  – literą  $\mathbf{y}$ . Różniczka  $DF(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest macierzą o  $m$  wierszach i  $n + m$  kolumnach; będziemy pisać

$$DF(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad (3.7)$$

gdzie  $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_{m \times n}$  ma  $m$  wierszy i  $n$  kolumn, zaś  $D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_{m \times m}$  jest macierzą kwadratową o  $m$  wierszach i tyluż kolumnach. Inaczej mówiąc, zapis  $D_{\mathbf{x}}F \in M_{m \times n}$  oznacza, że chodzi o różniczkę  $F$  jako funkcji zmiennej  $\mathbf{x}$ , natomiast  $\mathbf{y}$  traktujemy jako parametr; podobnie interpretujemy  $D_{\mathbf{y}}F \in M_{m \times m}$ .

**Twierdzenie 3.13 (o funkcji uwikłanej).** Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  i niech  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ . Założmy, że  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  i  $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ . Niech wreszcie

$$\det D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0.$$

Istnieją wówczas zbiory otwarte  $U \subset \mathbb{R}^n$  i  $V \subset \mathbb{R}^m$  oraz funkcja  $h \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  takie, że  $\mathbf{a} \in U$ ,  $\mathbf{b} \in V$ , zaś warunek

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subset \Omega \quad (3.8)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$  dla pewnego  $\mathbf{x} \in U$ . Ponadto,

$$Dh(\mathbf{x}) = -\left(D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))\right)^{-1} \cdot D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})). \quad (3.9)$$

Nazwa twierdzenia ma następujący sens: w małym otoczeniu takiego punktu  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ , w którym spełnione są założenia, równanie  $F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$  definiuje funkcję  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$  w sposób *uwikłany*. Zanim podamy dowód, spójrzmy na dwa proste przykłady (z wieloma innymi Czytelnik spotka się później).

**Przykład 3.14.** (i). Niech  $A_1 \in M_{m \times n}$ ,  $A_2 \in M_{m \times m}$  i  $\det A_2 \neq 0$ . Rozpatrzmy przekształcenie liniowe

$$F: \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

dane wzorem  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A_1\mathbf{x} + A_2\mathbf{y}$  dla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  oraz  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ . Równanie  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  można rozwiązać; zachodzi ono wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = -(A_2)^{-1} \cdot A_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Mamy też oczywiście  $D_{\mathbf{x}}F \equiv A_1$  i  $D_{\mathbf{y}}F \equiv A_2$ . Widać więc, że w tej sytuacji funkcja  $h$  jest określona na całej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i jest liniowa; zachodzi też warunek (3.9), opisujący jej różniczkę.

(ii). Niech  $n = m = 1$ ,  $a, b > 0$  i niech  $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ . Równanie  $F(x, y) = 0$  opisuje elipsę  $E$  w  $\mathbb{R}^2$ . Mamy

$$F_x(x, y) = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y(x, y) = \frac{2y}{b^2}.$$

W otoczeniu każdego punktu  $(x_0, y_0) \in E$ , który ma współrzędną  $y_0 \neq 0$ , spełnione są założenia Twierdzenia 3.13. Zatem, istnieją przedziały otwarte  $U, V \subset \mathbb{R}$  takie, że  $x_0 \in U$ ,  $y_0 \in V$ , a równanie  $F(x, y) = 0$ , rozpatrywane dla  $(x, y) \in U \times V$ , wyznacza zmienną  $y$  jako funkcję  $x$ . W tym przykładzie też możemy napisać jawnego wzór

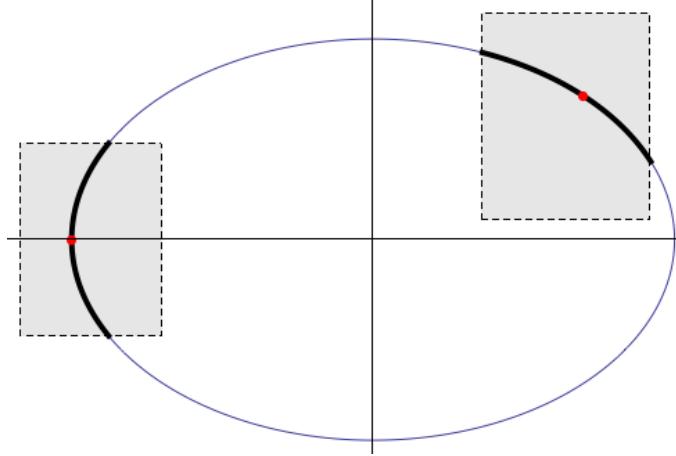
$$y = h(x) = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (3.10)$$

Wybór znaku zależy od położenia  $(x_0, y_0)$  na elipsie, tzn. od znaku  $y_0$ . Widać też, że ważny jest wybór dwóch małych otoczeń  $U$  i  $V$ : jeśli nie ograniczymy się do małego otoczenia punktu  $y_0$ , to nie wiemy, jaki znak wybrać we wzorze (3.10).

Załóżmy na chwilę, że  $y_0 > 0$ . Można wtedy wybrać jako  $V$  np. przedział  $(0, 2b)$ . Zgodnie z wzorem (3.9), powinno być

$$h'(x) = -(F_y(x, y))^{-1} \cdot F_x(x, y) = -\frac{b^2}{2y} \cdot \frac{2x}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{h(x)}.$$

Taki właśnie wynik uzyskujemy, różniczkując funkcję  $h(x) = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$ , daną wzorem (3.10).



W otoczeniu punktu  $(x_0, y_0) \in E$ ,  $y_0 > 0$ , elipsa  $E$  o równaniu  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  jest wykresem funkcji  $y = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$ . W otoczeniu punktu  $(-a, 0)$  ta sama elipsa jest wykresem funkcji  $x = -a\sqrt{1 - (y^2/b^2)}$  zmiennej  $y$ .

Zauważmy jeszcze, że jeśli  $\mathbf{p} \in (x_0, y_0) \in E$  i  $y_0 = 0$ , to wtedy w otoczeniu punktu  $\mathbf{p}$  równanie elipsy wyznacza  $x$  jako funkcję zmiennej  $y$ . Nie kłoci się to z Twierdzeniem 3.13. Możemy wszakże zastosować, wybierając inny, nieznikający minor macierzy  $DF$ . W tym przypadku  $x_0 \neq 0$  i  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ .

Dowód TWIERDZENIA 3.13. Krok 1: zastosowanie twierdzenia o funkcji odwrotnej. Rozpatrzmy funkcję pomocniczą

$$H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}, \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Ponieważ  $F \in C^1$ , więc także  $H \in C^1$ . Nietrudno zauważyc, że macierz różniczki funkcji  $H$  wygodnie zapisuje się w postaci blokowej,

$$DH(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \text{Id} & \mathbf{0} \\ A & B \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{Id} &\in M_{n \times n}, & \mathbf{0} &\in M_{n \times m}, \\ A = D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\in M_{m \times n}, & B = D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\in M_{m \times m}. \end{aligned}$$

Posługując się  $n$ -krotnie rozwinięciem Laplace'a, stwierdzamy, że

$$\det DH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0.$$

Zatem, w punkcie  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$  spełnione są założenia Twierdzenia 3.9 (o funkcji odwrotnej). Istnieje więc kula  $(n+m)$ -wymiarowa  $B(\mathbf{p}, r)$  i zbiór otwarty  $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$  takie, że  $H: B(\mathbf{p}, r) \rightarrow W$  jest bijekcją i funkcja  $G = H^{-1}: W \rightarrow B(\mathbf{p}, r)$  jest klasy  $C^1$ . Ponadto, dla  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B(\mathbf{p}, r)$  jest  $\det D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ .

*Krok 2: postać funkcji odwrotnej do  $H$ . Zapiszmy*

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

gdzie  $G_1: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $G_2: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Przy tych oznaczeniach,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), F(G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}))), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W.$$

Porównując  $n$  początkowych współrzędnych tej równości, otrzymujemy  $G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$  dla  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ , a następnie

$$H(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}))), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W. \quad (3.11)$$

*Krok 3: opis rozwiązań równania  $F = \mathbf{0}$ . Jeśli  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B(\mathbf{p}, r)$ , to warunek  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in W,$$

tz. wtedy i tylko wtedy, gdy  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}), G_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}))$ , co oznacza, że  $\mathbf{y} = G_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ . Z równania  $F = \mathbf{0}$  wyznaczylismy więc  $\mathbf{y}$  jako pewną funkcję  $\mathbf{x}$ .

W kuli  $B(\mathbf{p}, r)$  zawarty jest pewien produkt  $U \times V$ , gdzie  $U \subset \mathbb{R}^n$  i  $V \subset \mathbb{R}^m$  są zbiorami otwartymi; można np. wziąć  $U = B(\mathbf{a}, r/2)$  i  $V = B(\mathbf{b}, r/2)$ . Wtedy

$$h = G_2(\cdot, \mathbf{0}): U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

i na zbiorze  $U \times V$  równanie  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{y} \in V$ . Zmniejszając w razie potrzeby  $U$ , np. biorąc  $\rho > 0$  tak małe, żeby  $U_1 = B(\mathbf{a}, \rho) \subset h^{-1}(B(\mathbf{b}, r/2))$  (tu korzystamy z ciągłości  $h$ !), możemy bez zmiany ogólności założyć, że  $h(U) \subset V$ . Ponieważ  $G \in C^1$ , więc  $G_1, G_2 \in C^1$  i dlatego  $h \in C^1$ . Udowodniliśmy więc całą tezę twierdzenia, wyjawszy wzór (3.9).

*Krok 4: różniczka funkcji uwikłanej  $h$ .* Na zbiorze  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest  $F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ . Różniczkując to równanie stronami i stosując wzór na pochodną złożenia

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \xrightarrow{F} F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$$

(Czytelnik zechce sam narysować odpowiednie macierze, najlepiej w postaci blokowej), otrzymujemy

$$D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) + D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \cdot Dh(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in M_{m \times n}.$$

Dla  $\mathbf{x} \in U$  macierz  $D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$  jest odwrotna; przenosząc  $D_{\mathbf{x}} F(\dots)$  na prawą stronę równania i mnożąc obie strony przez  $D_{\mathbf{y}} F(\dots)^{-1}$ , otrzymujemy wzór (3.9).  $\square$

**Uwaga 3.15.** Jeśli w Twierdzeniu 3.9 o funkcji odwrotnej założymy dodatkowo, że  $f \in C^k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ , to wówczas także  $f^{-1} \in C^k$ . Przypomnijmy: różniczka funkcji odwrotnej  $g = f^{-1}$  dana jest wzorem  $Dg(\mathbf{y}) = (Df(g(\mathbf{y})))^{-1}$ , tzn. jest złożeniem trzech odwzorowań:

$$\mathbf{y} \mapsto g(\mathbf{y}) = \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \mapsto Df(\mathbf{z}), \quad A \mapsto A^{-1}. \quad (3.12)$$

To, że  $g = f^{-1} \in C^k$ , gdy  $f \in C^k$ , można więc łatwo wykazać przez indukcję względem  $k$ . Dla  $k = 1$  udowodniliśmy to już w Twierdzeniu 3.9. Jeśli  $f \in C^k$  i wiemy z założenia, że dowodzona własność zachodzi dla  $k - 1$ , to pierwsze odwzorowanie w (3.12) jest klasy  $C^{k-1}$  na mocy założenia indukcyjnego, drugie – też jest klasy  $C^{k-1}$ , gdyż  $Df \in C^{k-1}$ , trzecie zaś jest klasy  $C^\infty$  (wyrazy macierzy  $A^{-1}$  wyrażają się przez funkcje wymierne od wyrazów macierzy  $A$ ).

Podobnie, jeśli w Twierdzeniu 3.13 o funkcji uwikłanej założymy, że  $F \in C^k$ , to funkcja uwikłana  $h$ , o której mowa w tezie, też jest klasy  $C^k$ .  $\square$

Podamy teraz inne przykłady zastosowania twierdzenia o funkcji uwikłanej.

**Przykład 3.16.** Niech  $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ . Zbiór  $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$  jest sferą  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Różniczka

$$DF(\mathbf{x}) = (F_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, F_{x_n}(\mathbf{x})) = 2(x_1, \dots, x_n) = 2\mathbf{x}$$

nie znika w żadnym punkcie sfery. Dlatego w otoczeniu każdego punktu  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$  sferę  $\mathbb{S}^{n-1}$  można przedstawić jako wykres funkcji ( $n - 1$ ) zmiennych,

$$x_i = \pm \left( 1 - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Jeśli  $p_i \neq 0$ , to w pewnym otoczeniu  $\mathbf{p}$  z równania sfery możemy wyznaczyć zmienną  $x_i$ , dobierając odpowiednio znak w powyższym wzorze.

**Przykład 3.17 (torus jako poziomica pewnej funkcji).** Niech  $R > r > 0$ . Położmy

$$F(x, y, z) = \left( \sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 - r^2, \quad x^2 + y^2 > 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$F_z(x, y, z) = 2z, \quad F_x(x, y, z) = 2 \left( \sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

a  $F_y$  otrzymujemy, zamieniając role  $x$  i  $y$ . Zbiór  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$  jest domknięty, gdyż  $F$  jest ciągła; żaden punkt  $(0, 0, z)$  nie należy do  $M$ , gdyż  $R^2 + z^2 - r^2 \geq R^2 - r^2 > 0$ . Zatem  $M \subset \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$ . Zbiór  $\Omega$  jest otwarty, a funkcja  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

Sprawdzimy, że w każdym punkcie zbioru  $M$  różniczka funkcji  $F$  ma rzad równy 1. Niech  $(x, y, z) \in M$ . Jeśli  $z \neq 0$ , to  $F_z \neq 0$ . Jeśli  $z = 0$ , ale  $x \neq 0$ , to  $\sqrt{x^2 + y^2} - R = \pm r \neq 0$  i  $F_x \neq 0$ . Jeśli wreszcie  $z = x = 0$ , to  $|y| = \sqrt{x^2 + y^2} = R \pm r$  i wtedy  $F_y \neq 0$ . Zatem, w otoczeniu każdego punktu  $(x, y, z) \in M$  zbiór  $M$  można przedstawić jako wykres pewnej funkcji dwóch zmiennych, klasy  $C^1$  (ustaliwszy  $(x, y, z) \in M$ , łatwo jest rozwiklać równanie  $F = 0$  w sposób jawnego – Czytelnik może to robić sam).

Zbiór  $M$  jest torusem obrotowym: we współrzędnych biegunowych  $x = t \cos \theta, y = t \sin \theta$  równanie  $F = 0$  zmienia się w  $(t - R)^2 + z^2 = r^2$ . Dla każdego kąta  $\theta \in [0, 2\pi)$  przekrój  $M$  pionową półpłaszczyzną  $\{(t \cos \theta, t \sin \theta, z) : t > 0, z \in \mathbb{R}\}$  jest więc okręgiem.

Wskażemy jeszcze prosty przykład zastosowania Twierdzenia 3.13 dla  $n = 1, m = 2$ .

**Przykład 3.18.** Niech  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6, x + y + z).$$

Zbiór  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0)\}$  jest częścią wspólną zbiorów  $M_i$  opisanych równaniami  $F_i = 0$ , gdzie  $F_1$  i  $F_2$  są współrzędnymi  $F$ , tzn. jest przecięciem elipsoidy trójsiowej i płaszczyzny. Minory  $2 \times 2$  macierzy

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 6z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

znikają jednocześnie tylko wtedy, gdy  $x = 2y = 3z$ . Na płaszczyźnie  $x + y + z = 0$  równości  $x = 2y = 3z$  zachodzą

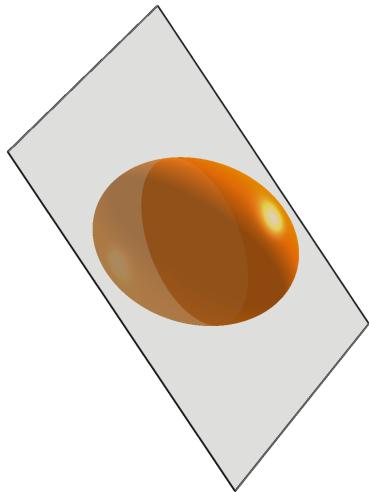
jedynie w punkcie  $(0, 0, 0) \notin M$ , a więc w każdym punkcie  $M$  co najmniej jeden z minorów macierzy  $DF$  nie zniką. Wobec Twierdzenia 3.13, każdy punkt zbioru  $M$  ma takie otoczenie, w którym dwie spośród zmiennych  $(x, y, z)$  można wyznaczyć jako funkcję trzeciej zmiennej.

### 3.4 Dyfeomorfizmy zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$

**Definicja 3.19.** Jeśli  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym, to przekształcenie  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazywamy *dyfeomorfizmem klasy  $C^1$* , gdy  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  jest przekształceniem różniczkowalnym, zbiór  $f(\Omega)$  jest otwarty w  $\mathbb{R}^n$  i przekształcenie odwrotne  $f^{-1} \in C^1(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$ .

Z definicji wynika, że dyfeomorfizm jest homeomorfizmem. Czytelnik nie powinien jednak uważać, że dyfeomorfizm to homeomorfizm, który jest różniczkowalny: przekształcenie  $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$  jest bijekcją klasy  $C^\infty$ , jednak przekształcenie doń odwrotne,  $\mathbb{R} \ni y \mapsto \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ , nie jest klasy  $C^1$  (z uwagi na zachowanie pochodnej w zerze).

Przekształcenie odwrotne do dyfeomorfizmu też jest dyfeomorfizmem.



**Przykład 3.20.** 1. Każde odwracalne przekształcenie liniowe  $\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in A(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  jest dyfeomorfizmem. Z odwracalności  $A$  wynika różnowartościowość tego przekształcenia. Przekształcenia liniowe  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y} \mapsto f^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$  są ciągłe, a ich różniczki  $Df(\mathbf{x}) = A$  i  $Df^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}$  są stałe, więc też są ciągłe.

## 2. Przekształcenie

$$(-1, 1) \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = \left( x, \frac{2}{\pi} \operatorname{arc tg} y \right) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$$

jest dyfeomorfizmem pasa  $(-1, 1 \times \mathbb{R})$  na kwadrat  $(-1, 1)^2$ . Obie współrzędne  $f$  są gładkie i różnowartościowe, więc  $f$  jest gładkie i różnowartościowe. Macierz

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2/\pi}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

jest odwracalna dla każdego  $(x, y)$ , więc funkcja  $f^{-1}$  – która, wobec różnowartościowości  $f$ , określona jest *globalnie* na kwadracie  $(-1, 1)^2$  – jest klasy  $C^1$  na mocy Twierdzenia 3.9. Można zresztą wypisać  $f^{-1}$  wzorem.

## 3. Niech $\Omega_1 = \mathbb{R} \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ , $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ . Przekształcenie

$$\Omega_1 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \in \Omega_2$$

jest dyfeomorfizmem pasa  $\Omega_1$  na półpłaszczyznę  $\Omega_2 = F(\Omega_1)$ . Najprościej to zauważyć, odwołując się do własności funkcji wykładniczej w  $\mathbb{C}$ . Sprawdzenie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

**Stwierdzenie 3.21.** *Złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem.*  $\square$

**Zadanie 3.22.** Wykazać, że koło  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$  i kwadrat  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_1 < 1\}$  są dyfeomorficzne.

Z pojęciem dyfeomorfizmu spotkamy się wielokrotnie, także w drugim semestrze.

## 3.5 Rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^n$

**Definicja 3.23.** Zbiór  $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$  nazywamy *zanurzoną rozmaistością  $n$ -wymiarową klasy  $C^1$*  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $\mathbf{p} \in M$  istnieje kula  $B(\mathbf{p}, r)$  w  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $n$ -wymiarowa podprzestrzeń liniowa  $P = \operatorname{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , zbiór  $U$  otwarty w  $P \equiv \mathbb{R}^n$  i funkcja  $\varphi \in C^1(U, P^\perp)$  takie, że

$$M \cap B(\mathbf{p}, r) = \operatorname{wykres} \varphi \cap B(\mathbf{p}, r),$$

gdzie

$$\operatorname{wykres} \varphi = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} = P \oplus P^\perp : \mathbf{x} \in U, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}.$$

Mówiąc krótko i potocznie, zanurzona rozmaistość  $n$ -wymiarowa klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^{n+m}$  to zbiór, który *lokalnie*, w otoczeniu każdego swojego punktu, jest wykresem pewnej funkcji klasy  $C^1$  wybranych  $n$  zmiennych.

Liczbę  $m$  nazywamy *kowymiarem rozmaistości*  $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ .

**Twierdzenie 3.24.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$  będzie zbiorem otwartym i niech  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Jeśli  $\mathbf{q} \in \Omega$  jest punktem takim, że  $DF(\mathbf{z})$  jest epimorfizmem liniowym dla każdego punktu  $\mathbf{z}$ , należącego do zbioru

$$M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = F(\mathbf{q})\}$$

to wówczas  $M$  jest rozmaitością  $n$ -wymiarową klasy  $C^1$ .

Dowód. Niech  $\mathbf{p} \in M$ . Ponieważ  $DF(\mathbf{z})$  jest epimorfizmem w każdym punkcie zbioru  $M$ , więc w punkcie  $\mathbf{p}$  nie znika pewien minor rozmiaru  $m \times m$  macierzy  $DF(\mathbf{p})$ . Dlatego, odpowiednio permutując zmienne, można zastosować Twierdzenie 3.13 (o funkcji uwikłanej) i wywnioskować, że w małym otoczeniu punktu  $\mathbf{p}$  zbiór  $M$  pokrywa się z wykresem pewnej funkcji klasy  $C^1$ , określonej na otwartym podzbiorze  $\mathbb{R}^n$  i prowadzącej w  $\mathbb{R}^m$ .  $\square$

Zastosowania tego twierdzenia spotkaliśmy już w przykładach 3.14 (ii), 3.16, 3.17, 3.18. Przykładami rozmaistości są więc elipsa (zarówno zanurzona w  $\mathbb{R}^2$ , jak i zanurzona w  $\mathbb{R}^3$ ), sfera i torus.

**Przykład 3.25 (lemniskata i precel).** Lemniskatą nazywamy zbiór

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^2 + y^2 = 0\}.$$

Równanie  $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ , równoważnie  $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$ , opisuje w  $\mathbb{R}^2$  krzywą w kształcie ósemki. Wykresy funkcji  $x \mapsto \pm x\sqrt{1 - x^2}$  przecinają się pod kątem prostym w punkcie  $(0, 0) \in L$ , więc  $L$  nie jest rozmaistością jednowymiarową zanurzoną w  $\mathbb{R}^2$ .

Niech teraz  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana wzorem

$$F(x, y, z) = (x^4 - x^2 + y^2)^2 + z^2 - \frac{1}{36}$$

i niech  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ . Sprawdzamy, że spełnione są założenia Twierdzenia 3.24. Pochodne cząstkowe  $F$  są równe

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= 2(x^4 - x^2 + y^2) \cdot (4x^3 - 2x) = 4x(2x^2 - 1)(x^4 - x^2 + y^2), \\ F_y(x, y, z) &= 4y(x^4 - x^2 + y^2), \quad F_z(x, y, z) = 2z. \end{aligned}$$

W tych punktach  $M$ , gdzie  $z \neq 0$ , różniczka funkcji  $F$  jest epimorfizmem (tzn. ma rząd równy 1), gdyż tam  $F_z \neq 0$ . Jeśli  $(x, y, z) \in M$  i  $z = 0$ , to  $x^4 - x^2 + y^2 = \pm \frac{1}{6}$ . Zatem, o ile  $y \neq 0$ , to  $F_y(x, y, 0) \neq 0$  w punktach  $(x, y, 0) \in M$ .

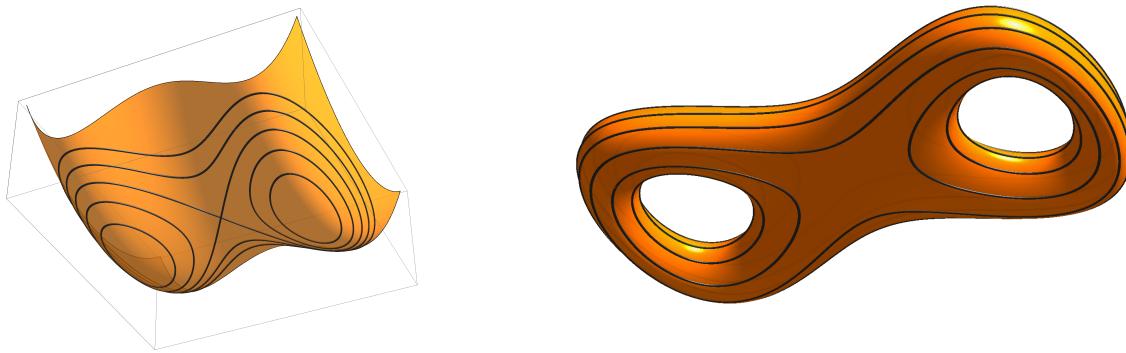
Jeśli wreszcie  $(x, y, z) \in M$  i  $y = z = 0$ , to  $x^4 - x^2 + y^2 = x^4 - x^2 = \pm \frac{1}{6}$ . Inaczej mówiąc, liczba  $x$  jest pierwiastkiem wielomianu  $P(t) = t^4 - t^2 \mp \frac{1}{6}$ . Mamy  $P'(t) = 4t^3 - 2t$ ;  $P'$  znika więc dla  $t = 0$  i  $t = \pm 1/\sqrt{2}$ . Te punkty nie są jednak pierwiastkami  $P$ , tzn.  $P$  ma pierwiastki jednokrotne i jeśli  $P(x) = 0$ , to  $P'(x) \neq 0$ . Ostatecznie więc,

$$F_x(x, 0, 0) = 4x(2x^2 - 1)(x^4 - x^2 + y^2) = 2P'(x) \cdot \pm 16 \neq 0 \quad \text{dla } (x, 0, 0) \in M.$$

Sprawdziliśmy więc, że we wszystkich punktach  $(x, y, z) \in M$  różniczka  $DF(x, y, z)$  jest epimorfizmem (ma maksymalny możliwy rząd, w tym przypadku równy 1).

Jak wygląda zbiór  $M$ ? Wyobraźmy sobie, że zmienna  $z$  to wysokość. Cięcie zbioru  $M$  poziomą płaszczyzną  $\{z = c\}$ , gdzie  $c \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ , składa się z takich punktów  $(x, y, z)$ , że

$$x^4 - x^2 + y^2 = \pm a, \quad \text{gdzie } a = \sqrt{\frac{1}{36} - c^2}, \quad z = c,$$



Z lewej: wykres funkcji  $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$  widziany od dołu. Z prawej: precel o równaniu  $f(x, y)^2 + z^2 = \frac{1}{36}$ . (Oba rysunki poddano lekkiemu – afinicznemu – zniekształceniu.)

tzn. wygląda tak samo, jak dwa poziome przekroje wykresu funkcji  $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ , płaszczyznami  $\{z = \pm a\}$ . Czytelnik zechce sprawdzić, że w punkcie  $(0, 0)$  funkcja  $f$  ma siodło, a w punktach  $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$  dwa minima lokalne. Zatem, krzywe  $f = \text{const}$  wyglądają tak, jak na załączonym rysunku, zaś sam zbiór  $M$  wygląda tak, jak powierzchnia precla z dwiema dziurami na wylot.<sup>3</sup> □

Opiszymy teraz zbiór wektorów stycznych (w sensie Definicji 2.31) do rozmaitości zanurzonej klasy  $C^1$ . Okazuje się, że jeśli  $M$  jest rozmaistością  $n$ -wymiarową, to  $T_p M$  jest przestrzenią liniową wymiaru  $n$ . Oto jej opis, w dwóch wersjach, uzależnionych od tego, jak opisujemy rozmaistość  $M$ .

**Twierdzenie 3.26 (przestrzeń styczna do rozmaistości, wersja I).** *Jeśli  $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$  jest wykresem funkcji  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym, to w każdym punkcie  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a})) \in M$  mamy*

$$T_{\mathbf{p}} M = \{(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} = \text{Im } D\Phi(\mathbf{a}),$$

gdzie  $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ ,  $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ .

Przekształcenie  $\Phi$ , o którym mowa w powyższym twierdzeniu, nazywa się czasem naturalną parametryzacją wykresu funkcji  $\varphi$ .

**Twierdzenie 3.27 (przestrzeń styczna do rozmaistości, wersja II).** *Jeśli  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$  jest zbiorem otwartym,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  i dla każdego punktu  $\mathbf{p} \in M$ , gdzie*

$$M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\},$$

przekształcenie liniowe  $DF(\mathbf{p})$  jest epimorfizmem, to

$$T_{\mathbf{p}} M = \ker DF(\mathbf{p}) \quad \text{dla } \mathbf{p} \in M.$$

Udowodnimy najpierw pierwsze z tych twierdzeń, posługując się wprost Definicją 2.31. Drugie twierdzenie wyprowadzimy później z pierwszego, posługując się twierdzeniem

---

<sup>3</sup>Ten konkretny sposób przedstawienia precla jako jednej poziomicy pewnej funkcji klasy  $C^1$  obmyślił Hermann Karcher, geometra z Uniwersytetu w Bonn.

o funkcji uwikłanej, żeby opisać lokalnie  $M$  jako wykres funkcji klasy  $C^1$ . Uważny Czytelnik spostrzegł przypuszczalnie, że z Twierdzeniem 3.27 spotkaliśmy się już w prostym przypadku  $m = 1$ , dowodząc, że gradient funkcji jest prostopadły do poziomicy (patrz Twierdzenie 2.34).

**Dowód TWIERDZENIA 3.26.** Ustalmy  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Niech  $\gamma(t) = (\mathbf{a} + t\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{a} + t\mathbf{v})) = \Phi(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ . Wektor  $\gamma'(0)$  prędkości krzywej  $\gamma$  należy do zbioru  $T_{\gamma(0)}M = T_p M$  (patrz Uwaga 2.33), gdzie oczywiście  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a})) = \Phi(\mathbf{a})$ . Wobec wzoru na pochodną złożenia,

$$\gamma'(0) = D\Phi(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{t=0} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v} = (\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}).$$

Datego  $\text{Im } D\Phi(\mathbf{a}) \subset T_p M$ . Trzeba jeszcze tylko wykazać inkluzję przeciwną.

Niech zatem  $\mathbf{w} \in T_p M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . Sprawdzimy, że  $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v}$  dla pewnego wektora  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Bez zmniejszenia ogólności przyjmiemy, że  $\|\mathbf{w}\| = 1$ . Ponieważ  $M = \Phi(\Omega)$ , więc z definicji wektora stycznego wynika, że istnieje ciąg  $(\mathbf{x}_j) \subset \Omega$  zbieżny do  $\mathbf{a}$  i taki, że

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \mathbf{w} \quad \text{oraz} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} = \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{n-1}; \quad (3.13)$$

drugie założenie nie zmniejsza ogólności, gdyż sfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  jest zbiorem zwartym. Funkcja  $\varphi$  jest różniczkowalna w  $\mathbf{a}$ ; dlatego, wobec ciągłości przekształceń liniowych,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \stackrel{(3.13)}{=} \|D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|. \quad (3.14)$$

Uwzględniając tę równość, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}{\sqrt{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{a})\|^2}} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\|\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{a})\|^2}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|^2}\right)^{-1/2} \\ &= \left(1 + \|D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|^2\right)^{-1/2} \\ &= \left(\|\mathbf{z}\|^2 + \|D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\|D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|}. \end{aligned}$$

Teraz piszemy

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{D\Phi(\mathbf{a})(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|)}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} \left(D\Phi(\mathbf{a}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} + \frac{o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}\right) \\ &= \frac{D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}}{\|D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|} \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc,  $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v}$ , gdzie wektor  $\mathbf{v} = \|D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|^{-1}\mathbf{z}$ . Dowód Twierdzenia 3.26 jest zakończony.  $\square$

**Dowód TWIERDZENIA 3.27.** Ustalmy  $\mathbf{p} \in M$ . Bez zmiany ogólności (permutując w razie potrzeby zmienne w  $\mathbb{R}^{n+m}$ ) przyjmiemy, że w małym otoczeniu  $\Omega_1 \subset \Omega$  punktu  $\mathbf{p}$  funkcja  $F$  zmiennej  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , gdzie  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , spełnia założenia Twierdzenia 3.13 o funkcji uwikłanej, tzn.

$$\det D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U.$$

Istnieje wtedy funkcja  $\varphi: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$  taka, że zbiór  $M$  w otoczeniu punktu  $\mathbf{p}$  jest wykresem funkcji  $\varphi$ . Niech  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a}))$ . Z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$$T_{\mathbf{p}} M = \{(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}): \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Posłużymy się teraz wzorem (3.9) na różniczkę funkcji uwikłanej  $\varphi$ . Wynika zeń, że

$$D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p})\mathbf{v} + D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{p})D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v} = 0,$$

lub równoważnie,  $DF(\mathbf{p})(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) = 0$ , tzn. każdy wektor  $(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v})$  należy do jądra przekształcenia  $DF(\mathbf{p})$ . Na odwrót, jeśli  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \ker DF(\mathbf{p})$ , gdzie  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , to

$$0 = DF(\mathbf{p})\mathbf{w} = D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p})\mathbf{v} + D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{p})\mathbf{u},$$

stąd zaś, wobec wzoru (3.9), otrzymujemy  $\mathbf{u} = -(D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{p}))^{-1} D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{q})\mathbf{v} = D\varphi(\mathbf{p})\mathbf{v}$ . Zatem rzeczywiście  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) \in T_{\mathbf{p}} M$ .  $\square$

### 3.6 Ekstrema warunkowe i mnożniki Lagrange'a

W wielu konkretnych zastosowaniach rachunku różniczkowego trzeba znajdować wartość największą lub najmniejszą pewnej funkcji  $n$  zmiennych, ale nie na zbiorze otwartym  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , tylko wtedy, gdy między poszczególnymi zmiennymi zachodzą dodatkowe związki. Np. obliczając odległość punktu  $(3, 4, 5)$  od powierzchni sfery  $\mathbb{S}^2$ , szukamy w istocie najmniejszej wartości funkcji

$$g(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{S}^2,$$

na pewnej podrozmałości w  $\mathbb{R}^3$ : na sferze. Gradient funkcji  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , jak nietrudno stwierdzić, znika jedynie w punkcie  $(3, 4, 5)$ , w którym  $g$  osiąga swój kres dolny na  $\mathbb{R}^3$ . Jednak  $(3, 4, 5) \notin \mathbb{S}^2$ , gdzie jest więc osiągany kres dolny na sferze?

Akurat to zadanie można rozwiązać szkolnymi metodami, odwołując się do elementarnej geometrii. Problemy tego typu pojawiają się jednak w wielu dziedzinach, choćby w ekonomii, w różnych zadaniach związanych z optymalizacją kosztów i zysku, gdy wiadomo, że np. suma różnych rodzajów wydatków firmy (płace, reklama, środki produkcji, ubezpieczenie itp.) powinna być stała. Warto więc dysponować ogólnymi metodami rozwiązywania podobnych zadań.

Powiemy teraz, jak badać minima i maksima funkcji, określonych na  $n$ -wymiarowych rozmaistościach zanurzonych w  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Równania, opisujące daną rozmaistość, traktujemy jako dodatkowe warunki, wiążące poszczególne zmienne w  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Stąd właśnie bierze się nazwa *ekstrema warunkowe* albo *ekstrema związane*.

**Twierdzenie 3.28 (warunek konieczny ekstremum warunkowego).** Założmy, że  $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  i  $F = (F_1, \dots, F_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Niech  $M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$ . Niech  $\mathbf{p} \in M$  i niech przekształcenie  $DF(\mathbf{p})$  będzie epimorfizmem liniowym.

Jeśli  $g$  osiąga w punkcie  $\mathbf{p} \in M$  swój kres górny lub dolny na zbiorze  $M$ , to

$$\langle \operatorname{grad} g(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}} M$$

i istnieją liczby  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  takie, że

$$\operatorname{grad} g(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \operatorname{grad} F_i(\mathbf{p}). \quad (3.15)$$

Liczby  $\lambda_i$  nazywa się *mnożnikami Lagrange'a*. Geometryczny sens warunku (3.15) jest następujący: gradient funkcji  $g$  w punkcie  $\mathbf{p}$  jest prostopadły do przestrzeni stycznej  $T_{\mathbf{p}} M = \ker DF(\mathbf{p})$  do rozmaistości  $M$ . To wynika z Twierdzenia 3.27. Aby to łatwiej zrozumieć, Czytelnik może pomyśleć o przypadku  $m = 1, n = 2$ . Wtedy  $F$  ma wartości rzeczywiste i warunek (3.15) oznacza, że  $\operatorname{grad} g(\mathbf{p}) = \lambda \operatorname{grad} F(\mathbf{p})$ , a wektor  $\operatorname{grad} F(\mathbf{p})$  jest wszak prostopadły do poziomicy funkcji  $F$ .

Dowód. Pewien minor  $m \times m$  macierzy  $DF(\mathbf{p})$  nie znika. Bez zmniejszenia ogólności (permutując w razie potrzeby zmienne) założymy zatem, że  $DF(\mathbf{p}) = (D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}), D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{p}))$ , gdzie  $D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p})$  jest macierzą o  $n$  kolumnach i  $m$  wierszach, zaś  $D_{\mathbf{y}} F(\mathbf{p})$  – odwracalną macierzą kwadratową  $m \times m$ . Wobec Twierdzenia 3.13, dla pewnego  $r > 0$  zbiór  $M \cap B(\mathbf{p}, r)$  jest wykresem funkcji  $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ , gdzie  $U$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ . Punkt  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a}))$  dla pewnego  $\mathbf{a} \in U$ . Oznaczmy jeszcze  $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ .

Funkcja  $G: U \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})), \quad \text{gdzie } \mathbf{x} \in U, \quad \text{tzn. } (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \Phi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{p}, r),$$

jest różniczkowalna na  $U$  i osiąga swój kres górny (lub dolny) w punkcie  $\mathbf{a} \in U$ . Dlatego, wobec wzoru na pochodną złożenia,

$$\mathbf{0} = DG(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{p})D\Phi(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{x}} g(\mathbf{p}) + D_{\mathbf{y}} g(\mathbf{p})D\varphi(\mathbf{a}).$$

Innymi słowy,  $\langle \operatorname{grad} g(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = (D_{\mathbf{x}} g(\mathbf{p}), D_{\mathbf{y}} g(\mathbf{p}))\mathbf{w} = 0$  dla każdego wektora  $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$ , gdzie  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  można wybrać dowolnie. Wobec Twierdzenia 3.26, obraz przekształcenia liniowego  $D\Phi(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  to przestrzeń styczna  $T_{\mathbf{p}} M$ , a więc otrzymaliśmy warunek

$$\langle \operatorname{grad} g(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}} M. \quad (3.16)$$

Wyprowadzimy stąd warunek (3.15). W tym celu opiszemy bazę przestrzeni  $V = (T_{\mathbf{p}} M)^{\perp}$ .

Twierdzenie 3.27 orzeką, iż  $T_{\mathbf{p}} M = \ker DF(\mathbf{p})$ . Wymiar  $T_{\mathbf{p}} M$  jest równy  $n$ , zatem  $\dim V = (n+m) - n = m$ . Wiersze macierzy  $DF(\mathbf{p})$ , tzn. wektory  $\operatorname{grad} F_i(\mathbf{p})$ , są ortogonalne do  $\ker DF(\mathbf{p})$ . Zatem,  $\operatorname{grad} F_i(\mathbf{p}) \in V$  dla  $i = 1, \dots, m$ . Ponadto, wektory  $\operatorname{grad} F_1(\mathbf{p}), \dots, \operatorname{grad} F_m(\mathbf{p})$  są liniowo niezależne, gdyż  $DF(\mathbf{p})$  jest epimorfizmem. Zatem,  $(\operatorname{grad} F_i(\mathbf{p}))_{i=1,\dots,m}$  jest bazą  $V$ . Warunek (3.16) oznacza zaś, że wektor  $\operatorname{grad} g(\mathbf{p}) \in V$ ; dlatego  $\operatorname{grad} g(\mathbf{p})$  jest kombinacją wektorów bazy  $V$ , tzn. wektorów  $\operatorname{grad} F_i(\mathbf{p})$ .  $\square$

Funkcję  $L(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{z})$ , gdzie liczby  $\lambda_i$  spełniają, przy założeniach ostatniego twierdzenia, warunek (3.15), nazywamy *funkcją Lagrange'a* (dla punktu  $\mathbf{p} \in M$ ). Badając drugą różniczkę tej funkcji, można w wielu sytuacjach sprawdzić, czy  $g$  ma w punkcie  $\mathbf{p}$  ekstremum lokalne związane na rozmaitości  $M$ , czy go nie ma.

**Definicja 3.29.** Założymy, że  $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  i  $F = (F_1, \dots, F_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Niech  $M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$ . Mówimy, że  $g$  ma w punkcie  $\mathbf{p} \in M$  minimum (odpowiednio: maksimum) lokalne związane na  $M$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego  $r > 0$  jest  $g(\mathbf{p}) \leq g(\mathbf{z})$  (odpowiednio:  $g(\mathbf{p}) \geq g(\mathbf{z})$ ) dla wszystkich  $\mathbf{z} \in M, \|\mathbf{z} - \mathbf{p}\| < r$ .

Jeśli nierówności są ostre, to mówi się, że ekstremum lokalne związane jest *właściwe*.

**Twierdzenie 3.30 (warunki dostateczne ekstremum lokalnego związanego).**

Niech  $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  i  $F = (F_1, \dots, F_m) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Przypuśćmy, że w punkcie  $\mathbf{p} \in M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$  przekształcenie  $DF(\mathbf{p})$  jest epimorfizmem i zachodzi (3.15), tzn.

$$\text{grad } g(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \text{grad } F_i(\mathbf{p}).$$

Niech  $L = g - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wówczas:

- (i) Jeśli  $D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) > 0$  (odpowiednio,  $D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) < 0$ ) dla wszystkich  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$ , to  $g$  ma w  $\mathbf{p} \in M$  właściwe minimum (odpowiednio: maksimum) lokalne związane.
- (ii) Jeśli istnieją dwa wektory  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$  takie, że  $D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) > 0 > D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , to  $g$  nie ma w punkcie  $\mathbf{p}$  ekstremum lokalnego związanego.

**Dowód.** Bez zmniejszenia ogólności (można przesunąć układ współrzędnych w  $\mathbb{R}^{n+m}$  i dodać do  $g$  stałą) założymy, że  $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in M$ ,  $L(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = F_1(\mathbf{0}) = \dots = F_m(\mathbf{0}) = 0$ . Założymy ponadto, przenumerowując w razie potrzeby zmienne i stosując twierdzenie o funkcji uwikłanej, że  $M \cap B(\mathbf{p}, r)$  jest wykresem funkcji

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{p}, r).$$

Dla ustalenia uwagi, niech  $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Wobec Uwagi 3.15,  $\varphi$  jest klasy  $C^2$ . Niech  $\Phi$  będzie naturalną parametryzacją  $M$ , tzn.  $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in M$  dla  $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$  i  $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \mathbf{p}$ . Założymy, że  $D^2L(\mathbf{0}) > 0$  na  $T_{\mathbf{p}}M$ .

Aby wykazać tezę, zastosujemy wzór Taylora do funkcji  $L$ . Z warunku (3.15) wynika, że  $DL(\mathbf{0}) = Dg(\mathbf{0}) - \sum \lambda_i DF_i(\mathbf{0}) = 0$ . Dlatego dla  $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, r)$  jest

$$L(\mathbf{z}) = D^2L(\mathbf{0})(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + r_1(\mathbf{z}), \quad \text{gdzie } \lim_{\|\mathbf{z}\| \rightarrow 0} \frac{r_1(\mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|^2} = \mathbf{0}.$$

Podstawiając do tej równości

$$M \ni \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{0}) + D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x} + r_2(\mathbf{x}) = D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x} + r_2(\mathbf{x}),$$

gdzie reszta  $r_2(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| \rightarrow \mathbf{0}$  dla  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , dzięki dwuliniowości  $D^2L(\mathbf{0})$  otrzymujemy

$$L(\mathbf{z}) = D^2L(\mathbf{0})(D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}, D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{0}, r), \quad (3.17)$$

gdzie

$$R(\mathbf{x}) = r_1(\Phi(\mathbf{x})) + 2D^2L(\mathbf{0})(D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}, r_2(\mathbf{x})) + D^2L(\mathbf{0})(r_2(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x})). \quad (3.18)$$

Z założenia, forma  $D^2L(\mathbf{0})$  jest dodatnia na wektorach z przestrzeni stycznej. Istnieje więc stała  $\alpha > 0$  taka, że

$$D^2L(\mathbf{0})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha \|\mathbf{w}\|^2.$$

Biorąc wektor  $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x} \in T_{\mathbf{p}} M$  (tu stosujemy Twierdzenie 3.26!) otrzymujemy

$$D^2L(\mathbf{0})(D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}, D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}) \geq \alpha \|D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}\|^2 \geq \alpha \|\mathbf{x}\|^2. \quad (3.19)$$

Nietrudno stwierdzić – nie będziemy podawać formalnego dowodu w języku  $\varepsilon-\delta$  – że reszta  $R(\mathbf{x})$ , dana wzorem (3.18), jest równa  $o(\|\mathbf{x}\|^2)$  dla  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , tzn.  $|R(\mathbf{x})| < \alpha \|\mathbf{x}\|^2/2$  dla  $\|\mathbf{x}\|$  dostatecznie małych,  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ . Ostatecznie więc ze wzorów (3.17)-(3.19) otrzymujemy

$$L(\mathbf{z}) = L(\Phi(\mathbf{x})) \geq \alpha \|\mathbf{x}\|^2 + R(\mathbf{x}) \geq \frac{\alpha \|\mathbf{x}\|^2}{2} \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{0}, \delta).$$

Ponieważ  $L(\mathbf{0}) = 0$ , więc  $L(\mathbf{z}) > L(\mathbf{0})$  dla  $\mathbf{z} \in M \cap B(\mathbf{0}, \delta)$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ . Jednak na rozmaitości  $M$  jest  $F_1 = \dots = F_m = 0$  i dlatego

$$g(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) > L(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$$

dla wszystkich punktów  $\mathbf{z} \in M \cap B(\mathbf{0}, \delta)$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ . Dowód punktu (i) jest zakończony. Dowód punktu (ii) jest bardzo podobny. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie.  $\square$

Przejźmy do przykładów.

**Przykład 3.31 (długi, ale pouczający).** Niech  $n = 2$ ,  $m = 1$ . Znajdziemy wszystkie ekstrema lokalne związane funkcji  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  na powierzchni  $M$ , opisanej równaniem

$$F(x, y, z) := \frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 - 1 = 0.$$

Jak zobaczymy, na  $M$  jest 26 punktów, w których dla pewnej liczby  $\lambda$  zachodzi warunek Lagrange'a  $\operatorname{grad} g = \lambda \operatorname{grad} F$ . Stosując ostatnie twierdzenie, sprawdzamy, że w ośmiu z nich  $g$  ma maksimum warunkowe na  $M$ , a w sześciu – minimum warunkowe na  $M$ . W dwunastu pozostałych ‘podejrzanych’ punktach  $g$  nie ma ani minimum warunkowego, ani maksimum warunkowego.

Warunek (3.15) i równanie  $F \equiv 0$ , opisujące  $M$ , prowadzą do układu czterech równań:

$$2x = 4\lambda \frac{x^3}{3^4}, \quad 2y = 4\lambda \frac{y^3}{2^4}, \quad 2z = 4\lambda z^3, \quad (3.20)$$

$$\frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 = 1. \quad (3.21)$$

Mnożąc równania (3.20) odpowiednio przez  $x, y, z$ , a następnie dodając wyniki stronami, otrzymujemy

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2\lambda \left( \frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 \right) \stackrel{(3.21)}{=} 2\lambda > 0, \quad (3.22)$$

dla każdego punktu  $(x, y, z) \in M$ , który spełnia warunek z tezy Twierdzenia 3.28. Liczba  $\lambda \neq 0$ , gdyż współrzędne punktu  $(x, y, z) \in M$  nie mogą jednocześnie znikać.

Wypiszmy jeszcze funkcję Lagrange'a, która pomoże nam określić charakter punktów krytycznych funkcji  $g|_M$ . Mamy

$$L(x, y, z) = g(x, y, z) - \lambda F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left( \frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 - 1 \right).$$

Dlatego

$$D^2 L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - 12\lambda \frac{x^2}{3^4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 12\lambda \frac{y^2}{2^4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 12\lambda z^2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Układ równań (3.20)–(3.21) rozwiążemy, rozpatrując oddzielnie trzy przypadki.

*Przypadek 1:*  $xyz \neq 0$ . Dzieląc równania (3.20) odpowiednio przez  $4\lambda x$ ,  $4\lambda y$  i  $4\lambda z$ , otrzymujemy wtedy

$$x^2 = \frac{3^4}{2\lambda}, \quad y^2 = \frac{2^4}{2\lambda}, \quad z^2 = \frac{1}{2\lambda}. \quad (3.24)$$

Dlatego

$$2\lambda \stackrel{(3.22)}{=} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3^4 + 2^4 + 1}{2\lambda} = \frac{98}{2\lambda},$$

stąd zaś  $2\lambda = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ . Ostatecznie więc rozwiązaniami układu (3.20)–(3.21) są w tym przypadku

$$2\lambda = g(x, y, z) = 7\sqrt{2}, \quad x = \pm \frac{9}{\sqrt{7\sqrt{2}}}, \quad y = \pm \frac{4}{\sqrt{7\sqrt{2}}}, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{7\sqrt{2}}} \quad (3.25)$$

Ponieważ znaki  $\pm$  można dla każdej z trzech niewiadomych  $x, y, z$  wybrać oddziennie, więc takich rozwiązań jest 8. Macierz drugiej różniczki funkcji Lagrange'a w każdym z tych punktów określamy, wstawiając (3.24) do (3.23); prowadzi to do wyniku

$$D^2 L(x, y, z) = -4 \cdot \text{Id} \quad \text{dla } (x, y, z) \in M \text{ spełniających (3.25).}$$

Forma  $D^2 L(x, y, z)$  jest więc w każdym z tych ośmiu punktów ujemna (nie tylko na przestrzeni stycznej  $T_{(x,y,z)}M$ , ale po prostu na całej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ ). Wobec Twierdzenia 3.30 funkcja  $g|_M$  ma w każdym z tych punktów właściwe maksimum lokalne związane.

*Przypadek 2:* jedna współrzędna punktu  $(x, y, z)$  jest równa zero, a dwie są różne od zera. Rozwiązań tego typu jest 12. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy  $x = 0, yz \neq 0$ . (Są jeszcze analogiczne podprzypadki  $y = 0$  i  $xz \neq 0$  oraz  $z = 0$  i  $xy = 0$  – ich szczegółowe rozpatrzenie pozostawimy Czytelnikowi). Tym razem dzielimy drugie i trzecie z równań (3.20) przez  $4\lambda y$  i  $4\lambda z$  odpowiednio; otrzymujemy

$$x = 0, \quad y^2 = \frac{2^4}{2\lambda}, \quad z^2 = \frac{1}{2\lambda}. \quad (3.26)$$

Dlatego

$$2\lambda \stackrel{(3.22)}{=} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2^4 + 1}{2\lambda} = \frac{17}{2\lambda},$$

stąd zaś  $2\lambda = \sqrt{17}$ . Rozwiązaniami układu (3.20)–(3.21) są zatem

$$2\lambda = g(x, y, z) = \sqrt{17}, \quad x = 0, \quad y = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \quad (3.27)$$

Takich rozwiązań jest 4. Podobnie otrzymujemy rozwiązania

$$2\lambda = g(x, y, z) = \sqrt{82}, \quad x = \pm \frac{9}{\sqrt{82}}, \quad y = 0, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{82}} \quad (3.28)$$

$$2\lambda = g(x, y, z) = \sqrt{97}, \quad x = \pm \frac{9}{\sqrt{97}}, \quad y = \pm \frac{4}{\sqrt{97}}, \quad z = 0 \quad (3.29)$$

Dla każdego z rozwiązań (3.27) macierz

$$D^2L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ma wartości własne 2 i  $-4$ , nie jest więc ani dodatnia, ani ujemna na  $\mathbb{R}^3$ . Aby posłużyć się Twierdzeniem 3.30, należy jednak sprawdzić, jak zachowuje się macierz  $D^2L(x, y, z)$  na przestrzeni stycznej  $T_{(x,y,z)}M$ . Wobec Twierdzenia 3.27,

$$T_{(x,y,z)}M = \ker DF(x, y, z) = \left\{ (u, w, v) \in \mathbb{R}^3 : \frac{4x^3}{3^4} \cdot u + \frac{4y^3}{2^4} \cdot w + 4z^3 \cdot v = 0 \right\},$$

a ponieważ w przypadku (3.27) jest  $x = 0, yz \neq 0$ , więc

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}M &= \{(u, w, v) \in \mathbb{R}^3 : u \text{ jest dowolne}, \frac{4y^3}{2^4} \cdot w + 4z^3 \cdot v = 0\}, \\ D^2L(x, y, z)(u, w, v) &= 2u^2 - 4(w^2 + v^2). \end{aligned}$$

Ponieważ współrzędną  $u$  wektora  $(u, w, v)$  stycznego do  $M$  możemy manipulować dowolnie, więc druga różniczka funkcji Lagrange'a przybiera na przestrzeni stycznej do  $M$  zarówno wartości dodatnie, jak ujemne. Wobec Twierdzenia 3.30 (ii), funkcja  $g$  nie ma w takich punktach ekstremum lokalnego związanego.

*Przypadek 2: dwie współrzędne punktu  $(x, y, z)$  są równe zero, a jedna jest różna od zera.*  
Dla ustalenia uwagi przyjmijmy  $x = y = 0, z \neq 0$ . Wtedy z równań (3.20)–(3.22) otrzymujemy po łatwym rachunku

$$x = y = 0, \quad z = \pm 1, \quad 2\lambda = z^2 = 1. \quad (3.30)$$

Pozostałe rozwiązania tego typu to

$$x = z = 0, \quad y = \pm 2, \quad 2\lambda = 4; \quad (3.31)$$

$$y = z = 0, \quad x = \pm 3, \quad 2\lambda = 9. \quad (3.32)$$

W takich punktach (jest ich razem 6) funkcja  $g|_M$  ma właściwe minima lokalne związane. Rozpatrzmy np. zachowanie  $g$  w otoczeniu punktów (3.30). Mamy w nich  $DF(x, y, z) = (0, 0, \pm 4)$  i

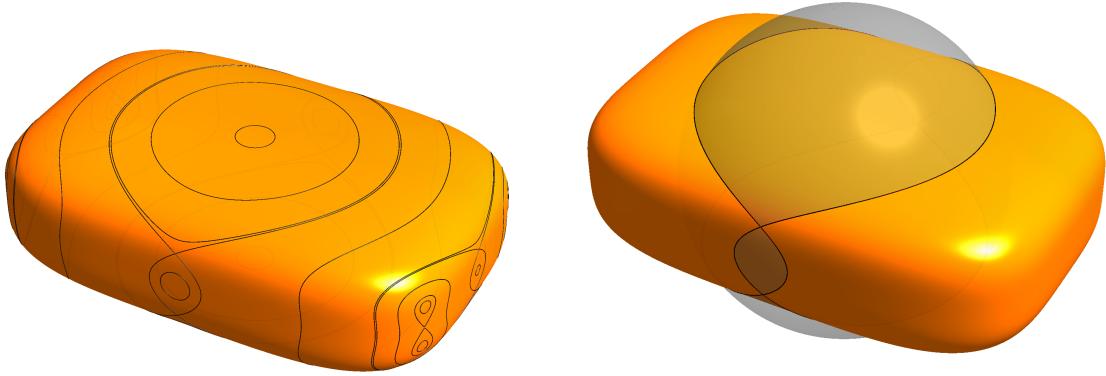
$$T_{(x,y,z)}M = \ker DF(x, y, z) = \{(u, w, v) \in \mathbb{R}^3 : v = 0\}.$$

Tym razem

$$D^2L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

więc  $D^2L(x, y, z)((u, w, v), (u, w, v)) = 2(u^2 + w^2)$  dla  $(u, w, v) \in T_{(x,y,z)}M$ , tzn.  $D^2L(\mathbf{p})$  jest dodatnia na  $T_{\mathbf{p}}M$ . Podobnie jest w punktach (3.31)–(3.32). Są to więc minima  $g|_M$ .

Porównując wartości  $g(x, y, z) = 2\lambda$  w znalezionych punktach, stwierdzimy łatwo, że  $\inf_M g = 1$  i  $\sup_M g = \sqrt{98}$ .



Z lewej: powierzchnia  $M$  przypomina prostopadłościan o wyokrąglonych krawędziach i rogach. Czarnym kolorem zaznaczono poziomice funkcji  $g|_M$ . Widać wyraźnie trzy minima lokalne związane  $g|_M$  i dwa jej maksima lokalne związane. W punktach skrzyżowań poziomic  $g|_M$  nie ma ekstremum związaneego.

Z prawej: każda ze sfer, na których  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ma stałą wartość, przecina  $M$  wzdłuż poziomicy  $g|_M = \text{const.}$  Na rysunku wskazano poziomicę, odpowiadającą punktom (3.27), w których funkcja  $g|_M$  ma siodła.

## Rozdział 4

# Elementy teorii miary

Zajmiemy się teraz całkowaniem funkcji wielu zmiennych. Czytelnik wie już, że do ważnych zastosowań całki należy obliczanie pól i objętości. Okazuje się, że pytania *jakie funkcje wolno (próbować) całkować? dla jakich podzbiorów przestrzeni można w ogóle określić ich objętość?* są subtelne, a odpowiedzi na te pytania wymagają głębokiego wniknięcia w pogranicze teorii mnogości i topologii.

Zacznijmy od przykładu, który dobrze wyjaśnia, że funkcji, która miałaby naturalne pożądane cechy *miary*, nie można określić na *wszystkich* podzbiorach prostej.

**Przykład 4.1 (G. Vitali).** Nie istnieje funkcja  $\mu: 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ , która spełniałaby następujące warunki:

- (i)  $\mu([a, b]) = b - a$  dla każdego przedziału  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (iii) *przeliczalna addytywność*: Jeśli zbiory  $A_i \subset \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , są parami rozłączne, to  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ;
- (iv) *niezmienność ze względu na przesunięcia*: dla każdego zbioru  $V \subset \mathbb{R}$  i każdej liczby  $t \in \mathbb{R}$  jest  $\mu(t + V) = \mu(V)$ .

Przypuśćmy, że taka funkcja  $\mu$  jednak istnieje. Określmy relację w zbiorze  $\mathbb{R}$ : przyjmijmy, że  $x \sim y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Łatwo zauważyc, że jest to relacja równoważności:  $x \sim x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , gdyż  $x - x = 0$ , a  $0 \in \mathbb{Q}$ ; jeśli  $x \sim y$ , to także  $y \sim x$ , gdyż  $y - x = -(x - y)$  jest liczbą wymierną, gdy  $x - y \in \mathbb{Q}$ ; wreszcie,  $x \sim y$  i  $y \sim z$  pociąga za sobą  $x \sim z$ , gdyż  $x - z = (x - y) + (y - z)$ , a suma dwóch liczb wymiernych jest wymierna.

Każda klasa abstrakcji  $[x]$  ma reprezentanta  $y \in [0, 1]$ ; to wynika stąd, że  $x \sim x + k$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  i każdego  $k \in \mathbb{Z}$ . Korzystając z aksjomatu wyboru, utwórzmy zbiór  $V \subset [0, 1]$ , który zawiera dokładnie jednego reprezentanta każdej klasy abstrakcji. Rozpatrzmy zbiór

$$W = \bigcup_{t \in Q \cap [-1, 1]} (t + V),$$

tz. sumę mnogościową przesunięć  $t + V$  zbioru  $V$  o wektory wymierne  $t$  z przedziału  $[-1, 1]$ . Ponieważ  $V \subset [0, 1]$ , więc  $W \subset [-1, 2]$ . Ponadto, dla różnych  $t_1, t_2$  zbiory  $t_1 + V$  i  $t_2 + V$  są rozłączne: gdyby  $t_1 + v_1 = t_2 + v_2$  dla pewnych  $t_1 \neq t_2 \in \mathbb{Q}$  i  $v_1, v_2 \in V$ , to mielibyśmy  $v_1 - v_2 = t_2 - t_1 \in \mathbb{Q}$  i  $v_2 \neq v_1$ , tzn.  $v_1 \sim v_2$  byłyby różnymi elementami tej samej klasy abstrakcji, wbrew definicji  $V$ .

Jeśli  $\mu$  spełnia warunki (i)–(iv), to  $\mu(A) \leq \mu(B)$  dla  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ . Dlatego

$$\begin{aligned} 3 &= \mu([-1, 2]) \geq \mu(W) = \mu\left(\bigcup_{t \in Q \cap [-1, 1]} (t + V)\right) \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{=} \sum_{t \in Q \cap [-1, 1]} \mu(t + V) \stackrel{\text{(iv)}}{=} \mu(V) + \mu(V) + \mu(V) + \dots \end{aligned}$$

Gdyby  $\mu(V) > 0$ , to prawa strona byłaby nieskończona. Otrzymujemy więc  $\mu(V) = 0$ , stąd zaś  $\mu(W) = 0 + 0 + \dots = 0$ .

Z drugiej strony, zbiór  $W$  zawiera cały przedział  $[0, 1]$ . Istotnie, niech  $x \in [0, 1]$  będzie dowolną liczbą. Wybierzmy  $v \in V$  tak, aby  $x \sim v$ ; jest to możliwe, gdyż zbiór  $V$  zawiera reprezentanta każdej klasy abstrakcji. Wtedy  $t = x - v \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$  i  $x = t + v \in t + V \subset W$ .

Zatem

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(W) = 0.$$

Ta sprzeczność dowodzi, że nie istnieje funkcja  $\mu$ , spełniająca warunki (i)–(iv).  $\square$

W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nawet rezygnacja z przeliczalnej addytywności na rzecz skończonej addytywności nie pomaga: jak udowodnili Banach i Tarski, kulę jednostkową w  $\mathbb{R}^3$  można podzielić na pięć (parami rozłącznych) zbiorów  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , a następnie wskazać pięć izometrii  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  takich, że

$$B(0, 1) = g_1(A_1) \cup g_2(A_2) \cup g_3(A_3) = g_4(A_4) \cup g_5(A_5),$$

gdzie każda z dwóch sum jest sumą zbiorów parami rozłącznych. Gdyby więc istniała skończona addytywna funkcja nieujemna  $\mu$ , określona na wszystkich podzbiorach  $\mathbb{R}^3$  i niezmiennicza ze względu na izometrie, to mielibyśmy

$$\mu(B(0, 1)) = \sum_{i=1}^5 \mu(A_i) = \sum_{i=1}^5 \mu(g_i(A_i)) = 2\mu(B(0, 1)).$$

(Konstrukcja takiego paradoksalnego rozkładu kuli wykorzystuje, oprócz aksjomatu wyboru, fakt, że składanie obrotów w  $\mathbb{R}^3$  nie jest przemienne, a grupa obrotów zawiera podgrupę wolną o dwóch generatorach.)

Podobne przykłady wskazują, że jakieś ograniczenie klasy zbiorów, dla których będziemy określać *miarę*, jest rzeczą konieczną.

## 4.1 Podstawowe pojęcia. Twierdzenie Carathéodory'ego

Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem. Będziemy używać oznaczenia  $[0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\} = \mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\}$ .

**Definicja 4.2 (ciało i  $\sigma$ -ciało zbiorów).** Powiemy, że rodzina zbiorów  $\mathcal{F} \subset 2^X$  jest *ciąłem* wtedy i tylko wtedy, gdy

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
- (ii) Jeśli  $A \in \mathcal{F}$ , to także  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ ;

(iii) Jeśli  $A, B \in \mathcal{F}$ , to  $A \cup B \in \mathcal{F}$ .

Gdy spełniony jest także warunek

(iv) Dla wszystkich  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$  zbiór  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ,

to mówimy, że  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem (lub: ciałem przeliczalnie addytywnym).

**Uwaga 4.3.** Korzystając ze wzorów De Morgana, łatwo jest wykazać, że jeśli  $\mathcal{F} \subset 2^X$  jest ciałem zbiorów i  $A, B \in \mathcal{F}$ , to  $A \cap B \in \mathcal{F}$  oraz  $A \setminus B \in \mathcal{F}$ . Istotnie,

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{F},$$

a więc także  $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{F}$ . Dalej,  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{F}$ . Podobnie dowodzi się, że każde  $\sigma$ -ciało jest zamknięte ze względu na branie przeliczalnych przecięć.

□

Nietrudno podać kilka prostych przykładów ciał i  $\sigma$ -ciał. Rodzina  $2^X$  wszystkich podzbiorów zbioru  $X$  jest zarówno ciałem, jak i  $\sigma$ -ciałem. Rodzina

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N}: A \text{ lub } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}$$

jest ciałem, ale nie jest  $\sigma$ -ciałem: suma przeliczalnie wielu zbiorów skończonych może być zbiorem nieskończonym, którego uzupełnienie też jest nieskończonym. Rodzina

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ lub } \mathbb{R} \setminus A \text{ jest zbiorem (co najwyżej) przeliczalnym}\}$$

jest  $\sigma$ -ciałem<sup>1</sup>.

**Przykład 4.4.** Niech  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  będzie dowolną rodziną  $\sigma$ -ciał (odpowiednio: ciał) podzbiorów zbioru  $X$ . Wtedy

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \subset 2^X$$

też jest  $\sigma$ -ciałem (odpowiednio: ciałem). To wynika wprost z definicji: każde z  $\mathcal{F}_i$  jest zamknięte ze względu na odpowiednie działania na zbiorach, więc część wspólna  $\mathcal{F}_i$  też jest zamknięta ze względu na te same działania.

**Uwaga 4.5.** Z powyższego przykładu wynika, że dla każdej niepustej rodziny zbiorów  $\mathcal{G} \subset 2^X$  istnieje *najmniejsze* (ze względu na inkluzyję)  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F} \subset 2^X$  takie, że  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ : jest to przecięcie rodziny wszystkich  $\sigma$ -ciał, zawierających  $\mathcal{G}$  (jest to rodzina niepusta, gdyż należy do niej  $\sigma$ -ciało  $2^X$ ).

**Definicja 4.6 (zbiory borełowskie).** Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną. Najmniejsze  $\sigma$ -ciało, zawierające wszystkie zbiory otwarte w przestrzeni  $X$ , nazywamy  $\sigma$ -ciałem zbiorów borełowskich w  $X$  i oznaczamy  $\mathcal{B}(X)$ .

Z  $\sigma$ -ciałem  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  zbiorów borełowskich w  $\mathbb{R}^n$  zetkniami się wielokrotnie.

---

<sup>1</sup>To łatwo wynika z twierdzenia, orzekającego, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

**Definicja 4.7 (miara zewnętrzna).** Funkcję  $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  nazywamy *miarą zewnętrzną* na  $X$ , jeśli  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(A) \leq \mu(B)$  dla wszystkich  $A \subset B \subset X$  i wreszcie

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad \text{dla wszystkich } A_1, A_2, \dots \in 2^X. \quad (4.1)$$

Własność (4.1) nazywa się *przeliczalną podaddytywnością* miary zewnętrzne.

**Definicja 4.8 (miara).** Niech  $\mathcal{F} \subset 2^X$  będzie  $\sigma$ -ciałem. Funkcję  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  nazywamy *miarą* na  $\mathcal{F}$ , jeśli  $\mu(\emptyset) = 0$  oraz

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{dla wszystkich parami rozłącznych } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}. \quad (4.2)$$

Własność (4.2) nazywa się *przeliczalną addytywnością* miary.

Podamy teraz kilka prostych własności miary, wynikających łatwo z definicji, następnie zaś sformułujemy ważne twierdzenie, wskazujące, jak dla danej miary zewnętrznej  $\mu^*$  na  $X$  wyróżnić pewne  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F} \subset 2^X$ , na którym funkcja  $\mu^*$  – jak za dotknięciem czarodziejskiej róźdżki – staje się miarą, tzn. spełnia nie tylko (4.1), ale i mocniejszy, naturalny warunek (4.2).

**Stwierdzenie 4.9.** Niech  $\mathcal{F} \subset 2^X$  będzie  $\sigma$ -ciałem, a  $\mu$  – miarą na  $\mathcal{F}$ . Wówczas:

- (i)  $\mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$  dla wszystkich  $A \subset B \in \mathcal{F}$ ;
- (ii) jeśli  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots, A_i \in \mathcal{F}$ , to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i);$$

- (iii) jeśli  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, A_i \in \mathcal{F}$  i  $\mu(A_1) < \infty$ , to

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**Dowód.** Własność (i), tzw. *monotoniczność* miary, uzyskujemy, kładąc w (4.2)  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B \setminus A \in \mathcal{F}$  i  $A_j = \emptyset$  dla  $j \geq 3$ . Wtedy  $\bigcup A_j = A \cup (B \setminus A) = B$  i zbiory  $A_j$  są parami rozłączne. Dlatego, wobec (4.2),

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Aby wykazać (ii), przyjmiemy  $P_1 = A_1$  i  $P_j = A_j \setminus A_{j-1}$  dla  $j = 2, 3, \dots$ . Wtedy  $\bigcup A_j = \bigcup P_j$ , zaś wobec założenia  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$  zbiory  $P_j$  są parami rozłączne. Dlatego, wobec równości  $\mu(P_j) = \mu(A_j) - \mu(A_{j-1})$ ,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \\ &= \mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + (\mu(A_3) - \mu(A_2)) + \dots \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j), \end{aligned}$$

gdyż  $\mu(A_j)$  jest  $j$ -tą sumą częściową szeregu  $\sum \mu(P_j)$ .

Dla dowodu (iii) zauważmy, że na mocy wzorów De Morgana

$$A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \quad \text{gdzie } B_j = A_1 \setminus A_j$$

Zbiory  $B_j$  tworzą ciąg wstępujący, tzn.  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$ . Na mocy udowodnionych już punktów (i) oraz (ii),

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \stackrel{(i)}{=} \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) \stackrel{(i)}{=} \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

**Uwaga 4.10.** Założenie  $\mu(A_1) < \infty$  w Stwierdzeniu 4.9 (iii) jest istotne. Jeśli np. na  $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$  weźmiemy miarę liczącą, która każdemu zbiorowi  $A \subset \mathbb{N}$  przypisuje liczbę jego elementów  $\#A$ , to dla (nieskończonych) zbiorów  $A_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}$  jest  $\mu(A_j) = +\infty$ , a zatem

$$+\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) > 0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

**Definicja 4.11 (warunek Carathéodory'ego).** Niech  $\mu^*$  będzie miarą zewnętrzna na  $X$ . Powiemy, że zbiór  $A \subset X$  spełnia warunek Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \quad \text{dla każdego zbioru } Z \subset X. \quad (4.3)$$

**Twierdzenie 4.12 (C. Carathéodory).** Niech  $\mu^*$  będzie miarą zewnętrzna na  $X$ . Rodzina  $\mathcal{F} \subset 2^X$  wszystkich zbiorów  $A \subset X$ , spełniających warunek Carathéodory'ego, jest  $\sigma$ -ciąłem. Funkcja

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$$

jest miara, tzn. spełnia warunek przeliczalnej addytywności (4.2).

Twierdzenie Carathéodory'ego jest bardzo ważne, gdyż ułatwia konstrukcję różnych miar. Wystarczy skonstruować miarę zewnętrzna  $\mu^*$  (co jest łatwiejsze, gdyż warunki w definicji są słabsze!) na  $X$ , a następnie zawieźć dziedzinę funkcji  $\mu^*$  do rodziny tych zbiorów  $A$ , które spełniają (4.3). W taki właśnie sposób skonstruujemy w następnym podrozdziale miarę Lebesgue'a na  $\mathbb{R}^n$ , tzn. naturalny i ogólny odpowiednik długości przedziału w  $\mathbb{R}$ , pola wielokąta w  $\mathbb{R}^2$  czy objętości wielościanu w  $\mathbb{R}^3$ , określony jednak dla bardzo szerokiej klasy podzbiorów przestrzeni.

Co ciekawe, twierdzenie Carathéodory'ego nie wydaje się łatwe, gdyż warunek (4.3) nie jest szczególnie naturalny. Jednak, jak zobaczymy, dowód wprawdzie jest długi, ale nie jest zbyt trudny: w gruncie rzeczy polega na planowym i żmudnym, choć dość prostym sprawdzaniu kolejnych warunków.

**Dowód. Krok 1:** Zbiór pusty należy do  $\mathcal{F}$ , gdyż dla każdego  $Z$  jest  $\mu^*(Z) = 0 + \mu^*(Z \setminus \emptyset) = \mu^*(Z \cap \emptyset) + \mu^*(Z \setminus \emptyset)$ .

**Krok 2:** rodzina  $\mathcal{F}$  jest zamknięta ze względu na branie dopełnień. To wynika z faktu, że warunek Carathéodory'ego można zapisać w symetrycznej postaci

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus (X \setminus A)) + \mu^*(Z \cap (X \setminus A)).$$

*Krok 3:* jeśli  $A, B \in \mathcal{F}$ , to  $A \cup B \in \mathcal{F}$ . Aby to wykazać, piszemy  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$  oraz

$$Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup ((Z \setminus A) \cap B), \quad (4.4)$$

$$Z \setminus (A \cup B) = (Z \setminus A) \setminus B, \quad (4.5)$$

następnie zaś szacujemy, korzystając z podaddytywności  $\mu^*$ ,

$$\begin{aligned} & \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \\ & \stackrel{(4.4)}{\leq} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*((Z \setminus A) \cap B) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \\ & \stackrel{(4.5)}{=} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*((Z \setminus A) \cap B) + \mu^*((Z \setminus A) \setminus B) \\ & \stackrel{(4.3)}{=} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \stackrel{(4.3)}{=} \mu^*(Z) \end{aligned}$$

Nierówność przeciwna,  $\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B))$ , zachodzi na mocy podaddytywności funkcji  $\mu^*$ . Zatem zbiór  $A \cup B$  spełnia warunek Carathéodory'ego.

*Krok 4.* Wiemy już, że  $\mathcal{F}$  jest ciałem zbiorów. Dlatego (patrz Uwaga 4.3) iloczyn oraz różnica dwóch zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego też spełnia warunek Carathéodory'ego.

*Krok 5:* addytywność  $\mu^*$  na  $\mathcal{F}$ . Niech  $A, B \in \mathcal{F}$  będą zbiorami rozłącznymi. Zamieniając w warunku Carathéodory'ego (4.3) zbiór  $Z$  na  $Z \cap (A \cup B)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap (A \cup B)) &= \mu^*(Z \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*((Z \cap (A \cup B)) \setminus A) \\ &= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B), \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdzie dla  $A, B$  rozłącznych jest

$$Z \cap (A \cup B) \cap A = Z \cap A, \quad (Z \cap (A \cup B)) \setminus A = Z \cap B.$$

Dla  $Z = X$  otrzymujemy

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Przez łatwą indukcję względem  $m$  dowodzimy, że suma skończonej liczby zbiorów z  $\mathcal{F}$  też należy do  $\mathcal{F}$ . Ponadto, dla dowolnego  $Z \subset X$  zachodzi odpowiednik równości (4.6), mianowicie

$$\mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) \quad \text{dla } A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F} \text{ parami rozłącznych.} \quad (4.7)$$

*Krok 6:* rodzina  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem. Wystarczy w tym celu sprawdzić, że

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F} \quad \text{dla } A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots, \text{ parami rozłącznych,} \quad (4.8)$$

gdzie suma dowolnych zbiorów  $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots$ , jest równa sumie zbiorów

$$P_1 = A_1, \quad P_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \dots, \quad P_m = A_m \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}), \quad \dots,$$

które już są parami rozłączne (i też należą do  $\mathcal{F}$ , gdyż  $\mathcal{F}$  jest ciałem).

Niech więc odtąd  $A_j \in \mathcal{F}$ , gdzie  $j \in \mathbb{N}$ , będą parami rozłączne. Ustalmy  $m \in \mathbb{N}$ . Niech  $Z \in 2^X$  będzie dowolnym zbiorem. Korzystając z (4.7) i monotoniczności  $\mu^*$ , piszemy

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &= \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^m A_j\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j\right) \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j\right) \geq \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).\end{aligned}$$

Zatem, wszystkie sumy częściowe szeregu  $\sum_{j=1}^\infty \mu^*(Z \cap A_j)$  o wyrazach dodatnich są ograniczone. Szereg ten jest więc zbieżny, a jego suma spełnia nierówność

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Wobec przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej  $\mu^*$ , otrzymujemy stąd

$$L = \mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \geq \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = P.$$

Nierówność  $L \leq P$  jest oczywista; dlatego  $\bigcup_{j=1}^\infty A_j$  spełnia warunek Carathéodory'ego.

*Krok 7: przeliczalna addytywność  $\mu^*$  na  $\mathcal{F}$ .* Założymy, że zbiory  $A_j \in \mathcal{F}$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots$ , są parami rozłączne. Wobec (4.7) dla  $Z = X$  oraz monotoniczności  $\mu^*$ ,

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) \stackrel{(4.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j) \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots$$

Przechodząc do granicy  $m \rightarrow \infty$  po prawej stronie tej nierówności, otrzymujemy

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j).$$

Dzięki przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej  $\mu^*$ , ostatnia nierówność jest w istocie równością. Dowód całego Twierdzenia 4.12 jest zakończony.  $\square$

**Stwierdzenie 4.13.** *Jeśli  $\mu^*$  jest miarą zewnętrzną na  $X$  i  $\mu^*(A) = 0$  dla pewnego  $A \subset X$ , to  $A$  spełnia warunek Carathéodory'ego.*

Dowód. Dla każdego  $Z \subset X$  mamy, przy tych założeniach,  $0 = \mu^*(A) \geq \mu^*(Z \cap A) = 0$  i dlatego

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus A) \leq \mu^*(Z).$$

To spostrzeżenie kończy dowód.  $\square$

Samo twierdzenie Carathéodory'ego nie orzeka wprawdzie, jak duża jest rodzina zbiorów  $\mathcal{F}$  spełniających warunek (4.3). Jednak przy pewnych łagodnych założeniach dodatkowych, nałożonych na  $\mu^*$ ,  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$  jest dostatecznie obszerne.

**Definicja 4.14.** Niech  $\mu^*$  będzie miarą zewnętrzną na  $X$ . Każdy zbiór  $A \subset X$  spełniający warunek Carathéodory'ego, nazywamy zbiorem  $\mu^*$ -mierzalnym, a  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$ , o którym mowa w Twierdzeniu 4.12, oznaczamy  $\mathcal{F}(\mu^*)$ .

**Definicja 4.15.** Niech  $(X, \varrho)$  będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że miara zewnętrzna  $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  jest *miarą zewnętrzną metryczną*, jeśli

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

dla wszystkich  $A, B \subset X$ , których *odstęp*  $\text{dist}(A, B) > 0$ , gdzie

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} (\text{dist}(x, B)), \quad \text{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \varrho(x, y).$$

**Twierdzenie 4.16.** Niech  $(X, \varrho)$  będzie przestrzenią metryczną, zaś  $\mu^*$  – miarą zewnętrzną metryczną na  $X$ . Wówczas  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich  $\mathcal{B}(X)$  jest zawarte w  $\sigma$ -cięle  $\mathcal{F}(\mu^*)$ .

Dowód. Z uwagi na definicję  $\mathcal{B}(X)$ , wystarczy wykazać, że każdy zbiór otwarty  $\Omega \subset X$  należy do  $\mathcal{F}(\mu^*)$ .

Ustalmy zbiór otwarty  $\Omega \subset X$  i niech

$$\Omega_m = \left\{ x \in \Omega : \varrho(x, X \setminus \Omega) > \frac{1}{m} \right\} \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots$$

Wtedy  $\text{dist}(\Omega_m, X \setminus \Omega) \geq \frac{1}{m} > 0$ . Dalej, niech

$$P_m = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{m} < \varrho(x, X \setminus \Omega) \leq \frac{1}{m-1} \right\} \quad \text{dla } m = 2, 3, \dots$$

Zauważmy, że

$$\Omega \setminus \Omega_m = P_{m+1} \cup P_{m+2} \cup P_{m+3} \cup \dots \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots, \tag{4.9}$$

a ponadto

$$\text{dist}(P_i, P_j) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{i-1} \quad \text{dla } i > j+1, j \geq 2 \tag{4.10}$$

(to nietrudny wniosek z nierówności trójkąta). Aby sprawdzić, że zbiór  $\Omega$  spełnia warunek Carathéodory'ego, weźmy dowolny zbiór  $Z \subset X$ . Wystarczy wykazać, że

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega). \tag{4.11}$$

Jak widać, bez zmiany ogólności możemy przyjąć, że  $\mu^*(Z) < \infty$ . Ponieważ  $\mu^*$  jest miarą zewnętrzną metryczną, więc na mocy (4.10) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap P_{2j-1}) = \mu^*(Z \cap (P_1 \cup P_3 \cup \dots \cup P_{2m-1})) \leq \mu^*(Z)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap P_{2j}) = \mu^*(Z \cap (P_2 \cup P_4 \cup \dots \cup P_{2m})) \leq \mu^*(Z).$$

Zatem

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu^*(Z \cap P_j) \leq 2\mu^*(Z) < \infty \quad \text{dla każdego } m = 1, 2, \dots,$$

tzn. szereg  $\sum \mu^*(Z \cap P_j)$  jest zbieżny. Dlatego dzięki (4.9) otrzymujemy

$$\mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_j) \rightarrow 0 \quad \text{dla } m \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Ponieważ  $\text{dist}(\Omega_m, X \setminus \Omega) \geq \frac{1}{m} > 0$ , więc

$$\mu^*(Z \cap \Omega_m) + \mu^*\left(\underbrace{Z \cap (X \setminus \Omega)}_{=Z \setminus \Omega}\right) = \mu^*((Z \cap \Omega_m) \cup (Z \setminus \Omega)) \leq \mu^*(Z).$$

Przeto

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega) &\leq \mu^*(Z \cap \Omega_m) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) + \mu^*(Z \setminus \Omega) \\ &\leq \mu^*(Z) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) \end{aligned}$$

i w granicy  $m \rightarrow \infty$ , dzięki warunkowi (4.12),  $\mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega) \leq \mu^*(Z)$ .  $\square$

## 4.2 Konstrukcja i własności miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$

W tym podrozdziale przyjmiemy  $X = \mathbb{R}^n$ . W przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  rozpatrujemy metrykę euklidesową. Definiujemy także dwa porządkie częściowe w  $\mathbb{R}^n$ : piszemy  $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_i < y_i$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, n$ , zaś  $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_i \leq y_i$  dla  $i = 1, \dots, n$ .

**Definicja 4.17 (przedziały  $n$ -wymiarowe).** Założmy, że  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ . Zbiory

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \prec \mathbf{z} \prec \mathbf{y}\} \quad \text{oraz} \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}]_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{z} \preccurlyeq \mathbf{y}\}$$

nazywamy, odpowiednio,  $n$ -wymiarowym przedziałem otwartym i  $n$ -wymiarowym przedziałem domkniętym o końcach  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ . Odcinki  $[x_i, y_i] \subset \mathbb{R}$  nazywamy *krawędziami* takich przedziałów.

Czytelnik zechce zauważyc, że przedziały 2-wymiarowe to prostokąty, a przedziały 3-wymiarowe to prostopadłościany. Przedział domknięty jest po prostu iloczynem kartezjańskim swoich krawędzi,

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_n = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times \dots \times [x_n, y_n].$$

**Uwaga 4.18.** Jeśli  $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \dots = y_n - x_n$ , to przedział  $P = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]_n$  nazywamy *kostką* (domkniętą).

**Definicja 4.19 (objętość przedziału  $n$ -wymiarowego).** Jeśli  $P$  jest przedziałem o końcach  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ , to liczbę

$$\text{vol}(P) = \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)$$

nazywamy *objętością przedziału*  $P$ .

Zdefiniujemy teraz miarę zewnętrzną Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 4.20.** Dla każdego  $A \subset \mathbb{R}^n$  kładziemy

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(P_j) : \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ jest rodziną przedziałów pokrywającą } A \right\}.$$

**Uwaga 4.21.** W powyższej definicji można rozpatrywać tylko przedziały domknięte, albo tylko przedziały otwarte, albo przedziały obu rodzajów. Nie wpływa to na wartość  $\lambda_n^*(A)$ . Wnikliwy Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

**Stwierdzenie 4.22.** *Funkcja  $\lambda_n^*$  jest miarą zewnętrzną na  $\mathbb{R}^n$ .*

Dowód. Po pierwsze,  $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$ , gdyż zbiór pusty można, dla każdego  $\varepsilon > 0$ , przykryć jednym przedziałem o objętości  $\varepsilon^n$ . Po drugie, dla  $A \subset B$  jest  $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(B)$ ; to wynika wprost z definicji kresu dolnego, gdyż każda przeliczalna rodzina, która pokrywa zbiór  $B$ , pokrywa także  $A$ .

Pozostaje sprawdzić przeliczalną podaddytywność  $\lambda_n^*$ . Niech  $A_j \subset \mathbb{R}^n$  dla  $j = 1, 2, \dots$ . Bez zmniejszenia ogólności niech  $\lambda_n^*(A_j) < \infty$  dla wszystkich  $j \in \mathbb{N}$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  dobierzmy taką rodzinę przedziałów  $\{P_{j,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  pokrywającą zbiór  $A_j$ , żeby

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Sumując te nierówności ( kolejność sumowania nie gra roli, gdyż mamy do czynienia ze zbieżnymi szeregami o wyrazach dodatnich), otrzymujemy

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Rodzina  $\{P_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  jest przeliczalna i pokrywa zbiór  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Dlatego, z definicji,

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , kończymy dowód.  $\square$

**Twierdzenie 4.23.** *Funkcja  $\lambda_n^*$  jest miarą zewnętrzną metryczną na  $\mathbb{R}^n$ .*

Dowód. Niech  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  i  $\text{dist}(A, B) > 2d > 0$ . Aby wykazać, że  $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B)$ , wystarczy sprawdzić nierówność

$$\lambda_n^*(A \cup B) \geq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B), \tag{4.13}$$

gdyż wiemy już, że  $\lambda_n^*$  jest podaddytywna.

Ustalmy  $\varepsilon > 0$  oraz przeliczalną rodzinę  $\mathcal{P}$  przedziałów domkniętych pokrywającą zbiór  $A \cup B$  i taką, że

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \text{vol}(P) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Każdy przedział  $P \in \mathcal{P}$  możemy rozdrobnić, tzn. podzielić na  $m = k^n$  przystających przedziałów domkniętych  $P_1, \dots, P_m$ , dzieląc każdą krawędź  $P$  na  $k$  równych części. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że wtedy

$$\text{vol}(P) = \sum_{i=1}^m \text{vol}(P_i) = m \cdot \text{vol}(P_1) = k^n \cdot \text{vol}(P_1).$$

Dobierając do danego  $P$  odpowiednio dużą liczbę  $k = k(P)$ , uzyskamy wszystkie przedziały  $P_i$  o średnicy mniejszej niż  $d$ . Można więc bez zmniejszenia ogólności założyć, że  $\mathcal{P}$  składa się tylko z przedziałów o średnicy mniejszej niż  $d$ . Każdy z tych przedziałów może przecinać co najwyżej jeden ze zbiorów  $A$  i  $B$ , gdyż  $\text{dist}(A, B) > 2d$ . Usuńmy z  $\mathcal{P}$  te przedziały, które nie mają punktów wspólnych z  $A \cup B$  i otrzymaną rodzinę podzielmy na dwie,  $\mathcal{P}_A$  i  $\mathcal{P}_B$ , złożone odpowiednio z przedziałów, mających punkty wspólne z  $A$  i przedziałów, mających punkty wspólne z  $B$ . Jest jasne, że  $\mathcal{P}_A$  pokrywa  $A$ , zaś  $\mathcal{P}_B$  pokrywa  $B$ . Dlatego

$$\lambda_n^*(A) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_A} \text{vol}(P), \quad \lambda_n^*(B) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_B} \text{vol}(P).$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_A} \text{vol}(P) + \sum_{P \in \mathcal{P}_B} \text{vol}(P) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}} \text{vol}(P) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dostajemy warunek (4.13), co kończy dowód.  $\square$

**Definicja 4.24.** Miara zewnętrzna  $\lambda_n^*$  ograniczona do  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}(\lambda_n^*) =: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  podzbiorów  $\lambda_n^*$ -mierzalnych przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  nazywa się *miarą Lebesgue'a* w  $\mathbb{R}^n$ .

Elementy  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  nazywamy *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a* w  $\mathbb{R}^n$ , lub krótko: *zbiorami  $\lambda_n$ -mierzalnymi*. Dla  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  piszemy  $\lambda_n^*(A) = \lambda_n(A)$ .

Aby opisać zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a nieco dokładniej, wprowadzimy dwie klasy podzbiorów  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 4.25.** Zbiór  $G \subset \mathbb{R}^n$  nazywa się *zbiorem klasy  $G_\delta$*  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory otwarte  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , takie, że

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Zbiór  $F$  jest *klasy  $F_\sigma$*  wtedy i tylko wtedy, gdy jego uzupełnienie  $\mathbb{R}^n \setminus F$  jest zbiorem klasy  $G_\delta$ .

Inaczej mówiąc, zbiory klasy  $G_\delta$  to przeliczalne przecięcia zbiorów otwartych, a zbiory klasy  $F_\sigma$  to przeliczalne sumy zbiorów domkniętych. Każdy zbiór otwarty jest oczywiście klasy  $G_\delta$ , a każdy zbiór domknięty jest klasy  $F_\sigma$ . Zbiór liczb wymiernych jest klasy  $F_\sigma$ , bo jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów jednopunktowych, ale nie jest klasy  $G_\delta$  (to wynika z twierdzenia Baire'a, które Czytelnik poznał na wykładach z topologii). Każdy przedział w  $\mathbb{R}$  jest jednocześnie zbiorem klasy  $G_\delta$  i  $F_\sigma$ .

Wprost z definicji wynika, że zarówno zbiory klasy  $G_\delta$ , jak i zbiory klasy  $F_\sigma$ , są zbiarami borelowskimi.

**Twierdzenie 4.26 (charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a).**

Niech  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Następujące warunki są wówczas równoważne:

- (i)  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ;
- (ii) Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór otwarty  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  taki, że  $A \subset \Omega$  i  $\lambda_n^*(\Omega \setminus A) < \varepsilon$ ;
- (iii) Istnieje zbiór  $G \subset \mathbb{R}^n$  typu  $G_\delta$  taki, że  $A \subset G$  i  $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$ ;
- (iv) Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór domknięty  $F \subset \mathbb{R}^n$  taki, że  $F \subset A$  i  $\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon$ ;
- (v) Istnieje zbiór  $F \subset \mathbb{R}^n$  typu  $F_\sigma$  taki, że  $F \subset A$  i  $\lambda_n^*(A \setminus F) = 0$ .

Dowód. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Przedstawmy zbiór  $A$  jako sumę zbiorów mierzalnych i ograniczonych,

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad A_1 = A \cap B(\mathbf{0}, 1), \quad A_j = A \cap (B(\mathbf{0}, j) \setminus B(\mathbf{0}, j-1)) \text{ dla } j \geq 2.$$

Mierzalność  $A_j$  wynika z mierzalności kul otwartych (które należą do  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ) i z faktu, że  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  jest ciałem.

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  wybierzmy rodzinę przedziałów otwartych  $\{P_{j,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , pokrywającą  $A_j$  zbiór  $A_j$  i taką, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}. \quad (4.14)$$

Niech  $\Omega_j$  będzie sumą wszystkich przedziałów rodziny  $\mathcal{P}_j$ . Oczywiście,  $\Omega_j$  jest zbiorem otwartym. Ponadto,

$$\lambda_n(A_j) \leq \lambda_n(\Omega_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(P_{j,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \lambda_n(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} < \infty,$$

gdyż zbiór  $A_j$  zawiera się w pewnym przedziale, a miara Lebesgue'a każdego przedziału wprost z definicji jest mniejsza lub równa od jego objętości. Ponieważ  $\Omega_j$  ma miarę skończoną i  $A_j \subset \Omega_j$ , więc

$$\lambda_n(\Omega_j \setminus A_j) = \lambda_n(\Omega_j) - \lambda_n(A_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Niech  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ ; wboec otwartości wszystkich  $\Omega_j$  zbiór  $\Omega$  jest otwarty, a dzięki monotoniczności i przeliczalnej addytywności miary

$$\lambda_n(\Omega \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(\Omega_j \setminus A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Dla  $m = 1, 2, \dots$  wybierzmy zbiór otwarty  $\Omega_m \supset A$  tak, aby  $\lambda_n^*(\Omega_m \setminus A) < 1/m$ . Zbiór  $G = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m$  jest typu  $G_\delta$ ,  $A \subset G$  i mamy

$$\lambda_n^*(G \setminus A) \leq \lambda_n^*(\Omega_m \setminus A) \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0 \quad \text{dla } m \rightarrow \infty.$$

Zatem  $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$  i otrzymaliśmy warunek (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Każdy zbiór  $G$  typu  $G_\delta$  jest borelowski (jako przeciecie przeliczalnie wielu zbiorów otwartych), więc jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Mamy też  $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$ , zbiór  $G \setminus A$  jest więc mierzalny na mocy Stwierdzenia 4.13. Ponieważ  $A \subset G$ , więc

$$A = G \setminus (G \setminus A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

jako różnica dwóch zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Aby zakończyć cały dowód, zauważmy, że (iv) zachodzi dla  $\mathbb{R}^n \setminus A$  wtedy i tylko wtedy, gdy (ii) zachodzi dla  $A$ . Stąd i z praw De Morgana wynika równoważność (ii) oraz (iv). Podobnie uzyskuje się równoważność (iii) oraz (v).  $\square$

**Wniosek 4.27.** Każdy zbiór  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  jest sumą pewnego zbioru borelowskiego i pewnego zbioru  $Z$  takiego, że  $\lambda_n(Z) = 0$

Dowód. Teza wynika z równoważności (i)  $\Leftrightarrow$  (v) w ostatnim twierdzeniu, gdyż każdy zbiór  $F$  typu  $F_\sigma$  należy do  $\sigma$ -ciała zbiorów borelowskich  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Uwaga 4.28.** Wynika stąd, że  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  jest istotnie większe niż  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ : każdy podzbiór zbioru miary zero jest zbiorem mierzalnym, a ponieważ istnieją zbiory miary zero i mocy continuum (np. zbiór Cantora, z którym Czytelnik zetknął się podczas wykładów Analizy I), więc rodzina  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  jest równoliczna z rodziną  $2^{\mathbb{R}^n}$  wszystkich podzbiorów  $\mathbb{R}^n$ , natomiast  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  jest “zaledwie” mocy continuum.  $\square$

Znamy w tej chwili formalną definicję miary Lebesgue'a  $\lambda_n$  i  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , na którym jest określona. Nie potrafimy jednak obliczać miary zbyt wielu zbiorów (wyjawszy, być może, zbiory miary zero). Zaczniemy od prostego stwierdzenia, potwierdzającego, że – zgodnie z naturalną intuicją – miara Lebesgue'a przedziału  $n$ -wymiarowego jest równa jego objętości.

**Stwierdzenie 4.29.** Dla każdego przedziału  $P$  jest  $\text{vol}(P) = \lambda_n(P)$ .

Dowód. Z konstrukcji wynika, że  $\lambda_n(P) \leq \text{vol}(P)$ : przedział sam jest swoim (co najwyżej przeliczalnym) pokryciem, a miarę zewnętrzną definiujemy jako kres dolny sum objętości dla wszystkich pokryć. Wykażemy, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  zachodzi nierówność  $\text{vol}(P) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon$ ; to wystarczy, żeby zakończyć dowód.

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Bez zmniejszenia ogólności założymy, że  $P$  jest przedziałem domkniętym. Dobierzmy rodzinę  $\mathcal{R}$  przedziałów otwartych  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  pokrywającą  $P$  i taką, że

$$\sum_{R_i \in \mathcal{R}} \text{vol}(R_i) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Ponieważ  $P$  jest zbiorem zwartym, więc z rodziny  $\mathcal{P}$  można wybrać podrodzinę skończoną  $R_1, \dots, R_N$ , stanowiącą pokrycie  $P$ . Mamy zatem

$$\sum_{i=1}^N \text{vol}(R_i) \leq \sum_{R_i \in \mathcal{R}} \text{vol}(R_i) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Niech  $d > 0$  będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia  $R_1, \dots, R_N$  zbioru  $P$ . Podzielmy przedział  $P$  na  $m = k^n$  przystających przedziałów  $P_j$ , dzieląc każdą krawędź na  $k$  równych odcinków.

Dla dostatecznie dużego  $k$  każdy z przedziałów  $P_j$  ma średnicę mniejszą niż  $d/2$ , więc jest zawarty w którymś z przedziałów  $R_1, \dots, R_N$ . Dlatego

$$\text{vol}(P) = \sum_{i=j}^m \text{vol}(P_j) \leq \sum_{i=1}^N \left( \sum_{\{j: P_j \subset R_i\}} \text{vol}(P_j) \right) \leq \sum_{i=1}^N \text{vol}(R_i) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uzyskujemy nierówność  $\text{vol}(P) \leq \lambda_n(P)$ .  $\square$

**Stwierdzenie 4.30.** *Dla każdego zbioru  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  i każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  zbiór  $\mathbf{x} + A$  jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i  $\lambda_n(\mathbf{x} + A) = \lambda_n(A)$ .*

Dowód. Mierzalność  $\mathbf{x} + A$  uzyskujemy, korzystając z Twierdzenia 4.26. Równość miar obu zbiorów łatwo wynika stąd, że objętość przedziału jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Przesuwając każdy element pokrycia zbioru  $A$  o wektor  $\mathbf{x}$ , uzyskamy pokrycie zbioru  $\mathbf{x} + A$ ; stąd wynika, że  $\lambda_n(\mathbf{x} + A) \leq \lambda_n(A)$ , a ponieważ  $A = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + A)$ , to zachodzi także nierówność przeciwna.  $\square$

Wykażemy teraz, że niezmienniczość ze względu na przesunięcia charakteryzuje miarę Lebesgue'a z dokładnością do stałego czynnika. Ta charakteryzacja pozwoli nam później wyjaśnić, jak zmienia się miara Lebesgue'a, gdy zbiory mierzalne poddajemy przekształceniom liniowym (składiną, ta własność miary jest kluczem do wielowymiarowego twierdzenia o zamianie zmiennych w całce).

**Twierdzenie 4.31.** *Załóżmy, że  $\mu$  jest miarą na  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli  $\mu(A) = \mu(\mathbf{x} + A)$  dla wszystkich  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i ponadto  $\mu(P)$  jest skończona i dodatnia dla każdego przedziału  $P$ , to wówczas*

$$\mu(A) = c \cdot \lambda_n(A), \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \tag{4.15}$$

gdzie  $c = \mu([0, 1]^n)$ .

W dowodzie tego twierdzenia posłużymy się dwoma lematami, które zasługują na oddzielne odnotowanie.

**Lemat 4.32.** *Jeśli  $H \subset \mathbb{R}^n$  jest podprzestrzenią afaniczną wymiaru  $k < n$ , a  $\mu$  miarą niezmienniczą ze względu na przesunięcia, skońzoną na przedziałach i określoną na pewnym  $\sigma$ -ciele, zawierającym  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , to  $\mu(H) = 0$ .*

**Lemat 4.33.** *Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym. Oznaczmy przez  $\mathcal{P}_m$ , gdzie  $m = 0, 1, 2, \dots$ , rodzinę wszystkich kostek w  $\mathbb{R}^n$  o krawędziach długości  $1/2^m$  i wszystkich wierzchołkach w punktach  $k/2^m$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Istnieje wtedy przeliczalna rodzina  $\{Q_i\}_{i \in I}$  kostek z  $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots$ , o wnętrzach parami rozłącznych, taka, że*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} Q_i.$$

**Uwaga.** Rodzinę  $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots$  nazywa się czasem *kostkami diadycznymi*. Kostki z  $\mathcal{P}_{m+1}$  (inaczej: tzw. *kostki*  $(m+1)$ -szej generacji) powstają z kostek rodziny  $\mathcal{P}_m$ , tj. kostek  $m$ -tej generacji, przez podział wszystkich krawędzi na dwie równe części (jedna kostka z  $\mathcal{P}_m$  jest wtedy dzielona na  $2^n$  kostek z  $\mathcal{P}_{m+1}$ , mających parami rozłączne wnętrza).

Dowód LEMATU 4.32. Dla  $m = 1, 2, \dots$  położmy  $H_m = H \cap B(\mathbf{0}, m)$ . Zbiór  $H_m$  jest  $\mu$ -mierzalny (należy do dziedziny  $\mu$ ), gdyż  $H$  i kula  $B(\mathbf{0}, m)$  są zbiorami borelowskimi.

Ponieważ  $\dim H < n$ , więc istnieje wektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$  prostopadły do  $H$ . Niech

$$H_{m,j} = H_m + \frac{1}{j} \mathbf{v}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Przy ustalonym  $m$  zbiory  $H_{m,j}$  są parami rozłączne. Są też zawarte w kuli  $B(\mathbf{0}, m+1)$ ; to wynika z nierówności trójkąta (do wektorów z  $H_m$  dodajemy wektor  $\mathbf{v}/j$ , którego norma nie przekracza 1). Miara  $\mu$  jest skończona na przedziałach i niezmiennicza ze względu na przesunięcia; dlatego

$$\infty > \mu(B(\mathbf{0}, m+1)) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_{m,j}\right) = \mu(H_{m,1}) + \mu(H_{m,2}) + \mu(H_{m,3}) + \dots,$$

stąd zaś  $\mu(H_{m,1}) = \mu(H_{m,2}) = \mu(H_{m,3}) = \dots = \mu(H_m)$  dla każdego  $m \in \mathbb{N}$ . Wobec Stwierdzenia 4.9 (ii),  $\mu(H) = \lim \mu(H_m) = 0$ .  $\square$

Dowód LEMATU 4.33. Wybieramy kolejne kostki diadyczne zawarte w  $\Omega$  indukcyjnie, zaczynając od największych (o krawędzi 1), a potem przechodząc do kolejnych generacji i dokładając nowe, coraz drobniejsze kostki, które mieszczą się w  $\Omega$ . Niech  $K_0$  będzie sumą wszystkich kostek rodziny  $\mathcal{P}_0$  zawartych w  $\Omega$ . Jeśli  $m = 0, 1, 2, \dots$  i zbiory  $K_0, \dots, K_m \subset \Omega$  zostały już zdefiniowane, to przyjmujemy jako  $K_{m+1}$  sumę tych kostek z rodziny  $\mathcal{P}_{m+1}$ , które są zawarte w  $\Omega$  i mają wnętrza rozłączne z  $K_0 \cup \dots \cup K_m$ .

Zbiór  $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots$  jest sumą przeliczalnie wielu kostek diadycznych o wnętrzach parami rozłącznych. Wprost z definicji  $K_m$  wynika, że  $K_m \subset \Omega$  dla  $m = 0, 1, 2, \dots$ , więc oczywiście  $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots \subset \Omega$ . Inkluzja przeciwna wynika z otwartości  $\Omega$ ; uzupełnienie nietrudnych szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie.  $\square$

Dowód TWIERDZENIA 4.31. Niech

$$\xi(A) = \frac{\mu(A)}{\mu([0, 1]^n)}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Wystarczy wykazać, że  $\xi = \lambda_n$  na  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Dowód przeprowadzimy, wz bogacając stopniowo klasę zbiorów, na której obie miary są równe.

*Krok 1. Miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  pokrywają się na kostkach diadycznych.* To łatwo wynika z niezmienniczości obu miar ze względu na przesunięcia i z Lematu 4.32.<sup>2</sup> Istotnie, ponieważ dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  kostka  $[0, 1]^n$  jest sumą  $2^{kn}$  przystających kostek (o wnętrzach parami rozłącznych), które są obrazami  $[0, 1/2^k]^n$  w odpowiednich przesunięciach, więc

$$1 = \xi([0, 1]^n) = 2^n \xi([0, \frac{1}{2}]^n) = 2^{2n} \xi([0, \frac{1}{4}]^n) = \dots = 2^{kn} \xi([0, \frac{1}{2^k}]^n) = \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem  $\xi(Q) = 2^{-kn} = \lambda_n(Q)$  dla wszystkich  $Q \in \mathcal{P}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

*Krok 2. Miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  pokrywają się na zbiorach otwartych.* To wynika z poprzedniego kroku dowodu i z Lematu 4.33. Jeśli  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ , to

$$\xi(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) = \lambda_n(\Omega);$$

---

<sup>2</sup>Można stosować ten lemat do miary  $\xi$ , która jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia.

pierwsza i trzecia równość zachodzą, gdyż miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  znikają na podprzestrzeniach afiniycznych wymiaru mniejszego niż  $n$ .

*Krok 3.* Miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  pokrywają się na zbiorach ograniczonych typu  $G_\delta$ . Jeśli zbiór  $G$  jest ograniczony i typu  $G_\delta$ , to  $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ , gdzie  $\Omega_j$  są zbiorami otwartymi, ograniczonymi. Dlatego, wobec Stwierdzenia 4.9 (iii),

$$\xi(G) = \lim_{j \rightarrow \infty} \xi(\Omega_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_n(\Omega_j) = \lambda_n(G).$$

*Krok 4.* Miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  pokrywają się na zbiorach ograniczonych miary Lebesgue'a zero. Istotnie, jeśli  $\lambda_n(Z) = 0$ , to na mocy Twierdzenia 4.26 istnieje  $G$  ograniczony i typu  $G_\delta$  taki, że  $Z \subset G$  i  $\lambda_n(G) = 0$ . Wtedy jednak  $\xi(G) = 0$ , więc  $0 \leq \xi(Z) \leq \xi(G) = 0$ .

*Krok 5.* Miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  pokrywają się na zbiorach ograniczonych, mierzalnych w sensie Lebesgue'a. To wynika natychmiast z Twierdzenia 4.26: wynika zeń łatwo, że każdy zbiór mierzalny i ograniczony jest sumą pewnego zbioru ograniczonego typu  $G_\delta$  i rozłącznego z nim zbioru miary zero.

Ponieważ każdy zbiór  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  jest sumą wstępującego ciągu zbiorów mierzalnych i ograniczonych (można np. wziąć  $A_j = A \cap B(0, j)$ ), więc na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii) miary  $\xi$  i  $\lambda_n$  są równe na całym  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Omówimy teraz pewną charakteryzację wyznacznika macierzy, która pozwoli nam podać wzór na miarę Lebesgue'a liniowego obrazu zbioru mierzalnego.

**Lemat 4.34.** Założmy, że funkcja  $c: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  ma dwie własności:  $c(s \cdot \text{Id}) = |s|^n$  dla każdej liczby  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$  i  $c(AB) = c(A)c(B)$  dla wszystkich macierzy  $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ . Wówczas

$$c(A) = |\det A| \quad \text{dla wszystkich } A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Dowód. Oznaczmy przez  $A_j$  macierz, która poza przekątną ma same zera, a na przekątnej same jedynki, z wyjątkiem  $j$ -tego miejsca, gdzie znajduje się liczba  $-1$ . Mamy  $A_j^2 = \text{Id}$  i dla każdej liczby  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  jest

$$|s|^{2n} = c(s^2 \cdot A_j^2) = (c(s \cdot A_j))^2.$$

Ponieważ  $c(A) \geq 0$  dla każdej nieosobliwej macierzy  $A$ , więc  $c(s \cdot A_j) = |s|^n$ .

Niech teraz, dla  $1 \leq k \neq l \leq n$ ,  $\delta_{kl}$  oznacza macierz kwadratową, złożoną z samych zer, za wyjątkiem jedynki w  $k$ -tym wierszu i  $l$ -tej kolumnie. Położmy  $M_{kl}(s) = \text{Id} + s\delta_{kl}$ . Nietrudno sprawdzić (Czytelnik zechce uzupełnić szczegóły), że zachodzą równości  $\delta_{kl} \cdot A_k = \delta_{kl} = -A_k \cdot \delta_{kl}$ . Dlatego

$$A_k \cdot \delta_{kl} \cdot A_k = -\delta_{kl},$$

stąd zaś  $A_k \cdot M_{kl}(s) \cdot A_k = M_{kl}(-s)$  i wobec równości  $c(A_k) = 1$  jest

$$c(M_{kl}(-s)) = c(A_k)^2 c(M_{kl}(s)) = c(M_{kl}(s)). \tag{4.16}$$

Jednak

$$M_{kl}(s)M_{kl}(-s) = (\text{Id} + s\delta_{kl})(\text{Id} - s\delta_{kl}) = \text{Id} - s^2 \cdot \delta_{kl}^2 = \text{Id}$$

i dlatego równość (4.16), łącznie z założeniem  $c(AB) = c(A)c(B)$ , pociąga za sobą warunek

$$c(M_{kl}(\pm s)) = 1, \quad c(A \cdot M_{kl}(\pm s)) = c(M_{kl}(\pm s) \cdot A) = c(A) \quad \text{dla } A \in GL(n, \mathbb{R}). \quad (4.17)$$

Widać więc, że funkcja  $c(A)$  nie zmienia wartości, gdy daną macierz mnożymy przez  $M_{kl}(\pm s)$ . Zauważmy jednak, że iloczyn

$$M_{kl}(s)B = B + s \cdot \delta_{kl} \cdot B$$

powstaje w ten sposób, że do  $k$ -tego wiersza macierzy  $B$  dodajemy  $l$ -ty wiersz tej macierzy pomnożony przez  $s$ , a pozostałe wiersze pozostawiamy bez zmian. Podobnie, iloczyn  $BM_{kl}(s) = B + s \cdot B \cdot \delta_{kl}$  powstaje tak, że do  $l$ -tej kolumny  $B$  dodajemy  $k$ -tą kolumnę, pomnożoną przez  $s$  (a pozostałych kolumn nie zmieniamy).

Wiadomo z algebry liniowej, że za pomocą takich operacji na wierszach i kolumnach, tzn. za pomocą mnożenia przez  $M_{kl}(\pm s)$ , można każdą macierz nieosobliwą przekształcić w macierz diagonalną  $s \cdot \text{Id}$  lub  $s \cdot A_n$ , gdzie  $s = \sqrt[n]{|\det A|}$ . Ponieważ zaś

$$c(s \cdot \text{Id}) = c(s \cdot A_n) = |s|^n$$

więc ostatecznie  $c(A) = |s|^n = |\det A|$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.35.** *Niech  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, a  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – przekształceniem liniowym. Wówczas zbiór  $\Phi(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  i zachodzi równość*

$$\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi| \cdot \lambda_n(A). \quad (4.18)$$

Dowód. Jeśli  $\det \Phi = 0$ , to obraz  $\text{im } \Phi = \Phi(\mathbb{R}^n)$  przekształcenia  $\Phi$  jest podprzestrzenią liniową wymiaru mniejszego niż  $n$ . Z Lematu 4.32 wynika, że  $\lambda_n(\Phi(\mathbb{R}^n)) = 0$ , a więc dla każdego  $A \subset \mathbb{R}^n$  zbiór  $\Phi(A) \subset \Phi(\mathbb{R}^n)$  jest mierzalny i ma miarę zero. Innymi słowy, teza twierdzenia zachodzi, gdy  $\det \Phi = 0$ .

Niech zatem odtąd  $\det \Phi \neq 0$ . Przekształcenie  $\Phi$  jest wtedy homeomorfizmem  $\mathbb{R}^n$  na  $\mathbb{R}^n$ ; obrazy zbiorów otwartych są więc otwarte (to wynika z ciągłości  $\Phi^{-1}$ ), obrazy zbiorów typu  $G_\delta$  są zbiorami typu  $G_\delta$ , zaś obrazy zbiorów miary Lebesgue'a zero są zbiorami miary Lebesgue'a zero.<sup>3</sup> Dlatego, wobec Twierdzenia 4.26, obrazy zbiorów mierzalnych są zbiorami mierzalnymi.

Pozostaje udowodnić wzór (4.18). Położymy

$$\mu_\Phi(A) = \lambda_n(\Phi(A)); \quad (4.19)$$

łatwo sprawdzić, że  $\mu_\Phi$  jest miarą na  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , niezmienniczą ze względu na przesunięcia. Z Twierdzenia 4.31 wynika, że

$$\mu_\Phi(A) = c(\Phi) \cdot \lambda_n(A) \quad \text{dla } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad (4.20)$$

gdzie stała

$$c(\Phi) = \mu_\Phi([0, 1]^n) = \lambda_n(\Phi([0, 1]^n)). \quad (4.21)$$

---

<sup>3</sup>Czytelnik zechce samodzielnie przemyśleć ten fakt; należy pamiętać, że przekształcenie  $\Phi$  zwiększa długość każdego wektora co najwyżej  $\|\Phi\|$  razy.

Potraktujmy teraz  $c$  jako funkcję, określoną na grupie  $GL(n, \mathbb{R})$  macierzy nieosobliwych  $n \times n$  (każdy izomorfizm liniowy utożsamiamy z jego macierzą w standardowych bazach). Sprawdzamy, że  $c$  spełnia założenia Lematu 4.34, co pozwoli zakończyć cały dowód twierdzenia.

Jeśli  $\Phi = s \cdot \text{Id}$ , to  $\Phi([0, 1]^n)$  jest kostką o krawędzi  $|s|$ , a więc ma miarę  $|s|^n$ . Zatem  $c(s \cdot \text{Id}) = |s|^n$ . Dla  $\Phi_1, \Phi_2 \in GL(n, \mathbb{R})$  mamy z definicji  $c$

$$\mu_{\Phi_1 \Phi_2}([0, 1]^n) = c(\Phi_1 \Phi_2);$$

z drugiej strony, wobec definicji  $\mu_\Phi$  jest

$$\begin{aligned} \mu_{\Phi_1 \Phi_2}([0, 1]^n) &\stackrel{(4.21)}{=} \lambda_n(\Phi_1(\Phi_2([0, 1]^n))) \\ &\stackrel{(4.19)}{=} \mu_{\Phi_1}(\Phi_2([0, 1]^n)) \\ &\stackrel{(4.20)}{=} c(\Phi_1)\lambda_n(\Phi_2([0, 1]^n)) \stackrel{(4.21)}{=} c(\Phi_1)c(\Phi_2). \end{aligned}$$

Spełnione są więc oba założenia Lematu 4.34. Wnioskujemy zeń, że  $c(\Phi) = |\det \Phi|$ ; wzory (4.19)–(4.20) implikują, że

$$\lambda_n(\Phi(A)) = \mu_\Phi(A) = c(\Phi)\lambda_n(A) = |\det \Phi| \cdot \lambda_n(A).$$

Dowód Twierdzenia 4.35 jest zakończony.  $\square$

**Uwaga 4.36.** 1. W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  istnieją wielościany, które mają równe objętości, ale nie są równoważne przez podział skończony (tzn. jednego z nich nie można w żaden sposób podzielić na skończoną liczbę wielościennych klocków, z których dałoby się złożyć drugi wielościan).<sup>4</sup> Między innymi dlatego dowód równości  $\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi|\lambda_n(A)$  wymaga kilkakrotnego odwołania się do charakteryzacji miary Lebesgue'a, podanej w Twierdzeniu 4.31.

2. Jak przekonamy się później, równość (4.18) jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a.

**Twierdzenie 4.37.** Założmy, że  $A \subset \mathbb{R}^n$  i  $B \subset \mathbb{R}^m$  są zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a. Wówczas zbiór  $A \times B$  jest mierzalny w sensie Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  i zachodzi równość

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B). \quad (4.22)$$

Dowód. Będziemy postępować podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 4.31, stopniowo powiększając klasy zbiorów  $A, B$ , dla których zachodzi teza. Dowód nie jest trudny, jednak jego zapisanie wymaga pewnej pracy.

*Krok 1.* Jeśli  $A$  i  $B$  są przedziałami odpowiednio w  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$ , to ich iloczyn kartezjański jest przedziałem w  $\mathbb{R}^{n+m}$ ; mamy wtedy

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \text{vol}(A \times B) = \text{vol}(A) \cdot \text{vol}(B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B).$$

<sup>4</sup>Na płaszczyźnie każde dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez podział skończony. Pytanie, czy analogiczny fakt ma miejsce w  $\mathbb{R}^3$ , było w 1900 r. treścią trzeciego problemu Hilberta. W tym samym roku Max Dehn podał przykład dwóch ostrosłupów o równych objętościach, które nie są równoważne przez podział skończony. Zainteresowany Czytelnik może sięgnąć np. do rozdziału 7 książki M. Aigner i G.M. Zieglera *Dowody z Księgi* (wyd. PWN, Warszawa 2002).

(Środkowa równość wynika wprost z definicji objętości przedziału).

*Krok 2.* Jeśli  $A$  i  $B$  są zbiorami otwartymi, to

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,$$

gdzie  $Q_j$  (odpowiednio,  $R_k$ ) są kostkami diadycznymi w  $\mathbb{R}^n$  (odpowiednio, w  $\mathbb{R}^m$ ) o wewnętrzach parami rozłącznych. Wtedy jednak

$$A \times B = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j \times R_k,$$

gdzie przedziały  $Q_j \times R_k$  mają wnętrza parami rozłączne. Ponieważ miara Lebesgue'a zeruje się na podprzestrzeniach, zawierających ściany tych przedziałów, więc

$$\begin{aligned} \lambda_{n+m}(A \times B) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_{n+m}(Q_j \times R_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) \lambda_m(R_k) \\ &= \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(R_k) \right) = \lambda_n(A) \lambda_m(B). \end{aligned}$$

*Krok 3.* Założymy teraz, że  $A, B$  są zbiorami ograniczonymi typu  $G_\delta$ , tzn.

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \quad B = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j,$$

gdzie  $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$  są otwarte i ograniczone w  $\mathbb{R}^n$ , zaś  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$  są otwarte i ograniczone w  $\mathbb{R}^m$ . Wtedy

$$A \times B = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j \times V_j)$$

jest zbiorem ograniczonym typu  $G_\delta$  w  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Na mocy Stwierdzenia 4.9 (iii) o mierze iloczynu ciągu zstępującego,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+m}(A \times B) &= \lim_{j=1} \lambda_{n+m}(U_j \times V_j) = \lim_{j=\infty} \lambda_n(U_j) \lambda_m(V_j) \\ &= \lim_{j=\infty} \lambda_n(U_j) \cdot \lim_{j=\infty} \lambda_m(V_j) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B). \end{aligned}$$

*Krok 4.* Wzór (4.22) zachodzi, gdy  $A, B$  są ograniczone i  $\lambda_n(A) = 0$  lub  $\lambda_m(B) = 0$ . Bez zmniejszenia ogólności niech  $\lambda_n(A) = 0$ ; w drugim przypadku dowód jest taki sam.

Zbiór  $B$  jest ograniczony, a więc jest zawarty w pewnej kuli otwartej  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Niech  $\varepsilon > 0$ . Wobec Twierdzenia 4.26, istnieje taki zbiór otwarty  $U \subset \mathbb{R}^n$ , że  $A \subset U$  i  $\lambda_n(U) < \varepsilon / \lambda_m(V)$ . Zatem

$$\lambda_{n+m}(A \times B) \leq \lambda_{n+m}(U \times V) = \lambda_n(U) \lambda_m(V) < \varepsilon;$$

z dowolnością  $\varepsilon > 0$  wynika, że  $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0 = \lambda_n(A) \times \lambda_m(B)$ .

*Krok 5.* Założymy teraz, że  $A \subset \mathbb{R}^n$  i  $B \subset \mathbb{R}^m$  są ograniczonymi zbiorami mierzalnymi. Znajdziemy zbiory  $Y \subset \mathbb{R}^n$  i  $Z \subset \mathbb{R}^m$  takie, że

$$\begin{aligned}\lambda_n(Y) &= \lambda_m(Z) = 0, \\ A \cap Y &= B \cap Z = \emptyset, \\ \text{zbiory } G_A &= A \cup Y \text{ oraz } G_B = B \cup Z \text{ są typu } G_\delta.\end{aligned}$$

Wtedy

$$G_A \times G_B = A \times B \cup (Y \times B \cup A \times Z \cup Y \times Z).$$

Z poprzedniego kroku dowodu wynika, że  $\lambda_{n+m}(Y \times B \cup A \times Z \cup Y \times Z) = 0$ . Zbiór  $G_A \times G_B$  jest typu  $G_\delta$  w  $\mathbb{R}^{n+m}$ ; dlatego zbiór  $A \times B$ , który różni się oden o zbiór miary zero, należy do  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Mamy też

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(G_A \times G_B) = \lambda_n(G_A)\lambda_m(G_B) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

*Krok 6 (przypadek ogólny).* Jeśli  $A$  i  $B$  są dowolnymi zbiorami mierzalnymi, to biorąc  $A_j = A \cap B(0, j)$  w  $\mathbb{R}^n$  i  $B_j = B \cap B(0, j)$  w  $\mathbb{R}^m$ , otrzymujemy na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii)

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{n+m}(A_j \times B_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_n(A_j)\lambda_m(B_j) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

Dowód całego Twierdzenia 4.37 jest zakończony.  $\square$

### 4.3 Funkcje mierzalne

Określimy teraz klasę funkcji, które można całkować względem danej miary. Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem, a  $\mathcal{F}$  – ustalonym  $\sigma$ -ciałem podzbiorów  $X$ , wyposażonym w przeliczalnie addytywną miarę  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ . Trójkę  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  nazywa się przestrzenią z miarą. Najważniejszym modelem takiej sytuacji będzie dla nas na razie  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu = \lambda_n$ . Będziemy rozpatrywać funkcje  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

**Definicja 4.38.** Mówimy, że funkcja  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest *mierzalna* (względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby  $a \in \mathbb{R}$  zbiór

$$f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X: f(x) > a\}$$

należy do  $\mathcal{F}$ .

Jeśli  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu = \lambda_n$ , to mówimy o funkcjach *mierzalnych w sensie Lebesgue'a*.

**Stwierdzenie 4.39.** Niech  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja  $f$  jest mierzalna;
- (ii) dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  zbiór  $\{x \in X: f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$ ;
- (iii) dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  zbiór  $\{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{F}$ ;

(iv) dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  zbiór  $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$ .

Dowód. Skorzystamy z tego, że  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$  jest zamknięte ze względu na branie dopełnień i przeliczalnych sum.

Zauważmy, że zbiór  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  jest dopełnieniem  $\{x \in X : f(x) > a\}$ . Dlatego (i)  $\Rightarrow$  (ii). Następnie,

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq a - \frac{1}{m}\}.$$

Dlatego drugi warunek pociąga za sobą trzeci.

Z warunku (iii) wynika (iv), gdyż  $\{x \in X : f(x) \geq a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) < a\}$ . Wreszcie,

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq a + \frac{1}{m}\};$$

dłatego (iv) pociąga za sobą warunek, podany w definicji funkcji mierzalnej.  $\square$

**Stwierdzenie 4.40.** Jeśli  $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  są funkcjami mierzalnymi, to zbiory

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

należą do  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}$ .

Dowód. Ponieważ zbiór liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  jest gęsty w  $\mathbb{R}$ , więc

$$\begin{aligned} \{x \in X : f(x) > g(x)\} &= \bigcup_{w \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) > w > g(x)\} \\ &= \bigcup_{w \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) > w\} \cap \{x \in X : w > g(x)\}. \end{aligned}$$

Z poprzedniego stwierdzenia wynika więc, że  $\{f > g\} \in \mathcal{F}$ . Przez symetrię,  $\{g > f\}$  też należy do  $\mathcal{F}$ . Zbiory  $\{f \geq g\}$  i  $\{g \geq f\}$  są dopełnieniami zbiorów, odpowiednio,  $\{g > f\}$  i  $\{f > g\}$ , więc także należą do  $\mathcal{F}$ . Wreszcie,

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) \geq f(x)\} \in \mathcal{F},$$

gdyż  $\mathcal{F}$  jest zamknięte ze względu na branie iloczynu zbiorów.  $\square$

**Stwierdzenie 4.41.** Jeśli  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest funkcją mierzalną, to przeciobraz  $f^{-1}(B)$  każdego zbioru borelowskiego  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  jest mierzalny.

Dowód. Klasa  $\mathcal{K}$  wszystkich tych podzbiorów prostej, których przeciobrazy należą do  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}$ , sama jest  $\sigma$ -ciałem (łatwe ćwiczenie). Ponadto, wszystkie przedziały otwarte należą do  $\mathcal{K}$ ; to wynika ze Stwierdzenia 4.39. Dlatego  $\mathcal{K}$  zawiera najmniejsze  $\sigma$ -ciało, zawierające wszystkie przedziały, tzn.  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.42.** Niech  $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , będzie dowolnym ciągiem funkcji mierzalnych. Wówczas każda z funkcji

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$$

jest mierzalna.

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, sformułujmy oczywisty, ważny wniosek.

**Wniosek 4.43.** Jeśli ciąg funkcji mierzalnych  $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest zbieżny punktowo na  $X$ , to  $f = \lim f_j$  jest funkcją mierzalną.

Dowód WNIOSKU 4.43. Jeśli ciąg  $f_j$  jest zbieżny punktowo na  $X$ , to  $f = \lim f_j = \liminf f_j$ .  
□

Dowód TWIERDZENIA 4.42. Wykorzystamy Stwierdzenie 4.39. Przy ustalonym  $x \in X$  kres dolny zbioru  $\{f_n(x): n = 1, 2, \dots\}$  jest mniejszy od  $a \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  jest  $f_n(x) < a$ . Innymi słowy,

$$\left\{ x \in X : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < a \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) < a\}.$$

Ponieważ każdy ze zbiorów  $\{x \in X : f_n(x) < a\}$  należy do  $\mathcal{F}$ , więc i zbiór po lewej stronie ostatniej równości należy do  $\mathcal{F}$ , to zaś oznacza, że funkcja  $f = \inf_n f_n$  jest mierzalna.

Podobnie,

$$\left\{ x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \in \mathcal{F}.$$

Dlatego  $\sup_n f_n$  jest funkcją mierzalną.

Aby wykazać mierzalność granicy dolnej i górnej, przypomnijmy (patrz np. skrypt wykładów z Analizy I, podrozdział 8.1), że

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \inf_{n > j} a_n \right), \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left( \sup_{n > j} a_n \right).$$

Z udowodnionej już części twierdzenia i tych wzorów wynika mierzalność funkcji  $\liminf f_n$  i  $\limsup f_n$ .  
□

Okazuje się, że klasa funkcji mierzalnych jest zamknięta z uwagi na różne operacje algebraiczne.

**Stwierdzenie 4.44.** Założmy, że  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , a funkcje  $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  są mierzalne. Wówczas mierzalna jest każda z funkcji

$$\alpha \cdot f, \quad \alpha f + \beta g, \quad f^2, \quad fg, \quad |f|, \quad \max(f, g), \quad \min(f, g).$$

**Uwaga 4.45.** 1. Zakładamy milcząco, że podane wyżej funkcje są dobrze określone.

2. W wielu sytuacjach można się nie przejmować powyższym zastrzeżeniem. Wyjaśnijmy to nieco bliżej. Najpierw wprowadzimy ważny termin: mówi się, że funkcja mierzalna  $f$  ma własność  $W$  prawie wszędzie na  $X$ , jeśli zbiór tych punktów  $X$ , gdzie własność  $W$  jest naruszona, jest zbiorem miary zero.

Jeśli  $X = \mathbb{R}^n$  i  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , a funkcja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest mierzalna, to każda funkcja  $g$ , która jest równa  $f$  prawie wszędzie (tzn. jest taka, że  $\{f \neq g\}$  jest zbiorem miary Lebesgue'a zero), też jest funkcją mierzalną. To wynika z faktu, że każdy podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Jeśli zatem funkcje  $f, g$  są prawie wszędzie skończone (tzn. zbiory  $Z_f = \{f = \pm\infty\}$  i  $Z_g = \{g = \pm\infty\}$  są zbiorami miary Lebesgue'a zero), to sumę  $f + g$  oraz iloczyn  $f \cdot g$  można bez kłopotu określić na zbiorze  $\mathbb{R}^n \setminus (Z_f \cup Z_g)$ , a na zbiorze  $Z_f \cup Z_g$  nadać im jakąkolwiek wartość. To nie wpłynie na mierzalność.

Dowód STWIERDZENIA 4.44. *Krok 1.* Jeśli  $\alpha > 0$ , to

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathcal{F} \quad \text{dla każdego } a \in \mathbb{R}.$$

Jeśli  $\alpha < 0$ , to zmienia się kierunek jednej z nierówności w powyższym wzorze; mierzalność funkcji  $\alpha f$  wynika wtedy z równoważności warunków, podanych w Stwierdzeniu 4.39.

*Krok 2: mierzalność sumy dwóch funkcji.* Mierzalność  $\alpha f + \beta g$  wystarczy udowodnić, gdy  $\alpha = \beta = 1$ . Zauważmy najpierw, że jeśli  $h$  jest funkcją mierzalną, to  $h + \text{const}$  też jest mierzalna, gdyż  $\{x \in X : h(x) + c > a\} = \{x \in X : h(x) > -c + a\}$ . Dalej, dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  mamy

$$\{x \in X : f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > -g(x) + a\};$$

funkcja  $-g(x) + a = -1 \cdot g(x) + a$  jest mierzalna, więc mierzalność zbioru  $\{f + g > a\}$  wynika ze Stwierdzenia 4.40.

*Krok 3: mierzalność kwadratu funkcji mierzalnej.* Dla  $a \leq 0$  zbiór  $\{x \in X : f^2(x) \geq a\}$  jest po prostu równy  $X$ , a więc należy do  $\mathcal{F}$ . Dla  $a > 0$  mamy

$$\{x \in X : f^2(x) \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) \leq -\sqrt{a}\} \in \mathcal{F}.$$

*Krok 4: mierzalność iloczynu* wynika teraz natychmiast ze wzoru

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

*Krok 5: mierzalność  $|f|$*  sprawdzamy łatwo wprost z definicji; dla  $a \geq 0$  jest

$$\{x \in X : |f(x)| \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\} \cup \{x \in X : f(x) \leq -a\},$$

zaś dla  $a < 0$  mamy po prostu  $\{x \in X : |f(x)| \geq a\} = X$ .

*Krok 6:* aby zakończyć cały dowód, stosujemy wzory

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

i korzystamy z udowodnionej już mierzalności sumy, różnicy i wartości bezwzględnej funkcji mierzalnych.  $\square$

**Stwierdzenie 4.46.** *Jeśli  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna, a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna.*

Dowód. Dla dowolnych funkcji  $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$ . Ponieważ  $g$  jest ciągła, więc zbiór  $Z_a = g^{-1}((a, +\infty))$  jest zbiorem otwartym, tzn. jest sumą przeliczalnie wielu rozłącznych przedziałów otwartych. Dlatego

$$\{x \in X : g \circ f(x) > a\} = (g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(Z_a)$$

jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów, należących do  $\mathcal{F}$ .  $\square$

## Funkcje proste

**Definicja 4.47.** Funkcję mierzalną  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , która ma skończony zbiór wartości, nazywamy *funkcją prostą*.

**Stwierdzenie 4.48.** Funkcja  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest funkcją prostą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją parami rozłączne zbiory  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$  oraz różne elementy  $a_1, \dots, a_k \in \overline{\mathbb{R}}$  takie, że

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \cdot \chi_{A_j} \quad (4.23)$$

Dowód. Proste ćwiczenie. Jeśli  $A \in \mathcal{F}$ , to  $\chi_A$  jest funkcją mierzalną, gdyż zbiór  $\{\chi_A > a\}$  jest albo pusty, albo równy  $A$ , albo równy  $X$ . Dlatego mierzalność kombinacji liniowej funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych wynika ze Stwierdzenia 4.44.

Załóżmy teraz, że  $a_1 < a_2 < \dots < a_k \in \overline{\mathbb{R}}$  są wszystkimi wartościami funkcji mierzalnej  $f$ . Dla  $j = 1, 2, \dots, k$  niech  $A_j := \{x \in X : f(x) = a_j\}$ . Oczywiście,

$$A_j = X \setminus \left( \{x \in X : f(x) > a_j\} \cup \{x \in X : f(x) < a_j\} \right);$$

zbiory  $A_j$  są mierzalne, parami rozłączne i  $f = \sum a_j \chi_{A_j}$ .  $\square$

**Uwaga 4.49.** Funkcja (4.23) ma skończony zbiór wartości także wtedy, gdy zbiory  $A_j$  nie są parami rozłączne.

**Wniosek 4.50.** Kombinacja liniowa skończonej liczby funkcji prostych jest funkcją prostą.

**Twierdzenie 4.51.** Jeśli  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  jest mierzalna, to istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych  $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$  zbieżny do  $f$  punktowo na  $X$ . Jeśli ponadto  $f$  jest ograniczona, to istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych zbieżny do  $f$  jednostajnie na  $X$ .

Dowód. Dla  $n = 1, 2, \dots$  położmy

$$A_{m,n} = \left\{ x \in X : f(x) : \frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n} \right\}, \quad m = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1,$$

$$A_{2^n,n} = \{x \in X : n \leq f(x)\}.$$

Zbiory  $A_{m,n}$  są mierzalne i są, przy ustalonym  $n$ , parami rozłączne. Przyjmijmy

$$f_n = \sum_{m=0}^{n \cdot 2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}.$$

(Intuicja jest prosta i naturalna: wykres  $f$  tniemy na części, prowadząc cięcia na wysokościach  $m/2^n$ , gdzie  $m = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n$ ; funkcja  $f_n$  jest stała między dwiema cięciami. Przechodząc od  $n$  do  $n+1$ , prowadzimy cięcia dwukrotnie gęściej i nieco wyżej – nie tylko do wysokości  $n$ , ale aż do  $n+1$ ).

Wprost z definicji  $f_n \leq f$  na  $X$ , gdyż  $f_n = m/2^n \leq f$  na każdym ze zbiorów  $A_{m,n}$ . Jeśli  $f(x) < \infty$ , to dla wszystkich  $n > f(x)$  mamy  $f_n(x) \leq f(x) < f(x) + 2^{-n}$  i dlatego  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  na zbiорze  $\{f < \infty\}$ . Jeśli  $f(x) = \infty$ , to  $f(x) \geq n$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i wtedy  $f_n(x) = n$ , a więc również w tym przypadku  $f_n(x) = n \rightarrow f(x) = \infty$ .

Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że  $f_{n+1} \geq f_n$ , gdyż

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= A_{2m,n+1} \cup A_{2m+1,n+1}, \quad m = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1, \\ A_{2^n,n} &= A_{n \cdot 2^{n+1},n+1} \cup A_{n \cdot 2^{n+1}+1,n+1} \cup \dots \cup A_{(n+1) \cdot 2^{n+1},n+1}. \end{aligned}$$

(Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi).

Jeśli  $f$  jest ograniczona, to dla  $n > \sup f$  nierówność  $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$  zachodzi na całym zbiorze  $X$ . To oznacza, że  $f_n \rightharpoonup f$  na  $X$ .  $\square$

Podamy teraz dwa twierdzenia, opisujące związek mierzalności z ciągłością.

**Twierdzenie 4.52 (N. Łuzin).** Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje taki zbiór domknięty  $F \subset \mathbb{R}^n$ , że  $f|_F$  jest ciągła i  $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F) < \varepsilon$ .

Dowód. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Niech  $h(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc tg} f(x)$ . Funkcja  $h$  jest nieujemna i ograniczona na  $\mathbb{R}^n$ , zatem wobec Twierdzenia 4.51 istnieje ciąg funkcji prostych  $h_k \rightharpoonup h$  na  $\mathbb{R}^n$ ,  $h - 2^{-k} \leq h_k \leq h$ . Niech  $h_k = \sum_{i=1}^{m_k} a_{k,i} \chi_{A_{k,i}}$ , gdzie  $A_{k,1}, A_{k,2}, \dots, A_{k,m_k}$  są parami rozłączne. Można przyjąć, że  $a_{k,1} = 0$  dla wszystkich  $k$ ; wtedy  $\mathbb{R}^n$  jest sumą zbiorów  $A_{k,i}$ .

Wobec Twierdzenia 4.26, charakteryzującego zbiory mierzalne, istnieją zbiory domknięte  $F_{k,i} \subset A_{k,i}$  takie, że  $\lambda_n(A_{k,i} \setminus F_{k,i}) < \varepsilon/(m_k 2^k)$ . Położmy

$$F_k = F_{k,1} \cup F_{k,2} \cup \dots \cup F_{k,m_k},$$

jest to zbiór domknięty, gdyż suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest domknięta. Ponadto,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_n(A_{k,i} \setminus F_{k,i}) < m_k \cdot \frac{\varepsilon}{m_k 2^k} = \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (4.24)$$

Zbiór domknięty  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$  spełnia, wobec wzorów de Morgana,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F) = \lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus F_k\right) \stackrel{(4.24)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Zauważmy, że  $h_k$  jest stała na każdym ze zbiorów  $F_{k,i}$ , a więc jest ciągła na  $F_k$ , tzn. jest ciągła także na  $F \subset F_k$ . Ponadto, na zbiorze  $F$  jest  $|h_k - h| \leq 2^{-k}$ . Innymi słowy, na zbiorze  $F$  ciąg  $h|_F$  funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do  $h|_F$ . Wynika stąd ciągłość  $h|_F$ . Ponieważ  $f = \operatorname{tg}(h - \frac{\pi}{2})$ , więc  $f|_F$  jest ciągła.  $\square$

**Twierdzenie 4.53 (M. Fréchet).** Jeśli  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to istnieje ciąg funkcji ciągłych  $\phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zbieżny do  $f$  prawie wszędzie na  $\mathbb{R}^n$ .

Dowód. Skorzystajmy z twierdzenia Łuzina. Dla  $k \in \mathbb{N}$  niech  $F_k$  będzie takim zbiorem domkniętym, że  $f_k = f|_{F_k}$  jest ciągła i  $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_k) < 2^{-k-1}$ . Na mocy znanego z topologii twierdzenia Tietzego o przedłużaniu istnieje funkcja ciągła  $\phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że  $\phi_k = f_k$  na zbiorze  $F_k$ .

Zbiory  $D_k = F_k \cap F_{k+1} \cap F_{k+2} \cap \dots$  są domknięte; ponadto,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_j) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \dots = \frac{1}{2^k}. \quad (4.25)$$

Na zbiorze  $D_k$  jest  $\phi_j = f_j = f$  dla wszystkich  $j = k, k+1, k+2, \dots$ . Dlatego ciąg  $\phi_j$  jest zbieżny punktowo do  $f$  na sumie  $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  zbiorów  $D_k$ . Z oszacowania (4.25) wynika, że

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus S) = \lambda_n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus D_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D_k) \stackrel{(4.25)}{=} 0.$$

To spostrzeżenie kończy cały dowód.  $\square$

Naturalne jest pytanie, dla jakich przestrzeni z miarą  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  zachodzą odpowiedniki twierdzeń Łuzina i Frécheta. W dowodach wykorzystuje się tylko dwie szczególne własności przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i miary Lebesgue'a: charakteryzację zbiorów mierzalnych (ściślej: możliwość 'przybliżania' zbiorów mierzalnych zbiorami domkniętymi) oraz twierdzenie Tietzego o przedłużaniu, które zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej normalnej (w szczególności: dla każdej przestrzeni metrycznej).

**Definicja 4.54 (miara regularna).** Miara  $\mu$  na  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{F}$  przestrzeni topologicznej, zawierającym  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{B}(X)$  zbiorów borełowskich, nazywa się regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $A \in \mathcal{F}$  i każdego  $\varepsilon > 0$  istnieją zbiór otwarty  $\Omega \subset X$  i zbiór domknięty  $F \subset X$  takie, że  $F \subset A \subset \Omega$  i  $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$ .

**Uwaga 4.55.** Twierdzenie Łuzina zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej z miarą regularną  $\mu$ , natomiast twierdzenie Frécheta zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej normalnej, wyposażonej w miarę regularną  $\mu$ .

## Rozdział 5

# Całka Lebesgue'a

W tym rozdziale  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  jest ustaloną przestrzenią z miarą. Elementy  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}$  nazywamy zbiorami mierzalnymi.

Ogólna idea, kryjąca się za definicją całki Lebesgue'a, jest bardzo prosta: dla funkcji  $f = c\chi_A$ , gdzie  $A$  jest zbiorem mierzalnym, przyjmujemy  $\int_X f d\mu = c \cdot \mu(A)$ . Inaczej mówiąc, całka funkcji stałej na zbiorze  $A$  i równej zero poza  $A$  jest proporcjonalna do miary  $\mu(A)$ . Oczywiście, byłoby rzeczą naturalną przyjąć umowę, że całka jest liniowa; wtedy całka z funkcji  $\sum a_i \chi_{A_i}$  powinna być równa sumie  $\sum a_i \mu(A_i)$ . Funkcje nieujemne można przybliżać funkcjami prostymi, więc ich całki można próbować przybliżać całkami funkcji prostych. Natomiast dowolna funkcja mierzalna jest różnicą dwóch funkcji nieujemnych, więc dla takich funkcji całkę można określić jako różnicę całek tych funkcji nieujemnych.

Okazuje się, że ten plan można zrealizować. W dodatku, zachodzą wtedy naturalne, wygodne i ogólne twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Opisaniem szczegółów tej konstrukcji zajmiemy się w podrozdziałach 5.1 i 5.2. Następnie, w kolejnych podrozdziałach, wyjaśnimy, jaki jest związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna, a także omówimy dwa bardzo ważne wyniki: twierdzenie o zamianie zmiennych i twierdzenie Fubiniego. Znajomość tych narzędzi pozwala obliczać bardzo wiele konkretnych całek; przykłady pozna Czytelnik zarówno w trakcie wykładu, jak i na ćwiczeniach.

## 5.1 Całkowanie funkcji nieujemnych

Definicja całki Lebesgue'a przypomina definicję dolnej całki Riemanna. Różnica polega na tym, że rozbijamy dziedzinę funkcji nie na przedziały, tylko na przeliczalne rodziny dowolnych zbiorów mierzalnych.

**Definicja 5.1 (rozbicia zbioru mierzalnego).** Założmy, że  $E \in \mathcal{F}$  jest mierzalnym podzbiorem  $X$ . Mówimy, że skończona lub przeliczalna rodzina  $\mathcal{P} = \{E_1, E_2, \dots\}$  zbiorów  $E_i$  jest *rozbiciem*  $E$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $E_i$  są mierzalne, parami rozłączne i  $E = \bigcup E_i$ . Zbiór wszystkich rozbić danego zbioru mierzalnego  $E$  oznaczamy  $\mathcal{R}(E)$ .

**Definicja 5.2 (całka funkcji nieujemnej).** Założmy, że funkcja mierzalna  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest nieujemna na zbiorze mierzalnym  $E \subset X$ . Kładziemy wówczas

$$\int_E f d\mu \equiv \int_E f(x) d\mu(x) = \sup \left( \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} f(x) \cdot \mu(E_i) \right),$$

gdzie kres górnny jest wzięty po wszystkich rozbiciach  $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$  zbioru  $E$ .

Z własności kresów wynika od razu, że

$$\int_E \alpha f(x) d\mu(x) = \alpha \int_E f(x) d\mu(x) \quad (5.1)$$

dla wszystkich liczb  $\alpha \geq 0$ , nieujemnych funkcji mierzalnych  $f$  i zbiorów mierzalnych  $E$ . Zauważmy ponadto, że jeśli  $f: X \supset E \rightarrow [0, \infty]$  przyjmuje wartość  $\infty$  na zbiorze  $A \subset E$  miary dodatniej, to z pewnością  $\int_E f d\mu = \infty$ .

**Stwierdzenie 5.3 (monotoniczność całki).** Jeśli  $0 \leq f \leq g$  na zbiorze mierzalnym  $E$  i  $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  są mierzalne, to

$$\int_E f(x) d\mu(x) \leq \int_E g(x) d\mu(x).$$

Dowód. Dla każdego zbioru  $A \subset E$  jest  $\inf_A f \leq \inf_A g$ , zatem dla każdego rozbicia  $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$  zbioru  $E$  mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} f(x) \cdot \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} g(x) \cdot \mu(E_i).$$

Biorąc kres górnny względem wszystkich rozbici  $\mathcal{P} \in \mathcal{R}(E)$ , otrzymujemy tezę.  $\square$

**Stwierdzenie 5.4 (o wartości średniej).** Jeśli  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest mierzalna i nieujemna na zbiorze  $E \in \mathcal{F}$ , to

$$\mu(E) \cdot \inf_E f \leq \int_E f(x) d\mu(x) \leq \mu(E) \cdot \sup_E f. \quad (5.2)$$

Dowód. Ustalmy rozbicie  $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$  zbioru  $E$ . Ponieważ  $\mu(E) = \sum \mu(E_i)$  oraz, dla każdego indeksu  $i$  z osobna,  $\inf_E f \leq \inf_{E_i} f \leq \sup_E f$ , więc

$$\mu(E) \cdot \inf_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \inf_E f \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \inf_{E_i} f \leq \sup_E f \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E) \sup_E f.$$

Stąd natychmiast wynika teza.  $\square$

Zanotujmy dwa łatwe wnioski z tego twierdzenia.

**Wniosek 5.5.** Jeśli  $f = c$  jest funkcją stałą, to  $\int_E f d\mu = c\mu(E)$

Dowód. Mamy  $c = \sup_E f = \inf_E f$ ; obie strony nierówności (5.2) są więc równe  $c\mu(E)$ .  $\square$

**Wniosek 5.6.** Jeśli  $\mu(E) = 0$ , to  $\int_E f d\mu = 0$  dla każdej funkcji mierzalnej  $f$ , nieujemnej na  $E$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.7.** *Jeśli  $f$  jest mierzalna i nieujemna na  $X$ , to funkcja*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F}$$

*jest miarą na  $\sigma$ -ciele  $F$ : gdy zbiór  $E \in \mathcal{F}$  jest sumą skończoną lub przeliczalną zbiorów mierzalnych i parami rozłącznych  $E_i$ , to*

$$\int_E f d\mu = \sum_i \int_{E_i} f d\mu. \quad (5.3)$$

Dowód. Własności  $\nu(A) \geq 0$  i  $\nu(\emptyset) = 0$  są oczywiste. Wystarczy udowodnić wzór (5.3). Zrobimy to dla rozbić przeliczalnych zbioru  $E$  na parami rozłączne zbiory  $E_i$  (dla rozbić skończonych zmieniają się tylko oznaczenia).

Niech  $E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{ik}$ , gdzie  $F_{ik} \in \mathcal{F}$ , będzie rozbiciem  $E_i$  na zbiory  $F_{ik}$  parami rozłączne. Wtedy  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{ik}$  jest rozbiciem  $E$  i wprost z definicji całki

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_{F_{1k}} f \cdot \mu(F_{1k}) + \cdots + \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{F_{Nk}} f \cdot \mu(F_{Nk}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{F_{ik}} f \cdot \mu(F_{ik}) \leq \int_E f d\mu$$

dla każdej liczby  $N \in \mathbb{N}$ . Biorąc oddziennie kres górnego każdej ze skończeniem wielu sum po lewej stronie względem wszystkich rozbici zbioru  $E_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^N \int_{E_i} f d\mu \leq \int_E f d\mu,$$

stąd zaś, dla  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Udowodnimy teraz nierówność przeciwną. Niech  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , gdzie  $A_k$  są parami rozłączne. Ponieważ  $E = \bigcup E_i$  i zbiory  $E_i$  też są parami rozłączne, więc wobec przeliczalnej addytywności miary  $\mu$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{A_k} f \cdot \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{A_k} f \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_k \cap E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{A_k \cap E_i} f \cdot \mu(A_k \cap E_i) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ostatnia nierówność wynika wprost z definicji całki: rodzina  $A_k \cap E_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , jest rozbiciem zbioru  $E_i$ . Biorąc teraz kres górnego względem wszystkich rozbici  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , otrzymujemy  $\int f d\mu \leq \sum_i \int_{E_i} f d\mu$ .  $\square$

Ponieważ miara jest monotoniczną funkcją zbioru, więc natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

**Wniosek 5.8.** Jeśli  $f$  jest mierzalna i nieujemna na zbiorze  $E \in \mathcal{F}$ , to  $\int_{E_1} f d\mu \leq \int_E f d\mu$  dla każdego zbioru mierzalnego  $E_1 \subset E$ .  $\square$

**Wniosek 5.9.** Jeśli funkcje mierzalne  $f, g$  są nieujemne i równe prawie wszędzie na zbiorze  $E \in \mathcal{F}$ , to  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ .

Dowód. Zbiór  $A = \{f \neq g\}$  jest mierzalny i  $\mu(A) = 0$ . Dlatego  $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu = 0$  wobec Wniosku 5.6. Na zbiorze  $E \setminus A$  jest  $f = g$ , więc zachodzi oczywisty ciąg równości

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus A} f d\mu + \int_A f d\mu = \int_{E \setminus A} f d\mu = \int_{E \setminus A} g d\mu = \int_{E \setminus A} g d\mu + \int_A g d\mu = \int_E g d\mu.$$

**Wniosek 5.10.** Jeśli  $f$  jest mierzalna i nieujemna na  $E$ , a  $\int_E f d\mu = 0$ , to  $f = 0$  prawie wszędzie na  $E$ .

Dowód. Zbiór  $\{x \in X : f(x) > 0\}$  jest sumą wstępującego ciągu zbiorów mierzalnych  $E_m = \{x \in X : f(x) \geq 1/m\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  Dlatego

$$0 \leq \frac{1}{m} \mu(E_m) \leq \int_{E_m} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0,$$

skąd  $\mu(E_m) = 0$ , a następnie, na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii),  $\mu(E) = \lim \mu(E_m) = 0$ .  $\square$

Całka Lebesgue'a jest wygodnym narzędziem m.in. z uwagi na bardzo ogólne twierdzenia o możliwości przechodzenia do granicy pod znakiem całki. Oto pierwsze z nich.

**Twierdzenie 5.11 (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej).** Założmy, że ciąg funkcji mierzalnych  $f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest niemalejący i wszystkie funkcje  $f_j$  są nieujemne na zbiorze  $E \in \mathcal{F}$ . Wówczas

$$\int_E \left( \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \right) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu. \quad (5.5)$$

Dowód. Ciąg  $f_j$  jest niemalejący, więc  $f = \lim f_j$  jest dobrze określona w każdym punkcie przestrzeni  $X$ , a także mierzalna na mocy Twierdzenia 4.42. Ponadto,  $f_j \leq f$  na  $E$  dla każdego indeksu  $j$ , więc wobec monotoniczności całki

$$\int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad j = 1, 2, \dots$$

i dlatego w granicy

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu = \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu.$$

Wystarczy więc udowodnić nierówność przeciwną. Oznaczmy w tym celu

$$E_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}, \quad E_+ = \{x \in E : 0 < f(x) < \infty\}, \quad E_\infty = \{x \in E : f(x) = +\infty\}.$$

Zbiory  $E_0, E_+, E_\infty$  są parami rozłączne i mierzalne, a ich suma jest równa  $E$ .

**Krok 1.** Na zbiorze  $E_0$  jest  $0 \leq f_j(x) \leq f(x) = 0$  dla każdego  $j \in \mathbb{N}$ , tzn.  $f_j \equiv 0 \equiv f$  na  $E_0$  i dlatego  $\lim \int_{E_0} f_j d\mu = 0 = \int_{E_0} f d\mu$ .

**Krok 2.** Zajmijmy się teraz zbiorem  $E_+$ . Niech  $\theta \in (0, 1)$  i  $E_m = \{x \in E_+ : f_m(x) \geq \theta f(x)\}$ . Dla każdego  $x \in E_+$  jest  $f(x) = \lim f_j(x) > \theta f(x)$ , a więc istnieje liczba  $m_x$  taka, że

$x \in E_m$  dla wszystkich  $m > m_x$ . Zatem  $E_+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ , a wobec monotoniczności ciągu  $f_m$  ciąg zbiorów  $E_m$  jest wstępujący. Wobec Twierdzenia 5.7,  $\nu(A) = \int_A f d\mu$  jest miarą na  $\sigma$ -ciele podzbiorów mierzalnych zbioru  $E$ . Korzystając z monotoniczności całki i Stwierdzenia 4.9 (ii) dla miary  $\nu$ , otrzymujemy

$$\nu(E_+) = \int_{E_+} f d\mu \geq \int_{E_+} f_m d\mu \geq \int_{E_m} \theta f d\mu = \theta \nu(E_m) \rightarrow \theta \nu(E_+) \quad \text{dla } m \rightarrow \infty.$$

Zatem

$$\int_{E_+} f d\mu \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_+} f_m d\mu \geq \theta \int_{E_+} f d\mu$$

Biorąc  $\theta \rightarrow 1$ , otrzymujemy

$$\int_{E_+} f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_+} f_m d\mu.$$

**Krok 3.** Wreszcie, zbadajmy zachowanie całek funkcji  $f, f_m$  na zbiorze  $E_\infty$ . Ustalmy  $M < \infty$ . Niech  $A_m = \{x \in E_\infty : f_m(x) \geq M\}$ . Wtedy

$$\int_{E_\infty} f d\mu \geq \int_{E_\infty} f_m d\mu \geq \int_{A_m} f_m d\mu \geq M \mu(A_m)$$

Ciąg zbiorów  $A_m$  jest wstępujący, a jego suma to zbiór  $E_\infty$ , więc, podobnie jak wcześniej,

$$\int_{E_\infty} f d\mu \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_\infty} f_m d\mu \geq M \mu(E_\infty).$$

Dla  $M \rightarrow \infty$  otrzymujemy więc<sup>1</sup>

$$\int_{E_\infty} f d\mu \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_\infty} f_m d\mu \geq \infty \cdot \mu(E_\infty) = \int_{E_\infty} f d\mu.$$

Dodając otrzymane wyżej nierówności, przekonujemy się, że

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m d\mu &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \int_{E_0} f_m d\mu + \int_{E_+} f_m d\mu + \int_{E_\infty} f_m d\mu \right) \\ &\geq \int_{E_0} f d\mu + \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_\infty} f d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia o zbieżności monotonicznej jest zakończony.  $\square$

**Stwierdzenie 5.12 (liniowość całki).** Dla wszystkich  $\alpha, \beta \geq 0$  i wszystkich funkcji mierzalnych  $f, g$ , nieujemnych na zbiorze  $E \in \mathcal{F}$ , zachodzi wzór

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

---

<sup>1</sup>Czytelnik zechce pamiętać o umowie  $\infty \cdot 0 = 0$ , którą przyjmujemy w teorii miary i całki.

Dowód. Z uwagi na równość (5.1), wystarczy przeprowadzić dowód w szczególnym przypadku  $\alpha = 1 = \beta$ . Ponadto, ponieważ wobec Twierdzenia 4.51 każda nieujemna funkcja mierzalna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych, więc z uwagi na twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej wystarczy ograniczyć się do sytuacji, gdy  $f, g$  są funkcjami prostymi.

Z Twierdzenia 5.7 wynika, że całka z nieujemnej funkcji prostej  $h = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{C_j}$ , gdzie zbiory  $C_j$  są mierzalne i parami rozłączne, a stałe  $c_j \geq 0$  dla wszystkich  $j$ , jest równa

$$\sum_{j=1}^N \int_{C_j} h d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(C_j).$$

Niech więc  $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ ,  $g = \sum_{i=1}^l b_i \chi_{B_i}$ , gdzie  $E = \bigcup_{j=1}^m A_j = \bigcup_{i=1}^l B_i$  (w każdej z tych sum zbiory są mierzalne i parami rozłączne). Wtedy  $f + g = a_j + b_i$  na  $A_j \cap B_i$ , a zbiór  $E$  jest rozłączną sumą iloczynów  $A_j \cap B_i$ . Dlatego na mocy Twierdzenia 5.7

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_{\bigcup(A_j \cap B_i)} (f + g) d\mu = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l \int_{A_j \cap B_i} (f + g) d\mu \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l (a_j + b_i) \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \left( \sum_{i=1}^l \mu(A_j \cap B_i) \right) + \sum_{i=1}^l b_i \left( \sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j) + \sum_{i=1}^l b_i \mu(B_i) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

## 5.2 Całkowanie funkcji dowolnego znaku

Dla takich funkcji posługujemy się rozkładem  $f = f_+ - f_-$ , gdzie

$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = -\min(f, 0)$$

oznaczają część dodatnią i część ujemną funkcji mierzalnej  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . (Zbiór  $X$ ,  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F} \subset 2^X$  jego podzbiorów i miara  $\mu$  na  $\mathcal{F}$  są ustalone).

**Definicja 5.13.** Jeśli  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest funkcją mierzalną, zbiór  $E \subset X$  jest mierzalny i co najmniej jedna z całek  $\int_E f_+ d\mu$ ,  $\int_E f_- d\mu$  jest skończona, to przyjmujemy

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Jeśli całka  $\int_E f d\mu$  jest skończona, to mówimy, że funkcja  $f$  jest całkowalna na  $E$ .

Jeśli  $f \geq 0$ , to jej część ujemna  $f_- = 0$ ; zatem dla funkcji nieujemnych powyższa definicja pokrywa się z przyjętą wcześniej.

Zanotujmy dłuższą listę elementarnych własności całki.

**Stwierdzenie 5.14 (własności całki).**

- (i) Jeżeli  $f = c$  jest stała na zbiorze  $E$ , to  $\int_E f \, d\mu = c\mu(E)$ .
- (ii) Jeżeli  $\mu(E) = 0$ , to  $\int_E f \, d\mu = 0$  dla każdej funkcji mierzalnej  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .
- (iii) Funkcja  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  jest całkowalna na zbiorze  $E \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $|f|$  jest całkowalna na  $E$ .
- (iv) Funkcja  $f$  całkowalna na  $E \subset X$  jest skończona prawie wszędzie w  $E$ .
- (v) **Monotoniczność całki:** jeśli  $f \leq g$  na zbiorze  $E$  i całki z obu funkcji są określone, to  $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$ .
- (vi) **Własność wartości średniej:** dla każdej funkcji  $f$  całkowalnej na  $E$  jest

$$\inf_E f \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq \sup_E f \cdot \mu(E).$$

- (vii) **Nierówność trójkąta:** jeśli  $\int_E f \, d\mu$  jest określona, to

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

- (viii) **Przeliczalna addytywność całki jako funkcji zbioru:** Jeśli  $E$  jest sumą zbiorów  $E_i \in \mathcal{F}$  parami rozłącznych, a  $f$  jest całkowalna na  $E$ , to

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu.$$

- (ix) **Liniowość całki:** jeśli całki funkcji  $f, g$  są określone na  $E$  i ich suma też jest określona (tzn. nie jest wyrażeniem  $\infty - \infty$ ), to

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Dowód. Własności (i) oraz (ii) wynikają łatwo z definicji i odpowiednich własności całki funkcji nieujemnej. Mamy  $|f| = f_+ + f_-$ , dlatego wobec liniowości całki funkcji nieujemnej

$$\int_E |f| \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu + \int_E f_- \, d\mu < \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy całki funkcji  $f_+, f_-$  są skończone, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy ich różnica jest określona i skończona, tzn. gdy  $f$  jest całkowalna. Zatem zachodzi (iii).

Gdyby  $f = +\infty$  (odpowiednio,  $f = -\infty$ ) na zbiorze miary dodatniej w  $E$ , to całka funkcji  $f_+$  (odpowiednio, funkcji  $f_-$ ) byłaby nieskończona. Stąd wynika własność (iv).

Dla dowodu (v) wystarczy zauważyć, że jeśli  $f \leq g$ , to  $f_+ \leq g_+$  i  $f_- \geq g_-$ , a następnie skorzystać z definicji całki i monotoniczności całki funkcji nieujemnej. Własności (vi) i (vii) wynikają od razu z (i), (v) oraz nierówności

$$\inf f \leq f \leq \sup f, \quad -|f| \leq f \leq |f|.$$

Przeliczalną addytywność całki funkcji całkowalnej otrzymujemy jako wniosek z Twierdzenia 5.7: całka funkcji  $f_+$  i całka  $f_-$  – gdy traktować je jako funkcje zbioru – są miarami przeliczalnie addytywnymi.

Najbardziej kłopotliwy jest dowód (ix), gdyż całki mogą przyjmować wartość  $\pm\infty$ . Rozważmy najpierw przypadek, gdy  $f, g$  są całkowalne. Ponieważ

$$\int_E |f + g| d\mu \leq \int_E (|f| + |g|) d\mu = \int_E |f| d\mu + \int_E |g| d\mu,$$

więc  $f + g$  też jest całkowalna. Ponadto,

$$f_+ + g_+ - (f + g)_+ = f_- + g_- - (f + g)_- \geq 0 \quad (5.6)$$

oraz

$$\begin{aligned} f + g &= f_+ - f_- + g_+ - g_- = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-) \\ &= (f + g)_+ + (f_+ + g_+ - (f + g)_+) - \left( (f + g)_- + (f_- + g_- - (f + g)_-) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dzięki addytywności całki funkcji nieujemnych, otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu &= \int_E (f_+ + g_+) d\mu = \int_E (f + g)_+ d\mu + \int_E (f_+ + g_+ - (f + g)_+) d\mu \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \int_E (f + g)_+ d\mu + \int_E (f_- + g_- - (f + g)_-) d\mu \end{aligned}$$

i podobnie

$$\int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E (f + g)_- d\mu + \int_E (f_- + g_- - (f + g)_-) d\mu.$$

Odejmując te równości stronami, sprawdzamy, że  $\int_E f d\mu + \int_E g d\mu = \int_E (f + g) d\mu$ .

Przypuśćmy teraz, że np.  $\int_E f d\mu = +\infty$ , a  $\int_E g d\mu \in \mathbb{R}$ . Wtedy musi być  $\int_E f_+ d\mu = +\infty$ . Całki funkcji  $f_-, g_+, g_-$  są liczbami rzeczywistymi. W takim razie, z pierwszej części dowodu,

$$\begin{aligned} \infty &> \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu \stackrel{(5.6)}{\geq} \int_E (f + g)_- d\mu \geq 0, \\ \infty &> \int_E (f_- + g_- - (f + g)_-) d\mu \stackrel{(5.6)}{=} \int_E (f_+ + g_+ - (f + g)_+) d\mu \geq \int_E (f_+ - (f + g)_+) d\mu. \end{aligned}$$

Gdyby  $\int_E (f + g)_+ d\mu$  była skończona, to dzięki wykazanej już liniowości całki funkcji całkowalnych, uzyskalibyśmy stąd  $\int_E f_+ d\mu < \infty$ , wbrew założeniu. Dlatego  $\int_E (f + g)_+ d\mu = +\infty > \int_E (f + g)_- d\mu$  i własność (ix) zachodzi w rozważanym przypadku.

Pozostałe przypadki można rozpatrzyć podobnie; szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.  $\square$

Posługując się twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, udowodnimy teraz kolejne ważne twierdzenia o możliwości przechodzenia do granicy pod znakiem całki.

**Twierdzenie 5.15 (lemat Fatou).** *Jeśli funkcje  $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , są mierzalne i są nieujemne na zbiorze mierzalnym  $E \subset X$ , to*

$$\int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu. \quad (5.8)$$

**Uwaga 5.16 (przykład ‘wędrującego garbu’).** Może się zdarzyć, że nierówność w lemacie Fatou jest ostra. Oto przykład dla jednowymiarowej miary Lebesgue'a. Warto go pamiętać, gdyż łatwo sobie wtedy przypomnieć, jaki jest *kierunek* nierówności w lemacie. Jeśli  $f_j = \chi_{[j,j+1]}$ :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , to mamy  $\liminf f_j(t) = \lim_j f_j(t) = 0$  dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ , więc dla  $\mu = \lambda_1$  lewa strona (5.8) jest zerem. Jednak  $\int_{\mathbb{R}} f_j d\lambda_1 = 1$  dla każdego  $j \in \mathbb{N}$ , więc prawa strona (5.8) jest jedynką. Czytelnik zechce samodzielnie podać podobny przykład dla  $E = [0, 1]$ ,  $\mu = \lambda_1$  na  $[0, 1]$ .

Proszę zauważać, że ten przykład świadczy również o tym, że założenie monotoniczności w Twierdzeniu 5.11 jest istotne.  $\square$

DOWÓD LEMATU FATOU. Raz jeszcze przypomnijmy, że

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left( \inf_{j \geq m} f_j(x) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \inf_{j \geq m} f_j(x) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x),$$

gdzie  $h_m(x) = \inf_{j \geq m} f_j(x)$  jest rosnącym ciągiem funkcji mierzalnych, nieujemnych na  $E$  i  $h_m \leq f_m$  dla każdego  $m$ . Dlatego, wobec Twierdzenia 5.11 o zbieżności monotonicznej,

$$\begin{aligned} \int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu &= \int_E \lim_{m \rightarrow \infty} h_m d\mu \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E h_m d\mu = \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_E h_m d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m d\mu. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z monotoniczności całki i nierówności  $h_m \leq f_m$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.17 (Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).** Założmy, że funkcje  $f_j, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , są mierzalne i  $|f_j| \leq g$ , gdzie  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  jest funkcją całkowalną. Jeśli  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  prawie wszędzie w  $X$ , to

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |f_j - f| d\mu = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu = \int_X f d\mu. \quad (5.9)$$

Podany wcześniej przykład ‘wędrującego garbu’ świadczy o tym, że założenie, iż  $|f_j| \leq g$  są wspólnie ograniczone przez jedną i tę samą funkcję  $g$  (czasem nazywaną *majorantą*), jest istotne!

Dowód. Skoro  $g \geq |f_j|$ , to  $g \pm f_j \geq 0$ . Z lematu Fatou otrzymujemy więc

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} (g \pm f_j) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X (g \pm f_j) d\mu. \quad (5.10)$$

Zauważmy, że dla każdego ciągu liczbowego  $(a_j)$  i  $b \in \mathbb{R}$  jest

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (b + a_j) = b + \liminf_{j \rightarrow \infty} a_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} (b - a_j) = b - \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j.$$

Funkcja  $g$ , jako funkcja nieujemna całkowalna, jest skończona prawie wszędzie w  $X$ . Dlatego z dwóch nierówności (5.10), przytoczonej własności granicy dolnej i liniowości całki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_X (g + \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j) d\mu &\leq \int_X g d\mu + \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu, \\ \int_X (g - \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j) d\mu &\leq \int_X g d\mu - \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu, \end{aligned}$$

stąd zaś, po odjęciu  $\int_X g \, d\mu$ ,

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j \, d\mu \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j \, d\mu \leq \int_X \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu.$$

Jednak  $\liminf f_j = \limsup f_j = \lim f_j = f$  na zbiorze pełnej miary w  $X$ , więc prawa i lewa strona w powyższych nierównościach są równe  $\int_X f \, d\mu$ . Stąd natychmiast wynika teza.<sup>2</sup>  $\square$

**Twierdzenie 5.18 (bezwzględna ciągłość całki jako funkcji zbioru).** *Jeśli  $f$  jest funkcją całkowalną na zbiorze mierzalnym  $E$ , to dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że*

$$\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$$

dla każdego zbioru mierzalnego  $A \subset E$  o mierze  $\mu(A) < \delta$ .

Dowód. Wobec Twierdzenia 5.7,

$$\nu(A) = \int_A |f| \, d\mu, \quad A \subset E, \quad A \in \mathcal{F}$$

jest miarą (przeliczalnie addytywną) na  $\sigma$ -ciele podzbiorów mierzalnych zbioru  $E$ . Z założenia,  $\nu(E) = \int_E |f| \, d\mu < \infty$ . Połóżmy

$$E_m = \{x \in E : |f(x)| \geq m\}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

wtedy  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ . Dzięki warunkowi  $\nu(E) < \infty$ , ze Stwierdzenia 4.9 (iii) otrzymujemy

$$\nu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(E_m) = 0.$$

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy  $m \in \mathbb{N}$  tak, aby  $\nu(E_m) < \varepsilon/2$ . Wtedy, dla  $A \subset E$ ,

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_{A \cap E_m} |f| \, d\mu + \int_{A \setminus E_m} |f| \, d\mu \leq \nu(E_m) + m \cdot \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + m \cdot \mu(A) < \varepsilon,$$

o ile tylko  $\mu(A) < \delta = \varepsilon/(2m)$ .  $\square$

### 5.2.1 Związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna

Pozostaje pytanie, jak obliczać całkę Lebesgue'a? Czy dla miary  $\mu = \lambda_1$  na prostej rzeczywiście mamy do czynienia z tą samą całką, którą obliczaliśmy, znajdując funkcje pierwotne i posługując się twierdzeniem Newtona–Leibniza? Okazuje się, że tak. Wyjaśnijmy krótko związek obu całek. Będziemy posługiwać się terminologią, wprowadzoną podczas wykładów na I roku (patrz rozdział 9.5 skryptu z Analizy Matematycznej I).

---

<sup>2</sup>Dla dowodu pierwszej części (5.17) proszę zauważać, że  $|f_j - f| \rightarrow 0$  p.w. i  $|f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq 2g$ .

Załóżmy, że funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na  $[a, b]$ . Z całkowalności w sensie Riemanna wynika mierzalność.<sup>3</sup> Oczywiście całka Lebesgue'a modułu takiej funkcji nie przekracza  $M(b - a)$ , gdzie  $M = \sup |f|$ . Niech  $P$  będzie dowolnym podziałem odcinka  $[a, b]$  i niech  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  oznaczają końce odcinków tworzących ten podział. Wobec addytywności całki jako funkcji zbioru (patrz własność (viii) w Stwierdzeniu 5.14) całka Lebesgue'a

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} f d\lambda_1, \quad \text{gdzie } J_i = [x_{i-1}, x_i] \text{ dla } i = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

Z monotoniczności całki

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \sup_{J_i} f &= \sum_{i=1}^N \sup_{J_i} f \cdot \lambda_1(J_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \int_{J_i} f d\lambda_1 \quad (\text{ta suma jest całką Lebesgue'a } f) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \inf_{J_i} f \cdot \lambda_1(J_i) = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \inf_{J_i} f \end{aligned}$$

Lewa i prawa strona powyższych nierówności są, odpowiednio, górną i dolną sumą całkową Riemanna dla podziału  $P$ . Zatem  $G(f, P) \geq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \geq D(f, P)$  dla każdego podziału  $P$ . Biorąc kres dolny lewych stron i kres górny prawych stron względem wszystkich podziałów  $[a, b]$ , sprawdzamy, że całka Lebesgue'a  $\int_{[a,b]} f d\lambda_1$  jest nie większa od całki górnej Riemanna funkcji  $f$  i nie mniejsza od całki dolnej Riemanna funkcji  $f$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P G(f, P) \geq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \geq \sup_P D(f, P) = \int_a^b f(x) dx;$$

Ponieważ  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna, więc jej całka dolna i całka górna Riemanna są równe całce (Riemanna!)  $\int_a^b f(x) dx$ . Dlatego całki Lebesgue'a i Riemanna funkcji  $f$  na  $[a, b]$  są równe.

Zachodzi zatem następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.19.** *Jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ograniczoną, całkowalną w sensie Riemanna, to  $f$  jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na  $[a, b]$ . Obie całki – Riemanna i Lebesgue'a – funkcji  $f$  są równe.*

**Wniosek 5.20.** *Dla każdej funkcji ciągłej  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zachodzi wzór*

$$\int_a^b f d\lambda_1 = F(b) - F(a),$$

gdzie  $F$  jest jakąkolwiek funkcją pierwotną  $f$ .

---

<sup>3</sup>Funkcja ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest zbiorem miary Lebesgue'a zero; nietrudno wykazać, że stąd wynika mierzalność: jeśli  $f$  jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna, to zbiór  $\{x \in [a, b]: f(x) > t\}$  jest sumą pewnego zbioru otwartego i zbioru miary zero.

**Uwaga 5.21.** Nietrudno wywnioskować stąd, że jeśli  $f$  jest funkcją *nieujemną* na przedziale  $J \subset \mathbb{R}$  i jej całka niewłaściwa Riemanna jest skończona, to  $f$  jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na  $J$ .

Natomiast dla funkcji, które zmieniają znak, jest inaczej: ze zbieżnością całki niewłaściwej Riemanna nie wynika całkowalność w sensie Lebesgue'a. Powód jest prosty: nie każda całka niewłaściwa, która jest zbieżna, jest bezwzględnie zbieżna (patrz np. Przykład 10.9 w skrypcie z Analizy Matematycznej I).

### 5.3 Zamiana zmiennych. Twierdzenie Fubiniego

Podamy teraz dwa bardzo ważne twierdzenia, które w połączeniu z Twierdzeniem 5.19 umożliwiają *obliczanie* wielu całek. Pierwsze z nich, twierdzenie o zamianie zmiennych, jest naturalnym uogólnieniem Twierdzenia 4.35 (o mierze liniowego obrazu zbioru mierzalnego) na przypadek odwzorowań nieliniowych. Twierdzenie Fubiniego orzeka natomiast, że całkę z funkcji wielu zmiennych  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  całkowalnej względem miary Lebesgue'a można obliczać, całkując kolejno względem zmiennych  $x_k$  i miary Lebesgue'a  $d\lambda_1(x_k)$  (a kolejność całkowań nie ma wpływu na wynik).

Podamy najpierw scisłe sformułowania obu twierdzeń, następnie zaś omówimy kilka przykładów ich zastosowań.

**Twierdzenie 5.22 (o zamianie zmiennych).** *Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym, a  $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  zbioru  $\Omega$  na  $\Phi(\Omega)$ . Założmy, że  $f$  jest funkcją całkowalną (lub mierzalną i nieujemną) względem miary Lebesgue'a  $\lambda_n$  na  $\Phi(\Omega)$ . Wtedy  $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$  jest całkowalna (odpowiednio, mierzalna i nieujemna) na zbiorze  $\Omega$  i zachodzi równość*

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n. \quad (5.12)$$

Biorąc  $f = \chi_{\Phi(E)}$ , gdzie  $E \subset \Omega$  jest zbiorem mierzalnym, otrzymujemy

**Wniosek 5.23.** *Jeśli  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym, a  $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  dyfeomorfizmem klasy  $C^1$ , to*

$$\lambda_n(\Phi(E)) = \int_E |\det D\Phi| \, d\lambda_n \quad (5.13)$$

dla każdego zbioru mierzalnego  $E \subset \Omega$ .

**Twierdzenie 5.24 (Fubiniego).** *Niech  $f: \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  będzie funkcją całkowalną (lub mierzalną w sensie Lebesgue'a i nieujemną). Wówczas:*

1. *Dla  $\lambda_n$ -prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $\lambda_m$ -prawie wszystkich  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  funkcje  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  oraz  $f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  są mierzalne odpowiednio względem  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$  i  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ;*
2. *Funkcje*

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_m(\mathbf{y}) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_n(\mathbf{x}) \in \overline{\mathbb{R}}$$

są mierzalne odpowiednio względem  $\sigma$ -ciał  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  i  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ ;

### 3. Zachodzą równości

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{x}) \right) d\lambda_m(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

**Uwaga.** Dla  $m = n = 1$  i  $f = \chi_P$ , gdzie  $P$  jest przedziałem w  $\mathbb{R}^2$ , (5.14) to po prostu wzór na pole prostokąta. Dla  $f = \chi_{A \times B}$ , gdzie  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  i  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ , równość (5.14) przybiera postać

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_{A \times B} d\lambda_{n+m} = \int_A \left( \int_B 1 d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \lambda_n(A) \lambda_m(B).$$

W Twierdzeniu 4.37 wykazaliśmy, że faktycznie tak jest.

Dowody obu twierdzeń na razie odłożymy i wskażemy kilka przykładów zastosowań.

**Przykład 5.25.** Niech  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}$  i  $f(x, y) = x^2 y$ . Obliczymy całkę  $\int_{\Omega} f d\lambda_2$ , korzystając z twierdzenia Fubiniego i związku między całkami Lebesgue'a i Riemanna. Czytelnik zechce naszkicować trójkąt  $\Omega$  i prześledzić rachunki, patrząc na rysunek. Otóż,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^y x^2 y dx \right) dy \\ &= \int_0^1 y \left( \int_0^y x^2 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^y dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^4 dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^y = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Całkując najpierw względem  $y$ , potem zaś względem  $x$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) \\ &= \int_0^1 x^2 \left( \int_x^1 y dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left( 1 - x^2 \right) dx = \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Zgodnie z twierdzeniem Fubiniego, wynik jest za każdym razem taki sam.  $\square$

**Przykład 5.26.** Pokażemy, że założenie całkowalności  $f$  w twierdzeniu Fubiniego jest istotne. Wybierzmy ciąg liczb  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < 1$ ,  $\lim a_j = 1$ . Dla  $j \in \mathbb{N}$  niech  $g_j : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  będzie funkcją ciągłą na  $[0, 1]$  (np. kawałkami liniową), znikającą poza przedziałem  $I_j = [a_{j-1}, a_j]$  i taką, że całka  $\int_0^1 g_j(x) dx = 1$ . Położmy

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (g_j(x) - g_{j+1}(x)) g_j(y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Zauważmy, że dla każdego punktu  $(x, y) \in [0, 1]^2$  szereg, określający  $f$ , ma co najwyżej jeden składnik niezerowy (trzeba dobrać  $j_0$  tak, aby  $y \in [a_{j_0-1}, a_{j_0}]$ ; dla  $j \neq j_0$  jest  $g_j(y) = 0$ ). Dlatego  $f$  jest dobrze określona funkcją mierzalną.

Nietrudno zauważyc (proszę na rysunku zaznaczyć w kwadracie  $[0, 1]^2$  zbiór, gdzie funkcja  $f \neq 0$ , a następnie zbadać całki z  $f$  po odcinkach  $x = \text{const}$  i  $y = \text{const}$ ), że

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} g_j(y) \left( \int_0^1 (g_j(x) - g_{j+1}(x)) dx \right) dy = 0,$$

jednak

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_1} \int_{I_1} g_1(x) g_1(y) dx dy = 1.$$

Wyniki są różne, gdyż  $\int_{[0,1]^2} |f| d\lambda_2 = \infty$ , tzn.  $f$  nie jest całkowalna na kwadracie  $[0, 1]^2$ .  $\square$

**Przykład 5.27.** Sprawdzamy, że  $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ . Oznaczmy tę całkę literą  $I$ . Z twierdzenia Fubiniego

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) d\lambda_2(x, y).$$

Wprowadzimy teraz zmienne biegunowe w  $\mathbb{R}^2$ . Niech

$$(0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni (r, \theta) \longmapsto \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\});$$

przekształcenie  $\Phi$  jest dyfeomorfizmem pasa  $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ ; uzupełnienie  $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(\Omega)$  obrazu tego pasa jest półprostą, a więc ma miarę Lebesgue'a równą zero. Ponadto

$$\det D\Phi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

Dlatego, na mocy wzoru (5.12) i twierdzenia Fubiniego,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\Phi(\Omega)} \exp(-x^2 - y^2) d\lambda_2(x, y) = \int_{\Omega} \exp(-r^2) \cdot r d\lambda_2(r, \theta) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) dr = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \cdot \left( -e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

**Przykład 5.28.** Obliczymy miarę Lebesgue'a kuli  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ . Z uwagi na niezmienniczość miary Lebesgue'a względem przesunięć i Twierdzenie 4.35,

$$\lambda_n(B(x, r)) = \lambda_n(B(0, r)) = |\det(r \cdot \text{Id})| \cdot \lambda_n(B(0, 1)) = r^n \cdot \lambda_n(B(0, 1)). \quad (5.15)$$

Wystarczy więc obliczyć

$$\omega_n := \lambda_n(B(0, 1)). \quad (5.16)$$

**Twierdzenie 5.29.** Dla  $n = 1, 2, \dots$  zachodzi wzór

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)} \quad (5.17)$$

gdzie

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

jest funkcją gamma Eulera.

Dowód. Przekrój kuli  $B^n(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  ‘płaszczyzną’ afinczną  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$  jest  $(n-1)$ -wymiarową kulą o promieniu  $(1-t^2)^{1/2}$ . Dlatego z twierdzenia Fubiniego i wzoru (5.15) wynika, że

$$\omega_n = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B^n(0,1)} d\lambda_n = \int_{-1}^1 \omega_{n-1} (1-t^2)^{(n-1)/2} dt = 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt.$$

Dokonując teraz zamiany zmiennych  $s = t^2$ ,  $dt = (\sqrt{s})' ds = \frac{1}{2}s^{-1/2} ds$ , otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$\omega_n = \omega_{n-1} \int_0^1 (1-s)^{\frac{n+1}{2}-1} s^{\frac{1}{2}-1} ds = \omega_{n-1} \cdot B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (5.18)$$

w której

$$B(a, b) = \int_0^1 (1-s)^{a-1} s^{b-1} ds, \quad a, b > 0$$

oznacza funkcję beta Eulera. Wiadomo (patrz wykłady Analizy Matematycznej z I roku, podrozdział 10.2), że

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem rekurencję (5.18) można zapisać jako

$$\omega_n = \omega_{n-1} \cdot \pi^{1/2} \cdot \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}. \quad (5.19)$$

Wzór (5.17) zachodzi dla  $n = 1$ , gdyż

$$\omega_1 = \lambda_1((-1, 1)) = 2 = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\pi^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)};$$

dłatego teza twierdzenia łatwo wynika z (5.19) przez indukcję.  $\square$

Dla  $n = 2$  i  $n = 3$  wzór (5.17) implikuje znane Czytelnikowi zależności

$$\omega_2 = \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(4/2)} = \frac{\pi}{(2-1)!} = \pi, \quad \omega_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\pi.$$

**Uwaga 5.30.** Całkę  $\int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt$  można obliczyć różnymi sposobami, niekoniecznie odwołując się do funkcji  $\Gamma$  i  $B$  Eulera. Można np. podstawić  $t = \cos y$ ,  $y \in (0, \frac{\pi}{2})$  i potem przez części obliczać całki z potęg sinusa.

Ponadto, miarę  $\omega_n$  kuli  $B^n(0, 1)$  można obliczyć inaczej, np. całkując we współrzędnych biegunowych w  $\mathbb{R}^n$ . Czytelnik zechce rozwiązać następujące zadanie.

**Zadanie 5.31.** Niech, dla  $r > 0$ ,  $\theta_2 \in (0, 2\pi)$  i  $|\theta_1| < \frac{\pi}{2}$ ,

$$x = r \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad y = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad z = r \sin \theta_1.$$

Proszę sprawdzić, że przekształcenie  $\varphi: (r, \theta_1, \theta_2) \mapsto (x, y, z)$  określone powyższymi wzorami jest dyfeomorfizmem przedziału  $(0, 1) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^3$  na podzbiór otwarty pełnej miary w kuli  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ . Obliczyć wyznacznik macierzy Jacobiego tego dyfeomorfizmu i objętość kuli.

### 5.3.1 Dowód twierdzenia o zamianie zmiennych

Idea dowodu jest prosta: rozkłada się dziedzinę  $\Omega$  dyfeomorfizmu  $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  na drobne, parami rozłączne zbiory borełowskie, tak, aby na każdym z nich różniczka  $D\Phi$  tego dyfeomorfizmu była *niemalże stała*, równa z góry zadanemu automorfizmowi liniowemu przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , z dokładnością do ustalonego marginesu błędu. Następnie, korzysta się z Twierdzenia 4.35 (o mierze liniowego obrazu zbioru mierzalnego), sumuje otrzymane wyniki i przechodzi do granicy z marginesem błędu.

Szczegóły wymagają pewnej staranności.

**Lemat 5.32 (o rozkładzie dziedziny dyfeomorfizmu).** *Jeśli  $\Phi: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  jest dyfeomorfizmem, a  $c > 1$  ustaloną liczbą, to dla  $j = 1, 2, \dots$  istnieją zbiory otwarte  $U_j \subset \Omega$ , których domknięcia  $\overline{U}_j$  są zwarte i  $\overline{U}_j \subset \Omega$  dla  $j \in \mathbb{N}$ , oraz automorfizmy liniowe  $s_j \in GL(n, \mathbb{R})$  przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , które spełniają następujące warunki:*

- (i)  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ ;
- (ii) *Zachodzą nierówności*

$$|\det D\Phi(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{c} |\det s_j| \quad \text{dla } \mathbf{x} \in U_j, j = 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

- (iii) *Dla każdego zbioru mierzalnego  $A \subset U_j$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots$ , zbiór  $\Phi(A)$  jest mierzalny, a ponadto*

$$\lambda_n(A) |\det s_j| \geq \frac{1}{c} \lambda_n(\Phi(A)). \quad (5.21)$$

Intuicja jest prosta:  $U_i$  to zbiór tych punktów  $\mathbf{x}$ , dla których  $D\Phi(\mathbf{x}) \approx s_i$ , gdzie  $s_i$  są automorfizmami, wybieranymi z pewnego przeliczalnego, gęstego w  $GL(n, \mathbb{R})$  podzbioru automorfizmów liniowych  $\mathbb{R}^n$ . Liczba  $c > 1$  służy do kontroli błędu przybliżenia i wynikających zeń oszacowań (5.20)–(5.21). Dowód tego lematu zawiera kluczowe trudności dowodu twierdzenia o zamianie zmiennych.

**Dowód LEMATU 5.32.** Ustalmy  $c > 1$ . Wybierzmy przeliczalny gęsty podzbiór  $\mathbb{S} \subset GL(n, \mathbb{R})$ ; można np. wziąć wszystkie automorfizmy liniowe, których macierze w standardowej bazie mają tylko wyrazy wymierne. Ustalmy automorfizm  $s \in \mathbb{S}$  i liczbę  $m \in \mathbb{N}$ . Niech  $\varepsilon > 0$  będzie małą liczbą, której wartość dobierzemy do  $c, s, n$  później.

Niech  $k > m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Określmy  $Z(s, m, k)$  jako zbiór tych punktów  $\mathbf{x} \in \Omega$ , dla których spełnione są trzy warunki, (5.22)–(5.24) niżej: po pierwsze,

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \frac{1}{m} \quad \text{oraz} \quad \|\mathbf{x}\| < m, \quad (5.22)$$

a ponadto

$$\|D\Phi(\mathbf{x}) \circ s^{-1} - \text{Id}\| + \|s \circ D\Phi(\mathbf{x})^{-1} - \text{Id}\| < \varepsilon, \quad (5.23)$$

$$\frac{\|\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}) - D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in B(\mathbf{0}, 1/k), \quad (5.24)$$

Następnie, niech  $Z(s, m) = \bigcup_{k>m} Z(s, m, k)$ . Jest to zbiór otwarty: jeśli  $\mathbf{x} \in Z(s, m)$ , to warunki (5.22)–(5.23) zachodzą w pewnej kuli wokół  $\mathbf{x}$ , gdyż nierówności są ostre, a  $\Phi$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^1$ . Jeśli warunek (5.24) jest spełniony w punkcie  $\mathbf{x}$  dla liczby  $k > m$ , to jest spełniony na małej kuli wokół  $\mathbf{x}$  dla pewnej liczby  $k_1 > k$ ; nietrudno to uzasadnić, korzystając np. z ciągłości lewej strony nierówności (5.24) jako funkcji pary zmiennych  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  (dla  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  oczywiście przyjmujemy wartość 0).<sup>4</sup>

Ponieważ  $\Phi \in C^1$ , więc rodzina wszystkich  $Z(s, m)$  pokrywa zbiór  $\Omega$ , a domknięcie zbiorów  $Z(s, m)$  są zwartymi podzbiorami  $\Omega$ . Na zbiorze  $Z(s, m)$  funkcja  $\Phi$  nie tylko jest dyfeomorfizmem, ale spełnia warunek Lipschitza na każdej zawartej w nim kuli; stąd wynika, że dla mierzalnych  $A \subset Z(s, m)$  zbiór  $\Phi(A)$  jest mierzalny.<sup>5</sup>

Z oszacowań normy (5.23) otrzymujemy

$$\|D\Phi(\mathbf{x}) \circ s^{-1}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{w}\| < \varepsilon, \quad \|s \circ D\Phi(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{w}\| < \varepsilon \quad (5.25)$$

dla  $\mathbf{x} \in Z(s, m)$  i wszystkich  $\mathbf{w} \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ . Stąd wynika, że obraz kuli  $B = B(0, 1)$  pod działaniem przekształcenia liniowego  $D\Phi(\mathbf{x}) \circ s^{-1}$  i przekształcenia doń odwrotnego  $s \circ D\Phi(\mathbf{x})^{-1}$  spełnia dla każdego  $\mathbf{x} \in Z(s, m)$  zależności

$$D\Phi(\mathbf{x}) \circ s^{-1}(B) \subset B(0, 1 + \varepsilon), \quad s \circ D\Phi(\mathbf{x})^{-1}(B) \subset B(0, 1 + \varepsilon). \quad (5.26)$$

Porównując miary zbiorów, występujących w (5.26), z Twierdzeniem 4.35 o mierze obrazu liniowego zbioru mierzalnego otrzymujemy

$$\det(D\Phi(\mathbf{x}) \circ s^{-1}) \leq (1 + \varepsilon)^n, \quad \det(s \circ D\Phi(\mathbf{x})^{-1}) \leq (1 + \varepsilon)^n.$$

stąd zaś

$$\frac{|\det s|}{(1 + \varepsilon)^n} \leq |\det D\Phi(\mathbf{x})| \leq (1 + \varepsilon)^n |\det s|, \quad \mathbf{x} \in Z(s, m). \quad (5.27)$$

Zatem dla  $1 < (1 + \varepsilon)^n \leq c$  przeliczalna rodzina zbiorów  $Z(s, m)$  spełnia tezę lematu, za wyjątkiem warunku (iii), którego jeszcze nie sprawdziliśmy.

Dalej pracujemy przy ustalonych  $s$  i  $m$ . Wybierzmy jeszcze  $M > 1$  tak, aby

$$\|s\| + \|s^{-1}\| < M. \quad (5.28)$$

---

<sup>4</sup>Osoby zainteresowane dogłębnym rozumieniem wykładu proszone są o uzupełnienie szczegółów.

<sup>5</sup>Proszę sprawdzić, że lipschitzowski obraz zbioru miary zero jest zbiorem miary zero, a homeomorficzny obraz zbioru borelowskiego jest borelowski.

Ustalmy  $k > m$ . Oszacujemy miarę zbioru  $f(Z(s, m, k) \cap U)$ , gdzie  $U$  jest dowolnym otwartym podzbiorem  $Z(s, m)$ . Przedstawmy  $U$  jako sumę małych kostek domkniętych o wnętrzach parami rozłącznych. Niech  $Q$  będzie jedną z tych kostek, o krawędzi  $d \ll 1/k$ . Założymy, że  $Z(s, m, k) \cap Q \neq \emptyset$ ; ustalmy  $\mathbf{x} \in Z(s, m, k) \cap Q$ .

Porównamy wielkość zbiorów  $\Phi(Q)$  i  $s(Q)$ . Niech  $\mathbf{y} \in Q$  będzie dowolny. Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - s(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| &\leq \|\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\quad + \|(D\Phi(\mathbf{x}) - s)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \varepsilon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \varepsilon \|s(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \quad \text{wobec (5.24)} \\ &\stackrel{(5.28)}{\leq} 2\varepsilon M \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq 2\varepsilon M d \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Zatem  $\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - s(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{w} = s(\mathbf{z})$  dla punktu  $\mathbf{z}$  takiego, że

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|s^{-1}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \leq 2\varepsilon M^2 d \sqrt{n}.$$

Punkt  $\mathbf{y} + \mathbf{z}$  należy więc do kostki  $Q'$  współśrodkowej z  $Q$  i mającej krawędź

$$d' = d + 2 \cdot 2\varepsilon M^2 d \sqrt{n}.$$

Jest  $d' < c^{1/n} d$ , gdy do ustalonych  $M > 1$  i  $c > 1$  dobierzymy  $\varepsilon > 0$  dostatecznie małe. Punkt  $\Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x}) + s(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{p} + s(\mathbf{y} + \mathbf{z})$  należy do przesuniętego o ustalony wektor  $\mathbf{p}$  obrazu zbioru  $s(Q')$ . Stąd

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \leq \lambda_n(s(Q')) = |\det s| \cdot \lambda_n(Q') \leq c \cdot |\det s| \cdot \lambda_n(Q).$$

Sumując takie oszacowania, otrzymujemy

$$\lambda_n(\Phi(Z(s, m, k) \cap U)) \leq c \cdot |\det s| \cdot \lambda_n(U), \quad U \subset Z(m, s)$$

a następnie, przechodząc do granicy  $k \rightarrow \infty$  (zbiory  $Z(s, m, k)$  tworzą ciąg wstępujący!),

$$\lambda_n(\Phi(U)) \leq c \cdot |\det s| \cdot \lambda_n(U)$$

dla otwartych podzbiorów  $U \subset Z(s, m)$ . Stąd już łatwo uzyskać warunek (iii) tezy lematu najpierw dla zbiorów borelowskich typu  $G_\delta$ , potem zaś dla wszystkich mierzalnych.  $\square$

**Uwaga.** Drugą część dowodu tego lematu można nieco uprościć; trzeba w tym celu wykazać, że na odpowiednio drobnych podzbiorach zbioru  $Z(s, m, k)$  funkcja  $\Phi \circ s^{-1}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $\theta$  odpowiednio bliską 1 (co jest dość łatwe) i wiedzieć, że wtedy  $\lambda_n(\Phi(Q)) \leq \theta^n \lambda_n(Q)$ . Intuicyjnie to w miarę jasne, ale dowód nie jest zupełnie trywialny.

**DOWÓD TWIERDZENIA O ZAMIANIE ZMIENNYCH.** Wystarczy przeprowadzić dowód dla funkcji mierzalnych, nieujemnych; dla funkcji całkowalnych dowolnego znaku twierdzenie wyniknie stąd natychmiast. Ustalmy zbiór mierzalny  $E \subset \Omega$  i liczbę  $c > 1$ . Niech  $U_i$  oraz  $s_i$  oznaczają zbiory i przekształcenia z Lematu 5.32. Biorąc  $A_1 = U_1$  i  $A_j = U_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$  dla  $j \geq 2$ , otrzymujemy rodzinę zbiorów borelowskich, parami rozłącznych, pokrywającą  $\Omega$ . Jest

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i), \quad \Phi(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(E \cap A_i);$$

z Lematu 5.32 wynika, że wszystkie zbiory wyżej są mierzalne. Wobec addytywności całki i nierówności (5.20)–(5.21),

$$\begin{aligned} \int_E |\det D\Phi| d\lambda_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E \cap A_i} |\det D\Phi| d\lambda_n \\ &\geq \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} |\det(s_i)| \cdot \lambda_n(E \cap A_i) \geq \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(\Phi(E \cap A_i)) = \frac{1}{c^2} \lambda_n(\Phi(E)). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy  $c \rightarrow 1$ , otrzymujemy stąd

$$\int_E |\det D\Phi| d\lambda_n \geq \lambda_n(\Phi(E)), \quad (5.29)$$

lub równoważnie,

$$\int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| d\lambda_n \geq \int_{\Phi(\Omega)} f d\lambda_n, \quad (5.30)$$

gdzie  $f = \chi_{\Phi(E)}$  jest funkcją charakterystyczną zbioru  $\Phi(E)$ . Wobec liniowości całki, (5.30) zachodzi nie tylko dla funkcji charakterystycznych, ale i dla wszystkich nieujemnych funkcji prostych. Z Twierdzenia 5.11 (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej) wynika natychmiast, że nierówność (5.30) ma miejsce dla każdej funkcji mierzalnej  $f$  nieujemnej na  $\Phi(\Omega)$ .

Dyfeomorfizm  $\Phi$  i zbiór otwarty  $\Omega$  też mogą być dowolne. Z tego teraz skorzystamy. Zapiszmy (5.30) dla zbioru  $V = \Phi(\Omega)$ , dyfeomorfizmu  $\Psi = \Phi^{-1}: V \rightarrow \Omega = \Psi(V)$ , oraz funkcji

$$g = (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|, \quad g \geq 0 \quad \text{na } \Omega = \Psi(V).$$

Otrzymamy

$$\int_V (g \circ \Psi) \cdot |\det D\Psi| d\lambda_n \geq \int_{\Psi(V)} g d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| d\lambda_n. \quad (5.31)$$

Uprośćmy funkcję podcałkową po lewej stronie. Jest

$$\begin{aligned} (g \circ \Psi)(\mathbf{x}) \cdot |\det D\Psi(\mathbf{x})| &= f(\Phi(\Psi(\mathbf{x}))) \cdot |\det D\Phi(\Psi(\mathbf{x}))| \cdot |\det D\Psi(\mathbf{x})| \\ &= f(\mathbf{x}) \cdot |\det(D\Phi(\Psi(\mathbf{x})) \cdot D\Psi(\mathbf{x}))| \\ &= f(\mathbf{x}) \cdot |\det(D(\Phi \circ \Psi)(\mathbf{x}))| = f(\mathbf{x}), \quad \text{gdyż } \Phi \circ \Psi = \text{Id}. \end{aligned}$$

Dlatego (5.31) jest w istocie nierównością przeciwną do (5.30). Znak nierówności można więc w obu warunkach zastąpić znakiem równości! Dowód twierdzenia o zmianie zmiennych jest zakończony.  $\square$

### 5.3.2 Dowód twierdzenia Fubiniego

Dowód Twierdzenia 5.24 przeprowadzimy dla funkcji mierzalnych, nieujemnych. Wersja dla funkcji całkowalnych wynika stąd łatwo; zainteresowany Czytelnik sam zechce uzupełnić odpowiednie szczegóły.

Podzielimy rozumowanie na kilka kroków, stopniowo poszerzając klasę funkcji, dla których zachodzą poszczególne części tezy. Będziemy dowodzić tylko pierwszej z równości (5.14) i tych fragmentów pierwszego i drugiego punktu tezy, które są niezbędne do nadania sensu tej równości, tzn. mieralności prawie wszystkich funkcji  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$  i mieralności funkcji

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \in \overline{\mathbb{R}},$$

będących całkami  $f_{\mathbf{x}}$  względem  $\lambda_m$ . Aby uzyskać drugą z równości (5.14) i pozostałe fragmenty pierwszego i drugiego punktu tezy, wystarczy zamienić role zmiennych  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  w rozumowaniu.

*Krok 1.* Niech  $f$  będzie funkcją charakterystyczną  $(n+m)$ -wymiarowego przedziału domkniętego  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{n+m}$ , otwartego  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{n+m}$  lub domknięto–otwartego

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{n+m} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{z} \prec \mathbf{b}\}.$$

Każdy taki przedział jest produktem  $I_n \times J_m$  pewnego przedziału  $n$ -wymiarowego  $I_n$  i pewnego przedziału  $m$ -wymiarowego  $J_m$ . Dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  funkcja  $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest albo równa  $\chi_{J_m}$  (gdy  $\mathbf{x} \in I_n$ ), albo jest funkcją stałą równą zero (gdy  $\mathbf{x} \notin I_n$ ), więc jest mieralna względem  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ . Stąd wynika, że

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \chi_{I_n}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_m(J_m)$$

jest funkcją mieralną względem  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Pierwsza z równości (5.14) przybiera więc w tym przypadku postać

$$\lambda_{n+m}(I_n \times J_m) = \lambda_n(I_n) \cdot \lambda_m(J_m),$$

co jest prawdą na mocy Twierdzenia 4.37.<sup>6</sup>

*Krok 2.* Niech teraz  $f$  będzie funkcją charakterystyczną zbioru otwartego  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . Wiemy, że każdy taki zbiór jest sumą przeliczalnej rodziny kostek domkniętych o wewnętrzach parami rozłącznych; nietrudno stąd wywnioskować, że  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ , gdzie  $P_j$  są przedziałami *otwarto-domkniętymi i parami rozłącznymi*. Zatem

$$f = \chi_{\Omega} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j, \quad \text{gdzie } f_j = \chi_{P_j}.$$

Funkcja  $\mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest więc mieralna dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (jako granica zbieżnego ciągu funkcji mieralnych). Następnie, funkcja

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y})$$

---

<sup>6</sup>Można też po prostu odwołać się do równości miary Lebesgue'a i objętości przedziału.

(równość zachodzi wobec twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej) jest mierzalna z tego samego powodu. Wreszcie,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_j d\lambda_{n+m} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

na mocy pierwszego kroku dowodu i kilkakrotnie zastosowanego twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.

*Krok 3.* Teraz niech  $f = \chi_G$ , gdzie  $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$  jest zbiorem ograniczonym typu  $G_\delta$ . Wówczas  $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$  dla pewnego zstępującego ciągu zbiorów otwartych ograniczonych  $\Omega_j$ . Niech  $f_j$  oznacza funkcję charakterystyczną  $\Omega_j$ ; wtedy oczywiście  $f_j \searrow f$  dla  $j \rightarrow \infty$ . Ponownie więc funkcja  $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_j f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mierzalna względem  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ . Ponadto, dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  jest

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) < \infty$$

więc

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y})$$

na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Dlatego, wobec poprzedniego kroku dowodu, funkcja  $\mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y})$  jest mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. Wiemy już, że

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_j d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots;$$

przechodząc do granicy  $j \rightarrow \infty$  (trzeba w tym celu znów kilka razy skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej), otrzymujemy równość (5.14) dla  $f = \chi_G = \lim f_j$ .

*Krok 4.* Teraz udowodnimy tezę dla  $f = \chi_A$ , gdzie  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$  jest dowolnym zbiorem mierzalnym ograniczonym. Z charakteryzacji zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a (patrz Twierdzenie 4.26) wynika, że  $A = G \setminus Z$ , gdzie  $G$  jest ograniczonym zbiorem typu  $G_\delta$ , zaś  $Z \subset G$  jest zbiorem miary  $\lambda_{n+m}$  zero. Zbiór  $Z$  jest zawarty w pewnym zbiorze  $H$  typu  $G_\delta$  i miary Lebesgue'a zero.<sup>7</sup> Funkcja  $\chi_H$  spełnia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_H d\lambda_{n+m} = \lambda_{n+m}(H) = 0,$$

więc

$$\int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in X, \text{ gdzie } \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0.$$

---

<sup>7</sup>Można np. wziąć  $H = \bigcap U_j$ , gdzie  $U_j$ , dla każdego  $j = 1, 2, \dots$ , jest sumą rodziną przedziałów otwartych pokrywających  $Z$ , o łącznej mierze  $< 1/j$ .

Stąd wynika, że dla każdego  $\mathbf{x} \in X$  istnieje zbiór  $Y_{\mathbf{x}}$  taki, że

$$\chi_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{y} \in Y_{\mathbf{x}}, \text{ gdzie } \lambda_m(\mathbb{R}^m \setminus Y_{\mathbf{x}}) = 0.$$

Jednak  $0 \leq \chi_Z \leq \chi_H$ , więc

$$\chi_Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla wszystkich } x \in X \text{ i } \mathbf{y} \in Y_{\mathbf{x}}. \quad (5.32)$$

Funkcja  $f = \chi_A = \chi_G - \chi_Z$ . Ustalmy  $x \in X$ . Wobec (5.32) jest  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dla wszystkich  $\mathbf{y} \in Y_{\mathbf{x}}$ , tzn. na zbiorze pełnej miary w  $\mathbb{R}^m$ . Funkcja, która jest  $\lambda_m$ -prawie wszędzie równa funkcji mierzalnej, sama jest mierzalna; innymi słowy,  $f_{\mathbf{x}}(\cdot) = f(\mathbf{x}, \cdot)$  jest mierzalna dla prawie wszystkich  $\mathbf{x}$ . Ponadto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in X. \quad (5.33)$$

Wynika stąd, że lewa strona tej równości jest mierzalną funkcją zmiennej  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Wreszcie, ponieważ  $X$  jest zbiorem pełnej miary w  $\mathbb{R}^n$ , więc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_G d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_X \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \stackrel{(5.33)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

*Krok 5: przypadek ogólny.* Niech  $f$  będzie dowolną funkcją mierzalną nieujemną. Istnieje wtedy ciąg funkcji prostych  $0 \leq f_j \nearrow f$  dla  $j \rightarrow \infty$ . Zauważmy, że wtedy

$$0 \leq g_j = f_j \cdot \chi_{B(0,j)} \nearrow f.$$

Z poprzednich kroków dowodu i liniowości całki łatwo wynika, że teza twierdzenia Fubiniego zachodzi dla wszystkich funkcji prostych nieujemnych, które znikają poza pewną kulą w  $\mathbb{R}^{n+m}$ , a więc w szczególności dla każdej z funkcji  $g_j$ . Dlatego, dla każdego  $j = 1, 2, \dots$  istnieje taki zbiór  $X_j \subset \mathbb{R}^n$ , że

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus X_j) = 0, \quad \mathbf{y} \mapsto g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ jest funkcją mierzalną dla } \mathbf{x} \in X_j. \quad (5.34)$$

Ponadto, funkcje

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \quad \text{są mierzalne dla } j = 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

Położmy  $X = \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$ . Zbiór  $X$  jest pełnej miary w  $\mathbb{R}^n$  i wszystkie funkcje  $\mathbf{y} \mapsto g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  są mierzalne dla każdego  $\mathbf{x} \in X$ ; dlatego  $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest funkcją mierzalną dla każdego  $\mathbf{x} \in X$ . Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej otrzymujemy teraz mierzalność funkcji

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \quad (5.36)$$

Ponieważ teza twierdzenia Fubiniego zachodzi dla każdej funkcji  $g_j$ , więc

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} g_j d\lambda_{n+m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x});$$

stąd i z (5.36) otrzymujemy, raz jeszcze stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, równość (5.14) dla funkcji  $f$ . To kończy cały dowód.  $\square$

**Wniosek 5.33.** Niech  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Dla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  niech

$$A_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\}, \quad A^{\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\} \quad (5.37)$$

oznaczają tak zwane przekroje pionowe i poziome zbioru  $A$ . Wówczas  $A_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$  dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $A^{\mathbf{y}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  dla prawie wszystkich  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ .

Dowód. Stosujemy pierwszy punkt tezy twierdzenia Fubiniego do  $f = \chi_A$ .  $\square$

**Uwaga 5.34.** Jeśli  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ , to dla pewnych  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  przekrój  $A_{\mathbf{x}}$  może być zbiorem niemierzalnym. Niech np.  $n = m = 1$  i niech  $V \subset [0, 1]$  będzie zbiorem niemierzalnym, skonstruowanym w Przykładzie 4.1. Zbiór  $A = \{0\} \times V$  jest elementem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , gdyż  $\lambda_2(A) = 0$ , jednak jego przekrój  $A_0 = V$  nie jest mierzalnym podzbiorem  $\mathbb{R}$ ! Czytelnik sam wskaże inne, bardziej skomplikowane przykłady takiego zjawiska.

**Wniosek 5.35 (zasada Cavalieri'ego).** Jeśli  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$  i równość  $\lambda_m(A_{\mathbf{x}}) = \lambda_m(B_{\mathbf{x}})$  zachodzi dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , to wówczas  $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$ .  $\square$

Tej równości dla  $n = 1, m = 2$  i ‘przyzwoitych’ brył  $A, B \subset \mathbb{R}^3$  świadomie był już Archimedes, który wiedział, że objętość kuli stanowi  $\frac{2}{3}$  objętości opisanego na niej walca, dowodził zaś tego, rozpatrując poziome przekroje kuli i dwóch stożków wpisanych w walec.

Podamy kilka innych przykładów zastosowań twierdzenia Fubiniego i twierdzenia o zamianie zmiennych.

**Przykład 5.36 (miara stożka nad zbiorem  $n$ -wymiarowym).** Niech  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , gdzie  $R^n$  utożsamiamy z  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , i niech  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  będzie punktem o współrzędnej  $v_{n+1} \neq 0$ . Stożkiem  $C(A, \mathbf{v})$  o podstawie  $A$  (inaczej: nad zbiorem  $A$ ) i o wierzchołku  $\mathbf{v}$  nazywa się zwykle zbiór

$$C(A, \mathbf{v}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{z} = t \cdot (\mathbf{x}, 0) + (1-t) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{x} \in A, t \in [0, 1]\},$$

będący sumą wszystkich odcinków o jednym końcu w punkcie  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, 0) \in A$  i drugim końcu w punkcie  $\mathbf{v}$ . Wykażemy, że

$$\lambda_{n+1}(C(A, \mathbf{v})) = \frac{1}{n+1} \cdot |v_{n+1}| \cdot \lambda_n(A). \quad (5.38)$$

(Czytelnik zechce zauważyc, że gdy  $n = 2$  i  $A$  jest wielokątem w  $\mathbb{R}^2$ , to (5.38) jest znanim wzorem na objętość ostrosłupa.) Niech

$$\Phi: \mathbb{R}^n \times (0, 1) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{x}, t) = t \cdot (\mathbf{x}, 0) + (1-t) \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1};$$

macierzą różniczki  $D\Phi$  przekształcenia  $\Phi$  jest, jak łatwo zauważyc, następująca macierz  $(n+1) \times (n+1)$ :

$$\begin{pmatrix} t \cdot \text{Id}_{n \times n} & B \\ \mathbf{0} & -v_{n+1} \end{pmatrix},$$

gdzie  $B$  oznacza kolumnę liczb  $x_i - v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dlatego  $|\det D\Phi(\mathbf{x}, t)| = t^n \cdot |v_{n+1}|$ .  
Mamy

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(C(A, \mathbf{v})) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_{C(A, \mathbf{v})} d\lambda_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times (0,1)} (\chi_{C(A, \mathbf{v})} \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| d\lambda_{n+1} \quad \text{wobec Twierdzenia 5.22} \\ &= \int_0^1 \int_A t^n \cdot |v_{n+1}| d\lambda_n(\mathbf{x}) dt \quad \text{wobec Twierdzenia Fubiniego 5.24} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot |v_{n+1}| \cdot \lambda_n(A),\end{aligned}$$

a więc istotnie zachodzi wzór (5.38).

**Przykład 5.37 (zasada Cavalieri'ego, wersja II).** Niech  $f$  będzie funkcją mierzalną nieujemną na  $\mathbb{R}^n$ . Wówczas dla każdej liczby  $p \geq 1$  zachodzi wzór

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\lambda_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \lambda_n(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > t\}) dt. \quad (5.39)$$

Istotnie, dzięki równości  $z^p = p \int_0^z t^{p-1} dt$ , stosując twierdzenie Fubiniego, żeby zamienić kolejność całkowania względem  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $t > 0$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\lambda_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( p \int_0^f t^{p-1} dt \right) d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} p t^{p-1} \cdot \chi_{\{(\mathbf{x}, t) : f(\mathbf{x}) > t > 0\}}(\mathbf{x}, t) d\lambda_{n+1}(\mathbf{x}, t) \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \lambda_n(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > t\}) dt.\end{aligned}$$

Innym przykładem zastosowania obu twierdzeń (o zamianie zmiennych i Fubiniego) do obliczania objętości brył obrotowych w  $\mathbb{R}^3$  jest tzw. reguła Pappusa–Guldina (znana także jako reguła Guldina lub twierdzenie Pappusa o środku ciężkości).

**Definicja 5.38.** Jeśli  $A$  jest zbiorem mierzalnym w  $\mathbb{R}^n$ , a  $\mu$  miarą na  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , dodatnią na  $A$ , to środkiem ciężkości zbioru  $A$  względem miary  $\mu$  nazywamy punkt  $s(A)$  o współrzędnych

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A x_i d\mu, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Jeśli któraś z powyższych całek nie istnieje, to środek ciężkości  $A$  względem  $\mu$  nie jest określony). Używa się także zapisu wektorowego

$$s(A) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \mathbf{x} d\mu$$

Gdy  $\mu = \lambda_n$ , mówimy po prostu o środku ciężkości zbioru  $A$ .

**Stwierdzenie 5.39 (reguła Pappusa–Guldina).** Założmy, że zbiór  $A$  zawarty w półpłaszczyźnie  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$  jest mierzalny względem  $\lambda_2$  i ma środek ciężkości. Niech  $B$  będzie zbiorem, który powstaje z  $A$  przez obrót o kąt  $2\pi$  wokół prostej  $x = y = 0$  w  $\mathbb{R}^3$ . Wtedy

$$\lambda_3(B) = 2\pi r \cdot \lambda_2(A), \quad (5.40)$$

gdzie  $r$  oznacza odległość środka ciężkości zbioru  $A$  od osi obrotu.

Dowód. Połóżmy

$$\Phi(x, z, t) = (x \cos t, x \sin t, z) \quad \text{dla } (x, z, t) \in \Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Czytelnik łatwo sprawdzi, że

$$|\det D\Phi(x, z, t)| = |x \cos^2 t + x \sin^2 t| = x, \quad (x, z, t) \in \Omega.$$

Zbiór  $\Phi(A \times (0, 2\pi))$  to po prostu zbiór  $B$  z usuniętą półpłaszczyzną  $\{x > 0, y = 0\}$ , która jest zbiorem miary zero w  $\mathbb{R}^3$ . Dlatego, wobec twierdzenia o zamianie zmiennych i twierdzenia Fubiniego,

$$\lambda_3(B) = \lambda_3(\Phi(A)) = \int_{A \times (0, 2\pi)} |\det D\Phi| d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} \lambda_2(A) \cdot \left( \frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x d\lambda_2 \right) dt.$$

Całka wewnętrzna

$$\frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x d\lambda_2,$$

tz.  $x$ -owa współrzędna środka ciężkości  $s(A)$  zbioru  $A$ , jest równa  $r$ , odległości punktu  $s(A)$  od osi obrotu  $\{x = y = 0\}$ . Dlatego

$$\lambda_3(B) = \int_0^{2\pi} \lambda_2(A) \cdot r dt = 2\pi r \cdot \lambda_2(A).$$

**Przykład 5.40 (objętość torusa obrotowego).** Niech  $R > r > 0$ . Obracając wokół osi  $z$  koło  $K = \{(x, y, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$  położone w płaszczyźnie  $y = 0$  otrzymamy pełny torus o objętości  $2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2$ . To wynika z reguły Pappusa–Guldina: środek ciężkości koła  $K$  pokrywa się z jego geometrycznym środkiem i leży właśnie w odległości  $R$  od osi obrotu.

**Zadanie 5.41.** Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta prostokątnego i półkola. Sprawdzić znane wzory na objętość stożka, walca i kuli, posługując się regułą Guldina.

## 5.4 Przestrzeń $L^1$ funkcji całkowalnych.

**Definicja 5.42.** Niech  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą. Dla  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mierzalnej względem  $\mu$  połóżmy

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu. \tag{5.41}$$

Oczywiście, wielkość  $\|f\|_1$  jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $|f|$  jest całkowalna na  $X$  względem miary  $\mu$ . Nietrudno zauważyć, że gdy  $f, g$  są całkowalne, zaś  $\alpha \in \mathbb{R}$ , to

$$\|\alpha \cdot f\|_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_1, \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

(druga nierówność wynika wprost z nierówności trójkąta  $|f + g| \leq |f| + |g|$  i liniowości całki). Jednak, formalnie biorąc, odwzorowanie  $f \mapsto \|f\|_1$  nie jest normą na przestrzeni liniowej wszystkich funkcji całkowalnych, gdyż z równości  $\|f\|_1 = 0$  nie wynika wcale, że  $f \equiv 0$  – wynika stąd jedynie, że  $f = 0$  prawie wszędzie względem miary  $\mu$  na  $X$ .

Aby ominąć tę drobną trudność i wyposażyć przestrzeń funkcji całkowalnych w naturalną normę (5.41), określa się na zbiorze funkcji całkowalnych na  $X$  relację

$$f \sim g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0. \quad (5.42)$$

Nietrudno sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Dwie funkcje są w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy są równe  $\mu$ -prawie wszędzie. To nie ma wpływu na wartość całki.

**Definicja 5.43 (przestrzeń funkcji całkowalnych).** Symbolem  $L^1(X, \mu)$  oznaczamy zbiór klas abstrakcji relacji (5.42), określonej na zbiorze tych funkcji mierzalnych  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , dla których  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

Z formalnego punktu widzenia, wg. powyższej definicji elementy przestrzeni funkcji całkowalnych nie są funkcjami, tylko klasami abstrakcji relacji  $\sim$ . W praktyce, utożsamia się funkcję  $f$  z jej klasą abstrakcji  $[f]_\sim$  i traktuje elementy  $L^1(X, \mu)$  jak funkcje. W typowych sytuacjach nie prowadzi to do żadnych nieporozumień.

**Stwierdzenie 5.44.** *Odwzorowanie  $f \mapsto \|f\|_1$  jest normą na  $L^1(X, \mu)$ .*

Dowód. Jednorodność i nierówność trójkąta są oczywiste i już o nich mówiliśmy. Jeśli  $f \sim 0 \in L^1(X, \mu)$ , to  $f = 0$  prawie wszędzie i  $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = 0$ . Na odwrót, jeśli  $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = 0$ , to  $|f| = 0$  p.w., a więc  $f \sim 0$ , tzn.  $f = 0 \in L^1(X, \mu)$ .  $\square$

Przestrzeń liniowa  $L^1(X, \mu)$  wyposażona w metrykę

$$d(f, g) = \|f - g\|_1$$

staje się przestrzenią metryczną. Ma miejsce następujący ważny fakt.

**Twierdzenie 5.45 (zupełność przestrzeni  $L^1$ ).** *Przestrzeń  $L^1(X, \mu)$  z metryką  $d(f, g) = \|f - g\|_1$  jest przestrzenią metryczną zupełną.*

Dowód. Wykażemy, że jeśli ciąg  $(f_j) \subset L^1(X, \mu)$  spełnia warunek Cauchy'ego, to jest zbieżny do pewnej funkcji  $f \in L^1(X, \mu)$ .

*Krok 1: identyfikacja funkcji  $f$ .* Korzystając z warunku Cauchy'ego, można wybrać podciąg  $f_{j_1}, f_{j_2}, f_{j_3}, \dots$  ciągu  $(f_j)$  taki, że

$$\|f_{j_k} - f_m\|_1 < \frac{1}{2^k} \quad \text{dla } m > j_k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.43)$$

Położymy

$$g_k = \sum_{s=1}^k |f_{j_{s+1}} - f_{j_s}|, \quad g = \sum_{s=1}^{\infty} |f_{j_{s+1}} - f_{j_s}| = \lim g_k.$$

Wobec (5.43) i liniowości całki  $\|g_k\|_1 < \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 1$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ . Z lematu Fatou,

$$\int_X |g| d\mu = \int_X \lim |g_k| d\mu = \int_X \liminf |g_k| d\mu \leq \liminf \int_X |g_k| d\mu \leq 1.$$

Zatem  $g \in L^1(X, \mu)$ , więc z pewnością  $g$  jest skończona prawie wszędzie. Szereg, definiujący  $g$ , jest więc zbieżny dla  $\mu$ -prawie wszystkich  $x \in X$ . Dlatego szereg

$$S(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (f_{j_{s+1}}(x) - f_{j_s}(x)) \quad (5.44)$$

też jest zbieżny dla  $\mu$ -prawie wszystkich  $x \in X$ , gdyż jest *bezwzględnie* zbieżny p.w. Niech

$$f(x) = \begin{cases} f_{i_1}(x) + S(x) & \text{gdy szereg (5.44) jest zbieżny} \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Zauważmy, że na zbiorze pełnej miary w  $X$  (tam, gdzie szereg  $S(x)$  jest zbieżny) mamy

$$f(x) = f_{i_1}(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (f_{j_{s+1}}(x) - f_{j_s}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(x).$$

To wynika wprost z definicji sumy szeregu. Ponadto, raz jeszcze korzystając z lematu Fatou, otrzymujemy

$$\|f - f_{j_s}\|_1 = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{j_k} - f_{j_s}| d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{j_k} - f_{j_s}\|_1 \leq \frac{1}{2^s}. \quad (5.45)$$

*Krok 2: zbieżność ciągu  $f_j$  do  $f$  w przestrzeni  $L^1$ .* Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Wybierzmy indeks  $j_s$  tak, aby

$$\frac{1}{2^s} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f_l - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } m, l \geq j_s.$$

Wówczas, dla dowolnego  $m \geq j_s$  jest

$$\|f - f_m\|_1 \leq \|f - f_{j_s}\|_1 + \|f_{j_s} - f_m\|_1 \stackrel{(5.45)}{\leq} \frac{1}{2^s} + \|f_{j_s} - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a więc, wprost z definicji granicy,  $f_m \rightarrow f$  w przestrzeni  $L^1(X, \mu)$ .  $\square$

Odnajdujmy oddziennie ważny wniosek z pierwszej części powyższego dowodu.

**Wniosek 5.46.** *Jeśli  $f_m \rightarrow f$  w przestrzeni  $L^1(X, \mu)$ , to ciąg  $(f_m)$  ma podciąg, który jest zbieżny do  $f$  prawie wszędzie na  $X$ .*  $\square$

## 5.5 Splot

W tym podrozdziale symbol  $L^1(\mathbb{R}^n)$  oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych na  $\mathbb{R}^n$  względem miary Lebesgue'a  $\lambda_n$ .

**Definicja 5.47.** Splotem funkcji  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  nazywamy funkcję

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}).$$

Iloczyn dwóch funkcji całkowalnych wcale nie musi być funkcją całkowalną (przykład:  $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$  na odcinku jednostkowym), więc nie jest rzeczą jasną, czy definicja splotu jest poprawna.<sup>8</sup> Wykażemy jednak, że nie ma powodu do obaw.

**Twierdzenie 5.48.** *Jeśli  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , to ich splot  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  i zachodzi nierówność*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \quad (5.46)$$

<sup>8</sup>Łatwo natomiast zauważać, że splot funkcji  $f \in L^1$  z funkcją mierząłą, ograniczoną  $g$  jest dobrze określony.

Dowód. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})|$  jest funkcją mierzalną na  $\mathbb{R}^{2n}$ . Wobec Twierdzenia Fubiniego i niezmienności miary Lebesgue'a względem przesunięć,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_{2n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{x}) \right) |g(\mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\lambda_n = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1,\end{aligned}\tag{5.47}$$

gdyż całka  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{x})$  nie zależy od  $\mathbf{y}$ . Z drugiej strony, wprost z definicji splotu  $f * g$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\| |f| * |g| \|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g| d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_{2n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\stackrel{(5.47)}{=} \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Zatem  $|f| * |g| \in L^1(\mathbb{R}^n)$  i, na mocy twierdzenia Fubiniego, całka  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y})$ , jest skończona dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Tezę w ogólny przypadek otrzymujemy natychmiast z nierówności  $|f * g| \leq |f| * |g|$ , która zachodzi, gdyż  $|\int_X h d\mu| \leq \int_X |h| d\mu$  dla dowolnej przestrzeni z miarą.  $\square$

**Twierdzenie 5.49.** Dla  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  jest  $f * g = g * f$ .

Dowód. To łatwo wynika z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie: przy ustalonym  $\mathbf{x}$  przekształcenie  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  jest dyfeomorfizmem  $\mathbb{R}^n$  na  $\mathbb{R}^n$ , a moduł wyznacznika macierzy Jacobiego tego przekształcenia jest (oczywiście) równy 1. Dlatego

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) = g * f(\mathbf{x}).$$

Dowód jest zakończony.  $\square$

Podobnie można wykazać, że splot jest działaniem łącznym na  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , ma więc pożądane cechy ‘mnożenia’. Jest to jednak mnożenie bez jedynki:

**Zadanie 5.50.** Wykazać, że nie istnieje funkcja  $\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$  taka, że  $\delta * f = f$  dla każdej  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Wskazówka.** Jaką wartość powinna mieć całka takiej funkcji  $\delta$ ? Na jakim zbiorze powinna zachodzić równość  $\delta = 0$ ?

### 5.5.1 Aproksymacja funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi

Jednym z najważniejszych zastosowań splotu w różnych dziedzinach analizy jest aproksymowanie funkcji ‘nieporządkowych’ (tzn. być może bardzo nieregularnych) funkcjami znacznie ‘porządniejszymi’, o lepszych własnościach. Wskażemy, jak się to robi.

**Definicja 5.51 (jedynka aproksymatywna).** Niech  $\varphi \in C_0^\infty(B(0, 1))$  będzie nieujemną funkcją gładką o nośniku zawartym w kuli  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ , taką, że  $\int_{B(0,1)} \varphi d\lambda_1 = 1$ . Będziemy mówić, że rodzina funkcji

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

jest jedynką aproksymatywną.

**Lemat 5.52.** Jeśli  $h$  jest funkcją klasy  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , to dla każdej funkcji  $f \in L^1$  splot  $f * h$  jest funkcją klasy  $C^\infty$ . Ponadto, dla każdego wielowskaźnika  $\alpha$  zachodzi równość

$$D^\alpha(f * h) = f * (D^\alpha h).$$

Ostatnia równość oznacza po prostu, że różniczkowanie  $D^\alpha$  można bez obaw o wynik wprowadzić pod całkę, definiującą splot. Jest to możliwe dzięki twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

**Dowód.** Ciągłość funkcji  $f * h$  oraz  $f * (D^\alpha h)$  łatwo wynika z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej, gdyż każda funkcja gładka o zwartym nośniku jest ograniczona. Dowód równości z tezy lematu wystarczy przeprowadzić w przypadku, gdy  $\alpha$  jest wielowskaźnikiem długości  $|\alpha| = 1$ , tzn. dla pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Przypadek ogólny wynika stąd natychmiast przez indukcję.

Ustalmy  $j \in \{1, \dots, n\}$  i punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas

$$\frac{f * h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f * h(\mathbf{x})}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j - \mathbf{y}) - h(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{t} f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}). \quad (5.48)$$

Dla  $t \rightarrow 0$  funkcje podcałkowe są punktowo zbieżne do  $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y})$ . Nośnik funkcji gładkiej  $h$  jest zbiorem zwartym, dlatego wobec twierdzenia o wartości średniej

$$\left| \frac{h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j - \mathbf{y}) - h(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{t} \right| \leq \frac{|t| \sup_{\mathbf{z}} \|Dh(\mathbf{z})\|}{|t|} = \sup_{\mathbf{z}} \|Dh(\mathbf{z})\| =: C.$$

Można więc, korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, przejść do granicy  $t \rightarrow 0$  pod całką po prawej stronie równości (5.48); daje to wynik

$$\frac{\partial(f * h)}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \frac{\partial h}{\partial x_j} * f(\mathbf{x}) = f * \frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

(skorzystaliśmy, jak widać, z przemienności splotu).  $\square$

**Wniosek 5.53.** Jeśli  $(\varphi_\varepsilon)$  jest jedynką aproksymatywną, to dla każdej funkcji  $f \in L^1$  i każdego  $\varepsilon > 0$  splot  $f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty$  i dla każdego wielowskaźnika  $\alpha$

$$D^\alpha(f * \varphi_\varepsilon) = f * (D^\alpha \varphi_\varepsilon).$$

Zobaczmy teraz, że splot  $f * \varphi_\varepsilon$  funkcji  $f \in L^1$  z jedynką aproksymatywną przybliża  $f$  w normie  $L^1$ . Zaczniemy od sprawdzenia tego w szczególnie prostej sytuacji.

**Lemat 5.54.** Jeśli  $(\varphi_\varepsilon)$  jest jedynką aproksymatywną, to dla każdej funkcji  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ciągłej na  $\mathbb{R}^n$  i znikającej poza pewną kulą  $B(\mathbf{0}, r)$  mamy

$$g * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows g \quad \text{dla } \varepsilon \rightarrow 0$$

jednostajnie na  $\mathbb{R}^n$ . Ponadto,  $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$  w przestrzeni  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dowód. Ustalmy liczbę  $\eta > 0$ . Ponieważ funkcja  $g$  jest ciągła i znikąca poza pewnym zbiorem zwartym, więc jest jednostajnie ciągła na  $\mathbb{R}^n$ . Dobierzmy  $\delta > 0$  tak, aby  $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})| < \eta$  dla  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$ . Niech  $\varepsilon \in (0, \delta)$ . Ponieważ nośnik funkcji  $\varphi_\varepsilon$  jest zwarty w kuli  $B(0, \varepsilon)$ , a ponadto  $\int \varphi_\varepsilon = 1$ , więc

$$\begin{aligned} |g * \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| &= \left| \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) - g(\mathbf{x}) \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) \right| \\ &\leq \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} |g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - g(\mathbf{x})| \cdot \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) < \eta \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) = \eta. \end{aligned}$$

Zatem  $g * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows g$  wprost z definicji zbieżności jednostajnej. Ponieważ dla  $\varepsilon < 1$  nośnik funkcji  $g * \varphi_\varepsilon$  zawiera się w kuli  $B(\mathbf{0}, r + 1)$ , więc ze zbieżności jednostajnej  $g * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows g$  wynika także zbieżność  $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$  w  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Lemat 5.55.** Funkcje ciągłe o zwartym nośniku w  $\mathbb{R}^n$  tworzą zbiór gęsty w  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Dowód. Ustalmy  $f \in L^1$ . Niech  $\eta > 0$  będzie dowolną liczbą. Przybliżając część dodatnią  $f_+$  i część ujemną  $f_-$  funkcji  $f$  niemalejącymi ciągami funkcji prostych (patrz Twierdzenie 4.51), znajdziemy funkcję prostą  $h$  taką, że  $\|f - h\|_1 < \eta$ . Bez zmniejszenia ogólności, posługując się twierdzeniem o bezwzględnej ciągłości całki, można założyć, że  $h$  jest skończoną kombinacją liniową funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych ograniczonych.

Z uwagi na nierówność trójkąta w  $L^1$  wystarczy więc wykazać, że dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  i  $h = \chi_A$ , gdzie  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  jest zbiorem ograniczonym, istnieje funkcja ciągła  $g$ , znikająca poza pewną kulą w  $\mathbb{R}^n$  i taka, że  $\|h - g\|_1 < \varepsilon$ .

Z Twierdzenia 4.26 wynika, że istnieje zbiór zwarty  $K \subset A$  i zbiór otwarty  $\Omega \supset A$  takie, że  $\lambda_n(\Omega \setminus K) < \varepsilon$ . Z lematu Urysohna wynika, że istnieje funkcja ciągła  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  taka, że  $g \equiv 1$  na  $K$  i  $g \equiv 0$  na  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . Mamy

$$\|h - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A - g| d\lambda_n = \int_{\Omega \setminus K} |\chi_A - g| d\lambda_n \leq \int_{\Omega \setminus K} 1 d\lambda_n = \lambda_n(\Omega \setminus K) < \varepsilon.$$

Dowód lematu jest zakończony.  $\square$

Możemy teraz łatwo wykazać zapowiedziane wcześniej twierdzenie o aproksymacji funkcji całkowalnych za pomocą splotu z jedynką aproksymatywną.

**Twierdzenie 5.56.** Niech  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  będzie jedynką aproksymatywną. Dla każdej funkcji  $f \in {}^1(\mathbb{R}^n)$  splot  $f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f$  w  $L^1(\mathbb{R}^n)$  dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dowód. Ustalmy  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  i liczbę  $\eta > 0$ . Posługując się Lematem 5.55, wybierzmy taką funkcję ciągłą o zwartym nośniku  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , żeby  $\|f - g\|_1 < \frac{\eta}{3}$ . Z nierówności trójkąta,

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \|(f - g) * \varphi_\varepsilon\|_{L^1} + \|g * \varphi_\varepsilon - g\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1}.$$

Trzeci składnik nie przekracza  $\eta/3$  wskutek doboru  $g$ . Drugi składnik jest mniejszy od  $\eta/3$  dla wszystkich  $\varepsilon$  dostatecznie małych wobec Lematu 5.54. Wreszcie, dla *każdego*  $\varepsilon > 0$ , na mocy nierówności (5.46) z tezy Twierdzenia 5.48,

$$\|(f - g) * \varphi_\varepsilon\|_1 \leq \|f - g\|_1 \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_1 = \|f - g\|_1 < \frac{\eta}{3}.$$

Ostatecznie,

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^1} < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.$$

Dowód twierdzenia jest zakończony.  $\square$

Często wygodnie jest wiedzieć, że funkcje całkowalne można aproksymować nie tylko funkcjami gładkimi, ale także funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Nietrudno to wywnioskować z ostatniego twierdzenia.

**Wniosek 5.57.** *Dla każdej funkcji  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  i każdej liczby  $\eta > 0$  istnieje funkcja  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  taka, że  $\|f - \psi\|_1 < \eta$ .*

**Dowód.** Niech  $\zeta: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  będzie ustaloną funkcją klasy  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , taką, że  $\zeta \equiv 1$  na kuli  $B(\mathbf{0}, 1)$  i  $\zeta \equiv 0$  poza kulą  $B(\mathbf{0}, 2)$ . Położmy  $\zeta_R(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}/R)$  dla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i  $R > 0$ .

Ustalmy  $\eta > 0$  i dobierzmy  $\varepsilon > 0$  tak, aby  $\|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 < \frac{\eta}{2}$ . Nietrudno sprawdzić, że dla każdej funkcji  $g \in L^1$  iloczyn  $g \cdot \zeta_R \rightarrow g$  w  $L^1$  dla  $R \rightarrow \infty$ . Istotnie,

$$\|g \cdot \zeta_R - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{0}, R)} |g \cdot \zeta_R - g| d\lambda_n \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{0}, R)} |g| d\lambda_n \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

gdziż  $\int_{B(0, R)} |g| d\lambda_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\lambda_n < \infty$ .

Zatem, dla odpowiedniego małego  $\varepsilon > 0$  i odpowiednio dużego  $R > 0$  (dobranego do  $\varepsilon$ ) jest

$$\|f - \zeta_R \cdot (f * \varphi_\varepsilon)\|_1 \leq \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 + \|f * \varphi_\varepsilon - \zeta_R \cdot (f * \varphi_\varepsilon)\|_1 < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Funkcja  $\zeta_R \cdot (f * \varphi_\varepsilon)$  jest oczywiście gładka i ma zwarty nośnik.  $\square$

## 5.5.2 Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji wielu zmiennych

Metodą bardzo podobną do opisanej w poprzednim podrozdziale można udowodnić ogólną wersję twierdzenia Weierstrassa o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami. Czytelnik zna ją już dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

**Twierdzenie 5.58 (Weierstrassa o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami).** *Niech  $K \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem zwartym. Dla każdej funkcji ciągłej  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  i każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje wielomian  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taki, że*

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} |f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

W dowodzie wykorzystamy jako narzędzie splot. Posłużymy się tak zwanyimi *wielomianami Tonellego*. Zbiór wszystkich funkcji ciągłych na  $K$  o wartościach rzeczywistych będziemy oznaczać symbolem  $C(K)$ .

**Dowód.** Ponieważ złożenie wielomianu z funkcją aficzną  $\mathbf{x} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$  jest wielomianem, więc wystarczy wykazać twierdzenie przy dodatkowym założeniu  $K \subset B(\mathbf{0}, \frac{1}{4})$ . Ustalmy  $f \in C(K)$ . Korzystając z twierdzenia Tietzego o przedłużaniu możemy założyć, że  $f$  jest określona na całej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i znika poza kulą  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ .

*Krok 1: definicja wielomianów Tonellego.* Położymy

$$t_N(\mathbf{x}) = (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^N, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad N = 1, 2, \dots,$$

$$d_{N,n} = \int_{B^n(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x})$$

Sprawdzimy, że

$$d_{N,n} \geq \frac{1}{N^n} \quad \text{dla } N > n. \quad (5.49)$$

W tym celu oszacujemy<sup>9</sup> całkę, definiującą  $d_{N,n}$ , stosując twierdzenie Fubiniego (podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 5.29). Oznaczając  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ , gdzie  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ , otrzymujemy po niezbyt skomplikowanym rachunku

$$\begin{aligned} d_{N,n} &= \int_{B^n(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, \sqrt{1-x_n^2})} (1 - x_n^2 - \|\mathbf{x}'\|^2)^N d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^N \left( \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, \sqrt{1-x_n^2})} \left( 1 - \left\| \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-x_n^2}} \right\|^2 \right)^N d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{N+\frac{n-1}{2}} \left( \int_{B^{n-1}(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{y}'\|^2)^N d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}') \right) dx_n \\ &= 2d_{N,n-1} \int_0^1 (1 - x_n^2)^{N+\frac{n-1}{2}} dx_n \end{aligned} \quad (5.50)$$

Dokonaliśmy wyżej linowej zamiany zmiennych: wewnętrznej całce, przy ustalonym  $x_n$ , podstawiliśmy  $\mathbf{x}' = (1 - x_n^2)^{1/2} \cdot \mathbf{y}'$ ; jest to przekształcenie liniowe przestrzeni  $\mathbb{R}^{n-1}$ , a jego jacobian wynosi  $(1 - x_n^2)^{(n-1)/2}$ .

Ponieważ  $1 - x_n^2 > 1 - x_n$  na  $(0, 1)$ , więc z (5.50) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_{N,n} &= 2d_{N,n-1} \int_0^1 (1 - x_n^2)^{N+\frac{n-1}{2}} dx_n \geq 2d_{N,n-1} \int_0^1 (1 - x_n)^{N+\frac{n-1}{2}} dx_n \\ &= \frac{2d_{N,n-1}}{N + \frac{n-1}{2}} > \frac{d_{N,n-1}}{N} \quad \text{dla } N > n > \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Stąd, przez indukcję,

$$d_{N,n} \geq \frac{d_{N,1}}{N^{n-1}} = \frac{2}{N^{n-1}} \int_0^1 (1 - x^2)^N dx > \frac{2}{N^{n-1}} \int_0^1 (1 - x)^N dx = \frac{2}{(N+1)N^{n-1}} > N^{-n}.$$

---

<sup>9</sup>Można wyrazić  $d_{N,n}$  przez funkcje  $\Gamma$  i  $B$  Eulera, posługując się regułą Cavalieri'ego.

Położmy teraz

$$T_N f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{N,n}} \cdot t_N * f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\mathbb{R}^n} t_N(\mathbf{x} - \mathbf{z}) f(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}). \quad (5.51)$$

Przy ustalonym  $\mathbf{z}$  funkcja podcałkowa jest wielomianem zmiennej  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Dlatego funkcja  $T_N f$  jest wielomianem zmiennej  $\mathbf{x}$ . Ponieważ  $f \equiv 0$  poza kulą  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ , więc całkowanie w (5.51) odbywa się w istocie tylko po  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ . Jeśli  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in B(0, \frac{1}{2})$ , to  $\mathbf{x} - \mathbf{z} \in B(0, 1)$ . Dlatego, z przemienności splotu,

$$T_N f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{N,n}} \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) \quad (5.52)$$

*Krok 2. Zbieżność wielomianów Tonellego.* Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $\mathbb{R}^n$ , więc istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że dla  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$  jest  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})| < \varepsilon$ . Wprost z definicji funkcji  $t_N$  i liczb  $d_{N,n}$  otrzymujemy

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{d_{N,n}} \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}),$$

więc dla dowolnego punktu  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$  jest

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - T_N f(\mathbf{x})| &= \frac{1}{d_{N,n}} \left| \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) \cdot (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) d\lambda_n(\mathbf{y}) \right| \\ &\leq I_1 + I_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\|\mathbf{y}\| < \delta} t_N(\mathbf{y}) \cdot |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}), \\ I_2 &= \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\delta \leq \|\mathbf{y}\| \leq 1} t_N(\mathbf{y}) \cdot |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Całkę  $I_2$  szacujemy brutalnie, zastępując moduł różnicy sumą modułów, a następnie uwzględniamy oszacowanie (5.49) liczb  $d_{N,n}$ . Oto efekt:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \sup |f| \cdot \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\delta \leq \|\mathbf{y}\| \leq 1} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &\leq 2 \sup |f| \cdot N^n \int_{\delta \leq \|\mathbf{y}\| \leq 1} (1 - \delta^2)^N d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &\leq 2\omega_n \sup |f| \cdot N^n (1 - \delta^2)^N \rightarrow 0 \quad \text{dla } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dlatego całka  $I_2 < \varepsilon$  dla wszystkich  $N > N_0 = N_0(\varepsilon, f, \delta, n)$ ; uzyskane oszacowanie  $I_2$  jest jednostajne względem  $\mathbf{x}$ , więc oczywiście  $N_0$  nie zależy od  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ .

Szacując  $I_1$ , zauważamy, że w tej całce czynnik  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|$  jest mały wskutek doboru liczby  $\delta$ . Dlatego

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\varepsilon}{d_{N,n}} \int_{\|\mathbf{y}\| < \delta} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{d_{N,n}} \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } N \in \mathbb{N} \text{ i } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Ostatecznie więc,  $\sup_{\mathbf{x} \in B(0,1/2)} |f(\mathbf{x}) - T_N f(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$  dla wszystkich  $N > N_0$ .  $\square$

Czytelnik, który pamięta jeszcze definicję wielomianów Bernsteina i dowód twierdzenia Weierstrassa dla przestrzeni  $C([0, 1])$ , może zwrócić uwagę na podobieństwo obu dowodów. Mówiąc niezbyt precyzyjnie, uśredniamy w nich wartości  $f$  względem pewnej miary unormowanej (inaczej: probabilistycznej)  $\mu_N$ , dobranej tak, aby wynik uśrednienia był wielomianem stopnia zależnego od  $N$ . Dla dużych  $N$  miara  $\mu_N$  jest niemal skoncentrowana w jednym punkcie. Oszacowanie różnicy między funkcją  $f$  i wielomianem, który powstaje w wyniku jej uśredniania, wykonane jest w obu dowodach *tym samym sposobem*. Osoba, zainteresowana analizą, zetknie się z taką metodą szacowania sum lub całek w wielu innych zagadnieniach.

## Rozdział 6

# Miara powierzchniowa na rozmaitościach zanurzonych

W tym rozdziale zajmiemy się definicją tzw. *miary powierzchniowej* na  $m$ -wymiarowej rozmaistości zanurzonej  $M \subset \mathbb{R}^n$  oraz opisem własności tej miary. Definicję wprowadzimy tak, aby dla  $m = 1$  otrzymać długość krzywej, a dla  $m = 2$  – pojęcie *pola* powierzchni gładkiej, odpowiadające naturalnym intuicjom.

Czytelnik pamięta zapewne, że na I roku studiów określiliśmy długość krzywej jako kres górnego długości łamanych wpisanych w tę krzywą. Pomyśl, stojący za definicją miary powierzchniowej, jest w istocie podobny. Zaczniemy jednak od przykładu, który świadczy o tym, że definiowanie pola powierzchni gładkiej wiąże się z pewnymi trudnościami.

**Przykład 6.1 (chińska latarnia H. A. Schwarza, 1880).** Dla danych liczb naturalnych  $m, n > 1$  opiszemy powierzchnię wielościenną  $L_{m,n}$ , złożoną z  $2mn$  przystających trójkątów równoramiennych o wierzchołkach położonych na powierzchni bocznej walca obrotowego o promieniu podstawy  $r = 1$  i wysokości  $h = 1$ .

Poprowadźmy  $n+1$  płaszczyzn poziomych  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ ; pierwsza z nich zawiera dolną podstawę walca, ostatnia – górną podstawę, a odległość sąsiednich płaszczyzn jest równa  $1/n$ . Płaszczyzny te przecinają powierzchnię boczną walca wzduż  $n+1$  okręgów. Na każdym okręgu ustalamy  $m$  punktów, stanowiących wierzchołki  $m$ -kąta foremnego; robimy to tak, aby punkty na  $(j+1)$ -szym okręgu leżały nad środkami łuków, wyznaczonych przez punkty na  $j$ -tym okręgu.<sup>1</sup> Liczba wszystkich punktów wynosi  $(n+1) \cdot m$ .

Powierzchnia  $L_{m,n}$  jest sumą wszystkich trójkątów, których podstawa łączy dwa sąsiednie punkty na tym samym okręgu, a trzeci wierzchołek znajduje się na sąsiednim okręgu, nad lub pod środkiem łuku wyznaczonego przez końce podstawy. Otrzymujemy w ten sposób  $2m$  trójkątów między każdą parą sąsiednich okręgów. Razem trójkątów jest  $2mn$ . Rozwiązujeć dwa łatwe zadania z geometrii płaskiej, sprawdzamy, że każdy z tych trójkątów ma podstawę  $a_{m,n}$  i wysokość  $h_{m,n}$  dane wzorami

$$a_{m,n} = 2 \sin \frac{\pi}{m}, \quad h_{m,n} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$$

---

<sup>1</sup>Czytelnik, dbający o pełną formalną ścisłość, może opisać współrzędne tych punktów w  $\mathbb{R}^3$ . Rzeczą bardziej pouczającą jest jednak samodzielnie wykonanie kilku rysunków.

Dlatego pole  $P_{m,n}$  chińskiej latarni  $L_{m,n}$  wynosi

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= 2mn \cdot \frac{a_{m,n}h_{m,n}}{2} = 2mn \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m} \cdot \sqrt{1 + 4n^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że granica podwójna  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} P_{m,n}$  nie istnieje, z uwagi na zachowanie czynnika pod pierwiastkiem kwadratowym. Dla  $m = n \rightarrow \infty$  otrzymujemy  $P_{n,n} \rightarrow 2\pi$ . Jednak np. dla  $n = 2m^2$  jest

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{m,2m^2} = 2\pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m} \cdot \sqrt{1 + 16m^4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} = 2\pi \sqrt{1 + \pi^4}.$$

Łatwo wskazać takie ciągi  $n_j, m_j \rightarrow \infty$ , dla których  $P_{m_j,n_j} \rightarrow 2\pi \cdot A$ , gdzie  $A \geq 1$  jest z góry zadaną liczbą (zainteresowany Czytelnik zrobi to bez trudu sam). Wreszcie,  $P_{m,m^3} \rightarrow \infty$  dla  $m \rightarrow \infty$ .

Widać więc, że wynik przybliżania powierzchni bocznej walca za pomocą trójkątów o bokach o coraz mniejszej długości zależy nie tylko od liczby tych trójkątów, ale i od proporcji ich boków. Różne wyniki uzyskuje się dlatego, że dla  $n \gg m$  kąt między płaszczyzną trójkąta i powierzchnią walca jest *oddzielony od zera*.  $\square$

## 6.1 Definicja miary powierzchniowej

### 6.1.1 Wyznacznik Grama. Intuicje geometryczne.

Przypomnijmy, że wyznacznikiem Grama wektorów  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$  nazywamy liczbę

$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \det \left( \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right)_{i,j=1,\dots,m}. \quad (6.1)$$

Na wykładach Geometrii z Algabadą Liniową dowodzi się następujących własności wyznacznika Grama:

1.  $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = 0$ , gdy wektory  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$  są liniowo zależne.

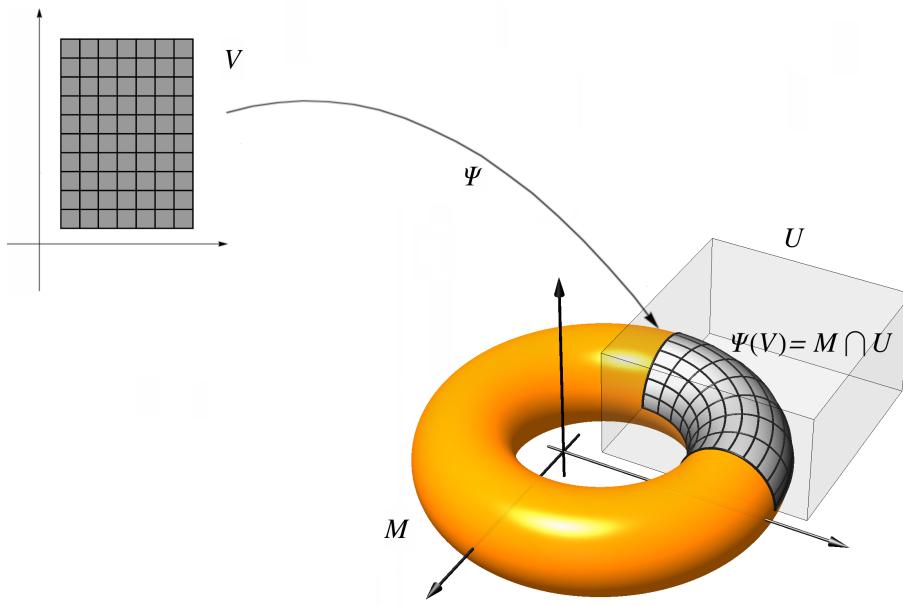
2. Zachodzi wzór

$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = h^2 \cdot G(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m),$$

gdzie  $h = \text{dist}(\mathbf{w}_1, \text{span}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m))$  jest długością rzutu prostopadłego wektora  $\mathbf{w}_1$  na podprzestrzeń  $\mathbb{R}^n$  prostopadłą do  $\text{span}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ . W szczególności,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) &= \|\mathbf{w}_1\|^2 \cdot G(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m), \\ &\text{gdy wektor } \mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_j \text{ dla } j = 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ponadto, wprost z definicji wyznacznika Grama i definicji iloczynu dwóch macierzy wynika, że dla  $m = n$  liczba  $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$  jest równa kwadratowi wyznacznika macierzy o kolumnach  $\mathbf{w}_i$ , a więc kwadratowi  $n$ -wymiarowej miary Lebesgue'a równoległościanu rozpiętego na wektorach  $\mathbf{w}_i$ .



Parametryzacja fragmentu rozmaistości dwuwymiarowej; obrazy małych kwadratów w dziedzinie  $V$  parametryzacji  $\Psi$  są krzywoliniowymi czworokątami na powierzchni  $M$ .

Posługując się wzorem (6.2) i definicją, nietrudno zauważyc, że dla  $m = 2$  i  $n = 3$  liczba  $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  jest kwadratem pola równoległoboku rozpiętego na wektorach  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \subset \mathbb{R}^3$ . Przyjmuje się, że  $m$ -wymiarowa objętość równoległościanu, rozpiętego na wektorach  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ , jest równa pierwiastkowi z wyznacznika Grama tych wektorów. Z powyższych uwag wynika, że jest to interpretacja naturalna i sensowna.

### Intuicje geometryczne

Opiszemy teraz intuicję, kryjącą się za definicją  $m$ -wymiarowej miary powierzchniowej na rozmaistości  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Przypuśćmy, że dla pewnego zbioru otwartego  $U \subset \mathbb{R}^n$  część wspólna  $U \cap M$  jest równa  $\Psi(V)$ , gdzie  $V$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^m$ . Zakładamy, że przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \Psi(V) = M \cap U \subset \mathbb{R}^n$$

jest homeomorfizmem na obraz, klasy  $C^1$ , a jego różniczka  $D\Psi(\mathbf{x})$  ma maksymalny rząd  $m$  (tzn. jest monomorfizmem liniowym) w każdym punkcie  $\mathbf{x} \in V$ .

Dla uproszczenia pomyślmy najpierw o przypadku  $m = 2, n = 3$ ; przekształcenie  $\Psi$  określa wtedy, jak należy umieścić (płaski, dwuwymiarowy) zbiór  $V$  jako (pozbawioną zaćieg i sklejeń) powyginaną powierzchnię w trójwymiarowej przestrzeni.<sup>2</sup> Obrazami kwadracików w dziedzinie  $V$  są krzywoliniowe czworokąty na powierzchni  $M \cap U$ . Jeśli  $K \subset V$  jest małym kwadratem o wierzchołku  $\mathbf{x} \in V$  i bokach równoległych do osi układu współ-

<sup>2</sup>Z taką sytuacją spotkał się już Czytelnik np. w Przykładzie 1.62, gdzie opisywaliśmy powierzchnię torusa obrotowego jako obraz pewnego przekształcenia  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Obcinając to przekształcenie do kwadratu  $(0, 2\pi)^2$ , otrzymamy parametryzację torusa z usuniętymi dwoma okrągami.

rzędnych, to obraz  $\Psi(K)$  jest – niemalże, z bardzo dobrym przybliżeniem! – równoległobokiem zawartym w (afinicznej) płaszczyźnie stycznej do  $M$ , o bokach równoległych do wektorów  $D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$  i  $D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$ , gdzie  $\mathbf{e}_i$  oznaczają wektory standardowej bazy w  $\mathbb{R}^2$ . Zatem

$$\text{Pole } (\Psi(K)) \approx \text{pole równoległoboku} = \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} \cdot \lambda_2(K).$$

Proszę zauważyć, że przekształcenie liniowe  $D\Psi(\mathbf{x}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  przeprowadza kwadrat jednostkowy  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  na równoległobok rozpięty na wektorach  $\mathbf{w}_1 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{w}_2 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$ ; kwadrat pola tego równoległoboku jest równy wyznacznikowi Grama  $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))$ , gdyż elementy macierzy  $D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x})$  to właśnie iloczyny skalarne wektorów  $\mathbf{w}_1 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{w}_2 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$ .

Dlatego jest rzeczą naturalną przyjąć, dla  $m = 2$  i  $n = 3$  oraz zbiorów mierzalnych  $A \subset V \subset \mathbb{R}^2$ , definicję

$$\sigma_2(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} d\lambda_2(\mathbf{x}); \quad (6.3)$$

symbol  $\sigma_2$  oznacza tu *dwuwymiarową miarę powierzchniową* na rozmaitości  $M \subset \mathbb{R}^3$ , parametryzowanej przez odwzorowanie  $\Psi$ .

W ogólnym przypadku, dla  $1 \leq m \leq n$ , postępuje się podobnie, przyjmując, że dla  $M \cap U = \Psi(V)$ , gdzie parametryzacja  $\Psi$  jest różnowartościowa i jej różniczka ma rząd  $m$ , miara powierzchniowa  $\sigma_m$  podzbiorów  $M \cap U$  określona jest wzorem

$$\sigma_m(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}) \quad \text{dla } A \subset V \subset \mathbb{R}^m, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m). \quad (6.4)$$

Sens powyższego wzoru jest następujący. W małej skali przekształcenie klasy  $C^1$  jest z dobrym przybliżeniem liniowe. Dlatego miarę gładkiej,  $m$ -wymiarowej powierzchni przybliżamy za pomocą sumy  $m$ -wymiarowych objętości równoległościanów, będących obrazami (pod działaniem różniczki parametryzacji) małych,  $m$ -wymiarowych kostek, zawartych w dziedzinie przekształcenia.

Cały powyższy opis należy jednak traktować wyłącznie jako pewną intuicję. Nie znamy na razie odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy każdy zbiór  $M \subset \mathbb{R}^n$ , dopuszczający (lokalnie) podany wyżej *opis parametryczny*, rzeczywiście jest rozmaistością?
2. Czy definicja miary  $\sigma_m$  na  $M \cap U$  nie zależy od *wyboru parametryzacji*  $\Psi$ ? Jak postąpić, gdy rozmaistość  $M$  jest sumą wielu części  $M \cap U_i$ , opisanych za pomocą różnych parametryzacji  $\Psi_i: V_i \rightarrow M \cap U_i \subset \mathbb{R}^n$ ?

W kolejnym podrozdziałach (patrz 6.1.2 i 6.1.3 niżej) przekonamy się, że wzory (6.3)–(6.4) istotnie nie zależą od wyboru parametryzacji  $\Psi: V \rightarrow M \cap U$ . Zanim jednak przejdziemy do ogólnych, abstrakcyjnych rozważań, poczytajmy dwie uwagi, które ułatwiają obliczanie pola gładkich powierzchni w  $\mathbb{R}^3$ .

**Uwaga 6.2.** Niech  $m = 2$ ,  $n = 3$  i  $\Psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ , gdzie  $f: \mathbb{R}^2 \supset V \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^1$ . Rozmaistość (powierzchnia)  $M = \Psi(V)$  jest wtedy wykresem funkcji  $f$ . Mamy

$$D\Psi^T D\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_{x_1} \\ 0 & 1 & f_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_{x_1} & f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} \\ f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

i dlatego

$$\sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} = \sqrt{1 + f_{x_1}^2(\mathbf{x}) + f_{x_2}^2(\mathbf{x})}. \quad (6.5)$$

**Zadanie 6.3 (tożsamość Lagrange'a).** Niech  $M$  będzie macierzą o trzech wierszach i dwóch kolumnach. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\det(M^T M) = A^2 + B^2 + C^2, \quad (6.6)$$

gdzie  $A, B$  i  $C$  oznaczają minory  $2 \times 2$  macierzy  $M$ . Ogólniej, dla dowolnych wektorów  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  zachodzi równość

$$\|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i v_j - v_i u_j)^2.$$

**Przykład 6.4 (pole sfery).** Niech  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$  będzie połówką sfery jednostkowej. Wtedy  $M$  jest wykresem funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1$$

Łatwo obliczamy

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Dlatego, posługując się wzorem (6.3) i równością (6.5), a następnie przechodząc do całkowania we współrzędnych biegunowych (jak wtedy, gdy korzystając z twierdzenia Fubiniego i twierdzenia o zamianie zmiennych obliczaliśmy całkę  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ ), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_2(M) &= \int_{\{(x,y) : x^2+y^2<1\}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} \right) d\theta = 2\pi \cdot \left( -\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi. \end{aligned}$$

Wynik, jak widać, jest zgodny z oczekiwaniami.  $\square$

Przejdziemy teraz do uściślenia wszystkiego, co zostało powiedziane wyżej.

### 6.1.2 Parametryczny opis rozmaistości zanurzonych

W podrozdziale 3.5 definiowaliśmy  $m$ -wymiarowe rozmaistości zanurzone w  $\mathbb{R}^k$  jako zbiory, które lokalnie, w otoczeniu każdego ze swoich punktów, są wykresami  $k-m$  pewnego układu funkcji  $m$  zmiennych. Do definiowania miary powierzchniowej i jej obliczania przyda się nam równoważny, tzw. *parametryczny* opis takich rozmaistości.

**Definicja 6.5.** Niech  $1 \leq m < n$  i niech  $V \subset \mathbb{R}^m$  będzie zbiorem otwartym. Będziemy mówić, że przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest *parametryzacją klasy  $C^k$*  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Psi \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$  jest homeomorfizmem na obraz, a ponadto przekształcenie przekształcenie  $D\Psi(\mathbf{x})$  jest włożeniem liniowym (monomorfizmem) dla każdego  $\mathbf{x} \in V$ .

**Twierdzenie 6.6.** Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  i niech  $\mathbf{p} \in M$  będzie ustalonym punktem. Następujące warunki są równoważne:

- (i) Istnieje kula  $B(\mathbf{p}, r)$  w  $\mathbb{R}^n$  taka, że  $M \cap B(\mathbf{p}, r)$  jest wykresem pewnej funkcji  $m$ -zmiennych klasy  $C^k$ , tzn. istnieje  $m$ -wymiarowa podprzestrzeń liniowa

$$P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}) \subset \mathbb{R}^m,$$

zbiór  $\Omega$  otwarty w  $P$  i funkcja  $\varphi \in C^k(P, P^\perp)$  takie, że

$$M \cap B(\mathbf{p}, r) = \text{wykres } \varphi \cap B(\mathbf{p}, r),$$

gdzie

$$\text{wykres } \varphi = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n = P \oplus P^\perp : \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}.$$

- (ii) Punkt  $\mathbf{p}$  ma takie otoczenie otwarłe  $U \subset \mathbb{R}^n$ , że  $M \cap U = \Psi(V)$  dla pewnej parametryzacji  $\Psi \in C^k$ ,  $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Pierwszy warunek powyższego twierdzenia pojawił się, dla  $k = 1$ , w definicji rozmaistości zanurzonej klasy  $C^1$  (patrz podrozdział 3.5).

Dowód. Z pierwszego warunku wynika oczywiście drugi. Jeśli  $M \cap B(\mathbf{p}, r)$  jest wykresem funkcji  $\varphi: \mathbb{R}^m \cong P \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \cong P^\perp$ , to wówczas przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in P \oplus P^\perp \cong \mathbb{R}^n$$

jest parametryzacją, tej samej klasy gładkości, co  $\varphi$ . Nietrudno sprawdzić, że  $\Psi$  jest homeomorfizmem na obraz. Wreszcie, macierz różniczki  $\Psi$ , która ma  $n$  wierszy i  $m$  kolumn, zawiera – w górnich wierszach – klatkę, która jest macierzą identycznościową  $m \times m$ . Dlatego rzad  $D\Psi(\mathbf{x})$  jest maksymalny dla każdego  $\mathbf{x}$ .

Wykażemy, że drugi warunek pociąga za sobą pierwszy. Niech  $M \cap U = \Psi(V)$  dla pewnej parametryzacji  $\Psi$  klasy  $C^k$  i niech  $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$ . Z definicji, pewien minor  $m \times m$  macierzy  $D\Psi(\mathbf{a})$  nie znika; to oznacza, że dla pewnych  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$  przekształcenie

$$f = (\Psi_{i_1}, \Psi_{i_2}, \dots, \Psi_{i_m}): V \rightarrow \mathbb{R}^m$$

spełnia w punkcie  $\mathbf{a} \in V$  założenia Twierdzenia 3.9 o funkcji odwrotnej. Zatem,  $f$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^k$  (patrz Uwaga 3.15) pewnego otoczenia  $V_1$  punktu  $\mathbf{a}$  na otoczenie otwarte  $V_2$  punktu  $f(\mathbf{a})$ .

Oznaczmy teraz  $P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m})$  (dla numerów  $i_k$ , użytych w definicji  $f$ ); płaszczyzna  $P$  zawiera obraz  $V_2$  dyfeomorfizmu  $f$ . Płaszczyzna  $P^\perp$  jest wówczas rozpięta na pozostałych  $n - m$  wektorach standardowej bazy; oznaczmy je  $\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_{n-m}}$ . Niech  $\pi_1$  oznacza rzut prostopadły na  $P$ , zaś  $\pi_2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \pi_1$  – rzut prostopadły na  $P^\perp$ .

Nietrudno teraz wskazać funkcję  $\varphi: P \rightarrow P^\perp$ , której wykres pokrywa się ze zbiorem  $M$  w otoczeniu punktu  $\mathbf{p}$ . Położmy mianowicie

$$\varphi: = \pi_2 \circ \Psi \circ f^{-1}: \mathbb{R}^m \cong P \supset V_2 \rightarrow P^\perp \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Zauważmy, że dla każdego  $\mathbf{y} = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}) \in V_2 \subset P$  jest  $(\Psi \circ f^{-1})_{i_s}(\mathbf{y}) = y_{i_s}$ ; to wynika wprost z określenia  $f$ . Innymi słowy,  $\pi_1 \circ \Psi \circ f^{-1}$  jest identycznością na  $V_2$ . Dlatego wykres  $\varphi$  to zbiór punktów  $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ , gdzie

$$\begin{aligned} P \supset V_2 &\ni \mathbf{x} = \pi_1 \circ \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}), \\ P^\perp &\ni \varphi(\mathbf{x}) = \pi_2 \circ \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Innymi słowy,

$$(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_2, \quad (6.7)$$

więc (w małym otoczeniu punktu  $\mathbf{p}$ ) wykres funkcji  $\varphi$  jest tym samym, co obraz przekształcenia  $\Psi$ .  $\square$

**Definicja 6.7.** Będziemy mówić, że  $M \subset \mathbb{R}^n$  jest rozmaitością  $m$ -wymiarową klasy  $C^k$ , jeśli w każdym punkcie  $\mathbf{p} \in M$  spełniony jest jeden z warunków równoważnych Twierdzenia 6.6. Jeśli  $\Psi: V \rightarrow \Psi(V) = U \cap M$  jest parametryzacją części wspólnej zbioru otwartego  $U$  z rozmaistością  $M$ , to przekształcenie  $\Psi^{-1}: M \cap U \rightarrow V$  nazywa się *mapą*. Zbiór map, których dziedziny pokrywają rozmaistość  $M$ , nazywa się *atlasem*.

**Uwaga 6.8 (przestrzeń styczna).** W Twierdzeniu 3.26 opisaliśmy przestrzeń styczną do rozmaistości  $M$  w punkcie  $\mathbf{p}$ . Przypomnijmy: jeśli w otoczeniu punktu  $\mathbf{p}$  rozmaistość  $M$  jest wykresem funkcji  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ , to kładąc  $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$  i przyjmując  $\mathbf{a} = \Phi^{-1}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$ , otrzymujemy

$$T_{\mathbf{p}} M = \text{Im } D\Phi(\mathbf{a}).$$

Porównując ten wynik ze wzorem (6.7), wnioskujemy łatwo, że jeśli  $U \cap M = \Psi(V)$ , gdzie  $\Psi$  jest jakąkolwiek parametryzacją klasy  $C^k$  i  $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \in M$  dla pewnego  $\mathbf{a} \in V \subset \mathbb{R}^m$ , to wówczas

$$T_{\mathbf{p}} M = \text{Im } D\Psi(\mathbf{a}),$$

gdyż różniczka  $D(f^{-1})$  dyfeomorfizmu  $f^{-1}$  we wzorze (6.7) jest izomorfizmem liniowym.

### 6.1.3 Twierdzenie o rzędzie. Poprawność definicji miary $\sigma_m$ .

Aby wykazać niezależność definicji miary powierzchniowej na rozmaistości  $M$  od wyboru parametryzacji, udowodnimy ważne twierdzenie, opisujące strukturę takich przekształceń klasy  $C^k$ , których różniczka ma stały rząd.

**Twierdzenie 6.9 (o rzędzie).** Założmy, że przekształcenie  $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest klasy  $C^k$ , a jego różniczka  $D\Psi(\mathbf{x})$  ma we wszystkich punktach  $\mathbf{x}$  zbioru  $V$  rzad równy  $r$ , gdzie  $r$  jest ustaloną liczbą naturalną. Wówczas dla każdego punktu  $\mathbf{a} \in V$  istnieją zbiory otwarte  $U_1 \ni \mathbf{a}$  i  $U_2 \ni \Psi(\mathbf{a})$  oraz dyfeomorfizmy klasy  $C^k$ ,

$$f_1: \mathbb{R}^m \supset U_1 \rightarrow f_1(U_1) \subset \mathbb{R}^m, \quad f_2: \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow f_2(U_2) \subset \mathbb{R}^n,$$

takie, że

$$f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ zer}}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in f_1(U_1).$$

**Dowód.** Ustalmy  $\mathbf{a} \in V$ . Z założenia, pewien minor  $r \times r$  macierzy  $D\Psi(\mathbf{a})$  nie zniką. Przenumerując w razie potrzeby zmienne (w dziedzinie i w obrazie), możemy bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że

$$\det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

Położmy

$$f_1(\mathbf{x}) = (\Psi_1(\mathbf{x}), \dots, \Psi_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_m), \mathbf{x} \in V.$$

Nietrudno sprawdzić, że macierz  $Df_1$  ma blokową postać

$$Df_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,r} & * \\ \mathbf{0} & \text{Id}_{(m-r) \times (m-r)} \end{pmatrix}.$$

Dlatego

$$\det Df_1(\mathbf{a}) = \det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

Wybierzmy otoczenie  $U_1$  punktu  $\mathbf{a}$  tak, aby  $f_1$  było na  $U_1$  dyfeomorfizmem klasy  $C^k$  na pewien  $m$ -wymiarowy przedział otwarty  $f_1(U_1)$ . Wprost z określenia  $f_1$  wynika, że

$$\Psi \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_r, h_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, h_n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in f_1(U_1),$$

gdzie  $h_s$  są pewnymi funkcjami klasy  $C^k$ . Mamy

$$D(\Psi \circ f_1^{-1}) = D\Psi \circ D(f_1^{-1}),$$

a ponieważ różniczka  $D(f_1^{-1})$  dyfeomorfizmu  $f_1^{-1}$  jest izomorfizmem liniowym, więc rząd przekształcenia  $D(\Psi \circ f_1^{-1})$  jest taki sam, jak rząd  $D\Psi$ , tzn. równy  $r$ . Stąd łatwo wynika, że

$$\frac{\partial h_s}{\partial x_t}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dla } s, t > r$$

– w przeciwnym razie rząd macierzy  $D(\Psi \circ f_1^{-1})$  byłby większy od  $r$ . Zatem funkcje  $h_s$  na przedziale  $f_1(U_1)$  zależą tylko od zmiennych  $x_1, \dots, x_r$ . Położmy teraz

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_n - h_n(x_1, \dots, x_r)).$$

Łatwo sprawdzić, że  $f_2$  jest dyfeomorfizmem (dyfeomorfizm odwrotny uzyskujemy, zmieniając w powyższym wzorze minusy na plusy!) i że  $f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}$  przeprowadza punkt  $\mathbf{x}$  w  $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ .  $\square$

Odnajdujmy ważny wniosek z twierdzenia o rzędzie.

**Lemat 6.10 (o funkcjach przejścia).** *Jeśli  $M \subset \mathbb{R}^n$  jest rozmaistością  $m$ -wymiarową, zbiór  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty, a przekształcenia*

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \supset V_i \rightarrow \Psi_i(V_i) = U \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

*są parametryzacjami klasy  $C^k$ , to złożenie  $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1: V_1 \rightarrow V_2$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^k$  zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^m$ .*

Dowód. Ustalmy  $\mathbf{a} \in V_1 \subset \mathbb{R}^m$ . Z Twierdzenia 6.9 wynika, że dla pewnych dyfeomorfizmów  $f_1, f_2$  równość

$$f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

zachodzi w otoczeniu punktu  $f_1(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$ . Obraz przekształcenia  $f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}$  można utożsamić z  $\mathbb{R}^m$ , a samo to przekształcenie — z identycznością na  $\mathbb{R}^m$ , która jest gładka i odwracalna. Zauważmy teraz, że

$$(f_1)^{-1} \circ (f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1})^{-1} \circ f_2 \circ \Psi_2 = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$$

jest klasy  $C^k$ , bo lewa strona powyższej równości jest złożeniem przekształceń klasy  $C^k$ . Zamieniając  $\Psi_1$  i  $\Psi_2$  rolami w powyższym rozumowaniu, wnioskujemy, że również  $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$  jest klasy  $C^k$ . Ponieważ parametryzacje  $\Psi_i$  są homeomorfizmami, więc  $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$  (i przekształcenie doń odwrotne,  $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$ ) jest dyfeomorfizmem.  $\square$

**Stwierdzenie 6.11 (niezależność miary powierzchniowej od wyboru parametryzacji).** Założmy, że  $M \subset \mathbb{R}^n$  jest rozmaistością  $m$ -wymiarową klasy  $C^1$ , zbiór  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty, a przekształcenia

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \supset V_i \rightarrow \Psi_i(V_i) = U \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

są parametryzacjami klasy  $C^1$ . Niech  $B = \Psi_1(A_1) = \Psi_2(A_2)$ , gdzie  $A_i \subset V_i$  dla  $i = 1, 2$ , będzie borelowskim podzbiorem  $M$ . Wówczas

$$\int_{A_1} \sqrt{\det(D\Psi_1(\mathbf{x})^T D\Psi_1(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_{A_2} \sqrt{\det(D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}).$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z tego, że wyznacznik iloczynu dwóch macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników tych macierzy, a następnie zastosować twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie. Oznaczmy  $\Phi = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$ ; z ostatniego lematu wynika, że  $\Phi: V_2 \rightarrow V_1$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^1$ . Zatem  $\Psi_2(\mathbf{x}) = \Psi_1(\Phi(\mathbf{x}))$ ; kładąc  $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ , otrzymujemy ze wzoru na różniczkę złożenia

$$\begin{aligned} D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}) &= \left( D\Psi_1(\mathbf{y}) D\Phi(\mathbf{x}) \right)^T D\Psi_1(\mathbf{y}) D\Phi(\mathbf{x}) \\ &= D\Phi(\mathbf{x})^T \cdot \left( D\Psi_1(\mathbf{y})^T D\Psi_1(\mathbf{y}) \right) \cdot D\Phi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

stąd zaś i ze wzoru na wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych,

$$\sqrt{\det(D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}))} = |\det D\Phi(\mathbf{x})| \cdot \sqrt{\det(D\Psi_1(\mathbf{y})^T D\Psi_1(\mathbf{y}))}, \quad \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}).$$

Oznaczając  $f_i = \sqrt{\det(D\Psi_i^T \cdot D\Psi_i)}$ , zapisujemy powyższą zależność krótko:

$$f_2 = |\det D\Phi| \cdot (f_1 \circ \Phi) \quad \text{na zbiorze } V_2.$$

Teza wynika natychmiast z Twierdzenia 5.22 o zamianie zmiennych.  $\square$

### Definicja miary $\sigma_m$

Nietrudno teraz podać formalną definicję miary powierzchniowej  $\sigma_m$  na rozmaitości  $m$ -wymiarowej  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Ponieważ topologia przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  ma przeliczalną bazę, więc na  $M$  istnieje atlas złożony z co najwyżej przeliczalnie wielu map. Innymi słowy, istnieje co najwyżej przeliczalnie wiele parametryzacji

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \Psi_i(V_i) = U_i \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{gdzie } M \subset \bigcup U_i,$$

których obrazy pokrywają całą rozmaistość  $M$ . Każdy zbiór borelowski  $B \subset M$  można przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu zbiorów borelowskich parami rozłącznych  $B_i$ , zawartych w dziedzinach poszczególnych map, kładąc

$$B_1 = B \cap U_1, \quad B_2 = (B \cap U_2) \setminus U_1, \quad B_3 = (B \cap U_3) \setminus (U_1 \cup U_2), \quad \dots$$

Niech  $V_i \supset A_i = \Psi_i^{-1}(B_i)$ ; przyjmujemy

$$\sigma_m(B_i) = \int_{A_i} \sqrt{\det(D\Psi_i^T D\Psi_i)} \ d\lambda_m, \quad (6.8)$$

$$\sigma_m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \sqrt{\det(D\Psi_i^T D\Psi_i)} \ d\lambda_m. \quad (6.9)$$

Liczba  $\sigma_m(B)$  nie zależy ani od wyboru poszczególnych parametryzacji  $\Psi_i$ , ani od wyboru zbiorów otwartych  $U_i$ , pokrywających rozmaistość  $M$ . To pierwsze wynika ze Stwierdzenia 6.11; druga własność bierze się stąd, że mając dwa otwarte pokrycia przeliczalne  $M$ , zbiorami  $U_i$  oraz  $U'_i$ , można rozważyć trzecie, drobniejsze od nich obu, pokrycie zbiorami  $U_i \cap U'_j$  (a na każdym  $U_i \cap M$  funkcja  $\sigma_m$  jest miarą).

**Uwaga 6.12.** Powyższą miarę  $\sigma_m$ , określona na borelowskich podzbiorach  $M$ , można uzupełnić (tak, aby każdy podzbiór zbioru miary  $\sigma_m$  zero był mierzalny!), korzystając z twierdzenia Carathéodory'ego.

## 6.2 Wzór Cauchy'ego–Bineta. Przykłady.

Twierdzenie Cauchy'ego–Bineta jest uogólnieniem tożsamości Lagrange'a. Można dzięki niemu obliczać wyznacznik Grama układu wektorów, nie obliczając iloczynów skalarnych tych wektorów.

Niech  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ , gdzie  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ , będzie dowolnym  $m$ -elementowym podzbiorem  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Jeśli  $A$  jest macierzą o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach, to przez  $A(S)$  oznaczamy macierz kwadratową  $m \times m$ , która powstaje z  $A$  przez wybranie kolumn o numerach  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  (należących do zbioru  $S$ ). Podobnie, jeśli  $B$  jest macierzą o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach, to przez  $B(S)$  oznaczamy macierz kwadratową  $m \times m$ , która powstaje z  $B$  przez wybranie wierszy o numerach  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ .

**Twierdzenie 6.13 (wzór Cauchy'ego–Bineta).** *Jeśli  $A$  jest macierzą o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach, zaś  $B$  — macierzą o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach, gdzie  $1 \leq m \leq n$ , to*

$$\det AB = \sum_{S=\{i_1, i_2, \dots, i_m\}} \det A(S) \cdot \det B(S). \quad (6.10)$$

Dowód. Niech  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{jk})$ , gdzie pierwszy indeks oznacza numer wiersza, a drugi – kolumny. Wówczas

$$AB = \left( \sum_j a_{ij} b_{jk} \right).$$

Innymi słowy,  $k$ -ta kolumna macierzy  $AB$  jest kombinacją liniową kolumn macierzy  $A$ , ze współczynnikami  $b_{kj}$ :

$$(AB)_{\text{kol. } k} = \sum_j b_{jk} (A)_{\text{kol. } j}$$

Wyznacznik macierzy jest wieloliniową funkcją jej kolumn; dlatego, z powyższej równości otrzymujemy

$$\det AB = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} b_{j_1, 1} b_{j_2, 2} \dots b_{j_m, m} \det ((A)_{\text{kol. } j_1}, (A)_{\text{kol. } j_2}, \dots, (A)_{\text{kol. } j_m})$$

Jeśli któreś dwa indeksy w ostatniej sumie są równe, to wyznacznik macierzy, która ma dwie identyczne kolumny, znika. Zatem,

$$\det AB = \sum_{S=\{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}} \beta(B, S) \det A(S), \quad (6.11)$$

gdzie współczynniki  $\beta(B, S)$  zależą od macierzy  $B$  i podzbioru  $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$ . Aby wyznaczyć  $\beta(B, S)$ , wypiszmy powyższą równość dla konkretnych  $A$ . Ustalmy  $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$  i niech  $A$  będzie macierzą, której  $j_s$ -ta kolumna jest równa  $e_s$  dla  $s = 1, \dots, m$ , a pozostałe kolumny są zerowe. Wówczas  $\det A(S) = \det \text{Id} = 1$  i  $\det A(S') = 0$  dla  $S' \neq S$ . Ponadto,  $AB = B(S)$ . Podstawiając te zależności do wzoru (6.11), otrzymujemy  $\det B(S) = \beta(B, S)$  dla każdego  $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$ .  $\square$

**Przykład 6.14 (pole ‘płaskiego’ torusa w  $\mathbb{R}^4$ ).** W przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  rozważmy torus

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}.$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że  $\mathbb{T}^2$  jest rozmaistością dwuwymiarową. Niech

$$\Psi: (0, 2\pi)^2 \ni (t, s) \mapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s) \in \mathbb{T}^2;$$

obrazem parametryzacji  $\Psi$  jest torus  $\mathbb{T}^2$  bez dwóch okręgów, tzn. zbiór pełnej miary powierzchniowej w  $\mathbb{T}^2$ . Dlatego

$$\sigma_2(\mathbb{T}^2) = \int_{(0,2\pi)^2} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} d\lambda_2.$$

Łatwo sprawdzamy, że

$$(D\Psi)^T = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Ze wzoru Cauchy’ego–Bineta otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det((D\Psi)^T \cdot D\Psi) &= \sin^2 t \sin^2 s + \sin^2 t \cos^2 s + \cos^2 t \sin^2 s + \cos^2 t \cos^2 s \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t = 1, \end{aligned}$$

więc

$$\sigma_2(\mathbb{T}^2) = \int_{(0,2\pi)^2} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} d\lambda_2 = \int_{(0,2\pi)^2} 1 d\lambda_2 = 4\pi^2.$$

Równość  $\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi) = 1$  ma następujący sens geometryczny: parametryzacja  $\Psi$  zachowuje miarę podzbiorów kwadratu  $(0, 2\pi)^2$ .

**Przykład 6.15.** Wykażemy, że miara powierzchniowa  $s_{n-1} := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1))$  sfery jednostkowej  $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$  spełnia równość

$$s_{n-1} = n\omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)}, \quad (6.12)$$

gdzie  $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2)$  jest miarą Lebesgue'a kuli jednostkowej w  $\mathbb{R}^n$  (patrz Twierdzenie 5.29).

Niech, dla  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)$ ,

$$\varphi(\mathbf{x}') = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}'\|^2} = \sqrt{1 - \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i^2}.$$

Sfera jednostkowa  $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$  z usuniętą płaszczyzną równika  $\{x_n = 0\}$  jest sumą zbioru  $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{(\mathbf{x}', x_n) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}' \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1), x_n = \varphi(\mathbf{x}')\}$  i jego lustrzanego odbicia względem hiperpłaszczyzny  $\{x_n = 0\}$ . Dlatego

$$\sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 2\sigma_{n-1}(\mathbb{S}_+^{n-1}) = 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} d\lambda_{n-1},$$

gdzie  $\Psi(\mathbf{x}') = (\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$ . Macierz  $D\Psi$  składa się z klatki identyczności  $(n-1) \times (n-1)$  i  $n$ -tego wiersza  $\varphi_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Wobec wzoru Cauchy'ego–Bineta, wyznacznik macierzy  $(D\Psi)^T D\Psi$  jest równy sumie kwadratów minorów  $(n-1) \times (n-1)$ ; jeden z tych minorów jest równy 1, a pozostałe wynoszą  $\pm \varphi_{x_i}$ . Zatem

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} d\lambda_{n-1} \\ &= 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{1 + \sum \varphi_{x_i}^2} d\lambda_{n-1} = 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum x_i^2}} d\lambda_{n-1} =: 2I_{n-1}. \end{aligned}$$

Całkę  $I_n$  obliczymy rekurencyjnie, korzystając z funkcji  $B$  i  $\Gamma$  Eulera.<sup>3</sup> Stosując twierdzenie Fubiniego, a następnie liniową zamianę zmiennych

$$\mathbf{x}' = \sqrt{1 - x_n^2} \cdot \mathbf{y}', \quad \mathbf{y}' \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1),$$

---

<sup>3</sup>Podobną metodę wykorzystywaliśmy już wcześniej, całkując wielomiany Tonellego w dowodzie Twierdzenia 5.58, oraz obliczając miarę kuli jednostkowej.

otrzymujemy<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{B^n(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{-1/2} d\lambda_n(\mathbf{x}) \\
 &= \int_{-1}^1 \left( \int_{B^{n-1}(\mathbf{0},\sqrt{1-x_n^2})} (1 - x_n^2 - \|\mathbf{x}'\|^2)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{-1/2} \left( \int_{B^{n-1}(\mathbf{0},\sqrt{1-x_n^2})} \left( 1 - \left\| \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-x_n^2}} \right\|^2 \right)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} \left( \int_{B^{n-1}(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{y}'\|^2)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}') \right) dx_n \\
 &= I_{n-1} \cdot 2 \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_n. \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Podstawiając  $x_n^2 = t$ , sprawdzamy, że

$$2 \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_n = \int_0^1 (1 - t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-1/2} dt = B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Ostatnia równość zachodzi na mocy znanego związku między funkcjami  $\Gamma$  i  $B$ . Równość (6.13) można teraz przepisać jako

$$I_n = \frac{\Gamma(n/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \cdot I_{n-1};$$

stąd, przez łatwą indukcję, otrzymujemy

$$I_n = \frac{\Gamma(1/2)^{n-1}}{\Gamma((n+1)/2)} I_1 = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} I_1, \quad s_{n-1} = 2I_{n-1} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} s_1,$$

a ponieważ  $s_1 = \sigma_1(\mathbb{S}^1(\mathbf{0}, 1)) = 2\pi$  jest po prostu długością okręgu jednostkowego, więc ostatecznie

$$s_{n-1} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot 2\pi = \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2) \cdot \Gamma(n/2)} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)} = n\omega_n.$$

(Skorzystaliśmy ze związku  $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$  i równości  $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2)$ , wykazanej w Twierdzeniu 5.29). Wzór (6.12) został udowodniony.  $\square$

**Uwaga 6.16 (miara wykresu).** Dokonując obliczeń w ostatnim przykładzie, sprawdziliśmy przy okazji następujący ogólniejszy fakt: jeśli  $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$ , gdzie  $V \subset \mathbb{R}^m$  jest zbiorem otwartym, a

$$W = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in V\}$$

jest wykresem  $\varphi$ , to wówczas

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{1 + \|\text{grad } \varphi\|^2} d\lambda_m.$$

Istotnie,  $\Phi: V \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in W \subset \mathbb{R}^{m+1}$  jest naturalną parametryzacją wykresu, a ze wzoru Cauchy'ego–Bineta otrzymujemy

$$\det(D\Phi^T \cdot D\Phi) = 1 + \sum (\varphi_{x_i})^2 = 1 + \|\text{grad } \varphi\|^2.$$

<sup>4</sup>Proszę porównać poniższy rachunek z (5.50): to tak, jakby w tamtym wzorze użyć  $N = -1/2$ .

**Uwaga 6.17.** Nietrudno stwierdzić, posługując się liniową zamianą zmiennych, że

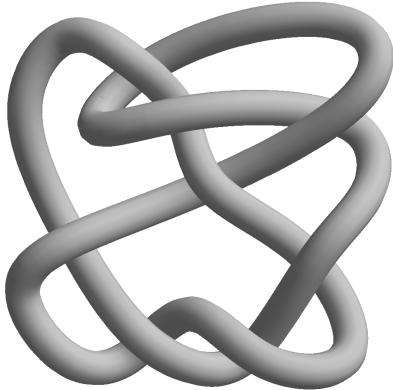
$$s(r) := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, r)) = n\omega_n r^{n-1}.$$

Jak wiemy, miara Lebesgue'a  $n$ -wymiarowej kuli o promieniu  $r$  wynosi  $m(r) = \omega_n r^n$ . Zachodzi więc równość

$$s(r) = m'(r), \quad r > 0.$$

Okazuje się, że nie jest to związek przypadkowy. Wyjaśnimy to nieco dokładniej w następnym podrozdziale.

### 6.3 Otoczenia tubularne i twierdzenie o materacu



W całym podrozdziale symbol  $X_\varepsilon$  oznacza zbiór  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{y}, X) < \varepsilon\}$  wszystkich punktów przestrzeni, odległych od ustalonego zbioru  $X \subset \mathbb{R}^n$  mniej niż o  $\varepsilon > 0$ . (Jeśli np.  $X$  jest gładką krzywą w  $\mathbb{R}^3$ , to  $X_\varepsilon$  jest rurką o grubości  $2\varepsilon$  wokół tej krzywej, patrz rysunek).

**Twierdzenie 6.18 (o otoczeniu tubularnym).** Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  będzie  $m$ -wymiarową zanurzoną rozmaistością zwartą klasy  $C^2$ . Wówczas, dla wszystkich dostatecznie małych  $\varepsilon > 0$ , zbiór  $M_\varepsilon$  spełnia zależność

$$M_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon), \quad (6.14)$$

przy czym dyski

$$D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon) = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\| < \varepsilon, \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{p}} M\} \quad (6.15)$$

położone w przestrzeniach  $(T_{\mathbf{p}} M)^\perp$ , są parami rozłączne dla różnych punktów  $\mathbf{p} \in M$ .

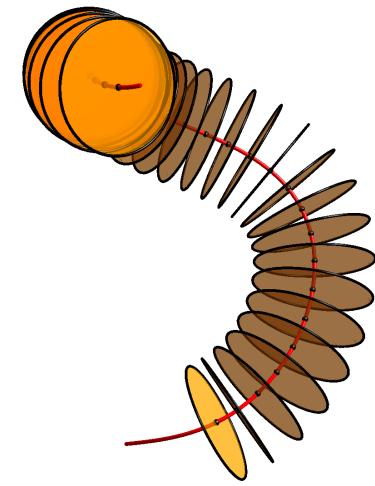
Przekształcenie

$$P: M_\varepsilon \ni \mathbf{y} \mapsto P(\mathbf{y}) \in M,$$

gdzie  $\|P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{z} \in M} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$ , jest dobrze określonym przekształceniem klasy  $C^1$ .

Przed przystąpieniem do dowodu spróbujemy wyjaśnić poglądowo treść tego ważnego twierdzenia. Przekształcenie  $P$  nazywane jest *rzutowaniem na najbliższy punkt*. Punktowi  $\mathbf{y}$ , należącemu do wąskiej tuby  $M_\varepsilon$  wokół rozmaistości  $M$ , przypisujemy ten punkt  $\mathbf{z} = P(\mathbf{y}) \in M$ , który jest najbliższy  $\mathbf{y}$ . Twierdzenie mówi, że dla zwartych rozmaistości klasy  $C^2$ , przy dostatecznie małym  $\varepsilon > 0$ , istnieje dokładnie jeden taki punkt  $\mathbf{z}$ .

Czytelnik zechce pomyśleć najpierw o przypadkach, które względnie łatwo można sobie wyobrazić:  $m = 1$  i  $n = 2$ ,  $m = 1$  i  $n = 3$ , wreszcie  $m = 2$  i  $n = 3$ . W pierwszym z nich  $M$  jest gładką krzywą zamkniętą w  $\mathbb{R}^2$ . Dyski  $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$  są po prostu odcinkami otwartymi długości  $2\varepsilon$ , prostopadłymi do krzywej i mającymi środki w jej punktach. *Twierdzenie o otoczeniu tubularnym orzeka, że dla małych  $\varepsilon > 0$  takie odcinki są rozłączne, a ich suma jest zbiorem wszystkich punktów, odległych od krzywej mniej niż o  $\varepsilon$ .* Przekształcenie  $P$  nietrudno opisać geometrycznie: każdy punkt zbioru  $M_\varepsilon$  należy do dokładnie jednego odcinka  $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$  i jeśli  $\mathbf{y} \in D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ , to  $P(\mathbf{y}) = \mathbf{p}$ .



Fragment gładkiej krzywej zamkniętej w  $\mathbb{R}^3$  i jej otoczenia tubularnego.

o  $\varepsilon$ . Przekształcenie  $P$  nietrudno opisać geometrycznie: każdy punkt zbioru  $M_\varepsilon$  należy do dokładnie jednego odcinka  $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$  i jeśli  $\mathbf{y} \in D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ , to  $P(\mathbf{y}) = \mathbf{p}$ .

Dla  $m = 1, n = 3$  mamy do czynienia z krzywą zamkniętą w  $\mathbb{R}^3$ ; jej otoczenie tubularne to rurka, zbudowana z małych, płaskich, parami rozłącznych dysków, prostopadłych do tej krzywej i mających środki w jej punktach. Wreszcie, dla  $m = 2$  i  $n = 3$  rozmaistość  $M \subset \mathbb{R}^3$  jest zatrą, gładką powierzchnią bez brzegu. Zbiór  $M_\varepsilon$  jest wtedy – jak gęsty ‘jeż’ – sumą parami rozłącznych odcinków o długościach równych  $2\varepsilon$ ; każdy z tych odcinków ma środek na  $M$  i jest prostopadły do  $M$  (tj. do przestrzeni stycznej do  $M$ ).

**SZKIC DOWODU TWIERDZENIA 6.18.** Dla każdego  $\mathbf{y} \in M_\varepsilon$  istnieje (co najmniej jeden) punkt  $P(\mathbf{y}) \in M$  taki, że  $\|P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \text{dist}(\mathbf{y}, M) = \min_{\mathbf{z} \in M} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$ . To wynika stąd, że przy ustalonym  $\mathbf{y}$  funkcja  $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$  osiąga swój kres dolny na zbiorze zwartym  $M$ . Zauważmy, że jeśli  $\mathbf{p} = P(\mathbf{y})$ , to wektor  $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$  jest prostopadły do  $T_{\mathbf{p}} M$  (gdyby tak nie było, odległość  $\mathbf{y}$  od  $M$  nie osiągałaby w punkcie  $\mathbf{p}$  najmniejszej wartości – Czytelnik zechce to sprawdzić, posługując się np. prostopadłością gradientu do rozmaistości w punkcie ekstremum warunkowego). Inaczej mówiąc,

$$M_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon).$$

Sprawdzimy, że dla małych  $\varepsilon$  dyski  $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$  są parami rozłączne dla różnych  $\mathbf{p}$ . Przypuśćmy, że jest przeciwnie: dla  $\varepsilon_j = 1/j$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots$  istnieją punkty  $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}'_j \in M$  takie, że iloczyn  $D^\perp(\mathbf{p}_j, \frac{1}{j}) \cap D^\perp(\mathbf{p}'_j, \frac{1}{j})$  jest niepusty. Wtedy  $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}'_j\| < 2/j \rightarrow 0$ ; dzięki wartości  $M$ , przechodząc do odpowiedniego podciagu, można założyć, że  $\lim \mathbf{p}_j = \lim \mathbf{p}'_j = \mathbf{p} \in M$ .

Niech  $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow U \cap M \subset \mathbb{R}^n$  będzie parametryzacją klasy  $C^2$  pewnego otoczenia  $\mathbf{p}$  w  $M$ . Bez zmniejszenia ogólności, obracając i przesuwając w razie potrzeby układ współrzędnych, założymy, że  $\mathbf{p} = \mathbf{0} = \Psi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$T_{\mathbf{0}} M = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m), \quad (T_{\mathbf{0}} M)^\perp = \text{span}(\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Niech  $I: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow (T_{\mathbf{0}} M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$  oznacza włożenie liniowe, polegające na utożsamieniu  $\mathbf{v} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$  z wektorem  $I(\mathbf{v}) = \sum_{i>m} v_i \mathbf{e}_i$  w  $(n-m)$ -wymiarowej podprzestrzeni  $(T_{\mathbf{0}} M)^\perp$ . Określmy odwzorowanie

$$F: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supset V \times B^{n-m}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

następujące:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{x}) + \pi(\Psi(\mathbf{x}))(I(\mathbf{v})),$$

gdzie dla ustalonego  $\mathbf{y} \in M$  przekształcenie  $\pi(\mathbf{y})$  jest rzutem ortognalnym  $\mathbb{R}^n$  na przestrzeń  $(T_{\mathbf{y}} M)^\perp$ . Jeśli  $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{q} \in M$ , to  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in D^\perp(\mathbf{q}, 1)$ .

Można sprawdzić, że jeśli  $M$  jest klasy  $C^2$ , to wyrazy macierzy rzutu  $\pi(\Psi(\mathbf{x}))$  w standardowej bazie  $\mathbb{R}^n$  są funkcjami klasy  $C^1$  zmiennej  $\mathbf{x}$ .<sup>5</sup> Dlatego  $F \in C^1$ . Obliczmy jacobian  $F$  w punkcie  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Ponieważ  $I(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , a  $\pi(\mathbf{y})$  jest liniowe przy ustalonym  $\mathbf{y}$ , więc

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial I}{\partial v_i}(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_i = \frac{\partial F}{\partial v_i}(0, \mathbf{v}).$$

<sup>5</sup>To niezbyt trudne zadanie; do jego rozwiązania trzeba wykorzystać geometryczną charakteryzację rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń liniową.

Zatem macierz  $DF(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  ma kolumny  $\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \in T_{\mathbf{0}}M$  (dla  $j = 1, \dots, m$ ) oraz  $\mathbf{e}_j \in (T_{\mathbf{0}}M)^{\perp}$  dla  $j = m+1, \dots, n$ . Są to wektory liniowo niezależne w  $\mathbb{R}^n$  i dlatego  $\det DF(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq 0$ . Wobec twierdzenia o funkcji odwrotnej,  $F$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia otwartego  $W = V_1 \times B^{n-m}(0, r) \subset V \times B(0, 1)$  punktu  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  na obraz  $F(W) \subset \mathbb{R}^n$ .

Dla dostatecznie dużych  $j$  dyski  $D_j = D^{\perp}(\mathbf{p}_j, 1/j)$  i  $D'_j = D^{\perp}(\mathbf{p}'_j, 1/j)$  są zawarte w  $F(W)$ . Mamy  $\mathbf{p}_j = \Psi(\mathbf{x}_j)$  i  $\mathbf{p}'_j = \Psi(\mathbf{x}'_j)$  dla pewnych  $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j \in V_1$ . W punkcie wspólnym dysków  $D_j$  i  $D'_j$  spełniony jest warunek  $F(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j) = F(\mathbf{x}'_j, \mathbf{v}'_j)$ , ale  $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}'_j$ . To jest sprzeczność z różnowartościowością  $F$  na zbiorze  $W$ .

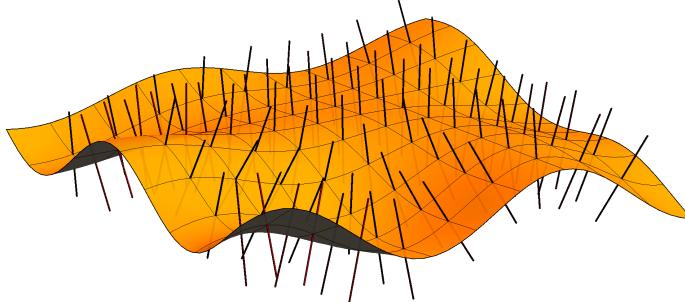
Zatem istnieje takie  $\varepsilon_0 > 0$ , że wszystkie dyski  $D^{\perp}(\mathbf{p}, \varepsilon_0)$  są rozłączne. Pokrywając rozmaitość  $M$  skończoną liczbą otoczeń takich, jak  $F(W)$  przed chwilą, wnioskujemy, że rzut  $P$  z  $M_{\varepsilon}$  na najbliższy punkt  $M$  jest dobrze określony. Jeśli w opisanych wyżej współrzędnych  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , to  $P(\mathbf{y}) = \Psi(\mathbf{x})$ . Innymi słowy, oznaczając przez  $A$  rzut ortogonalny  $A: (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{x}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  na  $\mathbb{R}^m$ , widzimy, że  $P = \Psi \circ A \circ F^{-1}$  jest klasy  $C^1$ .  $\square$

**Uwaga 6.19.** Jest rzeczą jasną, że teza ostatniego twierdzenia nie zachodzi dla wszystkich  $\varepsilon > 0$ . Jeśli np.  $M \subset \mathbb{R}^3$  jest powierzchnią torusa, powstającego przez obrót okręgu o promieniu  $r > 0$  wokół prostej, położonej w płaszczyźnie tego okręgu i oddalonej o  $R$  od jego środka, to dla  $\varepsilon > r$  teza twierdzenia nie zachodzi. Istotne jest też założenie, że  $M$  jest klasy  $C^2$ . Czytelnik zechce rozpatrzyć wykres  $y = h(x) := |x|^{3/2}$  w otoczeniu zera w  $\mathbb{R}^2$ : punkt wykresu  $h$  najbliższy do  $(0, \varepsilon)$  nie jest określony jednoznacznie dla żadnego  $\varepsilon > 0$ .

Miedzy objętością otoczenia tubularnego rozmaitości a jej miarą powierzchniową zachodzi naturalny, zgodny z intuicją związek.

**Twierdzenie 6.20 (twierdzenie o materacu).** Założmy, że  $M$  jest  $m$ -wymiarową rozmaistością zwaną klasy  $C^2$ , zanurzoną w  $\mathbb{R}^n$ . Niech  $M_{\varepsilon} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{y}, M) < \varepsilon\}$ . Wówczas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_n(M_{\varepsilon})}{\omega_{n-m} \varepsilon^{n-m}} = \sigma_m(M).$$



Fragment rozmaistości  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Krótkie odcinki prostopadłe do  $M$ , które mają środki w  $M$ , są rozłączne.

Czytelnik zechce pomyśleć o przypadku  $n = 3$ ,  $m = 2$ . Otoczenie tubularne  $M_{\varepsilon} \subset \mathbb{R}^3$  powierzchni  $M$  jest wtedy sumą rozłącznych odcinków długości  $2\varepsilon$ , prostopadłych do  $M$ . Można myśleć o  $M_{\varepsilon}$  jako o ‘materacu’ grubości  $2\varepsilon$ ; powierzchnia  $M$  biegnie przez środek materaca. Twierdzenie orzeka, że pole powierzchni  $M$  jest granicą ilorazu objętości materaca i grubości materaca,

$$\sigma_2(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_3(M_{\varepsilon})}{2\varepsilon}.$$

Ogólnie, dla  $n = m + 1$  i rozmaitości  $M = M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  klasy  $C^2$  jest

$$\sigma_m(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_{m+1}(M_\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

**Przykład 6.21 (miara sfery  $\mathbb{S}^{n-1}$  raz jeszcze).** Niech  $M = \mathbb{S}^{n-1}(0, r)$ . Nietrudno zauważać, że dla  $\varepsilon < r$  zbiór  $M_\varepsilon$  jest równy  $B^n(0, r + \varepsilon) \setminus \overline{B^n(0, r - \varepsilon)}$ . Dlatego

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_n(r + \varepsilon)^n - \omega_n(r - \varepsilon)^n}{2\varepsilon} \\ &= \frac{\omega_n}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{(r + \varepsilon)^n - r^n}{\varepsilon} + \frac{r^n - (r - \varepsilon)^n}{\varepsilon} \right) = \frac{\omega_n}{2} \cdot 2 \frac{d}{dt}(t^n) \Big|_{t=r} = \omega_n \cdot nr^{n-1}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ponownie wynik, wspomniany już w Uwadze 6.17.  $\square$

**Dowód TWIERDZENIA 6.20.** Dla uproszczenia podamy dowód tylko w przypadku  $n = m + 1$ . Wybierzmy zbiór otwarty  $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$  taki, że  $M \cap U$  jest wykresem funkcji  $\varphi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $V \subset \mathbb{R}^m$  jest otwarty. Niech  $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$  dla  $\mathbf{x} \in V$  będzie parametryzacją  $U \cap M$ . Korzystając z twierdzenia o otoczeniu tubularnym, możemy zakładać, że

$$U = \{ \mathbf{q} + \mathbf{v} \mid \mathbf{q} \in \Phi(V) \subset M, \quad \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{p}} M, \quad \|\mathbf{v}\| < \varepsilon \}.$$

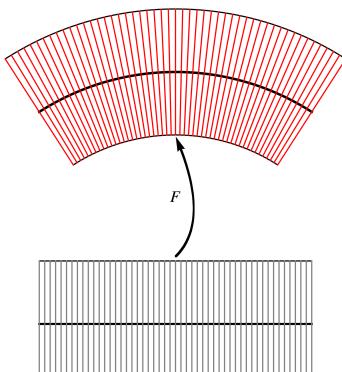
jest fragmentem otoczenia tubularnego rozmaitości  $M$ ; dokładniej  $U = P^{-1}(\Phi(V))$ , gdzie  $P$  oznacza rzutowanie otoczenia tubularnego rozmaitości na jej najbliższy punkt.

Jeśli  $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ , to  $T_{\mathbf{y}} M = \text{Im } D\Phi(\mathbf{x})$ . Kolumny macierzy  $D\Phi(\mathbf{x})$ , tzn. wektory

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \left( 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{miejsce } j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right)^T \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

tworzą bazę  $T_{\mathbf{y}} M$ . Wektor  $N(\mathbf{x}) = (-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(\mathbf{x}), 1)^T$  jest prostopadły do nich wszystkich, a więc rozpina (jednowymiarową) przestrzeń  $(T_{\mathbf{y}} M)^\perp$ . Niech

$$\nu(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x})}{\|N(\mathbf{x})\|} = \frac{N(\mathbf{x})}{\sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}}$$



$F$  przeprowadza  $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  na fragment otoczenia tubularnego  $M$ .

oznacza (unormowany) wektor normalny do wykresu  $\varphi$  i niech  $F: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  będzie dane wzorem  $F(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) + t\nu(\mathbf{x})$ . Ponieważ  $\varphi \in C^2$ , więc  $\nu \in C^1$  i  $F \in C^1$ . Na mocy twierdzenia o otoczeniu tubularnym,  $F$  jest dyfeomorfizmem  $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  na  $U$ , gdy liczba  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie mała. Wobec twierdzenia o zamianie zmiennych,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_n(U)}{2\varepsilon} &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_U 1 d\lambda_n \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left( \int_V \det F(\mathbf{x}, t) d\lambda_m(\mathbf{x}) \right) dt \quad (6.16) \\ &\rightarrow \int_V \det F(\mathbf{x}, 0) d\lambda_m(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \varepsilon \rightarrow 0,\end{aligned}$$

gdyż funkcja  $t \mapsto h(t) = \int_V \det F(\mathbf{x}, t) d\lambda_m(\mathbf{x})$  zależy od  $t$  w sposób ciągły.<sup>6</sup> Obliczmy wyznacznik  $\det DF(\mathbf{x}, 0)$ . Jest oczywiście

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}, t) + t \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \mathbf{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \nu(\mathbf{x}).$$

Stąd łatwo wynika, że

$$DF(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}/d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}/d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}/d \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} & 1/d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } d = \sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}.$$

Zatem iloczyn liczby  $d$  i wyznacznika  $\det DF(\cdot, 0)$  jest równy

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1 + \sum \varphi_{x_i}^2}_{=d^2} \end{pmatrix} = d^2.$$

(Pierwszą równość uzyskujemy, dodając do ostatniego wiersza kolejno pierwszy wiersz pomnożony przez  $-\varphi_{x_1}$ , potem drugi wiersz pomnożony przez  $-\varphi_{x_2}$ , itd.). To oznacza, że

$$\det DF(\mathbf{x}, 0) = d = \sqrt{1 + \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_{x_i}^2(\mathbf{x})} = \sqrt{\det(D\Phi(\mathbf{x})^T D\Phi(\mathbf{x}))}.$$

Podstawiwszy ten wynik do równości (6.16), otrzymujemy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{m+1}(U)}{2\varepsilon} = \int_V \det F(\mathbf{x}, 0) d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_V \sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)} d\lambda_m = \sigma_m(\Phi(V)).$$

Pokrywając rozmaitość  $M$  takimi zbiorami otwartymi  $U$  i korzystając z addytywności miary, łatwo otrzymujemy tezę.  $\square$

---

<sup>6</sup>Ciągłość  $h$  łatwo wywnioskować np. z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Dla każdej funkcji  $h$  ciągłej w otoczeniu zera mamy  $(2\varepsilon)^{-1} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} h(t) dt \rightarrow h(0)$ .

## Rozdział 7

# Formy różniczkowe i twierdzenie Stokesa

Dalekosiężnym celem tego rozdziału będzie sformułowanie i udowodnienie wielowymiarowych odpowiedników wzoru Newtona–Leibniza  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ . Zostały one odkryte w pierwszej połowie XIX wieku i odegrały fundamentalną rolę w fizyce matematycznej, m.in. w matematycznej teorii pola elektromagnetycznego.<sup>1</sup> Bez tych wzorów – twierdzenia Greena, twierdzenia Gaussa o dywergencji i twierdzenia Stokesa – nie mogłyby się obyć ani teoria równań różniczkowych cząstkowych i jej zastosowania w fizyce, ani geometria różniczkowa, ani wiele innych działów współczesnej matematyki.

Z pewnego dystansu widać, że w tej partii materiału ceną za względową prostotę sformułowań twierdzeń i ich dowodów jest skomplikowany formalizm. Nie będziemy go od razu wprowadzać w pełnej ogólności; zaczniemy od sytuacji prostej.

Pisząc ten rozdział, korzystałem m.in. z notatek prof. Dietmara Salamona z Politechniki w Zuryczu z wykładów o formach różniczkowych, prowadzonych w 2009 roku.<sup>2</sup>

### 7.1 Formy rzędu 1 i twierdzenie Greena

**Definicja 7.1 (forma różniczkowa rzędu 1).** Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym i niech  $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^k(U)$ , gdzie  $k \geq 1$ . Wyrażenie

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \quad (7.1)$$

nazywamy *formą różniczkową rzędu 1 i klasy  $C^k$* , albo krótko *1-formą* na zbiorze  $U$ .

**Definicja 7.2 (krzywa zorientowana).** Rozmaitość jednowymiarową  $M = M^1 \subset \mathbb{R}^n$  klasy  $C^1$  z ustalonym ciągłym polem niezerowych wektorów stycznych  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{p} \in M$ , będziemy nazywać *krzywą zorientowaną*.

Jeśli  $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  jest parametryzacją  $M$ , to dla każdego  $t \in I$  wektor  $\gamma'(t)$  jest styczny do  $M$  w punkcie  $\mathbf{p} = \gamma(t)$ . Są dwie możliwości: albo wektor  $\gamma'(t)$  ma dla każdego  $t \in I$  taki sam zwrot, jak wektor  $\mathbf{v}(\gamma(t))$ , określający orientację  $M$ , albo ma zawsze zwrot

---

<sup>1</sup>Osobom zainteresowanym historią polecam tekst Victora J. Katza, *The History of Stokes' Theorem*, Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 3 (1979), str. 146–156.

<sup>2</sup>Oryginał w języku niemieckim można znaleźć w sieci.

przeciwny.<sup>3</sup> W pierwszym przypadku będziemy mówić, że parametryzacja  $\gamma$  jest *zgodna z orientacją*  $M$ .

**Definicja 7.3 (całka z 1-formy wzdłuż krzywej zorientowanej).** Niech  $M$  będzie krzywą zorientowaną skończonej długości, zawartą w zbiorze otwartym  $U \subset \mathbb{R}^n$ , zaś  $\gamma: \mathbb{R} \supset I = (a, b) \rightarrow M$  – parametryzacją zgodną z orientacją  $M$ . Jeśli  $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  jest formą klasy  $C^1$  na  $U$ , to piszemy

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt. \quad (7.2)$$

Definicję można operować mnemotechnicznie: jeśli  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \gamma(t) \in M$ , to  $x_j = \gamma_j(t)$ , ‘więc’  $dx_j = \gamma'_j(t) dt$ . Podobnego formalizmu używaliśmy, całkując przez podstawienie funkcje jednej zmiennej.

Przytoczona definicja ma sens tylko dla krzywych *spójnych*. Formły różniczkowe rzędu 1 można całkować także po krzywych niespójnych (dodając całki po składowych spójności takiej krzywej).

**Stwierdzenie 7.4 (poprawność definicji).** Wartość całki

$$\int_M (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n)$$

nie zależy od wyboru parametryzacji  $\gamma: I \rightarrow M$ , zgodnej z orientacją.

**Dowód.** Założmy, że  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  i  $\eta: (c, d) \rightarrow M$  są dwiema parametryzacjami  $M$  zgodnymi z orientacją. Przekształcenie  $\psi = \eta^{-1} \circ \gamma$  jest wówczas, na mocy Lematu 6.10 o funkcjach przejścia, dyfeomorfizmem odcinka  $(a, b)$  na  $(c, d)$ . Mamy  $\eta \circ \psi = \gamma$ , stąd zaś

$$\eta'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = \gamma'(t), \quad t \in (a, b).$$

Ponieważ  $\gamma, \eta$  są zgodne z orientacją  $M$ , więc wektory  $\eta'(\psi(t))$  i  $\gamma'(t)$  mają ten sam zwrot. Zatem  $\psi'(t) > 0$  dla każdego  $t$ , co oznacza, że  $\psi$  jest funkcją rosnącą. Z twierdzenia o zamianie zmiennych, używając podstawienia

$$(c, d) \ni s = \psi(t), \quad t \in (a, b),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_c^d f_j(\eta(s)) \eta'_j(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\eta(\psi(t))) \eta'_j(\psi(t)) \psi'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt. \end{aligned}$$

Wartość prawej strony wzoru (7.2) nie zależy więc od wyboru parametryzacji.  $\square$

**Uwaga 7.5.** Gdy zmienimy orientację  $M$  na przeciwną, to liczba  $\int_M \omega$  zmieni znak.  $\square$

---

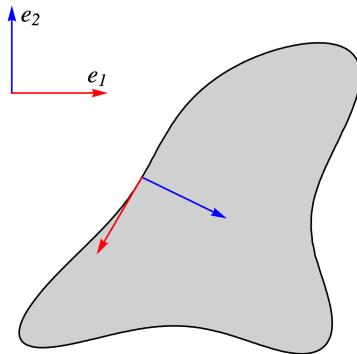
<sup>3</sup>Wynika to stąd, że funkcja ciągła  $t \mapsto \langle \gamma'(t), \mathbf{v}(\gamma(t)) \rangle$  nie zmienia znaku w żadnym punkcie  $t \in I$ .

**Interpretacja fizyczna całki z 1-formy.** Definicja 1-formy wydaje się, na pierwszy rzut oka, sztuczna; nie wiadomo, czym (tzn. jakimi obiektami matematycznymi) są symbole  $dx_j$ . Jednak całka z formy  $\sum f_i dx_i$  ma naturalną interpretację fizyczną. Jeśli mianowicie przyjmiemy, że  $f = (f_1, \dots, f_n)$  jest polem wektorowym w obszarze  $U$ , np. pewnym polem sił, to całka  $\int_M \omega$  z formy  $\omega = \sum f_i dx_i$  jest pracą sił pola wzdłuż krzywej  $\gamma$ . Istotnie,

$$\sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) = \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \cdot \|\gamma'(t)\|$$

i dlatego

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \cdot \underbrace{\|\gamma'(t)\| dt}_{d\sigma_1} = \int_M \langle f, \mathbf{w} \rangle d\sigma_1,$$



Naturalna orientacja brzegu obszaru w  $\mathbb{R}^2$ : jedna z baz powstaje z drugiej przez obrót.

gdzie  $\mathbf{w} = \gamma'/\|\gamma'\|$  jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej. Liczba  $\langle f, \mathbf{w} \rangle$  jest długością składowej wektora  $f$ , stycznej do  $M$ ; to właśnie ta składowa wykonuje pracę wzdłuż krzywej.

**Definicja 7.6.** Mówimy, że  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest obszarem z brzegiem klasy  $C^k$ , jeśli  $\Omega$  jest zbiorem otwartym spójnym, którego brzeg  $\partial\Omega$  jest rozmaistością zanurzoną klasy  $C^k$  w  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 7.7.** Będziemy mówić, że brzeg obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ma naturalną orientację, jeśli dla każdego  $\mathbf{p} \in \partial\Omega$  baza  $(\mathbf{w}, \nu)$ , gdzie  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}(\partial\Omega)$  wyznacza orientację brzegu, a  $\nu$  jest wektorem normalnym wewnętrzny w  $\mathbf{p}$ , wyznacza tę samą orientację  $\mathbb{R}^2$ , co standardowa baza  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .<sup>4</sup>

**Twierdzenie 7.8 (G. Green<sup>5</sup>).** Założmy, że  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  jest obszarem ograniczonym z brzegiem klasy  $C^1$ . Niech  $f, g \in C^1(U)$ , gdzie  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest otwarty i  $\bar{\Omega} \subset U$ . Wreszcie, niech brzeg  $\partial\Omega$  zbioru  $\Omega$  ma naturalną orientację. Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} g dy = \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} d\lambda_2, \quad (7.3)$$

$$-\int_{\partial\Omega} f dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2. \quad (7.4)$$

**DOWÓD W PRZYPADKU SZCZEGÓLNYM.** Założymy najpierw, dla uproszczenia, że dla pewnych przedziałów  $(a, b), (c, d) \subset \mathbb{R}$  i funkcji  $\varphi, \psi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $\eta, \zeta: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  jest

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (c, d), \eta(y) < x < \zeta(y)\}, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Oto prosta, mnemotechniczna reguła: brzeg obszaru jest zorientowany naturalnie, gdy idąc wzdłuż niego we wskazanym przez orientację kierunku, mamy punkty obszaru z lewej strony.

<sup>5</sup>George Green, matematyk brytyjski, żył na przełomie XVIII i XIX wieku. W 1828 r. wydał słynną pracę *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*.

tzn. że brzeg  $\Omega$  jest sumą dwóch wykresów funkcji (różniczkowalnych), niezależnie od tego, wzdłuż której osi układu współrzędnych patrzymy.<sup>6</sup> Wówczas, na mocy twierdzenia Fubiniego i wzoru Newtona–Leibniza,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} d\lambda_2 = \int_c^d \left( \int_{\eta(y)}^{\zeta(y)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left( g(\zeta(y), y) - g(\eta(y), y) \right) dy. \quad (7.5)$$

Niech  $M_1$  oznacza część  $\partial\Omega$ , będącą wykresem  $\zeta$ . Parametryzacja  $(c, d) \ni y \mapsto \gamma(y) = (\zeta(y), y)$  krzywej  $M_1$  jest zgodna z orientacją; dlatego

$$\int_c^d g(\zeta(y), y) dy = \int_{M_1} g dy, \quad (7.6)$$

gdyż druga współrzędna parametryzacji ma pochodną 1. Reszta brzegu,  $M_2 = \partial\Omega \setminus \overline{M_1}$ , ma parametryzację

$$(c, d) \ni y \mapsto (\eta(y), y),$$

która wyznacza orientację przeciwną do naturalnej orientacji  $M_2$ . Dlatego

$$-\int_c^d g(\eta(y), y) dy = \int_{M_2} g dy. \quad (7.7)$$

Dodając (7.6) do (7.7), otrzymujemy z (7.5) pierwszą część tezy twierdzenia Greena.

Podobnie, biorąc  $M_3 = \{(x, y) \in \partial\Omega: x \in (a, b), y = \varphi(x)\}$  oraz  $M_4 = \{(x, y) \in \partial\Omega: x \in (a, b), y = \psi(x)\}$  (z naturalną orientacją brzegu  $\partial\Omega$ !), otrzymujemy

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 &= -\int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b f(x, \psi(x)) dx = \int_{M_3} f dx + \int_{M_4} f dx = \int_{\partial\Omega} f dx. \end{aligned}$$

(Tym razem pierwsza współrzędna parametryzacji ma pochodną jeden, a zmiana znaku przy drugim składniku wiąże się z wyborem orientacji). Te obserwacje kończą dowód twierdzenia Greena w szczególnym przypadku.

Dowód w przypadku ogólnym poprzedzimy pomocniczym lematem (patrz dodatek A, Lemat A.2).

**Lemat 7.9 (gładki rozkład jedności).** Założmy, że suma zbiorów otwartych  $Q_1, \dots, Q_N$  pokrywa domknięcie  $\overline{\Omega}$  obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Istnieją wówczas funkcje nieujemne  $\psi_l \in C_0^\infty(Q_l)$  takie, że  $\sum_{l=1}^N \psi_l \equiv 1$  na pewnym zbiorze otwartym  $W$ , zawierającym  $\overline{\Omega}$ .

**DOWÓD TWIERDZENIA GREENA W PRZYPADKU OGÓLNYM.** Dla każdego punktu  $\mathbf{p} \in \overline{\Omega}$  wybierzmy prostokąt otwarty  $Q_{\mathbf{p}}$  o środku w  $\mathbf{p}$  tak, aby

- $\overline{Q}_{\mathbf{p}} \subset \Omega$  dla  $\mathbf{p} \in \Omega$ ;
- dla  $\mathbf{p} \in \partial\Omega$  i  $Q_{\mathbf{p}} = (a, b) \times (c, d)$  zbiór  $\partial\Omega \cap Q_{\mathbf{p}}$  był wykresem funkcji  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , ew. funkcji  $x = \varphi(y)$ ,  $y \in (c, d)$ .

---

<sup>6</sup>Tak jest np. dla obszarów wypukłych, ale nie tylko.

Wobec zwartości  $\bar{\Omega}$ , istnieje pokrycie  $\bar{\Omega}$ , złożone z  $N$  takich prostokątów,  $Q_1, \dots, Q_N$ . Ponumerujmy je tak, aby  $Q_1, \dots, Q_k$  stanowiły pokrycie brzegu, zaś  $Q_{k+1}, \dots, Q_N$  były (wraz z domknięciami) zawarte w  $\Omega$ . Niech  $\psi_l$  będą funkcjami z Lematu 7.9. Wówczas  $\sum_l \frac{\partial \psi_l}{\partial y} = 0$ , a stąd

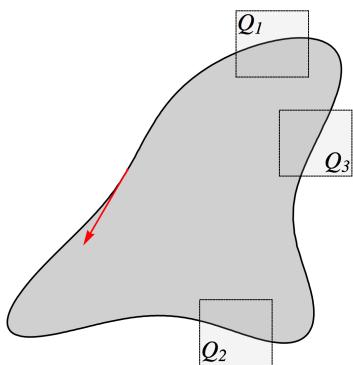
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 &= \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap \Omega} \psi_l \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 = \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 \\ &= \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 + \sum_{l=k+1}^N \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Aby sprawdzić ostatnią równość, zauważmy, że dla każdego  $l > k$  i prostokąta  $\bar{Q}_l = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$  funkcja  $\psi_l f$  znika na  $\partial Q_l$  (bo  $\psi_l$  znika na brzegu tego prostokąta!), a więc

$$\int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{Q_l} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} dy \right) dx = 0.$$

Teraz obliczymy każdą z całek w sumie po prawej stronie wzoru (7.8), rozważając kilka przypadków. Dla prostoty, ustalimy indeks  $l$  i będziemy często pisać  $F = \psi_l f$ ,  $Q = Q_l$ .

*Przypadek 1.* Niech



$$\Omega \cap Q = \{(x, y) : c < y < \varphi(x), x \in (a, b)\}.$$

Wtedy  $F = \psi_l f$  znika dla  $x \in (a, b), y = c$ . Zatem

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial F}{\partial y} d\lambda_2 &= \int_a^b \left( \int_b^{\varphi(x)} \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b F(x, \varphi(x)) dx \\ &= - \int_{\partial \Omega \cap Q_l} F dx. \end{aligned}$$

Ostatnią równość zachodzi na mocy definicji całki z 1-formy. Zauważmy, że w tym przypadku fragment  $\partial \Omega \cap Q_l$  jest zorientowany *przeciwnie* do kierunku osi  $x$ .

Prostokąt  $Q_i$  odpowiada  $i$ -temu z rozpatrywanych przypadków.

*Przypadek 2.* Załóżmy, że  $\Omega \cap Q = \{(x, y) : \varphi(x) < y < d, x \in (a, b)\}$ . Wtedy  $F = \psi_l f$  znika dla  $x \in (a, b), y = d$ . Zatem

$$\int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial F}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^d \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) dx = - \int_a^b F(x, \varphi(x)) dx = - \int_{\partial \Omega \cap Q_l} F dx.$$

(Tym razem orientacja  $\partial \Omega \cap Q_l$  jest zgodna z kierunkiem osi  $x$ .)

W tych dwóch przypadkach postąpiliśmy w istocie tak samo, jak wcześniej dla obszarów szczególnej postaci. Dodatkowego chwytu wymagają pozostałe przypadki.

*Przypadek 3.* Załóżmy, że  $\Omega \cap Q = \{(x, y) : y \in (c, d), a < x < \varphi(y)\}$ . Wtedy  $F = \psi_l f$  znika dla  $y \in (c, d), x = a$ . Bez zmniejszenia ogólności, (gładko) przedłużając  $F$  zerem, zakładamy, że  $F$  jest określona dla wszystkich  $x < \varphi(y)$ . Piszemy, dokonując przy ustalonym  $y$

zamiany zmiennych  $x = t + \varphi(y)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) d\lambda_2(x, y) &= \int_c^d \left( \int_{-\infty}^{\varphi(y)} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F}{\partial y}(t + \varphi(y), y) dt \right) dy =: I. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $\Phi(t, y) = F(t + \varphi(y), y)$  dla  $t \leq 0$  i  $y \in [c, d]$ . Mamy wówczas

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(t + \varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t + \varphi(y), y).$$

Zauważmy ponadto, że  $\Phi$  znika na dwóch półprostych  $t \leq 0$ ,  $y \in \{c, d\}$ . Dlatego

$$\int_c^d \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) dy = 0 \quad \text{dla } t \leq 0, \quad \int_{-\infty}^0 \int_b^d \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) dy dt = 0,$$

stąd zaś (i z twierdzenia Fubiniego) po ponownej, odwrotnej zamianie zmiennych<sup>7</sup> otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_b^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F}{\partial y}(t + \varphi(y), y) dt dy = - \int_b^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F}{\partial x}(t + \varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) dt dy \\ &= - \int_b^d \varphi'(y) \int_{-\infty}^{\varphi(y)} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx dy = - \int_b^d F(\varphi(y), y) \varphi'(y) dy = - \int_{\partial \Omega \cap Q_l} F dx, \end{aligned}$$

gdzie na brzegu  $x = \varphi(y)$ , a w tym przypadku naturalna orientacja brzegu jest zgodna z kierunkiem osi  $y$ .

W ostatnim przypadku brzeg obszaru jest wykresem funkcji  $x = \varphi(y)$ , obszar zaś leży ‘z prawej strony’ tego wykresu. Postępując tak samo, jak w przypadku 3, otrzymujemy ostatecznie

$$\int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = - \int_{\partial Q_l \cap \Omega} \psi_l f dx, \quad l = 1, \dots, k, \quad (7.9)$$

niezależnie od przypadku. Sumując takie wzory i pamiętając o (7.8), otrzymujemy równość (7.4) z tezy twierdzenia Greena, gdyż  $\sum_{l=1}^k \psi_k = 1$  na  $\partial \Omega$ .

Dowód wzoru (7.3) jest taki sam.  $\square$

**Wniosek 7.10.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem ograniczonym z brzegiem  $\partial \Omega$  klasy  $C^1$ . Wówczas

$$\lambda_2(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (x dy - y dx) = \int_{\partial \Omega} x dy = - \int_{\partial \Omega} y dx,$$

gdzie całki krzywoliniowe oblicza się, biorąc naturalną orientację brzegu.

**Dowód.** Stosujemy twierdzenie Greena do  $f(x, y) = -y$  i  $g(x, y) = x$ ; wtedy  $\frac{1}{2}(g_x - f_y) = -f_y = g_x = 1$ .  $\square$

---

<sup>7</sup>Pierwszą z wykonanych w tym przypadku zamian zmiennych nazywa się czasem *prostowaniem brzegu*: zauważmy, że dla  $t = x - \varphi(y)$  zbiór opisany równaniem  $x = \varphi(y)$  przeszedł na zbiór  $t = 0$ .

**Przykład 7.11.** Obliczymy pole koła jednostkowego  $K$ , posługując się Wnioskiem 7.10. Parametryzacją brzegu koła (bez jednego punktu), dającą naturalną orientację brzegu, jest

$$(0, 2\pi) \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2,$$

zatem

$$\frac{1}{2} \int_{\partial K} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \pi.$$

**Uwaga 7.12.** Wzory Greena zachodzi w istocie dla ogólniejszych klas obszarów, np. dla obszarów ograniczonych z brzegiem  $\partial\Omega$  kawałkami klasy  $C^1$ , tzn. takich, że  $\partial\Omega$  jest obrazem pewnej różnicowalnej funkcji ciągłej  $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(0) = \gamma(T)$ , przy czym odcinek  $[0, T]$  jest sumą skończonej liczby odcinków  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  o rozłącznych wewnętrzach i  $\gamma|_{I_j}$  jest klasy  $C^1$  na  $I_j$ , zaś  $\|\gamma'\| > 0$  na  $I_j$ .

W szczególności, można korzystać z twierdzenia Greena i Wniosku 7.10 dla wszystkich wielokątów na płaszczyźnie.

### Kiedy pole wektorowe jest gradientem funkcji?

Opiszemy jeszcze związek wzoru Greena z następującym naturalnym pytaniem: *Dane są dwie funkcje  $f, g \in C^1(\Omega)$ , gdzie  $\Omega$  jest obszarem w  $\mathbb{R}^2$ ; kiedy istnieje funkcja  $h \in C^2(\Omega)$  taka, że  $\text{grad } h = (f, g)$  w  $\Omega$ ?* Równoważnie: *kiedy pole wektorowe  $V = (f, g)$  klasy  $C^1$  w obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  jest gradientem pewnej funkcji klasy  $C^2$ ?*

Nietrudno zauważyc, jaki jest warunek konieczny istnienia takiej funkcji  $h$ . Jeśli  $h \in C^2$  i  $h_x = f, h_y = g$  w  $\Omega$ , to dzięki równości pochodnych mieszanych drugiego rzędu funkcji  $h$  otrzymujemy

$$f_y = (h_x)_y = (h_y)_x = g_x \quad \text{w } \Omega. \quad (7.10)$$

Wprowadźmy dodatkowy symbol: gdy  $A, B$  są dowolnymi zbiorami w  $\mathbb{R}^n$  i  $\bar{A}$  jest zwartym podzbiorem  $B$ , to piszemy  $A \Subset B$ . Założmy też milcząco, że odstęp wszystkie rozważane otwarte podzbiory  $U$  obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mają brzeg kawałkami klasy  $C^1$ . Dla dowolnego takiego zbioru  $U \Subset \Omega$  z warunku (7.10) po zastosowaniu twierdzenia Greena otrzymujemy

$$\int_{\partial U} f \, dx + g \, dy = 0. \quad (7.11)$$

Na odwrót, jeśli (7.11) zachodzi dla każdego  $U \Subset \Omega$ , to wówczas  $f_y = g_x$  w  $\Omega$ . Istotnie, wtedy

$$0 = \int_{\partial K} f \, dx + g \, dy = \int_K (f_y - g_x) \, d\lambda_2 \quad \text{dla każdego kwadratu } K \Subset \Omega,$$

stąd zaś wynika, że  $f_y - g_x \equiv 0$  w  $\Omega$ .<sup>8</sup>

Okazuje się, że ten warunek można nieznacznie wzmocnić: jeśli  $(f, g) = \text{grad } h$ , to całka z formy  $\omega = f \, dx + g \, dy$  znika dla każdej krzywej zamkniętej w  $\Omega$ , nie tylko dla takiej, która jest brzegiem jakiegoś obszaru  $U \Subset \Omega$ .

<sup>8</sup>Proszę samodzielnie wykazać, że jeśli  $\int_K \varphi \, d\lambda_2 = 0$  dla wszystkich kwadratów  $K \Subset \Omega$  i  $\varphi$  jest funkcją całkowalną, to  $\varphi = 0$  p.w.

**Stwierdzenie 7.13.** Niech  $f, g \in C^1(\Omega)$ , gdzie  $\Omega$  jest obszarem w  $\mathbb{R}^2$ . Jeśli istnieje funkcja  $h \in C^2(\Omega)$  taka, że  $h_x = f$ ,  $h_y = g$  w  $\Omega$ , to dla dowolnej krzywej zamkniętej  $\gamma \subset \Omega$  kawałkami klasy  $C^1$  jest

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = 0. \quad (7.12)$$

**Dowód.** Oznaczmy  $\omega = f dx + g dy$ . Jeśli  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow \Omega$  jest krzywą (kawałkami) klasy  $C^1$ , a ponadto  $f = h_x$  i  $g = h_y$  w  $\Omega$ , to z definicji całki z 1-formy i wzoru na pochodną złożenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 \left( f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_1(t) + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_2(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( h_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_1(t) + h_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_2(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (h \circ \gamma(t)) dt = h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)). \end{aligned}$$

(Interpretacja geometryczna tej równości jest prosta: całkując wzdłuż krzywej iloczyn skalarny gradientu i jednostkowego wektora stycznego, tzn. pochodną funkcji w kierunku stycznym, otrzymujemy przyrost funkcji wzdłuż tej krzywej). Jeśli krzywa  $\gamma$  jest zamknięta, to  $\gamma(1) = \gamma(0)$ , więc  $\int_{\gamma} \omega = 0$ .  $\square$

**Uwaga 7.14.** Czytelnik zechce zauważyć, że rachunek w ostatnim dowodzie nie wymaga założenia, że  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  jest funkcją różnicowalną. Funkcje  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , które są kawałkami klasy  $C^1$ , nazywa się czasem – nie wymagając ich różnicowalności – *drogami* (w obszarze  $\Omega$ ) i definiuje się całkę z 1-formy wzdłuż drogi (tak samo, jak zdefiniowaliśmy całkę wzdłuż krzywej zorientowanej). Tezę stwierdzenia można zatem wzmocnić: jeśli  $\text{grad } h = (f, g)$  w  $\Omega$ , to  $\int_{\gamma} f dx + g dy = 0$  dla każdej drogi zamkniętej.

Okazuje się natomiast, że żaden z równoważnych warunków (7.10) i (7.11) nie gwarantuje istnienia takiej funkcji  $h \in C^2(\Omega)$ , że  $h_x = f$ ,  $h_y = g$ .

**Przykład 7.15.** Niech  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Położmy

$$f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega.$$

Wtedy, jak łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem,

$$f_y(x, y) = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = g_x(x, y) \quad \text{w } \Omega$$

Jednak nie istnieje taka funkcja  $h \in C^2(\Omega)$ , dla której  $f, g$  byłyby pochodnymi częstotliwymi pierwszego rzędu, gdyż jeśli  $\gamma$  jest okręgiem jednostkowym (zorientowanym przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara), to

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi \neq 0,$$

tzn. nie zachodzi warunek konieczny (7.12), podany w ostatnim stwierdzeniu. Zauważmy: okrąg jednostkowy *nie jest brzegiem obszaru*, który byłby zawarty w  $\Omega$ .

**Stwierdzenie 7.16.** Jeśli  $\Omega$  jest obszarem na płaszczyźnie,  $f, g \in C^1(\Omega)$  i warunek

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = 0$$

zachodzi dla każdej drogi zamkniętej  $\gamma$  w  $\Omega$ , to istnieje  $h \in C^2(\Omega)$  taka, że  $h_x = f$  i  $h_y = g$  w  $\Omega$ .

**Szkic dowodu.** Ustalmy punkt  $\mathbf{p}_0 \in \Omega$ . Ponieważ  $\Omega$  jest zbiorem otwartym spójnym, więc każdy inny punkt  $\mathbf{p} \in \Omega$  można połączyć z  $\mathbf{p}_0$  pewną łamanaą  $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})$ . Z założenia wynika, że liczba

$$h(\mathbf{p}) := \int_{\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})} f dx + g dy \quad (7.13)$$

nie zależy od wyboru tej łamanej.

Ustalmy  $\mathbf{p} = (x, y) \in \Omega$ . Funkcja  $[0, t] \ni s \mapsto \mathbf{p} + s\mathbf{e}_1 \in \Omega$  parametryzuje odcinek  $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + t\mathbf{e}_1]$ . Nietrudno sprawdzić, że dla małych  $t$  jest

$$h(\mathbf{p} + t\mathbf{e}_1) - h(\mathbf{p}) = \int_{[\mathbf{p}, \mathbf{p} + t\mathbf{e}_1]} f dx + g dy = \int_0^t f(x + s, y) ds.$$

Stąd

$$h_x(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{p} + t\mathbf{e}_1) - h(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x + s, y) ds = f(x, y).$$

Tak samo sprawdzamy, że  $h_y(x, y) = g(x, y)$  w  $\Omega$  (ćwiczenie). Oczywiście,  $h \in C^2$ , gdyż  $h_x, h_y \in C^1$ .  $\square$

Warunek dostateczny na to, by istniała funkcja  $h \in C^2(\Omega)$ , dla której  $h_x = f$  i  $h_y = g$ , jest w istocie połączeniem warunku *topologicznego*, nałożonego na obszar  $\Omega$ , z warunkiem koniecznym  $f_y = g_x$ . Aby sformułować twierdzenie, które o tym mówi, będziemy potrzebować jeszcze jednej definicji.

**Definicja 7.17.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem i niech  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$ . Mówimy, że drogi  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$  i  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$  takie, że  $\gamma_i(0) = \mathbf{p} \in \Omega$  i  $\gamma_i(1) = \mathbf{q} \in \Omega$  dla  $i = 0, 1$  są *homotopijne w  $\Omega$*  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja ciągła  $H: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  taka, że

- (i)  $H(i, s) = \gamma_i(s)$  dla wszystkich  $s \in [0, 1]$  oraz  $i = 0, 1$ ;
- (ii)  $H(t, 0) = \mathbf{p}$  i  $H(t, 1) = \mathbf{q}$  dla wszystkich  $t \in [0, 1]$ .

Sens tej definicji jest następujący: drogę  $\gamma_0$  można w sposób ciągły zdeformować w zbiorze  $\Omega$  do  $\gamma_1$ , nie poruszając jej końców. O drogach  $\gamma_0, \gamma_1$  takich, jak w powyższej definicji, będziemy mówić, że są *krzywymi o wspólnych końcach*.

**Twierdzenie 7.18 (warunek dostateczny całkowalności 1-formy).** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem. Jeśli  $f, g \in C^1(\Omega)$  spełniają warunek  $f_y = g_x$ , a ponadto każde dwie drogi o wspólnych końcach są homotopijne w  $\Omega$ , to istnieje funkcja  $h \in C^2(\Omega)$  taka, że

$$h_x = f, \quad h_y = g \quad w \Omega.$$

W pełni ścisły dowód tego twierdzenia wymaga dość żmudnych i technicznych rozważań, dlatego ograniczymy się do poglądowego szkicu.

**SZKIC DOWODU.** *Krok 1.* Jeśli dowolne dwie drogi o wspólnych końcach są homotopijne w  $\Omega$ , to dowolne dwie łamane o wspólnych końcach są homotopijne w  $\Omega$  i można tę homotopię zrealizować za pomocą takiej funkcji  $H$ , że drogi  $H(t, \cdot)$  są łamany dla wszystkich  $t$ . Wystarczy w tym celu zauważyć, że  $H: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  jest jednostajnie ciągła, a następnie podzielić  $[0, 1]^2$  na drobne prostokątki  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, N^2$ , których obrazy są zawarte w dyskach  $D_\varepsilon \Subset \Omega$  o małym promieniu  $\varepsilon > 0$ . Zostawiając wartości  $H$  w wierzchołkach  $P_j$  i odpowiednio modyfikując  $H$  w pozostałych punktach kwadratu  $[0, 1]^2$  – dyski  $D_\varepsilon$  są wypukłe, więc punkty w nich można łączyć odcinkami – otrzymujemy żądaną homotopię.



Zauważmy ponadto, że można tę homotopię zbudować tak – dzieląc boki na odpowiednio krótkie odcinki i stopniowo przemieszczając je wewnątrz dysków  $D_\varepsilon$  zawartych w  $\Omega$  – aby dla pewnego skończonego ciągu chwil  $t_i \in [0, 1]$ , przy dowolnym ustalonym  $i$ , łamane  $\ell_i = H(t_i, \cdot)$  oraz  $\ell_{i+1} = H(t_{i+1}, \cdot)$  miały ten sam zbiór boków, z dokładnością do co najwyżej dwóch boków każdej łamanej (przykład takiej sytuacji jest na rysunku).

*Krok 2.* Jeśli dwie łamane  $\ell_0$  i  $\ell_1$  o wspólnych końcach są homotopijne w  $\Omega$ , to (przy założeniu  $f_y = g_x$ ) zachodzi równość

$$\int_{\ell_0} f dx + g dy = \int_{\ell_1} f dx + g dy.$$

To wynika z twierdzenia Greena i naszkicowanego wyżej opisu homotopii. (Proszę najpierw pomyśleć o dwóch łamanych, które pokrywają się niemal w całości, za wyjątkiem dwóch odcinków, patrz rysunek. Różnica całek po takich łamanych jest całką po obwodzie czworokąta z formy  $f dx + g dy$ ).

*Krok 3.* Odtąd postępujemy tak, jak w dowodzie Stwierdzenia 7.16, definiując funkcję  $h$  wzorem (7.13), ustaliwszy wcześniej dowolny punkt początkowy  $\mathbf{p}_0 \in \Omega$ , z którego wędruje się do innych punktów wzdłuż łamanych.  $\square$

**Uwaga 7.19.** Nietrudno zauważać, że założenie o homotopijności dróg o wspólnych końcach jest spełnione np. w każdym obszarze wypukłym (a także w każdym obszarze, który jest dyfeomorficzny z wypukłym). Ogólnie, obszary, w których to założenie jest spełnione, nazywa się *jednospójnymi*.

## 7.2 Formy wieloliniowe antysymetryczne

W tym podrozdziale  $S_k$  oznacza grupę permutacji. Przypomnijmy: znakiem permutacji  $\sigma \in S_k$  nazywa się liczbę

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p(\sigma)}, \quad \text{gdzie } p(\sigma) = \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq k, \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Znak permutacji  $\sigma$  jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sigma$  jest złożeniem parzystej liczby transpozycji; jeśli  $\sigma$  jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji, to  $\varepsilon(\sigma) = -1$ . Przekształcenie  $\varepsilon: S_k \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$  jest homomorfizmem grup.

**Definicja 7.20.** Niech  $k \in \mathbb{N}$  i niech  $X$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Przekształcenie  $k$ -liniowe  $\omega: X^k = X \times \dots \times X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywa się  $k$ -formą antysymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy równość

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_j, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_i, \xi_{j+1}, \dots, \xi_k) = -\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \quad (7.14)$$

zachodzi dla wszystkich  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i < j$ , oraz wszystkich wektorów  $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ .

Zbiór wszystkich  $k$ -form antysymetrycznych oznacza się symbolem  $\Lambda^k X^*$ . Dla  $k = 0$  przyjmujemy  $\Lambda^0 X^* = \mathbb{R}$ . Dla  $k = 1$  warunek z definicji jest zawsze spełniony; wtedy  $\Lambda^1 X^* = X^*$  jest przestrzenią wszystkich funkcjonałów liniowych na  $X$ .

**Uwaga 7.21.** Zbiór  $\Lambda^k X^*$  jest przestrzenią liniową. Jeśli forma  $\omega \in \Lambda^k X^*$  i permutacja  $\sigma \in S_k$ , to

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

dla wszystkich wektorów  $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ . Wynika to z faktu, że każda permutacja jest złożeniem transpozycji.

**Stwierdzenie 7.22.** Jeśli  $\omega \in \Lambda^k X^*$  i wektory  $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$  są liniowo zależne, to  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ . W szczególności,  $\Lambda^k X^* = \{0\}$  dla  $k > \dim X$ .

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności założmy, że  $\xi_1 = a_2 \xi_2 + \dots + a_k \xi_k$ . Z liniowości  $\omega$  względem pierwszego argumentu wynika, że

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{j=2}^k a_j \omega(\xi_j, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

Wobec (7.14), każdy składnik sumy jest zerem (dwa spośród argumentów  $\omega$  są równe!).  $\square$

**Przykład 7.23 (baza i wymiar przestrzeni  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ ).** Ustalmy  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Niech  $X = \mathbb{R}^n$ . Dla każdego uporządkowanego zestawu  $k$  różnych liczb

$$J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n \quad (7.15)$$

określmy odwzorowanie liniowe  $dx_J: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$dx_J(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \det \left( (\xi_{\mu, j_\nu})_{\mu, \nu=1, \dots, k} \right). \quad (7.16)$$

Ponieważ wyznacznik jest antysymetryczną funkcją kolumn (wierszy) macierzy, więc oczywiście  $dx_J \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ . Zbiór wszystkich zestawów  $J$ , określonych w (7.15), oznaczamy symbolem  $\mathcal{J}_k(n)$ . Jest rzeczą jasną, że  $\mathcal{J}_k(n)$  ma  $\binom{n}{k}$  elementów.

Wykażemy, że formy  $dx_J$ , gdzie  $J \in \mathcal{J}_k(n)$ , stanowią bazę  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)^*$ . Niech  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  będą wektorami standardowej bazy w  $\mathbb{R}^n$ . Zauważmy, że dla  $I, J \in \mathcal{J}_k(n)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_k)$ ,

$$dx_I(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wartości formy  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  wystarczy określić na wszelkich układach wektorów bazy w  $\mathbb{R}^n$  (i każda forma jest przez te wartości określona jednoznacznie). Dlatego równość  $\omega = \sum_J a_J dx_J$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\omega(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = a_J \quad \text{dla wszystkich } J \in \mathcal{J}_k(n). \quad (7.17)$$

Zatem formy  $dx_J$  istotnie są bazą  $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)^*$  i mamy

$$\dim \Lambda_k(\mathbb{R}^n)^* = \#\mathcal{J}_k(n) = \binom{n}{k} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n. \quad (7.18)$$

**Interpretacja geometryczna.** Zanim przejdziemy do kolejnej abstrakcyjnej definicji, wspomnijmy o geometrycznej interpretacji form  $dx_I$ . Otóż,  $k$  liniowo niezależnych wektorów  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$  rozpinają  $k$ -wymiarowy równoległościan w  $\mathbb{R}^n$ . Wobec wzoru (7.16) oraz geometrycznej interpretacji wyznacznika, liczba  $dx_I(\xi_1, \dots, \xi_k)$  jest, z dokładnością do znaku,  $k$ -wymiarową objętością rzutu tego równoległościanu na  $k$ -wymiarową podprzestrzeń  $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^n$ , rozpiętą na wektorach  $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$ , gdzie zestaw numerów  $(i_1, \dots, i_k) = I$ . Znak zależy od tego, czy rzuty wektorów  $\xi_j$  na  $\mathbb{R}^I$  tworzą bazę zorientowaną zgodnie ze standardową bazą  $\mathbb{R}^I$ , czy nie.

**Definicja 7.24 (iloczyn zewnętrzny).** Niech  $k, l \in \mathbb{N}$ . Iloczynem zewnętrzny form  $\alpha \in \Lambda^k X^*$  i  $\beta \in \Lambda^l X^*$  nazywamy formę  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} X^*$  określoną wzorem

$$\alpha \wedge \beta(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)})$$

gdzie  $S_{k,l}$  oznacza podzbiór grupy permutacji  $S_{k+l}$  złożony z tak zwanych  $(k, l)$ -tasowań,

$$S_{k,l} = \{\sigma \in S_{k+l} : \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)\}.$$

Dla  $c \in \Lambda^0 X^* \equiv \mathbb{R}$  i  $\alpha \in \Lambda^k X^*$  przyjmujemy  $c \wedge \alpha = c \alpha \in \Lambda^k X^*$ .

Na przykład, dla  $\alpha, \beta \in \Lambda^1 X^*$  oraz  $\gamma \in \Lambda^2 X^*$  mamy wprost z definicji

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) &= \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi), \\ (\alpha \wedge \gamma)(\xi, \eta, \zeta) &= \alpha(\xi)\gamma(\eta, \zeta) - \alpha(\eta)\gamma(\xi, \zeta) + \alpha(\zeta)\gamma(\xi, \eta) \\ &= \alpha(\xi)\gamma(\eta, \zeta) + \alpha(\eta)\gamma(\zeta, \xi) + \alpha(\zeta)\gamma(\xi, \eta) \end{aligned}$$

(ostatnia równość wynika z antysymetrii 2-formy  $\gamma$ ).

Wprost z definicji wynika też, że iloczyn zewnętrzny  $\alpha \wedge \beta$  jest przekształceniem dwuliniowym, tzn. zależy liniowo od każdego z czynników  $\alpha, \beta$  z osobna.

**Lemat 7.25 (własności iloczynu zewnętrznego).** Niech  $k, l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Wówczas:

(i) dla  $\alpha \in \Lambda^k X^*$  i  $\beta \in \Lambda^l X^*$  jest

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha;$$

(ii) iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn.

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad \text{dla } \alpha \in \Lambda^k X^*, \beta \in \Lambda^l X^*, \gamma \in \Lambda^m X^*;$$

(iii) dla wszystkich  $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{J}_k(n)$  jest

$$dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

**Dowód.** Własność (i) wynika łatwo wprost z definicji; trzeba zauważać, że każde tasowanie  $\sigma \in S_{k,l}$  można zmienić w tasowanie ze zbioru  $S_{l,k}$  za pomocą  $kl$  transpozycji (przestawień).

Aby wykazać łączność, wprowadzimy zbiór ‘potrójnych tasowań’

$$S_{k,l,m} = \left\{ \sigma \in S_{k+l+m} \mid \begin{array}{l} \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \\ \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l), \\ \sigma(k+l+1) < \dots < \sigma(k+l+m) \end{array} \right\}$$

Zarówno  $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+m})$ , jak i  $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+m})$  są, z definicji iloczynu zewnętrznego i własności znaku permutacji, równe liczbie

$$\sum_{\sigma \in S_{k,l,m}} \varepsilon(\sigma) \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \gamma(\xi_{\sigma(k+l+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l+m)}).$$

Stąd wynika łączność mnożenia zewnętrznego. Iterując powyższy wzór, otrzymujemy się przez indukcję, dla wszystkich 1-form  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X^* = \Lambda^1 X^*$  i wektorów  $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ , równość

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_1(\xi_{\sigma(1)}) \cdot \alpha_2(\xi_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \alpha_k(\xi_{\sigma(k)}) \\ &= \det \left( (\alpha_{\nu}(\xi_{\mu}))_{\mu, \nu=1, \dots, k} \right). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Kładąc  $X = \mathbb{R}^n$  oraz  $\alpha_{\nu} = dx_{j_{\nu}}$ , otrzymujemy punkt (iii) tezy lematu.  $\square$

**Definicja 7.26 (przeciagnięcie formy).** Jeśli  $A: X \rightarrow Y$  jest przekształceniem liniowym i  $\omega \in \Lambda^k Y^*$ , to formę  $A^* \omega \in \Lambda^k X^*$ , nazywaną *przeciagnięciem*  $\omega$  za pomocą  $A$ , definiujemy wzorem

$$A^* \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(A\xi_1, \dots, A\xi_k), \quad \xi_j \in X \text{ dla } j = 1, \dots, k.$$

Przyporządkowanie  $\omega \mapsto A^* \omega$  jest przekształceniem liniowym z  $\Lambda^k Y^*$  w  $\Lambda^k X^*$ . Oznajmy inne jego własności.

**Stwierdzenie 7.27.** (i) Jeśli  $A: X \rightarrow Y$  i  $B: Y \rightarrow Z$  są przekształceniami liniowymi, to  $(B \circ A)^* \omega = A^*(B^* \omega)$  dla każdej  $k$ -formy  $\omega \in \Lambda^k Z^*$ .

(ii) Wzór  $A^*(\alpha \wedge \beta) = A^* \alpha \wedge A^* \beta$  zachodzi dla wszystkich  $A: X \rightarrow Y$  liniowych oraz wszystkich  $\alpha \in \Lambda^k Y^*$ ,  $\beta \in \Lambda^l Y^*$ .

(iii) Jeśli  $A = (a_{ij})$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , jest przekształceniem liniowym z przestrzeni  $\mathbb{R}^m$  w  $\mathbb{R}^n$ , przy czym współrzędnymi w  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  są, odpowiednio,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  i  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , to wówczas

$$A^*(dy_J) = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} \det A(J, I) dx_I \quad \text{dla } J \in \mathcal{J}_k(n), \tag{7.20}$$

gdzie symbol  $A(J, I)$  oznacza macierz  $k \times k$ , powstającą z  $A$  przez wybór wierszy o numerach ze zbioru  $J \in \mathcal{J}_k(n)$  oraz kolumn o numerach ze zbioru  $I \in \mathcal{J}_k(m)$ .

Dowód. Pierwsze dwie własności wynikają wprost z definicji; (i) jest praktycznie oczywista, natomiast dowód (ii) jest prostym ćwiczeniem, polegającym na wypisaniu definicji przeciagnięcia, definicji iloczynu zewnętrznego i raz jeszcze definicji przeciagnięcia. Szczegóły pozostawimy Czytelnikowi.

Dla dowodu (iii) skorzystamy z rachunków przeprowadzonych w Przykładzie 7.23: jeśli  $\omega = A^*(dy_J)$ , to równość

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} c_I dx_I,$$

wyrażająca formę  $\omega$  w bazie  $dx_I$ ,  $I \in \mathcal{J}_k(m)$ , zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zestawu  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  jest

$$\begin{aligned} c_I &= \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) = (A^* dy_J)(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) \\ &= dy_J(A\mathbf{e}_{i_1}, \dots, A\mathbf{e}_{i_k}) \\ &= \det \left( ((A\mathbf{e}_{i_\mu})_{j_\nu})_{\mu, \nu=1, \dots, k} \right) = \det A(J, I), \end{aligned}$$

gdyż wektory  $A\mathbf{e}_{i_\mu}$  są po prostu kolumnami macierzy przekształcenia  $A$ .  $\square$

### 7.3 Formy różniczkowe

**Definicja 7.28 (forma różniczkowa rzędu  $k$ ).** Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym. Formą różniczkową rzędu  $k$  i klasy  $C^\infty$  na zbiorze  $U$ , lub krótko: gładką  $k$ -formą różniczkową na  $U$ , nazywamy przekształcenie

$$\omega: U \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

klasy  $C^\infty$ , takie, że dla każdego punktu  $\mathbf{x} \in U$  przekształcenie

$$(\mathbb{R}^n)^k \ni (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto \omega(\mathbf{x}; \xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R} \quad (7.21)$$

jest  $k$ -formą antysymetryczną, tzn. elementem przestrzeni  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^k$ .

**Uwaga.** Jeśli  $\omega: U \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $k$ -formą różniczkową, to odwozowanie (7.21) oznacza się symbolem  $\omega_{\mathbf{x}}$ , tzn.

$$\omega_{\mathbf{x}}(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(\mathbf{x}; \xi_1, \dots, \xi_k)$$

dla wszystkich  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ . Można więc utożsamić  $\omega$  z przekształceniem gładkim

$$U \ni \mathbf{x} \mapsto \omega_{\mathbf{x}} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$$

o wartościach w przestrzeni  $k$ -form antysymetrycznych. Zgodnie z Przykładem 7.23, dla każdego  $\mathbf{x} \in U$  formę  $\omega_{\mathbf{x}}$  można wyrazić jako kombinację form bazowych  $dx_I$ ,

$$\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(n)} a_I(\mathbf{x}) dx_I, \quad a_I \in C^\infty(U),$$

przy czym  $a_I(\mathbf{x}) = \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$  dla  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , na mocy wzoru (7.17) na współczynniki formy w bazie.

Zbiór wszystkich  $k$ -form różniczkowych na  $U \subset \mathbb{R}^n$  oznacza się

$$\Omega^k(U) := C^\infty(\Omega, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*) .$$

**Uwaga.** Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych będziemy oznaczać tak samo, jak iloczyn zewnętrzny form liniowych; dla  $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^\ell(U)$  przyjmujemy

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mathbf{x}} := \alpha_{\mathbf{x}} \wedge \beta_{\mathbf{x}} \in \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^* .$$

We współrzędnych pisze się po prostu

$$\left( \sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left( \sum_J b_J dx_J \right) = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J .$$

### 7.3.1 Przeciąganie form różniczkowych. Różniczka zewnętrzna.

Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  i  $V \subset \mathbb{R}^m$  będą zbiorami otwartymi, zaś  $f: V \rightarrow U$  – przekształceniem gładkim.

**Definicja 7.29.** Jeśli  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest  $k$ -formą różniczkową na  $U \subset \mathbb{R}^n$ , to *przeciągnięciem  $\omega$  za pomocą  $f$*  nazywamy formę  $f^*\omega \in \Omega^k(V)$ , określoną wzorem

$$f^*\omega(\mathbf{x}; \xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(f(\mathbf{x}); Df(\mathbf{x})\xi_1, \dots, Df(\mathbf{x})\xi_k), \quad \mathbf{x} \in V, \quad \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^m .$$

Przeciąganie form różniczkowych, traktowane – dla ustalonego odwzorowania  $f$  – jako przekształcenie

$$\Omega^k(U) \ni \omega \mapsto f^*\omega \in \Omega^k(V),$$

jest, podobnie jak przeciąganie form liniowych za pomocą odzworowań liniowych, przekształceniem liniowym z  $\Omega^k(U)$  w  $\Omega^k(V)$ . Oto jego najważniejsze własności.

**Stwierdzenie 7.30.** Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  i  $W \subset \mathbb{R}^p$  będą zbiorami otwartymi, zaś  $f: V \rightarrow U$ ,  $g: W \rightarrow V$  – odwzorowaniami gładkimi.

(i) *Dla  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest  $(f \circ g)^*\omega = g^*f^*\omega$ .*

(ii) *Dla  $\alpha \in \Omega^k(U)$ ,  $\beta \in \Omega^\ell(U)$  mamy*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta) \in \Omega^{k+\ell}(V) .$$

(iii) *Jeśli współrzędnymi w  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  są, odpowiednio,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  i  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , zaś  $\omega = b_J dy_J \in \Omega^k(U)$ , gdzie  $J \in \mathcal{J}_k(n)$  i  $b_J \in C^\infty(U)$  są dane, to wówczas*

$$f^*\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} (b_J \circ f) \det \left( \frac{\partial f_J}{\partial x_I} \right) dx_I, \tag{7.22}$$

gdzie symbol

$$\frac{\partial f_J}{\partial x_I} = \left( \frac{\partial f_{j_\nu}}{\partial x_{i_\mu}} \right)_{\mu, \nu=1, \dots, k}, \quad I = (i_1, \dots, i_k), \quad J = (j_1, \dots, j_k)$$

oznacza macierz  $k \times k$ , powstającą z macierzy Jacobiego  $Df$  przez wybór wierszy o numerach  $j_\nu \in J$  i kolumn o numerach  $i_\mu \in I$ .

Dowód. Punkty (i) oraz (ii) otrzymujemy, podobnie jak odpowiadające im części Stwierdzenia 7.27, wprost z definicji. Wzór (7.22) wynika od razu ze wzoru (7.20) w Stwierdzeniu 7.27 i Definicji 7.29. Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego przemyślenia tych zdań i (mechanicznego, w gruncie rzeczy) wypisania odpowiednich wzorów.  $\square$

**Przykład 7.31.** (a) Niech  $\omega \in \Omega^1(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Wówczas, zgodnie z podanym wcześniej opisem bazy w przestrzeni  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$  1-form antysymetrycznych,

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j, \quad \text{gdzie } \omega_j \in C^\infty(\Omega).$$

Zastosujmy wzór (7.22) do formy  $\omega$  i funkcji gładkiej  $f: [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  (parametryzacji pewnej krzywej w  $U$ ). Oznaczając zmienną na odcinku  $[0, 1]$  literą  $t$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum_{j=1}^n f^*(\omega_j dx_j) \quad \text{wobec liniowości } \omega \mapsto f^*\omega \\ &\stackrel{(7.22)}{=} \sum_{j=1}^n (\omega_j \circ f) \frac{df_j}{dt} dt. \end{aligned}$$

Proszę porównać ten wynik z definicją całki z 1-formy.

(b) Niech  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $V = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ , zaś  $f: V \rightarrow U$  niech będzie dane wzorem

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Inaczej mówiąc,  $x = f_1(r, \theta) = r \cos \theta$  i  $y = f_2(r, \theta) = r \sin \theta$  to zwykłe współrzędne kartezjańskie wyrażone za pomocą współrzędnych biegunowych  $(r, \theta) \in V$ . Wzór (7.22) daje w tym przypadku

$$\begin{aligned} f^*(dx) &= \frac{\partial f_1}{\partial r} dr + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ f^*(dy) &= \frac{\partial f_2}{\partial r} dr + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Stosując Stwierdzenie 7.30 (ii), otrzymujemy po nieskomplikowanym rachunku, wykorzystując zależności  $dr \wedge dr = 0 = d\theta \wedge d\theta$ ,  $dr \wedge d\theta = -d\theta \wedge dr$ , wynik

$$f^*(dx \wedge dy) = f^*(dx) \wedge f^*(dy) = r dr \wedge d\theta.$$

Zauważmy, że to po prostu *inni sposób wyrażenia zależności*  $\det Df(r, \theta) = r$ .  $\square$

**Definicja 7.32 (różniczka zewnętrzna).** Operator

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U),$$

określony wzorem

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \omega(\mathbf{x} + s\xi_i, \xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^i \xi_{i,\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}, \xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k), \end{aligned} \tag{7.23}$$

gdzie  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\xi_0, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$  oraz  $\xi_i = (\xi_{i,\nu})_{\nu=1, \dots, n}$ , nazywa się *różniczką zewnętrzną*.

**Przykład 7.33.** Niech  $k = 0$ ; każda 0-forma różniczkowa  $f \in \Omega^0(U)$  to po prostu funkcja gładka  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . W tym przypadku wzór na różniczkę zewnętrzna oznacza, że

$$(df)_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}) = df(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\nu=1}^n \boldsymbol{\xi}_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}.$$

Różniczka zewnętrzna formy  $f \in \Omega^0(U)$  przyporządkowuje więc punktowi  $\mathbf{x} \in U$  przekształcenie liniowe  $(df)_{\mathbf{x}} = Df(\mathbf{x}) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^*$ , które dobrze znamy: zwykłą różniczkę funkcji  $f$  w punkcie  $\mathbf{x}$ . Stosuje się często zapis

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Podstawiając  $f(\mathbf{x}) = x_j$ , odnajdzie Czytelnik jedno z możliwych wyjaśnień, dlaczego rzut na  $j$ -tą oś oznaczaliśmy w poprzednim podrozdziale symbolem  $dx_j$ .  $\square$

**Twierdzenie 7.34 (własności różniczki zewnętrznej).** *Niech  $U$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ . Operator  $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  jest liniowy. Ponadto:*

(i) *Jeśli  $\omega = a_J dx_J$ , gdzie  $a_J \in C^\infty(U)$  i  $J \in \mathcal{J}_k(n)$ , to wówczas*

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_J = da_J \wedge dx_J; \quad (7.24)$$

(ii) *Dla  $\alpha \in \Omega^k(U)$  oraz  $\beta \in \Omega^\ell(U)$  mamy*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta; \quad (7.25)$$

(iii) *Dla każdej formy  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest  $d(d\omega) = 0$ ;*

(iv) *Dla każdego  $f \in C^\infty(V, U)$ , gdzie  $V \subset \mathbb{R}^m$  jest otwarty, mamy  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ .*

**Dowód.** Liniowość różniczki zewnętrznej jest oczywista. Najpierw udowodnimy punkt (i). Niech  $\omega = a_J dx_J$ . Z definicji,

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k) &= \sum_{i=0}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^i \boldsymbol{\xi}_{i,\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_k) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^i \boldsymbol{\xi}_{i,\nu} \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) dx_J(\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_k) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i \boldsymbol{\xi}_{i,\nu} dx_J(\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_k) \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) \cdot (dx_\nu \wedge dx_J)(\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_k). \end{aligned}$$

Pisząc ostatnią równość, skorzystaliśmy z definicji iloczynu zewnętrznego form liniowych  $dx_\nu \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$  oraz  $dx_J \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ .

Własność (ii), dzięki liniowości  $d$ , wystarczy wykazać dla  $\alpha = a dx_I$  i  $\beta = b dx_J$ , gdzie  $a, b \in C^\infty(U)$  są funkcjami gładkimi,  $I \in \mathcal{J}_k(n)$ ,  $J \in \mathcal{J}_\ell(n)$ . Ze wzoru na pochodną iloczynu oraz punktu (i) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(ab dx_I \wedge dx_J) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(ab)}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_\nu} b dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_\nu} a dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \right) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_J \right) \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika ze wzoru (7.24), zaś w przedostatniej znak  $(-1)^k$  pojawia się dlatego, że  $I \in \mathcal{J}_k(n)$ : wtedy

$$dx_\nu \wedge dx_I = dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)^k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_\nu = (-1)^k dx_I \wedge dx_\nu,$$

patrz Lemat 7.25 (i).

Udowodnimy teraz własność (iii), tzn. równość  $d \circ d = 0$ . Dla 0-form, tj. funkcji  $f \in C^\infty(U)$ , otrzymujemy dzięki twierdzeniu Schwarza o symetrii  $D^2 f$  równość

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu\right) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu \\ &= \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq n} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu = 0. \end{aligned}$$

Z definicji,  $d(dx_J) = 0$  dla każdego  $J \in \mathcal{J}_k(n)$ , więc dla  $\omega = a dx_J \in \Omega^k(U)$ , gdzie  $a \in C^\infty(U)$  jest dowolną funkcją, otrzymujemy dzięki udowodnionym już własnościom (i) oraz (ii)

$$d(d\omega) = d(da \wedge dx_J) = d(da) \wedge dx_J + 0 = d(da) = 0.$$

Stąd już wynika, że  $d \circ d = 0$  na  $\Omega^k(U)$ .

Pozostaje wykazać (iv). Niech  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , gdzie  $f_i: V \rightarrow \mathbb{R}$  są klasy  $C^\infty(V)$ . Jeśli  $\omega \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$  jest 0-formą, czyli funkcją gładką, to  $f^* \omega = \omega \circ f$ . Wzór

$$f^*(d\omega) = d(f^* \omega) \tag{7.26}$$

wynika wtedy od razu ze wzoru na różniczkę złożenia. Dla  $\omega(y) = y_j$  otrzymujemy stąd w szczególności

$$f^*(dy_j) = df_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

a następnie, korzystając ze Stwierdzenia 7.30 (ii),

$$d(f^* dy_J) = df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k} \quad \text{dla wszystkich zestawów } J \in \mathcal{J}_k(n).$$

Z tej równości, stosując własność (ii) i równość  $d \circ d = 0$ , otrzymujemy

$$d(f^*(dy_J)) = 0 \quad \text{dla wszystkich zestawów } J \in \mathcal{J}_k(n). \tag{7.27}$$

Niech teraz  $\omega = \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} \omega_J dy_J$ , gdzie współczynniki  $\omega_J \in C^\infty(U)$  są funkcjami. Zachodzą wtedy równości

$$\begin{aligned} d(f^* \omega) &\stackrel{\text{Stw. 7.30 (ii)}}{=} d\left( \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} (f^* \omega_J) f^*(dy_J) \right) \\ &\stackrel{(7.25), (7.27)}{=} \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} d(f^* \omega_J) \wedge f^*(dy_J) \\ &\stackrel{(7.26)}{=} \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} f^*(d\omega_J) \wedge f^*(dy_J) \\ &\stackrel{\text{Stw. 7.30 (ii)}}{=} f^*\left( \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} (d\omega_J) \wedge dy_J \right) \stackrel{(7.24)}{=} f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Dowód całego twierdzenia jest zakończony.  $\square$

**Definicja 7.35.** Mówimy, że forma  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest *zamknięta*, jeśli  $d\omega = 0$ . Mówimy, że forma  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest *dokładna*, jeśli  $\omega = d\eta$  dla pewnego  $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ .

Przy użyciu tego języka część własności różniczki zewnętrznej, opisanych w ostatnim twierdzeniu wypowiada się krótko:

**Stwierdzenie 7.36.** Każda forma dokładna  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest zamknięta. Ponadto, jeśli  $f: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  jest klasy  $C^\infty$ , a forma  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest zamknięta (odpowiednio: dokładna), to forma  $f^*\omega \in \Omega^k(V)$  też jest zamknięta (odpowiednio: dokładna).

Dowód. Pierwsza część wynika z równości  $d \circ d = 0$ , a druga z przemienności przeciągania form i różniczkowania zewnętrznego.  $\square$

### 7.3.2 Formy różniczkowe w $\mathbb{R}^3$

O formach różniczkowych w  $\mathbb{R}^3$  mówi się często, używając nieco innego (choć też dość formalnego) języka. Otóż, wobec wzoru (7.18), przestrzenie  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$  i  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$  mają wymiar równy  $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ , a więc każda z nich jest izomorficzna z  $\mathbb{R}^3$ . Dlatego dla obszarów  $U \subset \mathbb{R}^3$  istnieją izomorfizmy liniowe

$$I_k: C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^k(U) = C^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^3)^*), \quad k = 1, 2.$$

Innymi słowy, zarówno 1-formy, jak i 2-formy różniczkowe w  $\mathbb{R}^3$  można utożsamiać z funkcjami gładkimi o wartościach w  $\mathbb{R}^3$ , a więc z polami wektorowymi. Polu wektorowemu  $\mathbf{v} = (f, g, h): U \rightarrow \mathbb{R}^3$  odpowiednie izomorfizmy – zależne od wyboru baz w przestrzeniach 1-form i 2-form antysymetrycznych – przypisują następujące formy różniczkowe:

$$\mathbf{v} = (f, g, h) \mapsto I_1(\mathbf{v}) := \alpha_{\mathbf{v}} = f dx + g dy + h dz \tag{7.28}$$

oraz

$$\mathbf{v} = (f, g, h) \mapsto I_2(\mathbf{v}) := \beta_{\mathbf{v}} = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy. \tag{7.29}$$

Zgodnie ze wzorem na różniczkę zewnętrzną,

$$d\alpha_{\mathbf{v}} = (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx + (g_x - f_y) dx \wedge dy.$$

Zauważmy, że

$$d\alpha_{\mathbf{v}} = I_2(\mathbf{w}), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{w} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$$

Pole wektorowe  $\mathbf{w} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$  nazywa się *rotacją* pola  $\mathbf{v} = (f, g, h)$ . Pisze się czasem

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} h_y - g_z \\ f_z - h_x \\ g_x - f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{v},$$

postępując z symbolem  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  tak, jakby chodziło o wektor.

W podobnej konwencji,

$$d\beta_{\mathbf{v}} = (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle dx \wedge dy \wedge dz,$$

gdzie tym razem napis  $\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$  oznacza formalnie rozumiany iloczyn skalarny “wektora”  $\nabla$  i wektora  $\mathbf{v}$ . Funkcję  $f_x + g_y + h_z = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$  nazywa się *dywergencją* pola wektorowego  $\mathbf{v} = (f, g, h)$ ; piszemy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := f_x + g_y + h_z \quad \text{dla } \mathbf{v} = (f, g, h) : U \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Mamy więc, dla funkcji  $F \in C^\infty(U)$  oraz pól wektorowych  $\mathbf{v} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ , następujące utożsamienia:

$$\begin{aligned} dF &= \alpha_{\operatorname{grad} F} = I_1(\operatorname{grad} F), \\ d(I_1(\mathbf{v})) &= d\alpha_{\mathbf{v}} = \beta_{\operatorname{rot} \mathbf{v}} = I_2(\operatorname{rot} \mathbf{v}), \\ d(I_2(\mathbf{v})) &= d\beta_{\mathbf{v}} = (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, w wymiarze 3 izomorfizmy  $I_k$ ,  $k = 1, 2$ , pozwalają utożsamić różniczkę zewnętrzną na formach stopnia 0, 1 i 2 odpowiednio z gradientem, rotacją i dywergencją. Własność  $d^2 = 0$ , wykazana w Twierdzeniu 7.34, oznacza, że

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F) = 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0$$

dla wszystkich  $F \in C^\infty(U)$  i  $\mathbf{v} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ .

**Definicja 7.37.** Operator różniczkowy

$$C^2(U) \ni f \mapsto \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

nazywa się *laplasjanem*.

**Uwaga 7.38.** Ogólniej, dla obszarów  $U \subset \mathbb{R}^n$ , gdzie  $n \geq 2$ , dywergencję pola wektorowego  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  i laplasjan funkcji  $f \in C^2(U)$  określa się wzorami

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \tag{7.30}$$

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}. \tag{7.31}$$

Jak Czytelnik będzie miał szansę przekonać się podczas dalszych studiów, laplasjan pojawia się w wielu równaniach fizyki matematycznej, a także w pewnych zagadnieniach geometrii i rachunku prawdopodobieństwa.

## 7.4 Orientacja rozmaitości. Całka z formy różniczkowej

Przypomnijmy, że orientacja przestrzeni liniowej  $\mathbb{R}^m$  to, formalnie biorąc, wybór jednej z dwóch klas abstrakcji następującej relacji równoważności, określonej na bazach  $\mathbb{R}^m$ : bazy

$$\xi_1, \dots, \xi_m \quad \text{oraz} \quad \eta_1, \dots, \eta_m$$

są w tej relacji wtedy i tylko wtedy, gdy zapisana w tych bazach macierz przekształcenia identycznościowego ma dodatni wyznacznik.

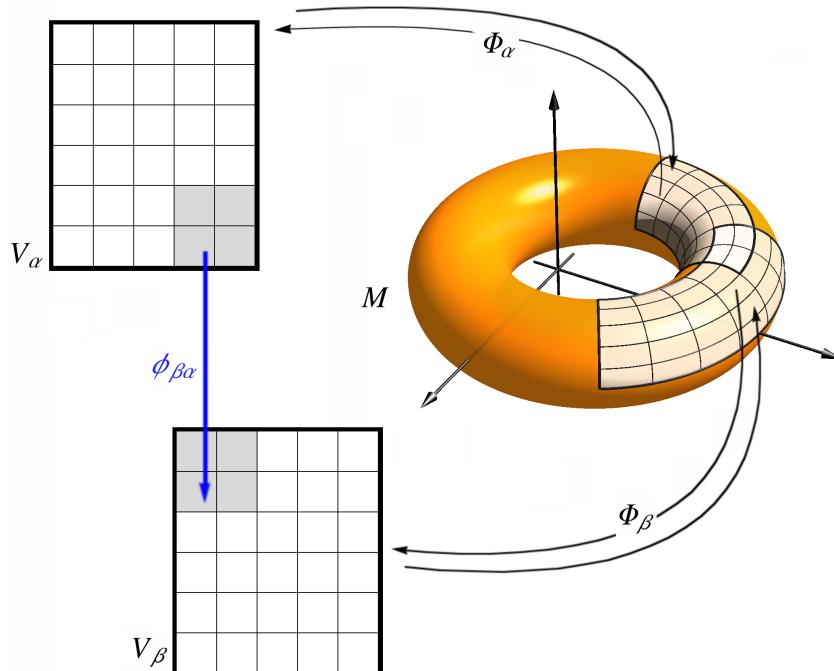
Powiemy teraz, co to znaczy, że dana rozmaistość gładka  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  jest zorientowana. Wprowadźmy odpowiednie oznaczenia. Niech  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  będzie rodziną zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^n$ , pokrywającą  $M$ . Założymy, że dla wszystkich indeksów  $\alpha \in A$  zbiór<sup>9</sup>  $U_\alpha \cap M$  jest obrazem parametryzacji gładkiej

$$\Psi_\alpha: \mathbb{R}^m \supset V_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M = \Psi_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbb{R}^n,$$

a funkcja

$$\Phi_\alpha = (\Psi_\alpha)^{-1}: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$$

jest tzw. mapą. Zbiór map  $\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$  jest, zgodnie z terminologią z Definicji 6.7, atlasmem.



Funkcje przejścia  $\phi_{\beta\alpha} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}: V_\alpha \supset \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow V_\beta$ .

---

<sup>9</sup>Proszę zauważyć: z definicji, jest to zbiór otwarty w topologii indukowanej  $M$ .

**Definicja 7.39 (atlas zorientowany).** Powiemy, że atlas  $\{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ , gdzie

$$\Phi_\alpha = (\Psi_\alpha)^{-1} : U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$$

są mapami na rozmaitości gładkiej  $M$ , jest *zorientowany*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich  $\alpha, \beta \in A$  takich, że dziedziny map  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta$  przecinają się, przekształcenie

$$\phi_{\beta\alpha} := \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^m$$

(nazywane *funkcją przejścia*) spełnia warunek

$$\det D\phi_{\beta\alpha} > 0 \quad (7.32)$$

w każdym punkcie swojej dziedziny.

**Definicja 7.40.** Rozmaistość  $M \subset \mathbb{R}^n$  nazywa się *orientowalna*, jeśli istnieje na niej atlas zorientowany.

**Definicja 7.41.** Dwa atlasy zorientowane na danej rozmaistości  $M$  są *zgodne*, jeśli ich suma jest atlasem zorientowanym.

Nietrudno sprawdzić, że zgodność jest relacją równoważności na zbiorze wszystkich atlasów zorientowanych danej rozmaistości orientowalnej. Wyborem orientacji danej rozmaistości nazywa się, formalnie biorąc, wybór klasy abstrakcji tej relacji. Pozostawimy Czytelnikowi sprawdzenie, że na każdej rozmaistości orientowalnej istnieją tylko dwa różne wybory orientacji.

**Uwaga 7.42.** Wygodne jest także następujące spojrzenie: orientacja  $M$  to wybór orientacji każdej z przestrzeni stycznych  $T_p M$ , przy czym owe wybory są dopasowane tak, żeby dla każdego punktu  $p \in M$  istniała taka dziedzina mapy  $\Phi_\alpha : U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ , że  $p \in U_\alpha \cap M$  i różniczka parametryzacji  $\Psi_\alpha = (\Phi_\alpha)^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M$  przeprowadza standardową bazę  $e_1, \dots, e_m$  w dodatnio zorientowaną bazę przestrzeni  $T_p M$ .

**Przykład 7.43.** Torus

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\},$$

którego pole wyznaczyliśmy w Przykładzie 6.14, jest rozmaistością orientowalną. Zbiór  $\mathbb{T}^2$  jest obrazem przekształcenia

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s) \in \mathbb{T}^2.$$

Nietrudno wprowadzić na  $\mathbb{T}^2$  atlas złożony np. z czterech map  $\Phi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , będących przekształceniemi odwrotnymi do

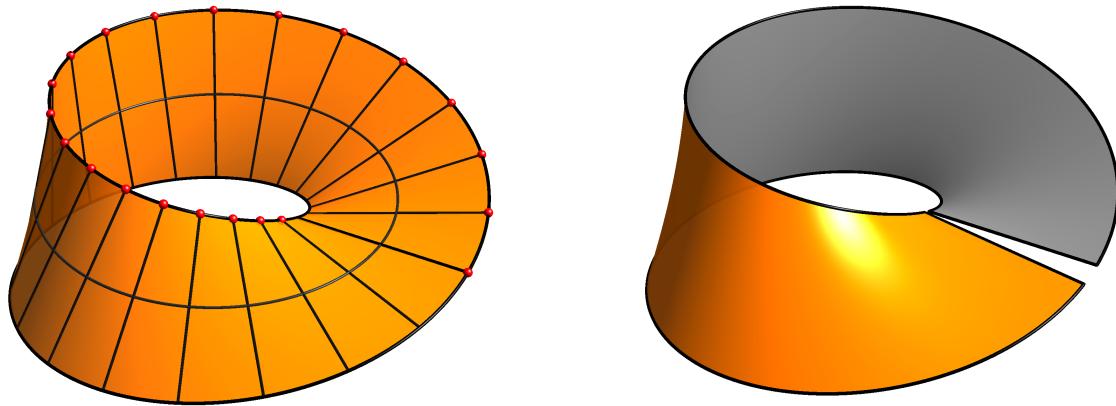
$$\Psi|_{(0,2\pi) \times (0,2\pi)}, \quad \Psi|_{(0,2\pi) \times (\pi,3\pi)}, \quad \Psi|_{(\pi,3\pi) \times (0,2\pi)}, \quad \Psi|_{(\pi,3\pi) \times (\pi,3\pi)}.$$

Funkcje przejścia dla tego atlasu są po prostu przesunięciami  $(t, s) \mapsto (t \pm a, s \pm b)$ , gdzie  $a, b \in \{0, \pi\}$ , a każdy z wyznaczników w (7.32) jest równy 1.

Tak samo sprawdza się, że  $n$ -wymiarowy torus

$$\mathbb{T}^n = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$$

jest rozmaistością orientowalną.



Wstęga Möbiusa to obraz przekształcenia (7.33): powierzchnia zakreślana przez odcinek długości 2, którego środek porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu 2, podczas gdy sam odcinek, zawarty przez cały czas w płaszczyźnie normalnej do okręgu, obraca się o kąt  $\pi$ . Z topologicznego punktu widzenia, wstęga Möbiusa powstaje przez klejenie dwóch końców prostokątnego, elastycznego paska, przy czym jeden z końców zostaje przed klejeniem obrócony o 180 stopni.

**Zadanie 7.44.** Sprawdzić, że sfera  $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$  jest orientowalna.

**Wskazówka.** Można użyć atlasu, w którym są tylko dwie mapy: rzuty stereograficzne z dwóch przeciwnych biegunków; jeden z tych rzutów można złożyć z odbiciem lustrzanym.

Nieorientowalna jest np. wstęga Möbiusa,  $M = \Psi(\mathbb{R} \times (-1, 1)) \subset \mathbb{R}^3$ , gdzie

$$\begin{aligned}\Psi(\theta, t) &= 2(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 0) + t(\cos \theta \cos 2\theta, \cos \theta \sin 2\theta, \sin \theta) \\ &= ((2+t \cos \theta) \cos 2\theta, (2+t \cos \theta) \sin 2\theta, t \sin \theta)\end{aligned}\tag{7.33}$$

**Zadanie 7.45.** Wskazać atlas wstęgi Möbiusa, złożony z dwóch map. Sprawdzić, że nie jest to atlas zorientowany.

**Zadanie 7.46.** Udowodnić następujący fakt: jeśli atlas  $\mathcal{A} = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$  rozmaitości  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  jest zorientowany i obraz mapy  $\Phi : U \cap M \rightarrow V$  jest spójny w  $\mathbb{R}^m$ , to któryś z atlasów  $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} \cup \{\Phi\}$  oraz  $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} \cup \{L \circ \Phi\}$ , gdzie  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest odbiciem lustrzanym, tzn.  $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$ , jest zorientowany.

**Wskazówka.** Zbiory  $D_\alpha^+ = \{\mathbf{x} \in V : \det D(\Phi_\alpha \circ \Phi^{-1})(\mathbf{x}) > 0\}$  oraz  $D_\alpha^-$  zdefiniowany analogicznie, za pomocą przeciwej nierówności, są otwarte. Sprawdzić, że każdy punkt  $V$  należy do jednego z tych zbiorów. Skorzystać ze spójności  $V$ .

**Zadanie 7.47.** Z dwóch poprzednich zadań wywnioskować, że wstęga Möbiusa nie jest orientowalna.

Bez dowodu, który wykracza poza ramy wykładu, podamy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 7.48.** Jeśli rozmaistość  $M^m = \partial\Omega$  klasy  $C^1$  jest brzegiem obszaru ograniczonego  $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ , to  $M$  jest orientowalna.

### 7.4.1 Całka z formy różniczkowej

**Definicja 7.49.** Niech  $U \subset \mathbb{R}^m$  będzie zbiorem otwartym i niech  $\omega \in \Omega^m(U)$ ,  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ , gdzie  $f \in C_0^\infty(U)$  jest funkcją gładką o zwartym nośniku w  $U$ . Przyjmujemy wówczas

$$\int_U \omega = \int_U f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m := \int_U f d\lambda_m.$$

**Definicja 7.50.** Niech  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  będzie rozmaistością zorientowaną. Jeśli  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym,  $U \cap M \neq \emptyset$ , a parametryzacja

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \longrightarrow U \cap M = \Psi(V)$$

jest zgodna z orientacją  $M$ , to dla formy  $\omega \in \Omega^m(U)$  o zwartym nośniku w  $U$  przyjmujemy

$$\int_M \omega := \int_V \Psi^* \omega \quad (7.34)$$

Wypada oczywiście sprawdzić, że powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru parametryzacji. Jeśli nośnik formy  $\omega$  jest zawarty w przecięciu dziedzin dwóch map  $Z$  tego samego atlasu zorientowanego,  $\Phi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha$  oraz  $\Phi_\beta: U_\beta \cap M \rightarrow V_\beta$ , to funkcja przejścia

$$\phi_{\beta\alpha}: \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) =: W_\alpha \longrightarrow W_\beta := \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$$

jest dyfeomorfizmem  $W_\alpha$  na  $W_\beta$ , o dodatnim jakobianie. Dla parametryzacji  $\Psi_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}$  oraz  $\Psi_\beta = \Phi_\beta^{-1}$  mamy

$$\Psi_\alpha = \Psi_\beta \circ \phi_{\beta\alpha} \quad \text{na } W_\alpha.$$

Niech  $(y_1, \dots, y_m)$  będą współrzędnymi w  $W_\beta$ , a  $(x_1, \dots, x_m)$  – współrzędnymi w  $W_\alpha$ . Wówczas  $\Psi_\beta^* \omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ , gdzie nośnik funkcji gładkiej  $f$  jest zwarty w zbiorze  $W_\beta$ . Zgodnie ze Stwierdzeniem 7.30 (i) oraz (iii),

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^* \omega &= (\Psi_\beta \circ \phi_{\beta\alpha})^* \omega = \phi_{\beta\alpha}^*(\Psi_\beta^* \omega) \\ &= \phi_{\beta\alpha}^*(f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m) \\ &= (f \circ \phi_{\beta\alpha}) \det D\phi_{\beta\alpha} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

Dlatego z twierdzenia o zamianie zmiennych otrzymujemy

$$\int_{V_\alpha} \Psi_\alpha^* \omega = \int_{W_\alpha} (f \circ \phi_{\beta\alpha}) \det D\phi_{\beta\alpha} d\lambda_m = \int_{W_\beta} f d\lambda_m = \int_{V_\beta} \Psi_\beta^* \omega.$$

Proszę zauważyć: skorzystaliśmy z tego, że na  $M$  ustalono atlas zorientowany; dlatego mogliśmy w powyższym rachunku użyć samego jakobianu funkcji przejścia, a nie wartości bezwzględnej tego jakobianu.

Zdefiniujemy teraz całkę z  $m$ -formy różniczkowej po orientowalnej rozmaistości zwartej  $M^m \subset \mathbb{R}^n$ . Taka rozmaistość ma atlas zorientowany, złożony ze skończenie wielu map  $\Phi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ . Niech funkcje  $\zeta_\alpha \in C_0^\infty(U_\alpha)$  tworzą tzw. gładki rozkład jedynki na  $M$  wpisany w pokrycie  $(U_\alpha)$ , tzn. niech

$$\zeta_1 + \dots + \zeta_N \equiv 1 \quad \text{w pewnym otoczeniu zbioru } M, \quad \zeta \equiv 0 \quad \text{poza } U_j.$$

Istnienie takiego rozkładu jedynki gwarantuje Lemat A.2 (patrz Dodatek A). Przy takich oznaczeniach przyjmujemy następujące określenie.

**Definicja 7.51.** Założmy, że  $W$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$  i rozmaistość  $M^m \subset W$ . Dla formy  $\omega \in \Omega^m(W)$  kładziemy

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha=1}^N \int_{M \cap U_\alpha} \zeta_\alpha \omega. \quad (7.35)$$

Ponownie, wypada sprawdzić, że ta definicja nie zależy od wyboru atlasu zorientowanego i rozkładu jedynki. Jeśli inne zbiory  $U'_\beta \subset \mathbb{R}^n$  pokrywają  $M$ ,  $\beta = 1, \dots, N'$ , mapy  $\Phi'_\beta: U'_\beta \cap M \rightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^{m'}$  tworzą atlas zorientowany, a funkcje  $\zeta'_\beta \in C_0^\infty(U'_\beta)$  są gładkim rozkładem jedynki na  $M$  wpisanym w pokrycie  $(U'_\beta)$ , to zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$\sum_{\alpha} \int_{M \cap U_\alpha} \zeta_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{M \cap U_\alpha \cap U'_\beta} \zeta_\alpha \zeta'_\beta \omega = \sum_{\beta} \int_{M \cap U'_\beta} \zeta'_\beta \omega.$$

Stąd już wynika poprawność definicji.

**Uwaga 7.52.** Analogicznie definiuje się całkę z formy różniczkowej po zwartym podzbiocie dowolnej rozmaistości zorientowanej.

## 7.5 Twierdzenie Stokesa

Niech  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  będzie  $m$ -wymiarową rozmaistością zorientowaną. Aby sformułować twierdzenie Stokesa, powiemy najpierw, jak orientuje się brzeg podzbioru rozmaistości.

Niech  $G$  będzie takim zwartym podzbiorem  $M$ , którego brzeg  $\partial G$  (*w topologii indukowanej*)<sup>10</sup> na  $M$  jest rozmaistością  $(m-1)$ -wymiarową. Wówczas dla dowolnej mapy  $\Phi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  zbiór  $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap G)$  też jest rozmaistością  $(m-1)$ -wymiarową (dowód: ćwiczenie dla Czytelnika).

Orientację  $\partial G$  (tzw. *orientację brzegu dziedziczoną z  $M$* ) określa się następująco. Jeśli  $\mathbf{p} \in \partial G$ , to w  $T_{\mathbf{p}} M$  istnieje wektor normalny zewnętrzny do  $\partial G$ , tzn. istnieje jednoznacznie określone przekształcenie  $\nu: \partial G \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  takie, że

$$\nu(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}} M, \quad \nu(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}(\partial G)$$

i wreszcie dla każdej krzywej gładkiej  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  takiej, że  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  i  $\gamma'(0) = \nu(\mathbf{p})$  warunek  $\gamma(t) \notin G$  spełniony jest dla wszystkich  $t > 0$  dostatecznie małych. Przyjmujemy, że baza  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$  przestrzeni  $T_{\mathbf{p}}(\partial G)$  jest zorientowana dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nu(\mathbf{p}), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$$

jest dodatnio zorientowana bazą  $T_{\mathbf{p}} M$ .

Czytelnik zechce porównać to określenie orientacji brzegu z określeniem, którym posłużyliśmy się, formułując w podrozdziale 7.1 twierdzenie Greena na płaszczyźnie (wtedy  $m = 2, m-1 = 1$ ). Nietrudno stwierdzić, że oba są równoważne.

---

<sup>10</sup>Inaczej mówiąc, punkt  $\mathbf{p} \in \partial G$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg  $(\mathbf{p}_j) \subset G$  zbieżny do  $\mathbf{p}$  oraz ciąg  $(\mathbf{q}_j) \subset M \setminus G$  zbieżny do  $\mathbf{p}$ .

**Twierdzenie 7.53.** Niech  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  będzie  $m$ -wymiarową rozmaitością zorientowaną klasy  $C^1$  i niech  $G \subset M$  będzie zwartym podzbiorem  $M$ , którego brzeg  $\partial G$  (w topologii indukowanej na  $M$  przez zanurzenie w  $\mathbb{R}^n$ ) jest  $(m-1)$ -wymiarową podrozmaitością  $\mathbb{R}^n$ , wyposażoną w orientację brzegu, dziedziczoną z  $M$ .

Załóżmy, że  $M \subset W$ , gdzie  $W$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ . Wówczas dla każdej  $(m-1)$ -formy różniczkowej  $\omega \in \Omega^{m-1}(W)$  zachodzi wzór

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega. \quad (7.36)$$

**Uwaga 7.54.** Przy założeniach twierdzenia Stokesa zbiór  $\partial G$  ma  $(m-1)$ -wymiarową miarę powierzchniową równą zero.

Dowód tego ważnego twierdzenia przeprowadzimy w trzech zasadniczych krokach. Pierwszy z nich to samodzielne ‘twierdzenie z nazwiskiem’.

**Lemat 7.55 (twierdzenie Gaussa o dywergencji).** Niech  $G \subset \mathbb{R}^n$  będzie obszarem ograniczonym z brzegiem klasy  $C^1$ . Oznaczmy przez  $\nu: \partial G \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  wektor normalny zewnętrzny do  $\partial G$ .

Niech  $W \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym takim, że  $\overline{G} \subset W$ . Wówczas dla każdego pola wektorowego  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n): W \rightarrow \mathbb{R}^n$  klasy  $C^1$  zachodzi wzór

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{w} d\lambda_n = \int_{\partial G} \langle \mathbf{w}, \nu \rangle d\sigma_{n-1}, \quad (7.37)$$

gdzie  $\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$  jest dywergencją pola  $\mathbf{w}$ , zaś  $\sigma_{n-1}$  oznacza miarę powierzchniową na rozmaistości  $\partial G$ .

Interpretacja fizyczna równości z tezy lematu jest następująca: prawa strona to tzw. strumień pola wektorowego przez powierzchnię  $\partial G$ . Jeśli np.  $\mathbf{v}$  jest polem prędkości cieczy w (pewnym obszarze) przestrzeni  $\mathbb{R}^s$ , to  $\int_{\Sigma} \langle \mathbf{v}, \nu \rangle d\sigma_2$  jest ilością cieczy, przepływającej przez powierzchnię  $\Sigma$  w jednostce czasu.<sup>11</sup> Twierdzenie Gaussa orzeka, że przepływ pola przez powierzchnię zamkniętą jest równy całce dywergencji pola po obszarze ograniczonym tą powierzchnią.

**Dowód TWIERDZENIA GAUSSA.** Dowód jest bardzo podobny do dowodu twierdzenia Greena: wykorzystuje się gładki podział jedności. Z uwagi na liniowy charakter tezy, wystarczy przeprowadzić dowód dla pola wektorowego, które ma tylko jedną współrzędną niezerową. Przyjmijmy więc  $\mathbf{w} = (0, \dots, 0, w_n)$  (w pozostałych przypadkach dowód jest identyczny).

Dla każdego punktu  $\mathbf{p} \in \overline{G}$  wybierzmy przedział otwarty  $Q_{\mathbf{p}}$  o środku w  $\mathbf{p}$  tak, aby

- $\overline{Q}_{\mathbf{p}} \subset G$  dla  $\mathbf{p} \in G$ ;
- dla  $\mathbf{p} \in \partial G$  zbiór  $\partial G \cap Q_{\mathbf{p}}$  był, dla pewnego indeksu  $i \in \{1, \dots, n\}$ , wykresem funkcji  $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , określonej na przedziale  $(n-1)$ -wymiarowym, będącym ścianą  $Q_{\mathbf{p}}$ .

<sup>11</sup>Czytelnik zechce sprawdzić, że jednostki się zgadzają.

Korzystając ze zwartości  $\overline{G}$ , wybierzmy pokrycie skończone  $\overline{G}$ , złożone z  $N$  takich przekształceń,  $Q_1, \dots, Q_N$ . Jak w dowodzie twierdzenia Greena, przyjmijmy, że  $Q_1, \dots, Q_k$  stanowią pokrycie brzegu, zaś  $Q_{k+1}, \dots, Q_N$  są (wraz z domknięciami) zawarte w  $G$ .

Weźmy funkcje  $\zeta_l \in C_0^\infty(Q_l)$  takie, żeby  $\zeta_1 + \dots + \zeta_N \equiv 1$  w pewnym otoczeniu  $\overline{G}$ . Wówczas suma pochodnych  $\sum_l (\zeta_l)_{x_n} = 0$  na  $G$  i dlatego

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} \mathbf{w} d\lambda_n &= \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap G} \zeta_l \frac{\partial w_n}{\partial x_n} d\lambda_n = \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} d\lambda_n \\ &= \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} d\lambda_n + \sum_{l=k+1}^N \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} d\lambda_n = \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} d\lambda_n. \end{aligned} \quad (7.38)$$

(Jak w dowodzie twierdzenia Greena, nietrudno wywnioskować, posługując się twierdzeniem Fubiniego i definicją całki oznaczonej, że każdy składnik drugiej sumy w ostatniej linijce jest zerem, gdyż  $\zeta_l w_n$  znika na brzegu przedziału  $Q_l$ ).

Każdą z całek w sumie po prawej stronie wzoru (7.38) obliczymy oddziennie. Ustalmy indeks  $l$ ; dla krótkości zapisu, niech  $u = \zeta_l w_n$ ,  $Q = Q_l$ . Wtedy

*Przypadek 1.* Załóżmy, że iloczyn  $Q \cap \partial G$  jest wykresem funkcji  $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  zmiennej  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , gdzie  $Q'$  jest  $(n-1)$ -wymiarową ścianą  $Q$ . Przyjmijmy, bez zmniejszenia ogólności, że  $Q \cap G = \{(\mathbf{x}', x_n) : x_n < \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}' \in Q'\}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap G} \frac{\partial u}{\partial x_n} d\lambda_n &= \int_{Q'} \left( \int_{-\infty}^{\varphi(\mathbf{x}')} \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \right) d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \\ &= \int_{Q'} u(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \lambda_{n-1}(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Wektor normalny zewnętrzny do  $\partial G$  w punkcie  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$  dany jest wzorem

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x}')}{\|N(\mathbf{x}')\|} = \frac{N(\mathbf{x}')}{\sqrt{1 + \sum(\varphi_{x_i})^2}},$$

gdzie  $N(\mathbf{x}') = (-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}'), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}'), 1)^T$ . Miarę powierzchniową na wykresie funkcji  $\varphi$  określamy, całkując funkcję  $\|N(\mathbf{x}')\|$  względem  $\lambda_{n-1}$  (patrz Uwaga 6.16). Dlatego

$$\begin{aligned} \int_{Q'} u(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \lambda_{n-1}(\mathbf{x}') &= \int_{Q'} u(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \frac{1}{\|N(\mathbf{x}')\|} \|N(\mathbf{x}')\| \lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \\ &= \int_{Q \cap \partial G} \langle \zeta_l \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1}, \end{aligned}$$

gdyż, z uwagi na szczególną postać pola  $\mathbf{w}$ , jest  $\langle \zeta_l \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \zeta_l w_n / \|N\| = u / \|N\|$ . Ostatecznie więc, otrzymujemy

$$\int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} d\lambda_n = \int_{Q_l \cap \partial G} \zeta_l \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1}. \quad (7.39)$$

*Przypadek 2.* Załóżmy, że  $\partial G \cap Q$  jest wykresem funkcji  $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  dla pewnego  $i < n$ . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy  $i = 1$  oraz

$$Q \cap G = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : \mathbf{x}' \in Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}, -d < x_1 < \varphi(\mathbf{x}') < 0\},$$

gdzie  $Q'$  jest ścianą  $Q$ , położoną w płaszczyźnie  $x_1 = \text{const}$ . Wtedy  $u = \zeta_l w_n$  znika dla  $\mathbf{x}' \in \partial Q'$ ,  $-d < x_1 < 0$ . Bez zmniejszenia ogólności, (gładko) przedłużając  $u$  zerem, zakładamy, że  $u$  jest określona dla wszystkich  $x_1 < \varphi(\mathbf{x}')$ . Piszymy, dokonując przy ustalonym  $\mathbf{x}'$  zamiany zmiennych  $x_1 = t + \varphi(\mathbf{x}')$ ,

$$\int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial u}{\partial x_n} d\lambda_n = \int_{Q'} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') dt \right) d\mathbf{x}' =: I.$$

Oznaczmy  $v(t, \mathbf{x}') = u(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}')$  dla  $t \leq 0$  i  $\mathbf{x}' \in Q'$ . Mamy wówczas

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(t, \mathbf{x}') = \frac{\partial u}{\partial x_1}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}').$$

Zauważmy ponadto, że  $v$  znika w punktach  $t \leq 0$ ,  $\mathbf{x}' \in \partial Q'$ . Dlatego

$$\int_{-\infty}^0 \int_{Q'} \frac{\partial v}{\partial x_n}(t, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' dt = 0,$$

stąd zaś (i z twierdzenia Fubiniego) po ponownej, odwrotnej zamianie zmiennych<sup>12</sup> otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q'} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') dt \right) d\mathbf{x}' \\ &= - \int_{Q'} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_1}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}') dt \right) d\mathbf{x}' \\ &= - \int_{Q'} u(\varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{Q'} u \cdot \boldsymbol{\nu}_n d\sigma_{n-1} = \int_{Q'} \zeta_l \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1} \end{aligned}$$

(proszę zerknąć ponownie na wzór przypomniany wcześniej w dowodzie, wyrażający wektor normalny do wykresu funkcji). Widzimy więc, że także i w tym przypadku zachodzi wzór (7.39).

Sumując takie wzory względem  $l$  i wykorzystując równość (7.38), otrzymujemy tezę twierdzenia Gaussa.  $\square$

**DOWÓD TWIERDZENIA 7.53. Część I.** Najpierw przeprowadzimy dowód w przypadku, gdy  $m = n$ ,  $M = \mathbb{R}^n$  i  $G$  jest obszarem ograniczonym w  $\mathbb{R}^n$ . Okazuje się, że wtedy twierdzenie Stokesa jest zmysłnie przeformułowanym twierdzeniem Gaussa o dywergencji.

Niech  $W$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ ,  $\overline{G} \subset W$ ,  $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$ . Bez zmniejszenia ogólności można przyjąć, że

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} v_i(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Posługując się wzorem na różniczkę zewnętrzną, łatwo jest sprawdzić, że wówczas

$$d\omega = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{na } W,$$

---

<sup>12</sup>Zauważmy: pierwsza zamiana zmiennych polega, podobnie jak w dowodzie twierdzenia Greena, na “wyprostowaniu brzegu”.

gdzie  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest pewnym polem wektorowym na zbiorze  $W$ . Dlatego, z definicji,

$$\int_G d\omega = \int_G \operatorname{div} \mathbf{v} d\lambda_n. \quad (7.40)$$

Pokażemy, że

$$\int_{\partial G} \omega = \int_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1}, \quad (7.41)$$

gdzie  $\sigma_{n-1}$  jest miarą powierzchniową na brzegu obszaru  $G$ . Ze wzorów (7.40) i (7.41) twierdzenie Stokesa wyniknie natychmiast, dzięki twierdzeniu Gaussa.

Przejdzmy zatem do dowodu (7.41). Założymy najpierw, że  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym, a  $\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \supset V \rightarrow U \cap \partial G$  jest gładką, zorientowaną parametryzacją  $U \cap \partial G$ . Sprawdzimy najpierw, że wektor normalny  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  do  $\partial G$  spełnia zależność

$$\nu_j(\Psi(\mathbf{y})) \sqrt{(\det D\Psi(\mathbf{y})^T D\Psi(\mathbf{y}))} = (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.42)$$

gdzie  $\Psi_{I_j}$  oznacza przekształcenie, które powstaje z  $\Psi$  przez opuszczenie  $j$ -tej współrzędnej, tzn.

$$\Psi_{I_j} = (\Psi_1, \dots, \Psi_{j-1}, \Psi_{j+1}, \dots, \Psi_n).$$

Ustalmy punkt  $\mathbf{y} \in V$ . Niech  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  oznacza wektor w  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , równy prawej stronie (7.42), tzn. niech

$$\eta_j = (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Niech  $\xi \in \mathbb{R}^n$  będzie dowolnym wektorem. Rozważmy macierz kwadratową  $A_\xi$ , której kolumnami są wektory

$$\xi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(\mathbf{y}), \quad \dots, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}}(\mathbf{y}). \quad (7.43)$$

Rozwijając wyznacznik  $A_\xi$  względem pierwszej kolumny, sprawdzamy, że

$$\det A_\xi = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \xi_j \det D\Psi_{I_j}(\mathbf{y}) = \sum_j \xi_j \eta_j = \langle \xi, \boldsymbol{\eta} \rangle.$$

Jeśli wektor  $\xi$  należy do przestrzeni liniowej  $\operatorname{Im} D\Psi(\mathbf{y})$ , rozpiętej na wektorach  $\frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = D\Psi(\mathbf{y})\mathbf{e}_i$ , to kolumny macierzy  $A_\xi$  są liniowo zależne i lewa strona powyższej równości jest zerem. Dlatego  $\boldsymbol{\eta} \perp \operatorname{Im} D\Psi(\mathbf{y}) = T_{\Psi(\mathbf{y})}\partial G$ . Podstawiając  $\xi = \boldsymbol{\eta}$ , otrzymujemy

$$\det A_\eta = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 > 0.$$

Zatem dla  $\xi = \boldsymbol{\eta}$  baza (7.43) przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  jest zorientowana dodatnio, a ponieważ wektory  $\partial \Psi / \partial y_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  tworzą dodatnio zorientowaną bazę przestrzeni stycznej  $T_{\Psi(\mathbf{y})}\partial G$ , więc zgodnie z przyjętym określeniem orientacji brzegu wektor  $\boldsymbol{\eta}$  wskazuje na zewnątrz  $G$ . Ponadto,

$$A_\eta^T A_\eta = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D\Psi^T(\mathbf{y})D\Psi(\mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

stąd zaś

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 \det(D\Psi^T(\mathbf{y})D\Psi(\mathbf{y})) = \det(A_\eta^T A_\eta) = (\det A_\eta)^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^4,$$

tzn. ostatecznie

$$\|\eta\|^2 = \det(D\Psi^T(\mathbf{y})D\Psi(\mathbf{y})).$$

Widzimy więc, że równoważnym zapisem równości (7.42) jest  $\|\eta\|\nu(\Psi(\mathbf{y})) = \eta$ , tzn. istotnie  $\nu$  jest wektorem normalnym *zewnętrznym* do  $\partial G$ .

W przypadku  $\text{supp } \mathbf{v} \cap \partial G \subset \Psi(V) = U \cap \partial G$  (tzn. dla pól wektorowych o zwartym, odpowiednio małym nośniku) ze wzoru (7.42) otrzymujemy, posługując się definicją miary powierzchniowej, następujące równości:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \nu \rangle d\sigma_{n-1} &= \int_{\Psi(V)} \langle \mathbf{v}, \nu \rangle d\sigma_{n-1} \\ &= \int_V \langle \mathbf{v}(\Psi(\mathbf{y})), \nu(\Psi(\mathbf{y})) \rangle \sqrt{(\det D\Psi(\mathbf{y})^T D\Psi(\mathbf{y}))} d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}) \\ &\stackrel{(7.42)}{=} \int_V \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} v_j(\Psi(\mathbf{y})) \det(D\Psi_{I_j}(\mathbf{y})) dy_1 \dots dy_{n-1} \\ &= \int_V \Psi^* \omega \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\Psi(V)} \omega = \int_{\partial G} \omega. \end{aligned}$$

Przypadek, gdy  $\mathbf{v}$ , tzn. forma  $\omega$ , nie ma nośnika zawartego w dziedzinie jednej mapy, łatwo sprowadzić do powyższego, posługując się rozkładem jedynki; szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

**Część II.** Niech teraz  $m < n$ . Wybierzmy pokrycie skończone  $G$  zbiorami otwartymi  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , takimi, że  $U_\alpha \cap M$  są obrazami zgodnych z orientacją parametryzacji

$$\Psi_\alpha: \mathbb{R}^m \supset V_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Wybierzmy gładki rozkład jedności  $(\zeta_\alpha)$ ,

$$\text{supp } \zeta_\alpha \subset U_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^N \zeta_\alpha \equiv 1 \quad \text{na } W \supset \overline{G}.$$

Wprowadźmy skrócone oznaczenia:

$$\omega_\alpha := \Psi_\alpha^*(\zeta_\alpha \omega) \in \Omega^{m-1}(V_\alpha), \quad G_\alpha = \Psi_\alpha^{-1}(G).$$

Wówczas zbiór  $\Psi_\alpha^{-1}(\partial G)$  jest brzegiem  $G_\alpha$  w topologii indukowanej na  $V_\alpha$  przez zanurzenie w  $\mathbb{R}^m$ . Z częścią pierwszą dowodu otrzymujemy

$$\int_{G_\alpha} d\omega_\alpha = \int_{\partial G_\alpha} \omega_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

lub równoważnie, zgodnie z definicjami całki i własnościami przekształcenia  $\Psi^*$ ,

$$\int_{G \cap U_\alpha} d(\zeta_\alpha \omega) = \int_{\partial G \cap U_\alpha} \zeta_\alpha \omega, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

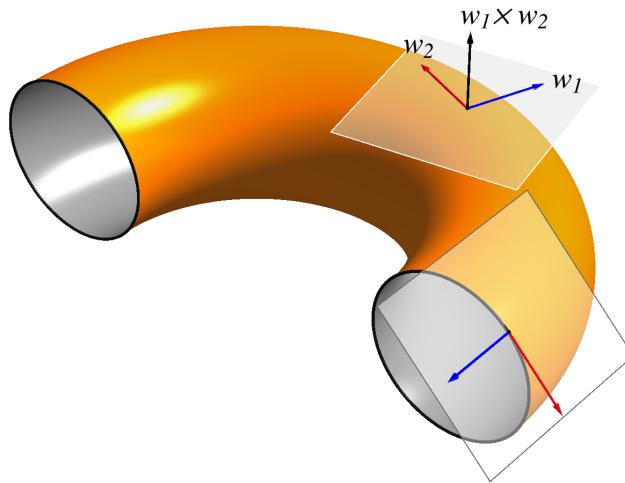
Sumując takie wzory i korzystając z równości  $1 = \sum_\alpha \zeta_\alpha$ , otrzymujemy tezę.  $\square$

**Przykład 7.56 (przypadek szczególny: klasyczny wzór Stokesa).** Znamy już dwa ważne przypadki szczególne twierdzenia Stokesa, mianowicie twierdzenie Greena i twierdzenie Gaussa o dywergencji. Omówimy teraz jeszcze jeden.

Załóżmy, że rozmaitość orientowalna dwuwymiarowa  $M^2$  jest zawarta w  $\mathbb{R}^3$ . Niech  $G \subset M$  będzie zbiorem zwartym z brzegiem (w topologii indukowanej)  $\partial G$ , który jest rozmaitością jednowymiarową, tzn. po prostu sumą skończenie wielu krzywych zamkniętych klasy  $C^1$ . Weźmy zbiór otwarty  $W \subset \mathbb{R}^3$  taki, że  $G \subset W$ , oraz 1-formę

$$\omega = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \in \Omega^1(W).$$

Tak, jak opisaliśmy w podrozdziale 7.3.2, 1-formę  $\omega$  można w  $\mathbb{R}^3$  utożsamić z gładkim polem wektorowym  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3): W \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



Orientacja powierzchni w  $\mathbb{R}^3$  polega w istocie na wskazaniu jej *dodatniej* strony. Na rysunku  $M$  jest torusem (niewidocznym w całości); strona zewnętrzna, wskazywana przez iloczyn wektorowy wektorów dodatnio zorientowanej bazy przestrzeni stycznej, jest dodatnia. Zbiór  $G$  jest wygiętą rurką;  $\partial G$  składa się z dwóch okręgów. Zaznaczony wektor styczny do  $\partial G$  wskazuje orientację brzegu dziedziczoną z  $M$ .

*Kräżeniem pola  $\mathbf{v}$  wzduż krzywej (zorientowanej)  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$*  nazywamy całkę

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{v}, \tau \rangle d\sigma_1,$$

gdzie  $\tau: \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$  oznacza jednostkowy wektor *styczny* do krzywej  $\gamma$ , zgodny z jej ustaloną orientacją, zaś  $\sigma_1$  jest długością łuku (tzn. jednowymiarową miarą powierzchniową). Okazuje się, że z twierdzenia Stokesa wynika następujący klasyczny wzór (zwany także wzorem Stokesa):

$$\int_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \tau \rangle d\sigma_1 = \int_G \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \nu \rangle d\sigma_2 \quad (7.44)$$

gdzie  $\nu$  jest jednostkowym wektorem normalnym do  $M$ , *wskazującym jej dodatnio zorientowaną stronę*, zaś  $\tau$  jest jednostkowym wektorem stycznym do  $\partial G$ , wskazującym dziedziczoną orientację brzegu  $G$  w  $M$ . Inaczej mówiąc, krążenie pola wektorowego wzduż krzywej zamkniętej jest równe strumieniowi rotacji tego pola wektorowego przez (dowolną) powierzchnię rozpiętą na tej krzywej.

Wyjaśnijmy sprawę orientacji poglądowo (patrz załączony rysunek). Wybór orientacji  $M$  oznacza, że możemy wskazać dodatnio zorientowaną bazę  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  przestrzeni  $T_p M$ . Iloczyn wektorowy  $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$  jest prostopadły do  $T_p M$ ; przyjęte jest mówić, że wskazuje on *dodatnią* stronę  $M$ . Przy ustalonym  $\mathbf{p} \in M$  wektor jednostkowy

$$\nu = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|}$$

nie zależy od wyboru dodatnio zorientowanej bazy przestrzeni stycznej. Wektor styczny  $\tau$  w punkcie  $\mathbf{p} \in \partial G$  wybieramy tak, aby para  $(\mathbf{n}, \tau)$ , gdzie  $\mathbf{n} \in T_p M$  jest wektorem normalnym zewnętrznym do  $\partial G$ , stanowiła dodatnio zorientowaną bazę  $T_p M$ . Nietrudno się przekonać, że wybór  $\tau$  opisuje następującą poglądową regułę: *wędrując wzdłuż  $\partial G$  w kierunku wskazanym przez  $\tau$ , tak, aby widzieć dodatnią stronę  $M$  (tzn. tak, aby wektor  $\nu$  wskazywał kierunek "do góry"), widzimy zbiór  $G$  z lewej strony*.

Przekonajmy się, że wzór (7.44) istotnie wynika z ogólnego twierdzenia Stokesa. Bez zmniejszenia ogólności założymy, że  $\partial G = \gamma$  jest jedną krzywą zamkniętą; niech

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

będzie jej (zorientowaną) parametryzacją. Wprost z definicji całki z 1-formy wynika, iż

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \sum_{j=1}^3 v_j(\phi(t)) \phi'_j(t) dt \\ &= \int_a^b \left\langle \mathbf{v}(\phi(t)), \underbrace{\frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}}_{\substack{\text{wektor dł. 1}}} \right\rangle \cdot \underbrace{\|\phi'(t)\|}_{\substack{\text{długość łuku}}} dt = \int_{\gamma} \langle \mathbf{v}, \tau \rangle d\sigma_1. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Różniczkę  $\eta = d\omega$  formy  $\omega = \sum v_i dx_i$ ,

$$\eta = \eta_1 dx_2 \wedge dx_3 + \eta_2 dx_3 \wedge dx_1 + \eta_3 dx_1 \wedge dx_2 = \sum_{\text{znak } (i,j,k)=1} \eta_i dx_j \wedge dx_k,$$

gdzie, zgodnie ze wzorem na różniczkę zewnętrzną,  $\eta_i = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ , można – dzięki izomorfizmowi opisanemu w podrozdziale 7.3.2 – utożsamić z rotacją  $\text{rot } \mathbf{v} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  pola  $\mathbf{v}$ . Niech  $\Psi : \mathbb{R}^2 \supset O \rightarrow M$  będzie parametryzacją zorientowaną. Zgodnie z wzorami na przeciaganie form, patrz Stwierdzenie 7.30 (iii),

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(O)} d\omega &= \int_{\Psi(O)} \eta = \int_{\Psi(O)} \sum_{\text{znak } (i,j,k)=1} \eta_i dx_j \wedge dx_k \\ &= \int_O \sum_{i=1}^3 \eta_i(\Psi(u, v)) \cdot \Delta_i d\lambda_2(u, v) \end{aligned}$$

gdzie symbole  $\Delta_i$  oznaczają wyznaczniki

$$\Delta_i = \frac{\partial \Psi_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial u},$$

a znak permutacji  $(i, j, k)$  jest równy 1. Zatem wektor

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}$$

jest iloczynem wektorowym wektorów stycznych  $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$  i  $\frac{\partial \Psi}{\partial v}$ , tworzących dodatnio<sup>13</sup> zorientowaną bazę  $T_{\Psi(u,v)}M$ . Inaczej mówiąc,  $\Delta$  wskazuje dodatnią stronę  $M$ .

Kontynuując rozpoczęty rachunek, piszemy – pamiętając, że  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  – równości

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(O)} d\omega &= \int_O \sum_{i=1}^3 \eta_i(\Psi(u, v)) \cdot \Delta_i \, d\lambda_2(u, v) \\ &= \int_O \left\langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \frac{\Delta}{\|\Delta\|} \right\rangle \underbrace{\sqrt{(\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 + (\Delta_3)^2} \, d\lambda_2(u, v)}_{\text{miara powierzchniowa}} = \int_{\Psi(O)} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \nu \rangle \, d\sigma_2. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Jak widać, posłużyliśmy się na koniec wzorem Cauchy'ego–Bineta i definicją miary powierzchniowej. Uzyskane równości (7.45) i (7.46) świadczą, że wzór (7.44) istotnie wynika z twierdzenia Stokesa.

**Zadanie 7.57.** Niech  $\gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  i niech  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie dyfeomorfizmem. Oznaczmy  $\gamma_1 = F(\gamma)$ . Wykazać, że jeśli  $\mathbf{v}$  jest gładkim polem wektorowym na  $\mathbb{R}^3$  o zerowej rotacji, to  $\mathbf{v}$  nie może być styczne w każdym punkcie do krzywej  $\gamma_1$ . (Inaczej: krzywa  $\gamma_1$  nie jest linią sił pola  $\mathbf{v}$ ).

**Zadanie 7.58.** Wyprowadzić wzór (7.44) z twierdzenia Greena w przypadku, gdy  $M$  jest wykresem funkcji gładkiej  $x_3 = g(x_1, x_2)$ .

**Uwaga 7.59 (przypadek niegładkiego brzegu).** Założenia o gładkości brzegu w twierdzeniach Greena i Gaussa można znaczco osłabić. Opiszymy tu jedno z takich uogólnień.

Załóżmy, że  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty i ograniczony, zaś  $\partial\Omega = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup Z$ , gdzie  $M_k, k \in \mathbb{N}$ , są rozmaitościami klasy  $C^1$  o skończonej sumie miar powierzchniowych,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{n-1}(M_k) < \infty,$$

zaś  $Z$  jest zbiorem miary Hausdorffa  $\mathcal{H}^{n-1}$  zero, tzn. spełnia warunek: dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje pokrycie zbioru  $Z$  kulami  $B(\mathbf{x}_i, r_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , takie, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1} < \varepsilon.$$

Opisane założenia oznaczają, że brzeg  $\Omega$  jest gładki, za wyjątkiem zaniedbywalnego zbioru kantów, ostrzy itp. Nietrudno zauważać, że takimi zbiorami  $\Omega$  są np. wszystkie wielościany w  $\mathbb{R}^3$ . Herbert Federer<sup>14</sup> wykazał, że jeśli  $\Omega$  spełnia powyższe warunki, a  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w  $\overline{\Omega}$  i różniczkowalna w  $\Omega$ , to

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\sigma_{n-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.47)$$

gdzie  $\int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\sigma_{n-1} := \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f \nu_j \, d\sigma_{n-1}$ , a  $\nu_j$  jest  $j$ -tą współrzędną wektora normalnego zewnętrznego, określonego w punktach zbioru  $\partial\Omega \setminus Z$ . Zauważmy, że podstawiając  $f = f_j$  i sumując wzory (7.47), uzyskuje się twierdzenie Gaussa o dywergencji.

<sup>13</sup>Orientacja tej bazy jest dodatnia, gdyż  $\frac{\partial \Psi}{\partial u} = D\Psi(\mathbf{e}_1)$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial v} = D\Psi(\mathbf{e}_2)$ , a baza  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  wyznacza standartową orientację  $\mathbb{R}^2$ .

<sup>14</sup>H. Federer, Coincidence functions and their integrals. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, (1946), str. 441–466; patrz także monografia Federera *Geometric measure theory*.

## Dodatek A

# Gładki rozkład jedności

**Lemat A.1.** Niech  $K \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem zwartym,  $U \subset \mathbb{R}^n$  – zbiorem otwartym. Jeśli  $K \Subset \Omega$ , to istnieje funkcja  $\eta \in C_0^\infty(U)$  taka, że  $0 \leq \eta \leq 1$  i  $\eta \equiv 1$  w otoczeniu zbioru  $K$ .

Dowód. Wybierzmy liczbę dodatnią  $\varepsilon < \frac{1}{5}\text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ . Niech

$$K_{2\varepsilon} = K + B(0, 2\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{x}, K) < 2\varepsilon\}.$$

Zbiór  $K_{2\varepsilon}$  jest otwarty; nietrudno sprawdzić, że funkcja

$$\eta := \chi_{K_{2\varepsilon}} * \varphi_\varepsilon,$$

gdzie  $\varphi_\varepsilon$  jest jakąkolwiek jedynką aproksymatywną (patrz Definicja 5.51), ma wszystkie żądane własności. Gładkość  $\eta$  wynika z Wniosku 5.53. Ponadto, jeśli  $\text{dist}(\mathbf{x}, K) > 3\varepsilon$ , to  $\eta(\mathbf{x}) = 0$ , gdyż

$$\eta(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_{2\varepsilon}}(\mathbf{y}) \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y})$$

i jeśli pierwszy czynnik pod całką nie jest zerem, tzn.  $\mathbf{y} \in K_{2\varepsilon}$ , to wtedy  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > \varepsilon$  dla  $\text{dist}(\mathbf{x}, K) > 3\varepsilon$ , więc drugi czynnik pod całką,  $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , zniką – dlatego całka jest zerem.  $\square$

**Lemat A.2.** Niech  $K \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem zwartym i niech  $K \Subset U_1 \cup \dots \cup U_N$ , gdzie zbiory  $U_j$  są otwarte dla  $j = 1, \dots, N$ . Istnieją wtedy funkcje nieujemne  $\zeta_j \in C_0^\infty(U_j)$  takie, że

$$\zeta_1 + \dots + \zeta_N = 1 \quad \text{na pewnym zbiorze otwartym } W \subset \mathbb{R}^n,$$

takim, że  $K \subset W \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$ .

Dowód. Niech  $\lambda > 0$  będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia  $U_1, \dots, U_N$  zbioru  $K$ . Ustalmy  $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{3}$ . Położmy

$$K_j := \{\mathbf{x} \in K : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus U_j) \geq \varepsilon\}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Zbiór  $K_j \subset K$  jest domknięty, więc jest zwarty, gdyż  $K$  jest zwarty. Jeśli  $\mathbf{x} \in K$ , to – z definicji liczby Lebesgue'a – kula  $B(\mathbf{x}, \lambda)$  jest zawarta w którymś ze zbiorów  $U_j$ , zatem tym bardziej  $B(\mathbf{x}, 3\varepsilon) \subset U_j$ , a więc  $\mathbf{x} \in K_j$  dla tego indeksu  $j$ . Stąd  $K = K_1 \cup \dots \cup K_N$ .

Ponadto,  $K_j \Subset U_j$ , gdyż jeśli  $\mathbf{x} \notin U_j$ , to  $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus U_j) = 0$ .

Położmy  $V_j = K_j + B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ . Zbiory  $V_j$  są otwarte, a ich domknięcia są zwarte i  $\overline{V}_j \Subset U_j$ . Zbiór  $V = V_1 \cup \dots \cup V_N$  jest otwartym otoczeniem  $K_1 \cup \dots \cup K_N = K$ . Z Lematu A.1 wnioskujemy, że istnieją funkcje nieujemne

$$\eta \in C_0^\infty(V), \quad \varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$$

takie, że  $\eta \equiv 1$  w pewnym otoczeniu  $W$  zbioru  $K$ , takim, że  $W \Subset V$ , zaś  $\varphi_j \equiv 1$  w otoczeniu  $G_j$  zbioru  $\overline{V}_j$ , takim, że  $G_j \Subset U_j$ . Przyjmijmy teraz

$$h = \sum_{j=1}^N \varphi_j, \quad \zeta_j = \frac{\eta \varphi_j}{h}.$$

Ponieważ  $h \geq 1$  na sumie zbiorów  $G_j$ , więc definicja funkcji  $\zeta_j$  jest poprawna, gdyż i tak  $\eta \equiv 0$  poza zbiorem  $V \Subset \bigcup G_j$ . Oczywiście, na zbiorze  $W$ , tzn. tam, gdzie  $\eta \equiv 1$ , mamy

$$\sum_{j=1}^N \zeta_j = \sum_{j=1}^N \frac{\eta \varphi_j}{h} = \frac{\eta}{h} \sum_{j=1}^N \varphi_j = 1.$$

Dowód lematu jest zakończony.  $\square$

## Dodatek B

# Lemat Poincarégo w obszarach gwiaździstych

Opiszemy jeszcze uogólnienie warunków całkowalności, sformułowanych dla 1-form w Twierdzeniu 7.18.

**Definicja B.1.** Obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nazywa się *gwiaździsty względem punktu  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$*  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\mathbf{x} \in \Omega$  odcinek  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$  zawiera się w  $\Omega$ .

**Twierdzenie B.2 (lemat Poincarégo).** *Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie obszarem gwiaździstym względem zera i niech  $k = 1, \dots, n$ . Wówczas każda forma zamknięta  $\omega \in \Omega^k(U)$  jest dokładna. Co więcej, jeśli dla  $k = 1, \dots, n$  operator liniowy  $H: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$  określony jest wzorem*

$$H(f dx_I) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} x_{i_l} \left( \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) dx_{I \langle l \rangle}, \quad (\text{B.1})$$

*gdzie, dla  $I = (i_1, \dots, i_k)$  symbol  $I \langle l \rangle = (i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_l)$  oznacza zestaw  $I$  z pominiętym  $l$ -tym elementem  $i_l$ , to wówczas*

$$\omega = H(d\omega) + d(H\omega) \quad (\text{B.2})$$

*dla każdej  $k$ -formy, niekoniecznie zamkniętej; w szczególności, gdy  $d\omega = 0$ , to  $\omega = d(H\omega)$ .*

**Dowód.** Obliczymy najpierw różniczkę formy  $H(f dx_I)$ . Stosując wzór (7.24), otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(H(f dx_I)) &= \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \left( \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) dx_{i_l} \wedge dx_{I \langle l \rangle} \\ &\quad + \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} x_{i_l} d \left( \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) \wedge dx_{I \langle l \rangle} \\ &= k \left( \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) dx_I + \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} x_{i_l} d \left( \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) \wedge dx_{I \langle l \rangle}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

gdyż  $(-1)^{l-1}dx_{i_l} \wedge dx_{I\langle l \rangle} = dx_I$  (aby ‘wstawić  $dx_{i_l}$  we właściwe miejsce’, wykonujemy  $(l-1)$  przestawień). Całkując przez części, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} k \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt &= t^k f(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 t^k \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \\ &= f(\mathbf{x}) - \sum_{\nu=1}^n x_\nu \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt. \end{aligned}$$

Różniczka zewnętrzna całki w (B.3) jest równa

$$d\left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt\right) = \sum_{\nu=1}^n \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \right) dx_\nu$$

Podstawiając te wyniki do (B.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(H(f dx_I)) &= f(\mathbf{x}) dx_I - x_\nu \left( \int_0^1 t^k \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \right) dx_I \\ &\quad + \sum_{l=1}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^{l-1} x_{i_l} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \right) dx_\nu \wedge dx_{I\langle l \rangle}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Teraz, dla  $\omega = f dx_I$ , wyznaczamy  $H(d\omega) = H(df \wedge dx_I)$ . Ponieważ

$$d\omega = df \wedge dx_I = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l},$$

więc, wobec liniowości  $H$ , otrzymujemy wprost z definicji tego operatora

$$\begin{aligned} H(df \wedge dx_I) &= \sum_{\nu=1}^n \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \right) x_\nu dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^n \sum_{l=1}^k (-1)^l \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \right) x_{i_l} dx_\nu \wedge dx_{I\langle l \rangle}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

(proszę przemyśleć, dlaczego w drugiej sumie figuruje znak  $(-1)^l$ , a nie  $(-1)^{l-1}$ ). Dodając (B.4) i (B.5) stronami, otrzymujemy tezę.  $\square$

**Uwaga B.3.** Proszę zauważać, że w dowodzie korzystamy jedynie z tego, że współczynniki formy  $\omega$  są klasy  $C^1$ .

**Wniosek B.4.** Jeśli  $g_1, \dots, g_n \in C^1(U)$ , zbiór  $U \subset \mathbb{R}^n$  jest otwarty i gwiazdzisty względem zera w  $\mathbb{R}^n$ , a ponadto zachodzi warunek

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \text{na } U \text{ dla wszystkich } i, j = 1, \dots, n, \tag{B.6}$$

to istnieje  $h \in C^2(U)$  taka, że  $h_{x_i} = g_i$  dla  $i = 1, \dots, n$ .

Dowód. Z założenia (B.6) wynika, że

$$d(g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Dla formy  $\omega = g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$  znika więc składnik  $H(d\omega)$  po prawej stronie wzoru (B.2). Kładąc  $h = H\omega$ , gdzie  $H$  jest operatorem z Lematu Poincarégo, otrzymujemy funkcję klasy  $C^2$  taką, że  $dh = g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$ , tzn.  $h_{x_i} = g_i$ .  $\square$

**Zadanie B.5.** Udoswodnić tezę powyższego wniosku, zakładając jedynie, że obszar  $U$  jest dyfeomorficzny z kulą  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ .

**Wskazówka.** Skorzystać z Twierdzenia 7.34 (iv).

## Dodatek C

# Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

Na zakończenie, pokażemy, że z twierdzenia Stokesa wynika twierdzenie Brouwera o punkcie stałym i twierdzenie o nieistnieniu retrakcji kuli do brzegu.

W tym podrozdziale symbol  $B(0, r)$  oznacza kulę domkniętą w  $\mathbb{R}^n$  o środku w zerze i promieniu  $r$ . Niech  $B = B(0, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$

**Twierdzenie C.1 (Brouwera o punkcie stałym).** *Jeśli przekształcenie  $f: B \rightarrow B$  jest ciągłe, to ma punkt stały, tzn. istnieje punkt  $\mathbf{x} \in B$  taki, że  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .*

**Twierdzenie C.2.** *Nie istnieje odwzorowanie ciągłe  $g: B \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial B$  takie, że  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  dla wszystkich  $\mathbf{x} \in \partial B$ .*

**Dowód Twierdzenia C.2.** Założmy, że teza jest fałszywa. Niech  $g: B \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  będzie ciągłe i niech  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  na sferze jednostkowej  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Krok 1.** Wykażemy, że bez zmniejszenia ogólności można założyć, że przekształcenie  $g$  jest gładkie,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  i  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  na  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Istotnie, przedłużmy najpierw  $g$  do przekształcenia ciągłego  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kładąc  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$  dla  $\|\mathbf{y}\| > 1$ . Następnie, rozpatrzmy splot  $g_1 := \varphi_\varepsilon * g$  przekształcenia  $g$  z jedynką aproksymatywną

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \text{gdzie } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\lambda_n = 1.$$

Przekształcenie  $g_1$  jest dobrze określone i gładkie, patrz podrozdział 5.5.1. Jeśli  $\varepsilon$  jest dostatecznie małe, to  $g_1 \neq 0$  w kuli  $B(0, 2)$ ; ponadto, jeśli wybierzemy funkcję  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  zależną jedynie od  $\|\mathbf{x}\|$ , to wówczas

$$g_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \quad \text{dla } \|\mathbf{x}\| \geq \frac{3}{2}, \tag{C.1}$$

gdyż dla  $j = 1, \dots, n$  całki  $\int_{\mathbb{R}^n} y_j \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) d\lambda_n$  znikają wobec nieparzystości funkcji podcałkowych. Dlatego  $g_1 \neq 0$  w całej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

Położymy teraz

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{g_1(2\mathbf{x})}{\|g_1(2\mathbf{x})\|}.$$

Wówczas  $g_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  i  $g_2 \in C^\infty$ . Wreszcie,  $g_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  na  $\mathbb{S}^{n-1}$  wobec warunku (C.1).

*Krok 2.* Niech  $g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  będzie przekształceniem gładkim, takim, że  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  na  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Wówczas, dwukrotnie korzystając z twierdzenia Stokesa, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lambda_n(B) &= \int_B dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_B d(x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g_1 dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n \\ &= \int_B d(g_1 dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n) = \int_B dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n = 0,\end{aligned}$$

gdziż

$$\int_B dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n = \int_B \det Dg \, d\lambda_n = 0$$

(ostatnia równość wynika stąd, że  $g$  obniża wymiar:  $n$  kolumn macierzy  $Dg$  to wektory styczne do  $(n-1)$ -wymiarowej sfery, więc macierz  $Dg$  musi mieć rzad mniejszy od  $n$ .)

Uzyskana sprzeczność  $\pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2) = \lambda_n(B) = 0$  kończy dowód.  $\square$

**Dowód Twierdzenia C.1.** Założymy, że przekształcenie ciągłe  $f: B \rightarrow B$  nie ma punktu stałego. Zdefiniujmy odwzorowanie  $g: B \rightarrow \partial B$  następująco: jeśli  $\mathbf{x} \in B$ , to  $g(\mathbf{x})$  jest tym punktem, w którym półprosta o początku  $f(\mathbf{x})$ , przechodząca przez  $\mathbf{x}$ , przecina sferę  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B$ .

Przekształcenie  $g$  jest dobrze określone, gdyż  $f: B \rightarrow B$  i  $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ . Ciągłość  $g$  wynika z ciągłości  $f$ . Wreszcie,  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  na  $\partial B$ . Jednak istnienie takiego przekształcenia  $B$  przeczy udowodnionemu wcześniej Twierdzeniu C.2. Dlatego założenie, że  $f$  nie ma punktu stałego, musi być fałszywe.  $\square$

## Dodatek D

# Pakiety do obliczeń symbolicznych II

napisali: Michał Jóźwikowski, Sławomir Kolasiński

### D.1 Wstęp

W niniejszym dodatku chcielibyśmy zaprezentować Czytelnikowi zestaw sytuacji, w których użycie programów typu *CAS* (ang. *Computer Algebra Systems*) przydaje się podczas rozwiązywania problemów matematycznych. Spośród wielu obecnie dostępnych tego typu narzędzi (zob. [5]) skoncentrujemy się głównie na komercyjnym programie *Mathematica*, dostępnym w wersji 10.0 dla studentów wydziału MIM na maszynie *students*. Domyslnie zakładamy, że Czytelnik potrafi samodzielnie wykonywać podstawowe operacje arytmetyczne i algebraiczne w programie *Mathematica*. Użycie większości z nich jest bardzo intuicyjne, a ewentualne niejasności powinna rozwiać lektura pierwszego rozdziału poprzedniej części niniejszego dodatku [3]. Dobrym źródłem informacji jest także dokumentacja programu *Mathematica* dostępna online [2].

Zagadnienia poruszane w tym dodatku zgrupowaliśmy w kontekście tematycznym w kilku rozdziałach, których objętość z powodzeniem powinna zmieścić się podczas pojętych zajęć laboratoryjnych. Na początku każdego rozdziału przedstawiamy listę zagadnień, które będą w nim poruszane wraz z odniesieniami do odpowiednich rozdziałów skryptu z Analizy Matematycznej II [4]. Prezentujemy też listę najważniejszych poleceń programu *Mathematica* (wraz z krótkimi opisami), które Czytelnik powinien przyswoić. Dodatkowo dla większości polecen *Mathematica* podajemy odpowiadające im polecenia programu *Sage*. Podstawowe informacje o sposobie użycia danego polecenia można otrzymać wpisując w *Mathematica* znak zapytania przed poleceniem, a w *Sage* znak zapytania po poleceniu, np. `?Plot3D` w *Mathematica* lub `plot3d?` w *Sage*.

*Sage* jest wolnym oprogramowaniem typu *CAS*. Precyźniej rzecz ujmując, *Sage* zapewnia jednorodny interfejs do wielu programów typu *CAS* specjalizujących się w różnych dziedzinach obliczeń matematycznych – np. rachunek różniczkowy i całkowy jest obsługiwany w *Sage* przez program *Maxima*. Pod adresem [sage.mimuw.edu.pl](http://sage.mimuw.edu.pl) działa interfejs WWW do *Sage*, więc każdy student może z niego skorzystać bez potrzeby instalowania czegokolwiek na własnym komputerze.

Na koniec warto poruszyć zagadnienie wiarygodności i przydatności komputera w matematyce. Jak dotąd, komputery nie potrafią całkowicie zastąpić człowieka w procesie dowodzenia (a przede wszystkim wymyślania!) stwierdzeń matematycznych<sup>1</sup>. Niemniej jednak, ich użycie może być bardzo przydatne, już to jako narzędzi wspomagających intuicję (wszelkiego rodzaju wizualizacje, badanie przykładów, przybliżone rozwiązywanie zagadnień, itp.), już w celu odciążenia w żmudnych obliczeniach arytmetycznych bądź numerycznych. Mimo tych ewidentnych zalet generalnie zalecamy *zasadę ograniczonego zaufania* względem wyników obliczeń dostarczanych przez komputery. Po pierwsze, komputer jest w stanie zrobić tylko to, co mu każemy, a więc może ewentualnie powielać nasze własne błędy. Po drugie, w wielu przypadkach odpowiedzi mogą być obarczone błędami, wynikającymi na przykład z nieprawidłowej konstrukcji algorytmu, skończonej (i niedostatecznej) dokładności obliczeń, czy też ze złego uwarunkowania numerycznego danego problemu. Zalecamy zatem zawsze sprawdzić, czy uzyskany za pomocą komputera wynik zgadza się z naszą intuicją dotyczącą danego zagadnienia.

## D.2 Funkcje wielu zmiennych

### D.2.1 Wizualizacja funkcji

**Nowe umiejętności:** rysowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych.

**Skrypt:** Rozdział 1.2.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Sage	Komentarz
Plot3D[funkcja, zakres]	plot3d(funkcja, zakres)	trójwymiarowy wykres funkcji
ContourPlot	contour_plot	wykres poziomcowy

Jedną z podstawowych zalet programów typu CAS jest możliwość wizualizacji obiektów matematycznych. W tym rozdziale zajmiemy się przedstawianiem graficznym funkcji wielu zmiennych rzeczywistych  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Siłą rzeczy, z uwagi na trójwymiarowość naszego świata, musimy ograniczyć się do przypadków gdy  $m + n \leq 3$ .<sup>2</sup> Jako przykład rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem  $f(x, y) = (x^3 + y)e^{-2x^2-y^2}$  i narysujmy jej wykres. Służy do tego polecenie Plot3D[funkcja, zakres]:

```
f[x_, y_] := (x^3 + y) Exp[-2 x^2 - y^2];
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

Pierwsza linijka to oczywiście definicja funkcji  $f$ .

<sup>1</sup>Istnieją programy, które mogą wspomagać proces dowodzenia (ang. *proof assistant*) ale są one obecnie daleko od wejścia do powszechnego użycia w środowisku matematyków.

<sup>2</sup>Przypadek  $m = n = 1$  rozważaliśmy w Rozdziale 3 w pierwszej części niniejszego dodatku [3]. Odsyłamy tam Czytelnika po informacje na temat wykresów funkcji jednej zmiennej.

*Mathematica* pozwala na wiele sposobów dostosowywać wykres funkcji do naszych preferencji, poprzez zmianę różnych jego parametrów. Ich pełna lista dostępna jest w opisie polecenia Plot3D w dokumentacji programu [2], natomiast na potrzeby tego opracowania omówimy tylko kilka z nich, najbardziej podstawowych.<sup>3</sup> Chyba najbardziej przydatną właściwością wykresów trójwymiarowych uzyskiwanych w programie *Mathematica* jest możliwość ich oglądania pod różnymi kątami. W tym celu wystarczy „złapać” wykres myszką i obrócić go do odpowiadającego nam położenia. Zakres wartości funkcji przedstawionych na wykresie zmieniamy za pomocą parametru PlotRange -> zakres.

Parametr Mesh -> liczba (także None, albo All) służy do określenia ilości linii siatki, pokrywającej rysowaną powierzchnię. Standardowo linie siatki to po prostu obrązy odpowiednich linii siatki na płaszczyźnie  $xy$  przy przekształceniu  $f$ , ale i to ustalenie można łatwo zmodyfikować za pomocą komendy MeshFunctions -> siatka, gdzie siatka jest domyślnie funkcją trzech zmiennych  $x, y$  i  $z$ . Jeśli np. chcemy zaznaczyć na wykresie funkcji  $f$  jej poziomice (czyli linie odpowiadające stałej wartości  $z = f(x, y)$ ), powinniśmy użyć funkcji  $(x, y, z) \mapsto z$ . Możemy to zrobić na dwa sposoby:

```
MeshFunctions -> Function[{x, y, z}, z]
```

albo

```
MeshFunctions -> {#3 &}
```

Pierwszy ze sposobów chyba nie wymaga specjalnego komentarza. W drugim natomiast komenda #3 odwołuje się do trzeciej z domyślnych zmiennych  $(x, y, z)$ , zaś & oznacza operację ewaluacji. Przykłady rysunków wykonanych z użyciem komendy MeshFunctions -> siatka można zobaczyć w drugim rozdziale tego skryptu.

Ostatni z parametrów zmieniających wygląd wykresu, który chcemy tutaj omówić to ColorFunction -> funkcja kolorująca, który zmienia sposób kolorowania wykresu. Jego użycie jest podobne do użycia parametru MeshFunctions, z tym, że wartości funkcji kolorującej powinny zwracać schemat barw (dobrze więc użyć jednej z funkcji Hue, RGBColor, GrayLevel, czy CMYKColor – po szczególomy odsyłamy do dokumentacji [2]), na przykład ColorFunction -> {Hue[#1 #2] &}.

Czasem warto też ustawić parametr ColorFunctionScaling -> False co spowoduje, że argumenty przekazywane do funkcji kolorującej nie zostaną znormalizowane. *Mathematica* dysponuje też sporą bazą gotowych stylów graficznych. Za pomocą komendy ColorData["Gradients"] można wywołać ich pełną listę. Przykładowo, Rysunek D.1 użyjemy, wpisując w *Mathematica* polecenie

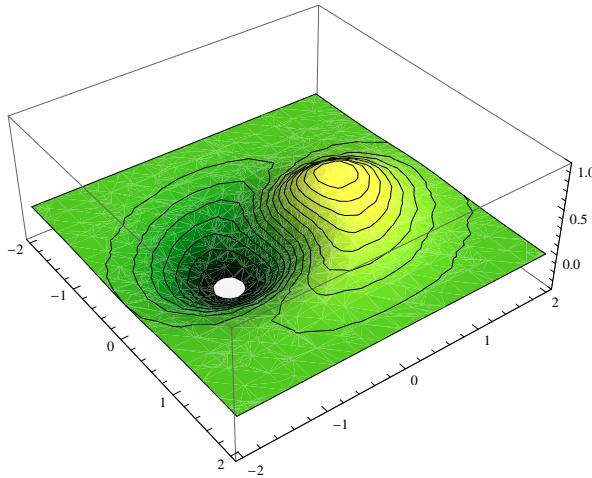
```
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotRange -> {-0.4, 1},  
Mesh -> 15, MeshFunctions -> {#3 &}, ColorFunction -> "AvocadoColors"]
```

Przy okazji omawiania polecenia Plot3D warto zwrócić uwagę na ważną kwestię techniczną. Przykładowo, narysujmy wykres funkcji  $\sin(x^2y)$  nad dziedziną  $[2, 7] \times [0, 4] \ni (x, y)$ :

```
Plot3D[Sin[x^2 y], {x, 2, 7}, {y, 0, 4}]
```

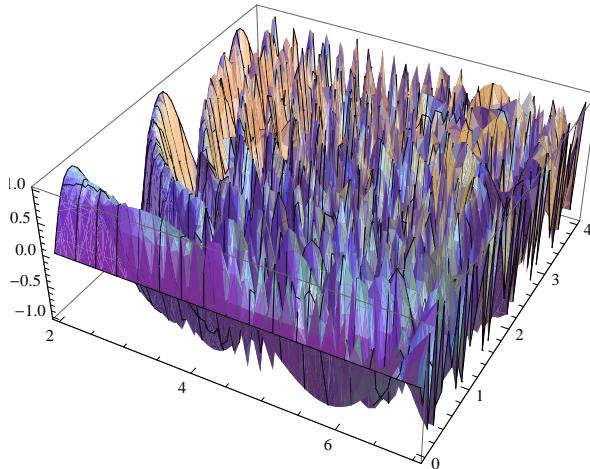
---

<sup>3</sup>Począwszy od wersji 10.0, w *Mathematica* dostępna jest komenda PlotTheme, która w prosty sposób pozwala wybrać styl wykresu pasujący do podstawowych zastosowań.



Rysunek D.1: Przykład wykorzystania funkcji kolorującej.

Już pierwsze spojrzenie na otrzymany obrazek (zob. Rysunek D.2) wystarcza, by stwierdzić, że coś jest nie w porządku: wykres jest bardzo nieregularny, podczas gdy funkcja, której użyliśmy, jest elementarna. Mniej intuicyjny argument może być taki: na krzywych  $x^2y = \pi/2 + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest całkowite, nasza funkcja powinna mieć stałą wartość 1, ale na wykresie ewidentnie nie obserwujemy takiego zachowania.



Rysunek D.2: Funkcje, które szybko oscylują mogą być niepoprawnie wykreślone ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń.

Problem, z którym mamy tutaj do czynienia wynika ze sposobu w jaki program *Mathematica* konstruuje wykresy: komputer oblicza wartości funkcji na skończonej siatce punktów, a następnie aproksymuje wartości pośrednie i na tej podstawie buduje wykres. W przypadku funkcji szybkozmiennej (takiej jak badany przez nas sinus), zdarza się, że częstotliwość próbkowania jest zbyt mała, aby dobrze wychwycić zachowanie się funkcji. W takiej sytuacji możemy zwiększyć dokładność zmieniając parametry `PlotPoints` i `MaxRecursion`. Pierwszy z nich określa gęstość próbkowania, natomiast drugi określa maksymalną liczbę podziałów używanych do wyznaczania wartości w punktach po-

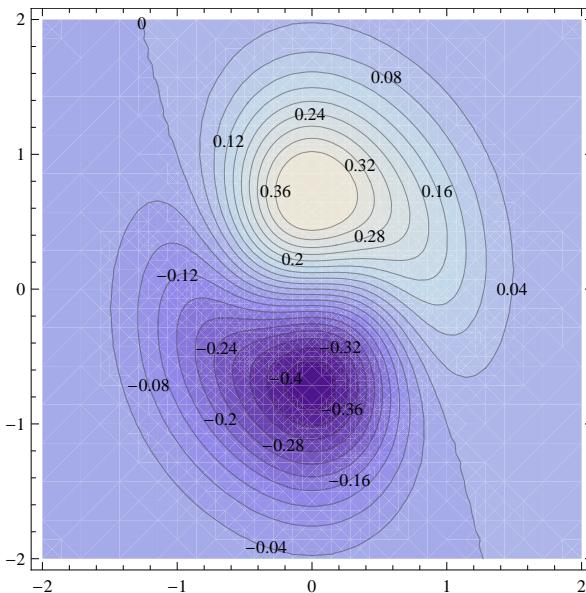
średnich. W rozważanym przykładzie zmiana powyższych parametrów pozwala uzyskać obraz dużo bardziej odpowiadający naszej intuicji:

```
Plot3D[Sin[x^2 y], {x, 2, 7}, {y, 0, 4}, PlotPoints -> 40, MaxRecursion -> 3]
```

Należy przy tym podkreślić, że zwiększenie dokładności rysowania odbywa się często kosztem znacznego zwiększenia czasu wykonywania danego polecenia.

Na koniec omówimy jeszcze jeden sposób wizualizacji funkcji wielu zmiennych za pomocą wykresu poziomickiego. Służy do tego polecenie `ContourPlot[funkcja, zakres]` znane już nam z pierwszej części tego dodatku [3]. Rysunek D.3 otrzymamy wykonując polecenie

```
ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
Contours -> 20, ContourLabels -> True]
```



Rysunek D.3: Wykres poziomicki funkcji  $f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-2x^2 - y^2)$ .

Wykres poziomicki przypomina mapę hipsometryczną: każdej parze współrzędnych  $(x, y)$  przypisujemy kolor odpowiadający wartości funkcji  $f(x, y)$  (wysokości). Styl wykresu poziomickiego możemy zmieniać podobnie, jak styl wykresu `Plot3D`. Warto wspomnieć o parametrze `Contours -> liczba`, który określa, ile poziomów będzie widocznych na wykresie. Domyslnie, poziomice rozłożone są równomiernie w zakresie wartości przyjmowanym przez funkcję. Jeżeli chcemy narysować poziomice odpowiadające konkretnym wartościom funkcji, możemy to zrobić, używając polecenia `Contours -> lista`, na przykład `Contours -> {-2, 1, 0, Pi, 8}`. Wartości odpowiadające danej poziomicy będą widoczne na wykresie po ustawieniu parametru `ContourLabels` na `True`.

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.2.1.** Narysuj wykres trójwymiarowy i wykres poziomicki funkcji  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$ .

**Zadanie D.2.2.** Narysuj wykres trójwymiarowy funkcji  $f(x, y) = \sin(xy)e^{-x^2}$  i zaznacz na nim linie siatki, które są obrazami krzywych  $xy^2 = \text{const}$  przy przekształceniu  $f$ .

## D.2.2 Granica i ciągłość funkcji

**Nowe umiejętności:** badanie granic funkcji wielu zmiennych.

**Skrypt:** Rozdział 1.2.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Sage	Komentarz
<code>Limit [funkcja, granica]</code>	<code>limit [funkcja, granica]</code>	granica funkcji

W programie *Mathematica* nie ma możliwości obliczania granic funkcji dwóch i więcej zmiennych. Nie powinno to dziwić, gdyż nawet w przypadku funkcji elementarnych badanie ciągłości bywa nietrywialną sprawą. Tym niemniej w *Mathematica* dość dobrze potrafimy sobie radzić z granicami funkcji jednej zmiennej. Używamy do tego polecenia `Limit`, które zostało szczegółowo omówione w pierwszej części tego dodatku [3]. Spróbujmy pokazać jego zastosowania w teorii funkcji wielu zmiennych na poniższym przykładzie.

**Zadanie D.2.3.** Zbadaj ciągłość funkcji

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \\ y^x & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \setminus \{(0, 0)\} \end{cases}$$

w punkcie  $(0, 0)$ . Zbadaj ciągłość tej funkcji wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez punkt  $(0, 0)$ .

**Rozwiązanie:**

Zacznijmy od zbadania funkcji  $g$  wzdłuż prostych przechodzących przez punkt  $(0, 0)$ . Każda taką prostą (z wyjątkiem prostej pionowej  $x = 0$ ) można opisać równaniem  $y = ax$ , gdzie  $a$  jest parametrem rzeczywistym. Spróbujmy obliczyć granicę wzdłuż takiej prostej

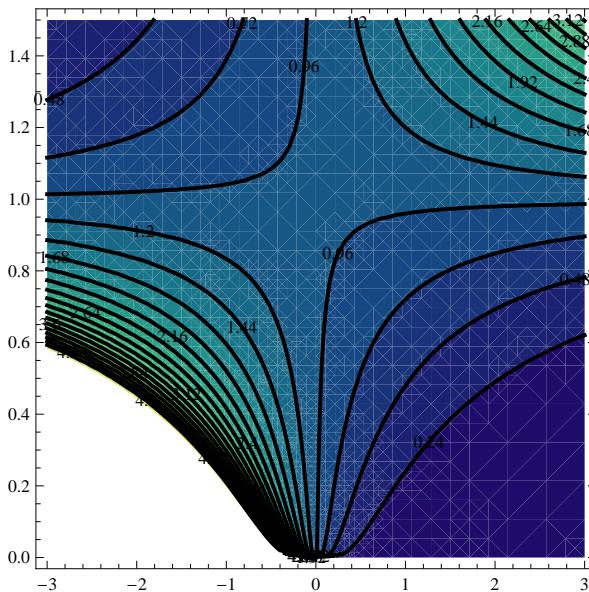
```
g[x_, y_] := y^x;
Limit[g[x, a x], x -> 0]
```

Odpowiedzią jest 1, co nietrudno uzasadnić też prostym rachunkiem: dla  $a > 0$  mamy  $g(x, ax) = (ax)^x = a^x \cdot e^{x \ln x}$ . Wobec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ , ostatnie wyrażenie zbiega do  $a^0 \cdot e^0 = 1$ . Przy obliczaniu granic przy pomocy programu *Mathematica* należy zachować pewną ostrożność, gdyż domyślnie *Mathematica* liczy granicę prawostronną, a więc wyrażenie `Limit[g[x, a x], x -> 0]` jest rozpatrywane dla  $x > 0$ . Aby sprawdzić, że powyższa granica wynosi 1 także dla  $x < 0$  powinniśmy dokonać jeszcze jednego obliczenia (ścisłe uzasadnienie tego wyniku, jak również rozważenie przypadku prostej pionowej pozostawiamy Czytelnikowi).

```
Limit[g[x, a x], x -> 0, Direction -> -1]
```

Jak widać, granicą funkcji  $g$  wzdłuż każdej rozważanej prostej jest 1. Ten wynik bynajmniej nie oznacza automatycznie ciągłości  $g$  w  $(0,0)$ . Wskazówki do rozstrzygnięcia tej kwestii może dostarczyć wykres poziomnicowy – patrz Rysunek D.4.

```
ContourPlot[y^x, {x, -3, 3}, {y, 0, 1.5}, ContourLabels -> True,
ColorFunction -> "BlueGreenYellow", Contours -> 20, ContourStyle -> Thick]
```



Rysunek D.4: Wykres poziomnicowy funkcji  $f(x,y) = y^x$ .

Rysunek D.4 sugeruje, że dowolnie blisko punktu  $(0,0)$  znajdziemy dowolnie duże wartości funkcji  $g$ , a więc będzie ona nieciągła w tym punkcie. Tę intuicję nietrudno uzasadnić w sposób ścisły. Istotnie, poziomica  $g$  odpowiadająca wartości  $c \in \mathbb{R}$  ma równanie  $y^x = c$ , co daje nam krzywą  $(x(y), y) = (\frac{\ln c}{\ln y}, y)$ . Jest jasne, że przy  $y \rightarrow 0+$  punkty tej krzywej zbiegają do punktu  $(0,0)$ . Z kolei wartość funkcji  $g$  na każdej takiej krzywej jest stała i wynosi  $c$ . Wykazaliśmy zatem, że  $g$  nie jest ciągła w  $(0,0)$ , mimo iż jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez ten punkt.

#### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.2.4.** Korzystając z oprogramowania CAS zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+2y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

w punkcie  $(0,0)$  i wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez  $(0,0)$ .

**Zadanie D.2.5.** Rozważmy funkcję  $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)}$ . Wykaż, że granica tej funkcji w punkcie  $x = 0$  nie istnieje, mimo że polecenie `Limit[Sqrt[1 - Cos[x]]/Sin[x], x -> 0]` zwraca liczbę  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Gdzie tkwi błąd?

## D.3 Macierze

**Nowe umiejętności:** Definiowanie i operacje na macierzach. Doprowadzanie macierzy do postaci Jordana. Badanie dodatniej określoności macierzy.

**Skrypt:** Twierdzenie 2.66

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Sage	Opis
<code>{ {a1,b1}, {a2,b2} }</code>	<code>matrix([ [a1,b1], [a2,b2] ])</code>	tworzy macierz
<code>Det[M]</code>	<code>M.det()</code>	wyznacznik macierzy
<code>Tr[M]</code>	<code>M.trace()</code>	ślad macierzy
<code>Inverse[M]</code>	<code>M.I</code>	macierz odwrotna
<code>Eigenvalues[M]</code>	<code>M.eigenvalues()</code>	wartości własne macierzy
<code>Eigenvectors[M]</code>	<code>M.eigenvectors_left()</code>	wektory własne macierzy
<code>JordanDecomposition[M]</code>	<code>M.jordan_form(QQbar)<sup>4</sup></code>	macierz w postaci klatekowej Jordana
<code>Minors[M,k]</code>	<code>M.minors(k)</code>	macierz minorów rzędu $k$
<code>MatrixRank[M]</code>	<code>M.rank()</code>	rzad macierzy

Jak wiadomo z wykładu, patrz Rozdział 2.1, różniczkę odwzorowania  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (będącą z definicji przekształceniem liniowym) można reprezentować za pomocą jej macierzy Jacobiego (por. Rozdział D.4). Dlatego w obliczeniach związanych z funkcjami wielu zmiennych nieodzowne są operacje na macierzach.

W *Mathematica* macierz dwuwymiarową definiujemy jako wektor wierszy. Poniżej definicja przykładowych dwóch macierzy i wektora.

```
M = {{1,1,1},{1,2,3},{3,5,8}}
N = {{1,0,1},{0,1,1},{0,2,5}}
v = {1,0,0}
```

By wyświetlić macierz w bardziej naturalnej postaci możemy posłużyć się poleceniem `MatrixForm[M]`. By odczytać wartość z pozycji  $(i, j)$  piszemy `M[[i,j]]`, by wyłuskać  $i$ -ty wiersz `M[[i]]`, a by otrzymać  $j$ -tą kolumnę `M[[All,j]]`. Z łatwością obliczamy wyznacznik, ślad, iloczyn dwóch macierzy, iloczyn macierzy i wektora oraz macierz odwrotną za pomocą polecień

```
Det[M] ; Tr[M] ; M.N ; M.v ; Inverse[M]
```

<sup>4</sup>Parametr `QQbar` mówi, nad jakim ciałem lub pierścieniem *Sage* ma szukać postaci Jordana. Symbol `QQbar` oznacza algebraiczne domknięcie ciała liczb wymiernych. Ze względu na niestabilność numeryczną zastosowanych algorytmów, pakiet *Sage* raczej odmówi obliczenia postaci Jordana macierzy w ciele liczb zespolonych `CC` lub rzeczywistych `RR` zamiast podawać niedokładny wynik.

*Uwaga:* W *Mathematica* istnieje też operacja oznaczana gwiazdką, t.j.  $M*N$ , która wykonuje mnożenie odpowiadających sobie elementów macierzy, t.j.  $(M * N)_{i,j} = M_{i,j} * N_{i,j}$ . Jak przy zwykłym mnożeniu gwiazdkę można pominąć i napisać po prostu  $M \cdot N$ . W *Sage* notacja  $M*N$  oznacza standardowe mnożenie macierzy.

Równie łatwo dowiadujemy się, że wartości własne macierzy  $N$ , to  $1, 3+\sqrt{6}$  oraz  $3-\sqrt{6}$ , znajdujemy jej wektory własne oraz odnajdujemy jej postać Jordana wraz z macierzą zmiany bazy

```
Eigenvalues[N]
Eigenvectors[N]
JordanDecomposition[N]
Map[MatrixForm,%]
```

W ostatnim wierszu posłużyliśmy się funkcją `Map`, która aplikuje operację `MatrixForm` do każdego elementu wektora `%` zwróconego przez ostatnie wykonane polecenie.

Dalej, za pomocą wbudowanej operacji `Minors`, zdefiniujemy funkcję, która oblicza macierz dołączoną:

```
adj[m_] := Map[Reverse, Minors[Transpose[m], Length[m] - 1], {0, 1}] *
Table[(-1)^(i + j), {i, Length[m]}, {j, Length[m]}]
```

Normę Frobeniusa macierzy można obliczyć na kilka sposobów:

```
Sqrt[m . ConjugateTranspose[m]]
Norm[Flatten[m]]
Norm[m, "Frobenius"]
```

**Zadanie D.3.1.** Zbadaj, czy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

jest dodatnio określona.

### Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium Sylwestera (Twierdzenie 2.66). W tym celu obliczymy wyznaczniki podmacierzy  $A$  złożonych z pierwszych  $j$  kolumn i pierwszych  $j$  wierszy dla  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Posłużymy się funkcją `Take`[lista, j], która wybiera z listy  $j$  pierwszych elementów.

```
A = {{1,2,3,4},{2,5,6,7},{3,6,8,9},{4,7,9,10}}
Table[Det[Take[Transpose[Take[A,j]],j]],{j,1,4}]
```

Jako wynik otrzymujemy wektor  $(1, 1, -1, -2)$ , więc, na mocy kryterium Sylwestera, macierz  $A$  nie jest dodatnio określona.

Powyższe zadanie możemy też rozwiązać, obliczając wartości własne macierzy  $A$ . Wykonując polecenie

```
N[Eigenvalues[A]]
```

dowiadujemy się, że jedna z wartości własnych ma w przybliżeniu wartość  $-0.8$ . To pojęcie pozwala nam znaleźć przykładowy wektor  $v$ , dla którego  $v^T A v < 0$ . Wykonujemy

```
N[Eigenvectors[A]]
```

Wektor  $v$  odpowiadający ujemnej wartości własnej powinien spełniać  $v^T A v < 0$ . W istocie, wpisujemy

```
v = {-1.222, -0.5366, -0.24, 1}
v.(A.v)
```

i dowiadujemy się, że dla tego wektora  $v^T A v \simeq -2.28$ .

*Uwaga:* W *Mathematica* wektor to uporządkowany zbiór liczb, więc nie ma sensu operacja Transpose[v], gdyż wektory ‘nie wiedzą’, czy są ustawione poziomo, czy może jednak pionowo. W powyższym przykładzie kropka . w wyrażeniu v.(A.v) ma dwa różne znaczenia: raz oznacza mnożenie macierzy przez wektor, a drugi raz – iloczyn skalarny. Formalnie rzecz biorąc, pisząc  $v^T A v$ , domyślnie utożsamiamy wektor  $v$  z odpowiadającą mu macierzą o jednej kolumnie i czterech wierszach, a wynik, który formalnie jest macierzą o wymiarach  $1 \times 1$ , utożsamiamy z liczbą rzeczywistą. *Mathematica* nie wie o takich utożsamieniach, więc chcąc zdefiniować macierz odpowiadającą wektorowi  $(a, b, c)^T$  musimy napisać {{a, b, c}}, a żeby zdefiniować macierz  $(a, b, c)$  piszemy {{a}, {b}, {c}}.

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.3.2.** Zdefiniuj funkcję, obliczającą normę operatorową macierzy.

**Zadanie D.3.3.** Zdefiniuj w *Mathematica* macierze  $A = (a \ b \ c)$  oraz  $B = (d \ e \ f)^T$  i wykonaj operacje  $A.B$ ,  $B.A$  oraz  $A*B$ .

**Zadanie D.3.4.** Zbadaj, czy poniższe macierze są dodatnio określone:

$$A = \begin{pmatrix} 174 & 51 & 32 & 32 \\ 51 & 30 & -4 & 15 \\ 32 & -4 & 36 & -26 \\ 32 & 15 & -26 & 54 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Zadanie D.3.5.** Znajdź postaci kanoniczne form kwadratowych odpowiadających powyższym macierzom, tzn. znajdź przedstawienie każdej z macierzy  $A$  i  $B$  w postaci  $E^T D E$ , gdzie  $D$  jest macierzą diagonalną.

## D.4 Pochodna funkcji wielu zmiennych i jej zastosowania

### D.4.1 Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych

**Nowe umiejętności:** Obliczanie pochodnych cząstkowych, macierzy Jacobiego, hesjanu i pochodnej kierunkowej funkcji wielu zmiennych.

**Skrypt:** Rozdziały 2.1–2.3.

### Nowe funkcje:

<i>Mathematica</i>	<i>Sage</i>	Komentarz
D, Derivative VectorPlot	diff, derivative plot_vector_field	pochodna cząstkowa wykres pola wektorowego

W programie *Mathematica* za pomocą polecenia  $D[funkcja, zmienna]$  możemy obliczać pochodne cząstkowe. Parametr *zmienna* oznacza zmienną (lub sekwencję zmiennych), względem której różniczkujemy. Na przykład,

```
g[x_, y_] := x^2 + y^3 + x y^2;
D[g[x,y],x]
```

zwróci nam wynik  $2x + y^2$  (czyli pochodną cząstkową  $\frac{\partial g}{\partial x}$  funkcji  $g(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy^2$ ), zaś po wpisaniu polecenia  $D[g[x,y],y]$  otrzymamy  $3y^2 + 2xy$ . Pochodne wyższych rzędów obliczamy, dodając po przecinku kolejne zmienne. Na przykład, komenda  $D[g[x,y],x,y]$  zwróci nam wartość  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2y$ . Zamiast  $D[g[x,y],x,x]$  możemy też użyć konstrukcji  $D[g[x,y],{x,2}]$ . Czasem wygodnie jest też użyć alternatywnej notacji

```
Derivative[a,b][g][x,y]
```

gdzie  $a$  oznacza ilość różniczkowań względem pierwszej, zaś  $b$  – względem drugiej zmiennej. W poprzedniej notacji ten sam efekt dałaby komenda  $D[g[x,y], {x, a}, {y, b}]$ .

Jak wiadomo z wykładu (patrz Uwaga 2.13), różniczkę zupełną odwzorowania  $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  określonego na otwartym podzbiorze  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (która z definicji jest *przekształceniem liniowym*, a nie macierzą!) można przedstawić w standardowych bazach  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  za pomocą macierzy jej pochodnych cząstkowych  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$  (tak zwanej *macierzy Jacobiego*). *Mathematica* pozwala w prosty sposób obliczać macierz Jacobiego za pomocą znanej już nam komendy  $D$ . W tym celu wystarczy zamiast zmiennej, względem której różniczkujemy, podstawić listę takich zmiennych. Przykładowo, niech przekształcenie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie dane wzorem  $f(x, y) = (x + y, xy, \sin(x))$ . By obliczyć macierz Jacobiego odwzorowania  $f$ , wystarczy wpisać

```
D[{x+y, x y, Sin[x]}, {{x,y}}];
MatrixForm[%]
```

W szczególnym przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych możemy w ten sposób obliczyć jej gradient. Na przykład dla funkcji  $g(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy^2$  rozważanej wcześniej, jej gradient to

```
D[g[x, y], {{x, y}}]
MatrixForm[%]
```

– co daje wynik  $\text{grad } g(x, y) = (2x + y^2, 2xy + 3y^2)$ .

Bardzo podobne polecenie pozwala obliczyć *hesjan* funkcji  $g$ , czyli macierz jej drugich pochodnych cząstkowych. W tym celu wystarczy użyć komendy

```
D[g[x, y], {{x, y}, 2}]
MatrixForm[%]
```

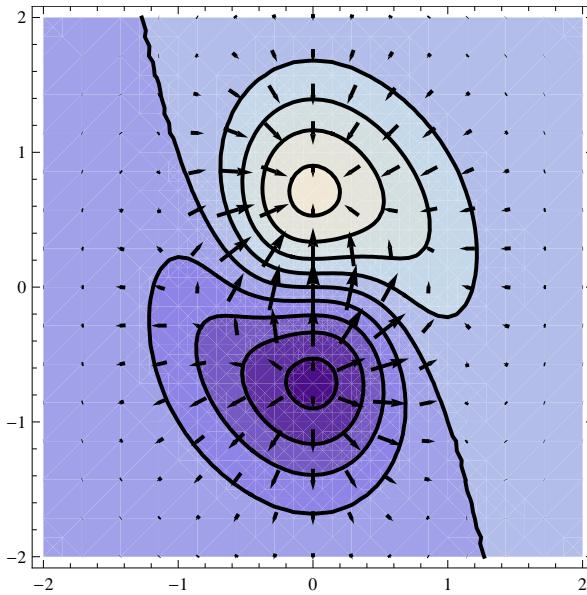
**Zadanie D.4.1.** Dla przykładu, wyznaczmy gradient funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , danej wzorem  $f(x, y) = (x^3 + y)e^{-2x^2 - y^2}$ , rozważanej wcześniej w Rozdziale D.2 i spróbujmy zaznaczyć pole gradientowe funkcji  $f$  (pole wektorów będących gradientami funkcji  $f$  w różnych punktach płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ ) na jej wykresie poziomickowym. Przypomnijmy, że wobec Twierdzenia 2.34 należy się spodziewać, iż pole gradientowe będzie prostopadłe do poziomic  $f$ .

### Rozwiążanie:

Umiemy już obliczać gradient funkcji i rysować jej wykres poziomickowy. Aby narysować wykres pola wektorowego, używamy komendy `VectorPlot[pole, zakres]`. Sekwencja komend:<sup>5</sup>

```
f[x_, y_] := (x^3 + y) Exp[-2 x^2 - y^2];
poziomice = ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
ContourStyle -> {Thick}];
grad[x_, y_] := {Derivative[1, 0][f][x, y], Derivative[0, 1][f][x, y]};
pole = VectorPlot[grad[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
VectorStyle -> {Black, Thick}];
Show[poziomice, pole]
```

generuje Rysunek D.5, zgodny z tezą Twierdzenia 2.34.



Rysunek D.5: Pole gradientowe funkcji  $f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-2x^2 - y^2)$ .

Użyjmy teraz zdobytych umiejętności do obliczenia pochodnej kierunkowej.

**Zadanie D.4.2.** Oblicz pochodną kierunkową funkcji  $g(x, y) = x^2 + xy^2 + y^3$  w kierunku wektora  $(1, 2)$ .

---

<sup>5</sup>Do zdefiniowania gradientu (jako funkcji zmiennych  $x$  i  $y$ ) użyliśmy tutaj polecenia `Derivative` za miast `D`. Różnica jest taka, że wyrażenie `D[f[x,y],x]` Mathematica traktuje jako wartość pochodnej w punkcie  $(x, y)$ , zaś `Derivative[1,0][f][x,y]` to pochodna, rozumiana jako funkcja zmiennych  $(x, y)$  (Czytelnik zechce sprawdzić, jaką wartość ma `Derivative[1,0][f]`). W związku z tym definicja `grad[x_, y_]:=D[f[x,y],{{x,y}}]` nie zostanie potraktowana jak pole wektorowe, ale jak liczba.

**Rozwiązańie:**

Z Definicji 2.5  $D_v f(a)$ , tzn. pochodna kierunkowa funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  w kierunku wektora  $v \in \mathbb{R}^n$  w punkcie  $a \in \mathbb{R}^n$ , to zwykła pochodna funkcji  $f$ , rozważanej wzduż prostej  $t \mapsto a + t \cdot v$  w punkcie  $t = 0$ . Wobec tego, sekwencja komend

```
g[x_, y_] := x^2 + x y^2 + y^3;
g1[x_, y_, t_] := g[x + t, y + 2 t];
Derivative[0, 0, 1][g1][x, y, 0]
```

zwróci nam w wyniku żadaną pochodną kierunkową, czyli  $2x + 4xy + 7y^2$ .

Alternatywnym sposobem rozwiązyania powyższego zadania jest użycie różniczki zupełnej. Jak wynika z Wniosku 2.11, pochodna kierunkowa funkcji  $f$  w kierunku  $v$  w punkcie  $a$  to wartość różniczki zupełnej  $Df(a)$  na wektorze  $v$ , tzn.  $D_v f(a) = Df(a) \cdot v$ . Wobec tego, wystarczy wykonać polecenia

```
D[g[x, y], {{x, y}}];
%. {1,2};
Factor[%]
```

**Zadanie D.4.3.** Rozważmy funkcję  $f_k(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^k$ , zależną od parametru  $k \in \mathbb{R}$  i określoną na zbiorze  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Rozstrzygnij dla jakich wartości parametru  $k$  laplasjan funkcji  $F_k$  znika w całej dziedzinie.

**Rozwiązańie:**

Przypomnijmy, że na wykładzie (Definicja 7.37) zdefiniowaliśmy Laplasjan jako dywergencję gradientu. We współrzędnych euklidesowych w  $\mathbb{R}^3$  wielkość ta wyraża się jako suma pochodnych cząstkowych drugiego rzędu po wszystkich zmiennych

$$\Delta f_k(x, y, z) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f_k}{\partial z^2}(x, y, z).$$

Używając programu *Mathematica* możemy sobie łatwo oszczędzić wielu żmudnych rachunków przy obliczaniu powyższego wyrażenia

```
fk[x_, y_, z_] := (x^2 + y^2 + z^2)^k;
Derivative[2, 0, 0][fk][x, y, z] + Derivative[0, 2, 0][fk][x, y, z] +
Derivative[0, 0, 2][fk][x, y, z];
Simplify[%]
```

Wynikiem jest  $2k(1+2k)(x^2 + y^2 + z^2)^{(k-1)}$ . Jak widać to wyrażenie znika tożsamościowo w dziedzinie funkcji  $F_k$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $2k(1+2k) = 0$ , daje to nam dokładnie dwa rozwiązania:  $f_0 \equiv 1$  oraz  $f_{-\frac{1}{2}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ .

*Uwaga.* Równanie  $\Delta f = 0$  gdzie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją gładką określoną na zbiorze otwartym  $U \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy *równaniem Laplace'a*. W fizyce opisuje ono, między innymi, potencjał elektrostatyczny w obszarze  $U$ , w którym nie ma ładunku elektrycznego. Otrzymane przez nas rozwiązanie  $F_{-\frac{1}{2}}$  odpowiada potencjałowi ładunku punktowego umieszczonego w punkcie  $(0, 0, 0)$ .

Rozwiązań równania Laplace'a to tak zwane *funkcje harmoniczne*. Mają one bardzo wiele ciekawych własności, między innymi tak zwaną *własność wartości średniej*: średnia wartości funkcji harmonicznej  $f$  w dowolnej kuli  $B(x, r) \subset U$  jest równa wartości  $f$  w środku tej kuli, czyli  $f(x)$ .

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.4.4** (Helikoida). Korzystając z oprogramowania typu CAS sprawdź, że funkcja  $f(x, y) = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{y}{x} \right)$  określona na zbiorze  $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  spełnia, dla dowolnej wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , równanie

$$\left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Narysuj wykres funkcji  $f$ .

*Uwaga.* Powyższe równanie opisuje (lokalnie) tak zwane *powierzchnie minimalne*, to jest powierzchnie, jakie tworzy bańka mydlana, rozpięta na drucianej ramce w trójwymiarowej przestrzeni. Wykres rozważanej funkcji  $f$  nazywamy *helikoidą*. Jest to historycznie trzecia znana powierzchnia minimalna.

**Zadanie D.4.5.** Oblicz pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  w kierunku wektora  $(-1, 2)$  w punkcie  $(3, 1)$ .

**Zadanie D.4.6.** Sprawdź, że funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x, y) = e^x [\cos(y)(x^2 - y^2) - 2 \sin(y)xy]$$

jest harmoniczna, tzn. spełnia równanie  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  w każdym punkcie swojej dziedziny.

**Zadanie D.4.7.** Dla funkcji  $f$  z poprzedniego zadania oblicz numeryczne przybliżenie wyrażenia  $\pi^{-1} \int_{B(p,1)} f(x) dx$  dla  $p = (1, 1)$ . Porównaj wynik z wartością  $f(p)$ .

## D.4.2 Dyfeomorfizmy

**Nowe umiejętności:** badanie dyfeomorfizmów zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^n$ .

**Skrypt:** Rozdziały 3.2 i 3.4.

### Nowe funkcje:

Mathematica	Sage	Komentarz
Composition	Brak	złożenie funkcji
Solve[f[x]==0,x]	solve(f(x),x)	rozwiązywanie równań

Przypomnijmy (patrz Definicja 3.19), że dyfeomorfizm  $f : \Omega \rightarrow U$  między zbiorami otwartymi  $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$  to różniczkowalny homeomorfizm tych zbiorów, dla którego przekształcenie odwrotne  $f^{-1}$  też jest różniczkowalne. Z praktycznego punktu widzenia, sprawdzenie, czy dane przekształcenie jest dyfeomorfizmem, jest dość proste: na mocy Twierdzenia 3.9 (o funkcji odwrotnej) dana funkcja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest dyfeomorfizmem na

obraz, gdy jest różniczka zupełna  $Df$  jest odwracalna w każdym punkcie dziedziny. Ostatnią własność można z kolei łatwo sprawdzić, obliczając wyznacznik odpowiedniej macierzy Jacobiego (*Jacobian*).

Przykładowo, rozważmy przekształcenie  $G(x, y) = (x + \frac{1}{5}(x^2 - 1)\sin(\pi y), y)$ . Sprawdzimy że jest to dyfeomorfizm kwadratu jednostkowego  $(0, 1)^2$  w siebie.<sup>6</sup>

```
G[x_, y_] := {x + (x^2 - 1)/5 Sin[Pi y], y}
D[G[x, y], {{x, y}}];
Det[%] .
```

Z powyższych rachunków wynika, że Jacobian przekształcenia  $G$  wynosi  $1 + \frac{2}{5}x\sin(\pi y)$ . W rozważanej dziedzinie  $x$  i sinus są co do wartości bezwzględnej mniejsze niż 1, a zatem obliczony wyznacznik jest zawsze różny od zera. Sprawdzenie, że odwzorowanie  $G$  jest różnicowatościowe nie powinno nastręczać specjalnych trudności. Pomijając proste rachunki łatwo się przekonać, że równanie  $G(x, y) = G(x', y')$  prowadzi do równości  $y = y'$  oraz  $(x - x')[1 + \frac{1}{5}(x + x')\sin(\pi y)] = 0$ . Z tej ostatniej wynika, że albo  $x = x'$  albo  $x + x' = \frac{-5}{\sin(\pi y)}$ . W tym ostatnim przypadku  $|x + x'| > 5$ , co prowadzi do sprzeczności, bowiem w rozważanej dziedzinie  $|x + x'| \leq 2$ .

Dość wygodnym narzędziem do wizualizacji dyfeomorfizmów określonych na podzbiorach płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  jest znane już nam polecenie `ContourPlot`. Przy jego pomocy możemy zobaczyć w jaki sposób rozważany dyfeomorfizm deformuje standardowe linie siatki kartezjańskiej w  $\mathbb{R}^2$ . Przykładowo odwzorowanie

$$F(x, y) = \left( x + \frac{1}{5}(x^2 - 1)\sin(\pi y), y + \frac{1}{10}(y^2 - 1)\sin(\pi x) \right)$$

będące modyfikacją rozważanego poprzedniego przekształcenia  $G$  zobaczymy wpisując

```
F[x_, y_] := {x + (x^2 - 1)/5 Sin[Pi y], y + (y^2 - 1)/10 Sin[Pi x]};
ContourPlot[F[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, ContourStyle -> {Thick}] .
```

W wyniku otrzymamy Rysunek D.6.

**Zadanie D.4.8.** Skonstruuj dyfeomorfizm kwadratu  $K = \{(x, y) \mid -1 < x, y < 1\}$  na płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$ .

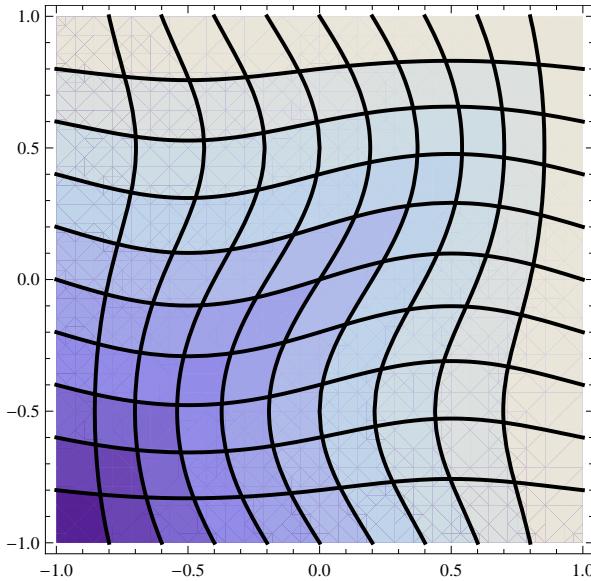
#### Rozwiązanie:

Bez trudu umiemy skonstruować dyfeomorfizm odcinka  $(-1, 1)$  na  $\mathbb{R}$ . Na przykład  $f(x) = \operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ , albo  $f(x) = \frac{x}{(x+1)(1-x)}$  są takimi dyfeomorfizmami. Naturalnym pomysłem jest teraz zbudować dyfeomorfizm  $F : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  w postaci  $F(x, y) = (f(x), f(y))$ . Sprawdzenie, że tak określone przekształcenie jest szukanym dyfeomorfizmem jest bardzo proste. Wykazanie, że  $F$  jest bijekcją  $K$  na  $\mathbb{R}^2$  pozostawiamy Czytelnikowi. Aby zakończyć dowód wystarczy teraz policzyć wyznacznik odpowiedniej macierzy Jacobiego

```
f[x_] := x/(1 - x^2);
F[x_, y_] := {f[x], f[y]};
D[F[x, y], {{x, y}}];
Simplify[Det[%]]
```

---

<sup>6</sup>Zauważmy, że  $G$  jest identycznością na brzegu kwadratu  $(0, 1)^2$ .



Rysunek D.6: Dyfeomorfizm kwadratu jednostkowego w siebie.

i zaobserwować, że jest on niezerowy w kwadracie  $K$ .

**Zadanie D.4.9.** Skonstruuj dyfeomorfizm kwadratu  $\{(x, y) \mid -1 < x, y < 1\}$  na koło  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ .

**Rozwiązanie:**

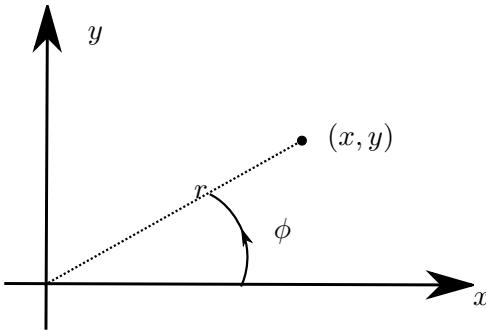
Znacznie prościej jest zbudować dyfeomorfizm płaszczyzny i koła. Na przykład  $G(x, y) = (x, y) \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$  jest takim dyfeomorfizmem (sprawdzenie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi). Używając konstrukcji odwzorowania  $F$  z poprzedniego zadania, i podstawowej własności że złożenie dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem, możemy teraz skonstruować dyfeomorfizm  $G \circ F : K \rightarrow C$  będący złożeniem  $F$  i  $G$ . Odpowiedni wzór znajdziemy łatwo przy użyciu programu *Mathematica*:

```
G[{x_, y_}] := {x, y} 1/(1 + Sqrt[x^2 + y^2]);
Composition[G, F][x, y]
```

**Przekształcenie biegunkowe.** Rozważmy teraz pewien specjalny dyfeomorfizm zbioru  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$  na obszar  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$  nazywany *przekształceniem biegunkowym* (albo *polarnym*). Typowo współrzędne w dziedzinie oznaczamy symbolami  $r$  i  $\phi$ , współrzędne w obrazie  $x, y$  zaś przekształcenie biegunkowe zadane jest przez równości

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) \\ y &= r \sin(\phi) . \end{aligned}$$

Liczba  $r$  jest odlegością punktu  $(x, y)$  od początku układu współrzędnych, zaś  $\phi$  to kąt pomiędzy osią  $OX$  a półprostą o początku w  $(0, 0)$  przechodzącą przez  $(x, y)$ , tak jak to przedstawiono na Rysunku D.7.



Rysunek D.7: Przekształcenie biegunkowe.

Nietrudno wykazać, że odwzorowanie odwrotne od przekształcenia biegunkowego zadażą równości

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\phi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{dla } x > 0, \\ \operatorname{sgn}(y) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0, \\ \operatorname{sgn}(y) \cdot \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Sprawdzenie, że przekształcenie biegunkowe istotnie jest dyfeomorfizmem pozostawiamy jako ćwiczenie.

Przydatność współrzędnych biegunkowych wynika z faktu, że z ich pomocą łatwo kontrolować odległość rozważanego punktu od początku układu współrzędnych. Przykładowo, funkcja  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$  zapisana we współrzędnych biegunkowych to  $F(r, \phi) = \frac{\sin(2\phi)}{3-\cos(2\phi)}$ . Łatwo to uzasadnić prostym rachunkiem:

```
f[x_, y_] := x y/(x^2 + 2 y^2);
x = r Cos[Phi];
y = r Sin[Phi];
Simplify[f[x, y]]
```

W tym miejscu warto dodać uwagę terminologiczną: mówimy o *funkcji f we współrzędnych biegunkowych*, ale tak naprawdę mamy na myśli funkcję złożoną  $F = \Phi \circ f : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$  jest przekształceniem biegunkowym. Takie złożenie to formalne nadanie sensu operacji zamiany zmiennych znanej na przykład z pierwszego kursu analizy i powszechnie wykorzystywanej przy całkowaniu. W języku Definicji 7.29 funkcja złożona  $F(r, \phi) = f(\Phi(r, \phi))$  to *przeciągnięcie* funkcji (0-formy różniczkowej)  $f$  za pomocą odwzorowania  $\Phi$ . Wygodnie jest też myśleć o tej operacji jak o „przeniesieniu” funkcji  $f$  określonej na przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  do przestrzeni współrzędnych biegunkowych  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ .

**Zadanie D.4.10.** Zbadaj granicę funkcji  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$  w punkcie  $(0, 0)$ .

#### Rozwiązanie:

Jak już wiemy, funkcja  $f$  wyrażona we współrzędnych biegunkowych to  $F(r, \phi) = \frac{\sin(2\phi)}{3-\cos(2\phi)}$ . Widzimy, że wyrażenie to nie zależy od  $r$  i wobec tego nie ma niezależnej od kąta  $\phi$  granicy

przy  $r \rightarrow 0_+$  (co odpowiada oczywiście  $(x, y) \rightarrow 0$ ). Widzimy zatem, że granica rozważanej funkcji w punkcie  $(0, 0)$  nie istnieje. Niemniej, łatwo się przekonać, że istnieje granica w  $(0, 0)$  wzduż każdej prostej przechodzącej przez ten punkt. Istotnie, wybór takiej prostej to nic innego jak ustalenie kąta  $\phi$ , a więc także, jak wynika ze wzoru na  $F(r, \phi)$ , wartości funkcji  $F$ .

**Zadanie D.4.11.** Zbadaj granicę funkcji  $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$  w punkcie  $(0, 0)$ .

### Rozwiązańie:

Postępując podobnie, jak poprzednio, otrzymamy wyrażenie

$$H(r, \phi) = (r^2)^{r^4 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi)},$$

opisujące funkcję  $h$  we współrzędnych biegunkowych. Intuicyjnie, wobec ograniczoności sinusa i kosinusa, rozpatrywane wyrażenie powinno zachowywać się jak  $(r^2)^{r^4 c}$ , gdzie  $c$  jest pewną stałą. Granica tego ostatniego wyrażenia przy  $r \rightarrow 0_+$  to oczywiście 1. Aby uściślić tę intuicję, zauważmy, że  $0 \leq \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) \leq 1$ , skąd dla  $r < 1$  (pamiętajmy, że rozpatrujemy granicę przy  $r \rightarrow 0_+$ ) otrzymujemy

$$(r^2)^0 \geq (r^2)^{r^4 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi)} \geq (r^2)^{r^4}.$$

Zbieżność do 1 przy  $r \rightarrow 0_+$  wynika teraz łatwo z twierdzenia o trzech funkcjach.

**Indukowany iloczyn skalarny.** Dyfeomorfizmy, czy ogólniej przekształcenia różniczkowalne, pozwalają „przenosić” obiekty matematyczne pomiędzy rozmaitościami (bądź pomiędzy różnymi punktami jednej rozmaistości). Najprostszą tego typu sytuacją było omawiane przez nas wcześniej przedstawienie funkcji we współrzędnych biegunkowych. Pokażemy teraz bardziej złożone przykłady takich operacji, również posługując się przekształceniem biegunkowym  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Przypomnijmy, że przestrzeń euklidesowa  $\mathbb{R}^2$  wyposażona jest w kanoniczny iloczyn skalarny  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , w którym kanoniczna baza wektorów  $\{e_x, e_y\}$  jest ortonormalna. Dla celów naszych rozważań, żeby podkreślić że pracujemy w kartezjańskich współrzędnych  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , będziemy oznaczać ten iloczyn skalarny przez  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)}$ .<sup>7</sup> Przekształcenie  $\Phi$  pozwala w naturalny sposób zdefiniować nowy iloczyn skalarny  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(r,\phi)}$  (tak zwany *indukowany iloczyn skalarny*) określony na przestrzeni stycznej do zbioru  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$  w punkcie  $(r, \phi)$  wzorem

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{(r,\phi)} = \langle D\Phi(\vec{v}), D\Phi(\vec{w}) \rangle_{(x,y)}, \quad \text{gdzie } (x, y) = \Phi(r, \phi).$$

Innymi słowy aby obliczyć iloczyn skalarny  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(r,\phi)}$  wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  (należących do przestrzeni stycznej do zbioru  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$  w punkcie  $(r, \phi)$ ) przekształcamy te wektory pochodną  $D\Phi$  (do przestrzeni stycznej do zbioru  $\mathbb{R}^2$  w punkcie  $(x, y) = \Phi(r, \phi)$ ) i liczymy kanoniczny iloczyn skalarny  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)}$  obrazów. Policzymy teraz jak wygląda tak zdefiniowany iloczyn skalarny w bazie  $\{e_r, e_\phi\}$ .

---

<sup>7</sup>Tak naprawdę, iloczyn  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  określony jest na przestrzeni stycznej do zbioru  $\mathbb{R}^2$  (por. Definicja 2.31) w dowolnym punkcie  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wprowadzona notacja  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)}$  podkreśla tę (niewidoczną na pierwszy rzut oka) zależność iloczywu skalarnego od punktu w  $\mathbb{R}^2$ , w którym zaczepiona jest przestrzeń styczna.

```

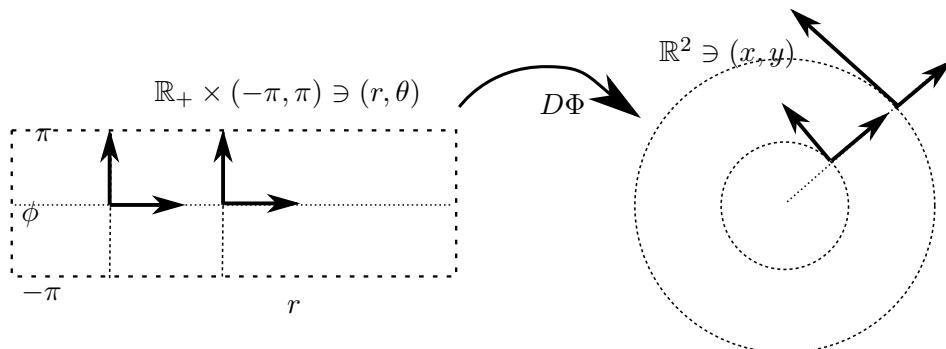
x = r Cos[Phi]; y = r Sin[Phi];
DPhi = D[{x, y}, {r, Phi}]];
V = DPhi.{a, b}; W = DPhi.{c, d};
V[[1]] W[[1]] + V[[2]] W[[2]];
Simplify[%]

```

W powyższych rozważaniach policzyliśmy obrazy wektorów  $\vec{v} = ae_r + be_\phi$  i  $\vec{w} = ce_r + de_\phi$  przy pochodnej  $D\Phi$ , a następnie ich standardowy iloczyn skalarny w  $\mathbb{R}^2$ . Wynikiem jest  $ab + r^2cd$ , co oznacza, że w bazie  $\{e_r, e_\phi\}$  iloczyn  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(r,\phi)}$  zadany jest macierzą symetryczną  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ . Jak widać baza  $\{e_r, e_\phi\}$  nie jest bazą ortonormalną (choć jest ortogonalną).

Warto też zauważyć, że formuła na iloczyn  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(r,\phi)}$  zmienia się od punktu do punktu (zależy od  $r$ ), co nie miało miejsca w przypadku standardowego iloczywu na  $\mathbb{R}^2$ . Zbiór (rozmaistość różniczkową) wyposażoną w iloczyn skalarny określony w każdym punkcie nazywa się *rozmaistością riemannowską*. Obiekty tego typu pełnią ważną rolę w wielu działach matematyki i fizyki. Na przykład w einsteinowskiej *ogólnej teorii względności* przyjmuje się, że czasoprzestrzeń jest czterowymiarową rozmaistością wyposażoną w tego typu iloczyn skalarny<sup>8</sup> (tzw. *tensor metryczny*). Iloczyn ten opisuje oddziaływanie grawitacyjne.

Spróbujmy lepiej zrozumieć geometryczną naturę iloczywu  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(r,\phi)}$ . Na Rysunku D.8



Rysunek D.8: Iloczyn skalarny przeniesiony ze współrzędnych biegunkowych do kartezjańskich.

pokazano jak pochodna  $D\Phi$  przekształca wektory  $e_r$  i  $e_\phi$  zaczepione w różnych punktach  $(r, \phi)$  przestrzeni  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ . Widzimy, że podczas gdy długość obrazu wektora  $e_r$  jest stała, to długość obrazu wektora  $e_\phi$  jest proporcjonalna do współrzędnej  $r$ . Można to łatwo zrozumieć: odcinek  $\{r\} \times (-\pi, \pi)$  o długości  $2\pi$  przekształcany jest przez  $\Phi$  na okrąg  $O(0, r)$  o obwodzie  $2\pi r$ . Widzimy zatem, że przekształcenie biegunkowe  $\Phi$  wydłuża  $r$ -krotnie kierunek zmiennej  $\phi$ . Z definicji w indukowanym iloczywie skalarnym długość wektora  $e_\phi$  musi być taka sama, jak długość jego obrazu  $D\Phi(e_\phi)$ , a zatem musi wynosić  $r$ .

<sup>8</sup>Dokładniej mówiąc, czasoprzestrzeń nie jest rozmaistością riemannowską, gdyż jej tensor metryczny nie jest dodatnio określony – w każdym punkcie wektory styczne z podprzestrzeni rozpiętej przez czas mają ujemną długość. Niemniej, trójwymiarowe przekroje czasoprzestrzeni odpowiadające ustalonej chwili czasu są rozmaistościami riemannowskimi.

**Obliczanie gradientu we współrzędnych biegunowych.** Jak wiadomo, gradient funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie o współrzędnych  $(x, y)$  to wektor  $\text{grad } f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)e_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)e_y$ . Naszym zadaniem będzie zobaczyć, jak ten wektor wyraża się we współrzędnych biegunowych. Rozumiemy przez to problem znalezienia takiego wektora  $V(r, \phi) = a(r, \phi)e_r + b(r, \phi)e_\phi$  stycznego do przestrzeni  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$  w punkcie o współrzędnych  $(r, \phi)$ , aby jego obraz przy pochodnej  $D\Phi$  był równy  $\text{grad } f(x, y)$  w punkcie  $(x, y) = \Phi(r, \phi)$ . Co więcej chcemy wyrazić szukane współczynniki  $a(r, \phi)$  i  $b(r, \phi)$  w terminach pochodnych funkcji  $F = f \circ \Phi$  (czyli funkcji  $f$  zapisanej we współrzędnych biegunowych), tzn.

$$(\text{grad}_{(x,y)} f)(\Phi(r, \phi)) = D\Phi \left( \text{grad}_{(r,\phi)} f(\Phi(r, \phi)) \right) \quad (\text{D.1})$$

Pokażemy jak rozwiązać to zadanie na dwa sposoby, raz zaprzegając do pracy brutalną siłę obliczeniową, a raz korzystając z konstrukcji indukowanego iloczynu skalarnego rozważanego wcześniej.

### Rozwiążanie:

Spróbujmy najpierw znaleźć takie wektory  $\vec{v} = ae_\phi + be_r$  i  $\vec{w} = ce_r + de_\phi$ , aby  $D\Phi(\vec{v}) = e_x$  oraz  $D\Phi(\vec{w}) = e_y$ . Wówczas będziemy mogli zapisać szukany wektor  $V(r, \phi)$  jako  $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{v} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{w}$ . W tym celu wystarczy rozwiązać równania:

```
x = r Cos[Phi]; y = r Sin[Phi];
DPhi = D[{x, y}, {{r, Phi}}];
Solve[DPhi.{a, b} == {1, 0}, {a, b}];
Simplify[%];
V = a Er + b Ephi /. %
Solve[DPhi.{c, d} == {0, 1}, {c, d}];
Simplify[%];
W = c Er + d Ephi /. %
```

Warto zauważyć, że użyliśmy powyżej komendy *wyrażenie/. podstawienie*, która pozwala ewaluować wartość wyrażenia na zadanych wartościach parametrów. Pozostaje nam teraz zamienić pochodne cząstkowe funkcji  $f$  po  $x$  i  $y$  na pochodne cząstkowe  $F = \Phi \circ f$  po  $r$  i  $\phi$ . W tym celu wykorzystamy formułę na pochodną złożenia:  $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$  oraz  $\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi}$ , co w notacji macierzowej można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} D\Phi .$$

Pozostaje tylko wykonać niezbędne obliczenia

```
Df = D[f[r, phi], {{r, phi}}].Inverse[DPhi]
```

Teraz już łatwo wyznaczymy gradient we współrzędnych  $(r, \phi)$ :

```
Df[[1]] V + Df[[2]] W;
Simplify[%]
```

co daje<sup>9</sup>

$$V(r, \phi) = \text{grad}_{(r, \phi)} F = \frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} e_\phi \quad (\text{D.2})$$

Jak widzimy, gradient we współrzędnych nie-euklidesowych  $(r, \phi)$  nie wyraża się wzorem  $\frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{\partial F}{\partial \phi} e_\phi$ .

### Rozwiązań (sposób 2):

Nasze zadanie możemy też rozwiązać znacznie szybszą metodą, wykorzystując badany wcześniej indukowany iloczyn skalarny. Przypomnijmy (por. Definicja 2.22), że gradient możemy scharakteryzować równaniem

$$\langle \text{grad } f(x, y), \vec{h} \rangle_{(x, y)} = Df_{(x, y)}(\vec{h}),$$

gdzie  $\vec{h}$  jest dowolnym wektorem z przestrzeni stycznej do zbioru  $\mathbb{R}^2$  w punkcie  $(x, y)$ . Wstawiając teraz do powyższej równości  $\text{grad } f(x, y) = D\Phi(V(r, \phi))$  i  $\vec{h} = D\Phi(\vec{w})$ , gdzie  $(x, y) = \Phi(r, \phi)$ , i korzystając z definicji indukowanego ilocznego skalarnego  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(r, \phi)}$  otrzymamy:

$$\langle V(r, \phi), \vec{w} \rangle_{(r, \phi)} = \langle D\Phi(V(r, \phi)), D\Phi(\vec{w}) \rangle_{\Phi(r, \phi)} = Df_{\Phi(r, \phi)}(D\Phi_{(r, \phi)}(\vec{w})) = D(f \circ \Phi)_{(r, \phi)}(\vec{w}).$$

Podsumowując otrzymaliśmy następującą charakteryzację gradientu we współrzędnych biegunowych w terminach indukowanego ilocznego skalarnego i pochodnej funkcji  $F = \Phi \circ f$ :<sup>10</sup>

$$\langle V(r, \phi), \vec{w} \rangle_{(r, \phi)} = DF_{(r, \phi)}(\vec{w}).$$

Kładąc  $V = ae_r + be_\phi$  oraz  $\vec{w} = ce_r + de_\phi$  i pamiętając formułę na indukowany iloczyn skalarny obliczoną wcześniej łatwo otrzymamy, że  $V(r, \phi) = \frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} e_\phi$ , zgodnie z poprzednimi wyliczeniami.

**Przekształcenie sferyczne.** Konstrukcją podobną do konstrukcji współrzędnych biegunowych są tak zwane *współrzędne sferyczne*. Opisują one punkt w trójwymiarowej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  za pomocą jego odległości od początku układu współrzędnych i dwóch charakterystycznych kątów. Mówiąc ściślej przekształcenie sferyczne to dyfeomorfizm zbioru  $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni (r, \phi, \theta)$  na  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\} \ni (x, y, z)$  zadany przez równania

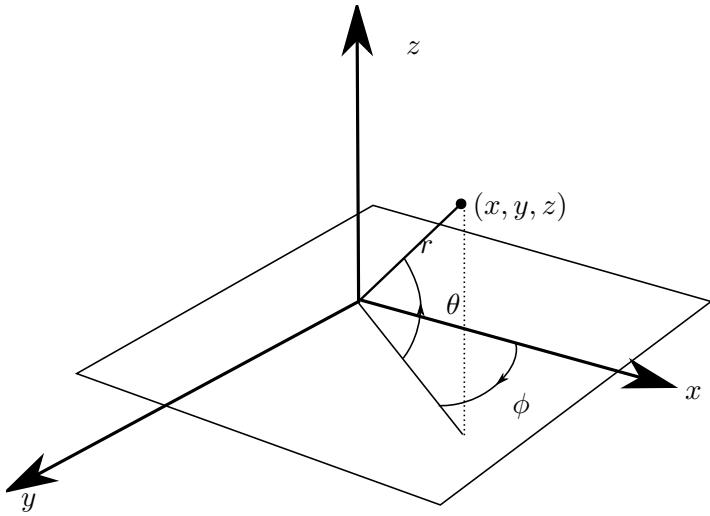
$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ z &= r \sin(\theta). \end{aligned}$$

Interpretację geometryczną powyższych wzorów przedstawia Rysunek D.9.

Podobnie jak poprzednio, współrzędnych sferycznych wygodnie jest używać do badania funkcji określonych na podzbiorach w  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>9</sup>Często wzór (D.2) zapisywany jest jako  $\text{grad } f(r, \phi) = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$ , gdzie  $\hat{e}_r = e_r$  i  $\hat{e}_\phi = \frac{1}{r} e_\phi$  to wektory ortonormalne (wersory) w indukowanym iloczninie skalarnym.

<sup>10</sup>Poniższa formula pozwala zdefiniować gradient na dowolnej rozmaitości różniczkowej wyposażonej w iloczyn skalarny (rozmaitości riemannowskiej).



Rysunek D.9: Współrzędne sferyczne.

W pewnych przypadkach przy zamianie zmiennych należy zachować ostrożność. Wynika to z faktu, że nie wszystkie własności funkcji prawdziwe w jednych współrzędnych będą prawdziwe w innych. Nie będzie problemu na przykład w przypadku szukania punktu krytycznego (wynika to z faktu, że pochodna złożenia to złożenie pochodnych, a obraz zera przy przekształceniu liniowym to zawsze zero!), ale generalnie dla bardziej skomplikowanych własności przy przejściu do innego układu współrzędnych potrzebna jest znajomość odpowiednich *reguł transformacyjnych*.<sup>11</sup> Przykładowo, w poprzednim podrozdziale D.4.1 pokazaliśmy, że laplasjan funkcji  $f_{-\frac{1}{2}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  znika tożsamościowo w obszarze  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Ta funkcja wyrażona we współrzędnych sferycznych to oczywiście  $F_{-\frac{1}{2}}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{r}$ . Zauważmy jednak, że wyrażenie

$$\frac{\partial^2 F_{-\frac{1}{2}}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_{-\frac{1}{2}}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F_{-\frac{1}{2}}}{\partial \theta^2} = \frac{2}{r^3}$$

wcale nie znika. Nie oznacza to, że w naszych poprzednich obliczeniach popełniliśmy jakiś błąd, a jedynie, że wyrażenie  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  opisuje laplasjan tylko we współrzędnych kartezjańskich. Prawdziwa (geometryczna i niezależna od wyboru układu współrzędnych, ale wykorzystujące iloczyn skalarny) definicja laplasjanu to  $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ . Wróćmy jeszcze do tego wzoru w rozdziale D.8.

#### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.4.12.** Sprawdź, że przekształcenie

$$f(x, y, z) = (z + e^x(\cos(x) - \sin(x)), y + e^x \cos(x) - x(z + e^x(\cos(x) - e^x \sin(x))), -x)$$

jest dyfeomorfizmem  $\mathbb{R}^3$  na  $\mathbb{R}^3$ .

---

<sup>11</sup>Dziedziną matematyki, która zajmuje się własnościami funkcji gładkich i podobnych obiektów, które są niezależne od wyboru układu współrzędnych jest geometria różniczkowa.

**Zadanie D.4.13.** Zbuduj dyfeomorfizm wnętrza trójkąta  $\triangle ABC$ , gdzie  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, 1)$  i  $C = (1, 0)$  na płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$ .

**Zadanie D.4.14.** Zbadaj granicę funkcji  $f(x, y) = \frac{\ln(x^3 + 6x^2 + 12x + y^2 - 2y - 6)}{(x-2)^2 + 3(y-1)^2}$  wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez punkt  $(2, 1)$ . Czy  $f$  ma granicę w punkcie  $(2, 1)$ ? Wskazówka: przydatna może być prosta modyfikacja przekształcenia biegunowego.

**Zadanie D.4.15.** Zbadaj granicę funkcji  $f(x, y, z) = \frac{xyz + 2x^2y}{\sqrt[3]{x^4 + y^4 + z^4}}$  w punkcie  $(0, 0, 0)$ .

**Zadanie D.4.16.** Oblicz jakobian przekształcenia sferycznego.

**Zadanie D.4.17.** Podaj transformację odwrotną do przekształcenia sferycznego.

**Zadanie D.4.18.** Oblicz indukowany iloczyn skalarny we współrzędnych sferycznych.

**Zadanie D.4.19.** Udowodnij, posługując się oprogramowaniem typu CAS, że we współrzędnych sferycznych gradient funkcji  $f$  wyraża się wzorem  $\frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \frac{\partial F}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial F}{\partial \theta} e_\theta \right)$ , gdzie  $F$  to złożenie  $f$  i przekształcenia sferycznego.

## D.5 Rozwinięcie w szereg Taylora

**Nowe umiejętności:** Generowanie wielomianów Taylora funkcji wielu zmiennych.

**Skrypt:** Podrozdział 2.5.4.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Sage	Opis
<code>Series[f[x,y],{x,0,5},{y,0,5}]</code>	<code>f.taylor((x,0),(y,0),5)</code>	wielomian Taylora stopnia $\geq 5$ w punkcie $(0,0)$

Niech  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym oraz  $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie klasy  $C^1$ . Jak wiemy z wykładu, pochodna funkcji  $f$  rzędu  $k$  w punkcie  $x \in \Omega$  jest z definicji symetryczną formą  $k$  liniową na  $\mathbb{R}^n$  o wartościach w  $\mathbb{R}^m$ , tj.

$$D^k f(x) \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}}, \mathbb{R}^m).$$

Niestety, ani *Mathematica*, ani *Sage* nie dostarczają operacji, pozwalających wygodnie generować pochodne wyższych rzędów w postaci form wieloliniowych. Oba narzędzia mogą jedynie obliczać pochodne cząstkowe.

Zdefiniujmy przykładową funkcję dwóch zmiennych

```
f[x_,y_] := Sin[x^2] * Exp[y^3]
```

By obliczyć wielomian Taylora funkcji  $f$  stopnia 8 w punkcie  $(x, y) = (0, 0)$  posłużymy się poleceniem `Series`

```
Series[f[x,y],{x,0,8},{y,0,8}]
```

Powyższa operacja oblicza rozwinięcie w szereg najpierw względem parametru  $x$ , a potem względem  $y$  – dlatego wynik zawierać będzie również wyrazy rzędu wyższego niż 8. Możemy posłużyć się teraz funkcjami `Normal` i `Expand` by wyświetlić w pełni rozwinięty wielomian bez reszty

```
P = Expand[Normal[Series[f[x,y],{x,0,8},{y,0,8}]]]
```

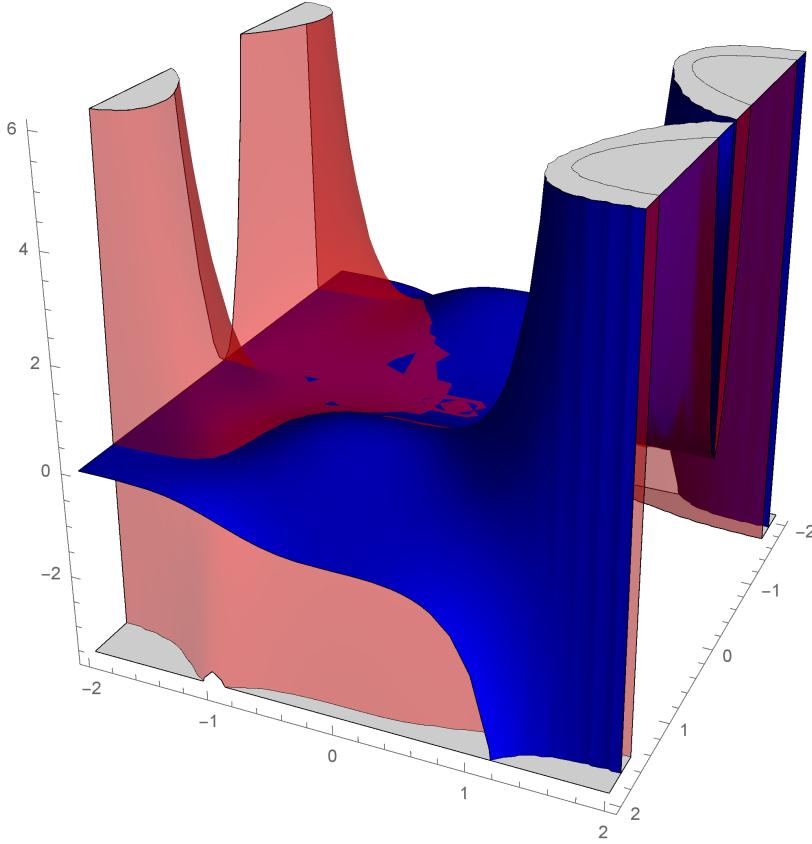
Zbadajmy teraz empirycznie czy wzór Taylora (2.46) jest poprawny. Twierdzenie 2.58 mówi, że współczynnik wielomianu Taylora funkcji  $f$  przy  $x^6 y^3$  powinien wynosić  $\frac{1}{6!3!} D^{(6,3)} f(0,0)$ . Sprawdźmy to:

```
Coefficient[P, x^6*y^3]
(D[f[x,y],{x,6},{y,3}] /. {x->0, y->0}) / (6!*3!)
```

Istotnie, obydwa polecenia zwracają tę samą wartość:  $-\frac{1}{6}$ .

Teraz możemy obejrzeć (patrz Rysunek D.10) wykres funkcji  $f$  i wielomianu  $P$  w okolicy punktu  $(0,0)$ , by przekonać się jak dobrze wielomian Taylora przybliża funkcję.

```
Plot3D[{f[x,y], P}, {x,-2,2}, {y,-2,2}, Mesh->False, Boxed->False,
BoxRatios->{1,1,1}, PlotStyle->{Blue, Directive[Opacity[0.5], Red]}]
```



Rysunek D.10: Fragment wykresu funkcji  $f(x, y) = \sin(x^2) \exp(y^3)$  (niebieski) oraz przybliżający tę funkcję wielomian Taylora stopnia 8 (czerwony).

#### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.5.1.** Napisz w *Mathematica* funkcję  $\text{Taylor}[\mathbf{f}, \mathbf{x}_0, k]$ , która będzie obliczać  $k$ -ty wielomian Taylora funkcji wielu zmiennych  $\mathbf{f}$  w punkcie  $\mathbf{x}_0$ .

**Zadanie D.5.2.** Niech  $\text{Sh}(p, q)$  będzie zbiorem tych permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, p+q\}$ , które są rosnące zarówno na  $\{1, \dots, p\}$  jak i na  $\{p+1, \dots, p+q\}$ . Jeśli  $\phi$  jest symetryczną formą  $p$ -liniową, a  $\psi$  jest symetryczną formą  $q$ -liniową na  $\mathbb{R}^n$  o wartościach w  $\mathbb{R}^m$ , definiujemy symetryczną formę  $(p+q)$ -liniową  $\phi \odot \psi$  na  $\mathbb{R}^n$  o wartościach w  $\mathbb{R}^m$  wzorem

$$(\phi \odot \psi)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p, q)} \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \psi(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

1. Wykaż że jeśli  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami klasy  $C^k$  oraz  $a \in \mathbb{R}^n$ , to

$$D^k(fg)(a) = \sum_{j=0}^k D^{k-j}f(a) \odot D^jg(a).$$

2. Wykaż, że jeśli  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami klasy  $C^k$  oraz  $a \in \mathbb{R}^l$  i  $p \in \{1, 2, \dots, k\}$ , to

$$D^p(g \circ f)(a) = \sum_{\alpha \in S(p)} D^{|\alpha|} g(f(a)) \circ (D^1 f(a)^{\alpha_1} \odot \cdots \odot D^k f(a)^{\alpha_k}) / \alpha!,$$

gdzie  $D^j f(a)^{\alpha_i} = \underbrace{D^j f(a) \odot \cdots \odot D^j f(a)}_{\alpha_i \text{ razy}}$  oraz  $S(p) = \{\alpha \in \mathbb{N}^k : \sum_{i=1}^k i\alpha_i = p\}$ .

## D.6 Rozmaitości zanurzone

### D.6.1 Wizualizacja

---

**Nowe umiejętności:** Wykreślanie poziomów funkcji oraz powierzchni zadanych parametrycznie. Wyznaczanie przestrzeni stycznych w punkcie.

**Skrypt:** Rozdział 3.5.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Sage	Opis
<code>ContourPlot3D[f[x,y,z]==1, {x,0,1},{y,0,1},{z,0,1}]</code>	<code>implicit_plot3d[f==1, (0,1),(0,1),(0,1)]</code>	rysuje poziomice $f^{-1}(1)$
<code>ParametricPlot3D[{f[u,v],g[u,v],h[u,v]}, {u,0,1},{v,0,1}]</code>	<code>parametric_plot3d[(f,g,h), (0,1),(0,1)]</code>	rysuje powierzchnię zadaną parametrycznie
<code>Manipulate</code>	Brak	tworzy interaktywną kontrolkę

---

Na wykładzie rozmaistość  $n$ -wymiarowa klasy  $C^1$  zanurzona w  $\mathbb{R}^{n+m}$  została zdefiniowana (Definicja 3.23) jako podzbiór  $\mathbb{R}^{n+m}$ , który w małym otoczeniu każdego swojego punktu jest *wykresem* pewnej funkcji  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  klasy  $C^1$ . Czytelnik dowiedział się również (Twierdzenie 3.24), że jeśli  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest klasy  $C^1$ , a  $q \in \mathbb{R}^m$  jest ustalonym punktem, to zbiór postaci  $M = F^{-1}(q) = \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : F(z) = q\}$  jest rozmaistością pod warunkiem, że różniczka  $DF(z)$  jest maksymalnego rzędu dla każdego  $z \in M$ . W tym wypadku mówimy, że  $M$  jest *poziomicą* funkcji  $F$ . Rozmaistości można też zadawać *parametrycznie*, patrz podrozdział 6.1.2 i Twierdzenie 6.6. Przypomnijmy:

**Stwierdzenie.** Niech  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym oraz  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  będzie funkcją klasy  $C^1$  oraz  $M = F(\Omega)$  będzie obrazem  $F$ . Założymy ponadto, że

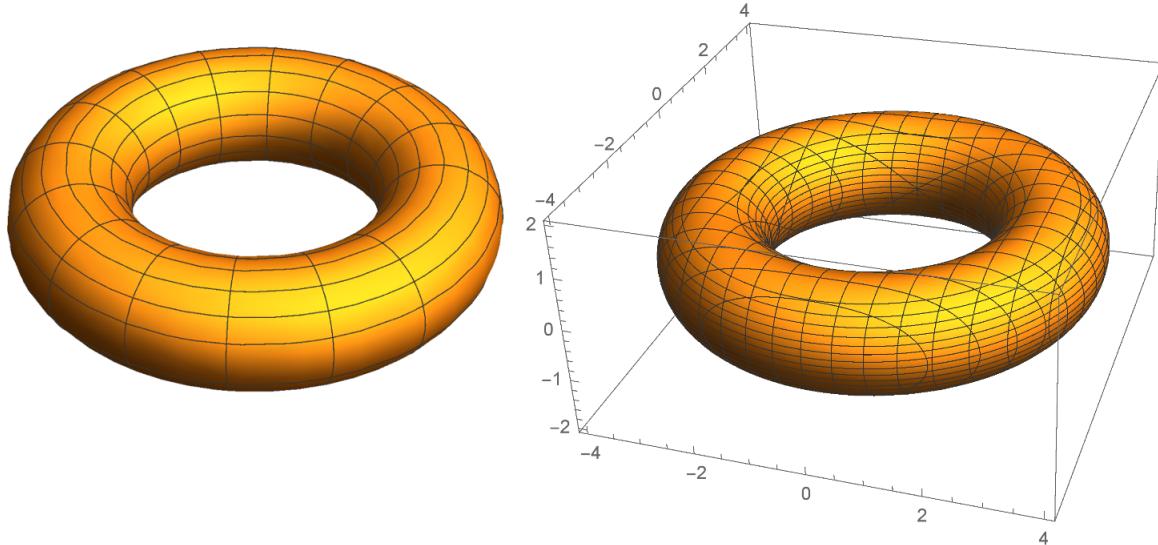
- $DF(x)$  jest monomorfizmem liniowym dla każdego  $x \in \Omega$ ,
- dla każdego zbioru otwartego  $U \subseteq \Omega$ , obraz  $F(U) \subseteq M$  jest zbiorem otwartym w  $M$ .

Wówczas  $M$  jest rozmaistością  $n$ -wymiarową zanurzoną w  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Mamy zatem trzy możliwości reprezentowania rozmaistości: jako wykresy, jako poziomice oraz parametrycznie.

Jedną z rzeczy, jakie mogą dla nas zrobić programy CAS, jest wizualizacja jednowymiarowych i dwuwymiarowych rozmaistości zanurzonych w  $\mathbb{R}^2$  lub w  $\mathbb{R}^3$ . Zacznijmy od prostych przykładów. Sfera o promieniu 1 jest poziomką funkcji  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  na poziomie 1.

```
CountourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```



Rysunek D.11: Z lewej torus wykreślony parametrycznie. Z prawej jako poziomica funkcji.

Torus o promieniach 3 i 1 jest poziomką funkcji  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2$  na poziomie 1 – patrz Rysunek D.11.

```
CountourPlot3D[(Sqrt[x^2 + y^2] - 3)^2 + z^2 == 1,
{x, -4, 4}, {y, -4, 4}, {z, -2, 2}, BoxRatios -> {2, 2, 1}]
```

Powyższy torus można też zadać parametrycznie

```
ParametricPlot3D[{Cos[u](3 + Cos[v]), Sin[u](3 + Cos[v]), Sin[v]},
{u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}, Mesh -> True, Axes -> False,
Boxed -> False]
```

Opcje `Mesh -> True`, `Axes -> False`, `Boxed -> False` kontrolują dodatkowo wyświetlanie siatki, osi współrzędnych i ramki. Argument `BoxRatios -> {2, 2, 1}` ustala proporcje obrazka. Przyglądając się liniom siatki na Rysunku D.11 zauważymy w jaki sposób *Mathematica* wygenerowała te obrazki.

*Mathematica* oferuje nam też możliwość manipulowania parametrami wyświetlonego obiektu w sposób interaktywny

```
Manipulate[ParametricPlot3D[
{Cos[u](R + r Cos[v]), Sin[u](R + r Cos[v]), r Sin[v]},
{u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}], {r, 0, 3}, {R, 1, 5}]
```

```
Manipulate[ContourPlot3D[(x^4 - x^2 + y^2)^2 + z^2 == t,
    {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, {z, -1.5, 1.5}],  

    {t, 1/40, 1}]
```

jak też stworzenia animacji

```
Animate[ParametricPlot3D[{Cos[u](R + r Cos[v]), Sin[u](R + r Cos[v]), r Sin[v]},  

    {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}], {r, 0, 3}, {R, 1, 5}]
```

Na wykładzie Czytelnik dowiedział się jak znaleźć przestrzeń styczną do wykresu oraz poziomicy. Założmy, że rozmaitość  $M$  dana jest parametrycznie za pomocą funkcji  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  dla pewnego zbioru  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , tzn.  $M = f(\Omega)$ . Wówczas Czytelnik sam może udowodnić, że przestrzeń styczna do  $M$  w punkcie  $f(x)$  jest obrazem różniczki  $Df$  w punkcie  $x$ , tzn.

$$T_{f(x)}M = Df(x)(\mathbb{R}^n) = \{v \in \mathbb{R}^{n+m} : v = Df(x)w \text{ dla pewnego } w \in \mathbb{R}^n\}.$$

Spróbujmy pokazać to na obrazku w przypadku gdy  $M$  jest wstęgą Möbiusa. Definiujemy najpierw funkcję parametryzującą  $M$

```
R=3  
F[s_,t_] := {(R + s*Cos[t/2])*Cos[t], (R + s*Cos[t/2])*Sin[t], s*Sin[t/2]}
```

Wybieramy jakiś punkt, w którym chcemy znaleźć przestrzeń styczną. Niech to będzie  $(s_1, t_1) = (1/4, 5)$ . Obliczamy w tym punkcie różniczkę  $F$  i wykreślmy jej obraz, przesunięty do punktu  $F(s_1, t_1)$ , za pomocą funkcji ParametricPlot3D

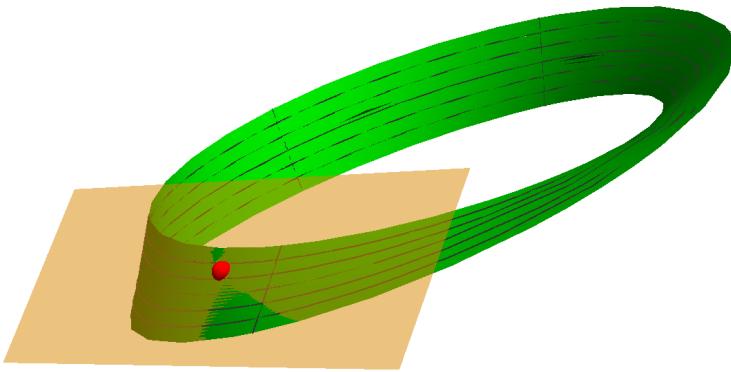
```
s1 = 1/4  
t1 = 5  
M = D[F[s,t],{{s,t}}] /. {s -> s1, t -> t1}  
T = F[s1,t1]  
pl1 = ParametricPlot3D(F[s,t], {s,-1/2,1/2}, {t,0,2Pi}, Boxed -> False,  
Axes -> False, Mesh -> 5, PlotStyle -> Green)  
pl2 = ParametricPlot3D(T + M.{u,v}, {u,-1,1}, {v,-1,1}, Boxed -> False,  
Axes -> False, Mesh -> False,  
PlotStyle -> Directive[Yellow, Opacity[0.5]])
```

W punkcie  $F(s_1, t_1)$  rysujemy dodatkowo czerwoną kropkę, by było widać gdzie jest punkt styczności. No koniec łączymy wszystkie obrazki w jeden i wyświetlamy na ekranie – patrz Rysunek D.12.

```
pl3 = Graphics3D[{Red, Ball[T,0.1]}, Boxed -> False]  
Show[pl3,pl2,pl1]
```

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.6.1.** Wygeneruj obrazek prela  $(x^4 - x^2 + y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{36}$  i zaznacz przestrzeń styczną w punkcie o współrzędnych  $(1, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{18})$



Rysunek D.12: Wstęga Möbiusa z zaznaczoną przestrzenią styczną w wybranym punkcie.

**Zadanie D.6.2.** Wygeneruj animację pokazującą jak zmienia się afinczna przestrzeń styczna do torusa wzdłuż wybranego “równoleżnika”.

**Zadanie D.6.3.** Udowodnij, że helikoidę (zob. zadanie D.4.4) można przedstawić parametrycznie wzorem  $(x = r \cos(\frac{1}{a}\phi), y = r \sin(\frac{1}{a}\phi), z = \phi)$ , gdzie  $r \in \mathbb{R}_+$   $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Pozwalaając parametrowi  $\phi$  przebiegać dowolne wartości rzeczywiste otrzymujemy powierzchnię spiralną, która lokalnie wygląda jak powierzchnia z zadania D.4.4. Narysuj tę powierzchnię korzystając z oprogramowania typu CAS.

**Zadanie D.6.4.** Korzystając z polecenia ParametricPlot3D narysuj obmotkę torusa (Przykład 1.62 z wykładowca).

**Zadanie D.6.5.** Przypomnijmy, że sinus hiperboliczny to funkcja  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  zaś kosinus hiperboliczny to  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Dla  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,  $u \in (-\pi, \pi)$  oraz  $v \in \mathbb{R}$  definiujemy funkcje

$$\begin{aligned} x(u, v, \theta) &= \cos \theta \sinh v \sin u + \sin \theta \cosh v \cos u \\ y(u, v, \theta) &= -\cos \theta \sinh v \cos u + \sin \theta \cosh v \sin u \\ z(u, v, \theta) &= u \cos \theta + v \sin \theta . \end{aligned} \tag{D.3}$$

Wykreśl fragmenty powierzchni sparametryzowanych przekształceniami

$$\begin{aligned} (u, v) &\mapsto (x(u, v, 0), y(u, v, 0), z(u, v, 0)) \\ \text{oraz } (u, v) &\mapsto (x(u, v, \pi/2), y(u, v, \pi/2), z(u, v, \pi/2)) \end{aligned}$$

dla zakresu parametrów  $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times [-2, 2]$ .

*Uwaga.* Powierzchnie te mają swoje nazwy. Pierwsza to, znana już Czytelnikowi, *helikoida*, a druga to *katenoidea*. Są to przykłady wspomnianych już wcześniej *powierzchni minimalnych*. Czytelnik może przeprowadzić w domu eksperyment: by uzyskać bańkę mydlaną w kształcie przypominającym katenoidę wystarczy zanurzyć w roztworze mydła dwa złączone druciane okręgi, a potem powoli je od siebie odsunąć.

**Zadanie D.6.6.** Przy pomocy polecenia Manipulate prześledź jak zmienia się powierzchnia z poprzedniego zadania gdy  $\theta$  przebiega wartości od 0 do  $\pi/2$ .

*Uwaga.* Katenoida i helikoida są ze sobą stowarzyszone za pomocą powyższej deformacji. Dla każdego ustalonego  $\theta$  funkcje (D.3) parametryzują pewną powierzchnię minimalną. Ponadto wszystkie te powierzchnie są ze sobą izometryczne z punktu widzenia ich geometrii wewnętrznej – więcej o tym Czytelnik dowie się na wykładzie z geometrii różnicowej.

**Zadanie D.6.7.** Wykreśl katenoidę zadaną parametrycznie przez zależności (D.3) (przy  $\theta = \pi/2$ ) dla zakresu parametrów  $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times [-5, 5]$ . By zachowane były proporcje na obrazku, zastosować parametr BoxRatios  $\rightarrow \{\text{Cosh}[5], \text{Cosh}[5], 5\}$ . Powtórzyć zadanie dla  $v \in [-7, 7]$ .

*Uwaga.* Zwiększając zakres parametru  $v$  możemy obserwować katenoidę z coraz dalszej perspektywy. Czytelnik przekona się, że z dalekiej odległości, katenoida wygląda jak dwie sklejone ze sobą płaszczyzny z nakłuciem w środku.

**Zadanie D.6.8.** Wykreśl fragment powierzchni danej równaniem  $e^z \cos(y) = \cos(x)$  zawierający się w kostce  $[-5, 5] \times [-5, 5] \times [-3, 3]$  (proszę pamiętać o ustawieniu parametru BoxRatios tak by zachować proporcje na obrazku).

*Uwaga.* Powyższa powierzchnia to tzw. *powierzchnia Scherka* – kolejny przykład powierzchni minimalnej.

**Zadanie D.6.9.** Wybierzmy cztery afonicznie niezależne punkty  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^3$ . Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  daną przez

$$f(\mathbf{p}) = \det(\alpha(\mathbf{p}), \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_3), \alpha(p_4))$$

gdzie  $\alpha(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^5$ .

Wykreśl poziomicę  $f^{-1}(0)$ , a następnie udowodnij, że jest to sfera przechodząca przez punkty  $p_1, p_2, p_3$  i  $p_4$ .

## D.6.2 Objętość i miara powierzchniowa

**Nowe umiejętności:** Obliczanie objętości i pola powierzchni rozmaitości sparametryzowanych.

**Skrypt:** Rozdział 6.1.

**Zadanie D.6.10.** Dla ustalonych wartości  $r, R \in (0, \infty)$  takich, że  $R > r$ , wyznacz pole powierzchni torusa będącego obrazem przekształcenia  $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  danego wzorem

$$\Phi(u, v) = (\cos(u)(R + r \cos(v)), \sin(u)(R + r \cos(v)), r \sin(v)).$$

**Rozwiązańie:**

Niech  $A = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ . Z wykładu – patrz Rozdział 6.1, wzór (6.4) – wiemy, że pole  $M = \Phi(A)$  wyraża się wzorem

$$\sigma_2(M) = \int_A \sqrt{\det(D\Phi(x)^T D\Phi(x))} d\lambda_2(x).$$

Wystarczy zatem wykonać

```
phi[u_,v_] := { Cos[u] (R + r Cos[v]) , Sin[u] (R + r Cos[v]) , r Sin[v] }
m = D[phi[u,v], {{u,v}}]
Integrate[Sqrt[Det[Transpose[m].m]], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi},
Assumptions -> { R > 0, r > 0, R > r}]
```

W ten sposób dowiadujemy się, że pole torusa o promieniach  $r$  i  $R$  wynosi  $4\pi^2 rR$ .

**Zadanie D.6.11.** Wyznacz pole powierzchni wstęgi Möbiusa zadanej parametrycznie funkcją  $\Psi(-1/2, 1/2) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  daną wzorem

$$\Psi(s, t) = ((3 + s \cos(t/2)) \cos(t), (3 + s \cos(t/2)) \sin(t), s \sin(t/2)).$$

**Rozwiązańie:**

Spróbujmy postępować jak w poprzednim przykładzie. Obliczamy

```
psi[s_,t_] := { (3 + s Cos[t/2]) Cos[t] ,
(3 + s Cos[t/2]) Sin[t] ,
s Sin[t/2] }
m = D[psi[s,t], {{s,t}}]
jj = Simplify[Sqrt[Det[Transpose[m].m]]]
```

W ten sposób dowiadujemy się, że aby obliczyć pole powierzchni wstęgi Möbiusa należy całkować wyrażenie  $\frac{1}{2}\sqrt{36 + 3s^2 + 24s \cos(t/2) + 2s^2 \cos(t)}$  po prostokącie  $(s, t) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 2\pi)$ . Spróbujmy

```
Integrate[jj, {s, -1/2, 1/2}, {t, 0, 2 Pi}]
```

To polecenie jednak szybko się nie zwróci wyniku – prawdopodobnie nigdy. W istocie, Czytelnik sam może spróbować obliczyć odpowiednią całkę, by przekonać się, że nie jest to łatwe dla człowieka, więc tym bardziej dla komputera. Spróbujmy zatem obliczyć pole powierzchni wstęgi chociaż w przybliżeniu

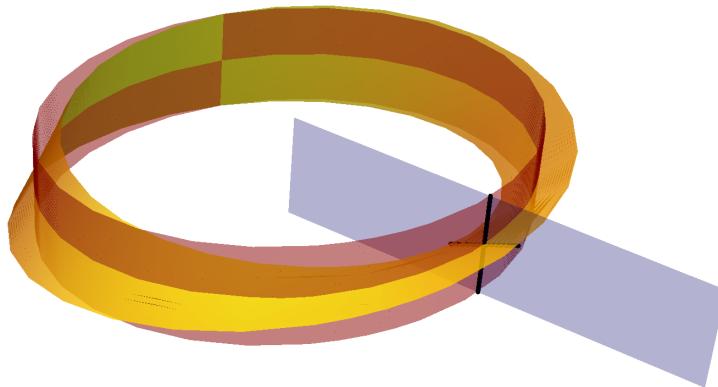
```
NIntegrate[jj, {s, -1/2, 1/2}, {t, 0, 2 Pi}, WorkingPrecision -> 10]
```

Otrzymujemy liczbę 18,87152155, która z początku niewiele nam mówi.

Zastanówmy się jednak, co właściwie robimy. Przecież wstęga Möbiusa to prostokątny pasek skręcony o  $\pi$  radianów ze sklejonymi końcami i można wykonać jej model z kawałka papieru bez rozciągania go. W takim razie pole naszej wstęgi powinno być równe polu paska! Kontemplując chwilę wzory definiujące funkcję  $\Psi$  dochodzimy do wniosku, że pasek, o który chodzi, ma wymiary  $2\pi r \times l$ , gdzie  $r = 3$ , a  $l = 1$ . Zatem pole wstęgi powinno wynosić  $6\pi$ . Polecenie N[6 Pi, 10] zwraca liczbę 18,84955592, co jest dość bliskie wynikowi obliczonemu wcześniej, ale to nie jest ta sama liczba. Zwiększając parametr

WorkingPrecision powyżej dostaniemy lepsze przybliżenia całki ale nie będą one zbierać do liczby  $6\pi$ . Dzieje się tak dlatego, że nasza parametryzacja wstęgi Möbiusa nie jest idealna i nieznacznie rozciąga pasek  $[0, 2\pi r] \times [0, l]$ .

Jest jeszcze jedna ciekawa obserwacja związana z powyższym zadaniem. Porównajmy naszą wstęgę z walcem (bez denek) o promieniu  $r = 3$ , wysokości  $l = 1$  i takim, że os pionowa jest jego osią symetrii. Rozważmy wszystkie półpłaszczyzny, zawierające wektor pionowy  $(0, 0, 1)$ . Przecięcie naszej wstęgi z każdą taką półpłaszczyzną jest odcinkiem o długości 1. Przecięcie walca z taką półpłaszczyzną także jest odcinkiem o długości 1 – patrz Rysunek D.13. Przez naiwną analogię z zasadą Cavalieri'ego (por. Wniosek 5.35) może się wydawać, że pola walca i wstęgi powinny być równe. Tak jednak nie jest!



Rysunek D.13: Wstęga Möbiusa i odpowiadający jej walec mają równej długości przecięcia z każdą płaszczyzną zawierającą pionową os. Ich powierzchnie są jednak różne.

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.6.12.** Oblicz pole powierzchni fragmentu katenoidy dla zakresu parametrów  $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times [-2, 2]$  oraz walec o tym samym brzegu (tj. którego brzegiem są dwa równoległe okręgi o promieniach  $\cosh(2)$  i oddalone od siebie o 4 jednostki). Które pole jest mniejsze? Skąd wzięła się nazwa *powierzchnie minimalne*?

**Zadanie D.6.13.** Oblicz objętość bryły, która jest ograniczona powierzchnią torusa  $M$  z zadania D.6.10.

## D.7 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

### D.7.1 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

**Nowe umiejętności:** znajdowanie ekstremów funkcji różniczkowalnych.

**Skrypt:** Rozdziały 2.3, 2.5.5.

---

Jak wiadomo z wykładu (Twierdzenie 1.25), każda funkcja ciągła określona na niepustym zbiorze zwartym osiąga w tym zbiorze swój kres górny (maksimum) i kres dolny (minimum). Przy szukaniu kresów dla funkcji różniczkowalnej stosuje się zazwyczaj „metodę policyjną”, tzn. typuje się wszystkich „podejrzanych”, z których wybiera się następnie faktycznych „przestępów” (czyli minimum i maksimum). Listę podejrzanych kompletujemy korzystając ze Stwierdzenia 2.25: muszą znaleźć się na niej wszystkie punkty krytyczne rozważanej funkcji. Dodatkowo powinniśmy osobno rozpatrzać punkty, w których Stwierdzenie 2.25 nie ma zastosowania, czyli takie, w których badana funkcja nie jest różniczkowalna w swojej dziedzinie. W szczególności, podejrzane są wszystkie punkty brzegowe dziedziny badanej funkcji.

Gdy rozważamy funkcję określoną na niezwartej dziedzinie, często wygodnie jest ograniczyć się do pewnego jej zwartego podzbioru, gdzie możemy zastosować omówioną wyżej „metodę policyjną”, a następnie zbadać funkcję na dopełnieniu tego podzbioru. Prześledzimy teraz obie sytuacje na przykładach.

**Zadanie D.7.1.** Znalejdź maksimum i minimum funkcji  $f(x, y, z) = xy - 2xz + 6yz$  w sześciianie  $A = \{-1 \leq x, y, z \leq 1\}$ .

**Rozwiązanie:**

Zauważmy, że z uwagi na zwartość sześciianu i ciągłość  $f$ , rozwiązanie istnieje. Zgodnie z naszymi wcześniejszymi rozważaniami powinniśmy stworzyć odpowiednią listę „podejrzanych”. Zaczniemy od wypisania punktów krytycznych funkcji  $f$ :

```
f[x_, y_, z_] := x y - 2 x z + 6 y z;
Solve[D[f[x, y, z], {{x, y, z}}] == 0, {x, y, z}]
f[x, y, z] /. %
```

Jak widzimy jedynym punktem krytycznym rozważanej funkcji jest punkt  $(0, 0, 0)$  leżący wewnętrz sześciianu, który odpowiada wartości  $f(0, 0, 0) = 0$ .

W kolejnym kroku musimy dołożyć do listy wszystkie te punkty w  $A$ , w których funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna. Są to oczywiście punkty brzegowe zbioru  $A$ , a więc punkty z  $A$  spełniające jeden z sześciu warunków  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  lub  $z = \pm 1$  (zbiór ten składa się z sześciu kwadratów – ścian sześciianu).

Oczywiście dołożenie do naszej listy wszystkich punktów brzegu  $\partial A$  mija się z celem. Wystarczy bowiem dodać tylko te punkty, w których funkcja  $f|_{\partial A}$  osiąga swoje kresy. W tym celu rozwiążemy zagadnienie znalezienie kresów funkcji różniczkowalnej  $f|_{A_i}$  na każdym z sześciu kwadratów  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  składających się na brzeg  $\partial A = A_1 \cup \dots \cup A_6$ .

Zajmijmy się pierwszym z brzegu kwadratem  $A_1 = \{x = -1, -1 \leq y, z \leq 1\}$ . Szukamy teraz kresów funkcji  $f|_{A_1}(y, z) = f(-1, y, z) = y - 2z + 6yz$  na zbiorze  $A_1$ . Dla tego zagadnienia łatwo znajdziemy punkty krytyczne:

```
Solve[D[f[-1, y, z], {{y, z}}] == 0, {y, z}]
f[-1, y, z] /. %
```

Możemy zatem dopisać do listy podejrzanych punkt  $(-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$  odpowiadający wartości  $\frac{1}{3}$ . Teraz z kolei musimy uwzględnić punkty brzegu zbioru  $A_1$ , w których funkcja  $f|_{A_1}$

nie jest różniczkowalna. Składają się nań cztery odcinki  $\partial A_1 = A_{11} \cup A_{12} \cup A_{13} \cup A_{14}$  charakteryzowane przez równości  $x = -1$  oraz  $y = \pm 1$  lub  $z = \pm 1$ . Okazuje się, że w przypadku  $A_{11} = \{x = y = -1, -1 \leq z \leq 1\}$

```
Solve[D[f[-1, -1, z], z] == 0, {z}]
```

nie znajdziemy żadnych punktów krytycznych. Łatwo to zrozumieć:  $f|_{A_{11}}(z) = f(-1, -1, z)$  jest (nie stałą) funkcją liniową i jako taka nie ma punktów krytycznych. To samo spostrzeżenie jest prawdziwe dla każdego z odcinków  $A_{1i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , co pozwala zaoszczędzić nieco rachunków. Na liście podejrzanych powinniśmy natomiast dodatkowo umieścić punkty brzegowe odcinka  $A_{11}$ , czyli  $(-1, -1, -1)$  oraz  $(-1, -1, 1)$ . Postępując analogicznie dla każdego z odcinków  $A_{1i}$  dopiszemy do listy podejrzanych punkty  $(-1, 1, -1)$  i  $(-1, 1, 1)$ .

Naszkicowaną wyżej procedurę powinniśmy teraz powtórzyć dla każdej z pozostałych pięciu ścian  $A_i$ ,  $i = 2, \dots, 6$ , jej krawędzi i wierzchołków tych krawędzi. Wymaga to nieco pracy, niemniej większą część rachunków załatwi za nas program *Mathematica*. Co więcej krawędzie i wierzchołki są wspólne dla pewnych ścian, więc nie musimy powtarzać obliczeń już raz wykonanych. Ostatecznie po niedługim czasie powinniśmy otrzymać następującą listę „podejrzanych”:  $(0, 0, 0), (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}), (-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)$ . Odpowiadają one, odpowiednio, następującym wartościom funkcji  $f$ :  $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 5, -3, -9, 7, 7, -9, -3, 5$ . Pozwala to stwierdzić, że  $\sup_A f = 7$  oraz  $\inf_A f = -9$ .

Na koniec zauważmy, że zachowanie się funkcji  $f$  na każdej z krawędzi sześcianu sugeruje alternatywną, bardzo prostą metodę rozwiązyania nie wymagającą prowadzenia żadnych rachunków: funkcja  $f$  obcięta do każdego odcinka  $x = a, y = b, -1 \leq z \leq 1$ , gdzie  $a, b \in [0, 1]$  są ustalone, jest liniowa, a zatem na każdym z takich odcinków kresy zbioru wartości przyjmowane są dla  $z = \pm 1$ . Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla  $x$  i  $y$ , skąd wynika, że wystarczy rozważyć tylko te punkty, w których  $x, y, z \in \{-1, 1\}$ , a więc wierzchołki sześcianu.

Spróbujmy teraz zająć się zagadnieniem maksymalizacji i minimalizacji funkcji różniczkowalnej znanej nam już z rozdziału D.2.1 określonej na zbiorze niezwartym  $\mathbb{R}^2$ .

**Zadanie D.7.2.** Rozważmy funkcję  $f(x, y) = (x^3 + y)e^{-2x^2-y^2}$  określona na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Znaleźć kres góry i dolny zbioru wartości tej funkcji.

### Rozwiązanie:

Rozważana funkcja jest oczywiście różniczkowalna w całej swojej dziedzinie. Zaczniemy zatem od wyznaczenia jej punktów krytycznych

```
f[x_, y_] := (x^3 + y) Exp[-2 x^2 - y^2];
Solve[D[f[x, y], {{x, y}}] == 0, {x, y}] .
```

W wyniku dostaliśmy dość bogatą listę rozwiązań, z których tylko dwa, mianowicie  $(x, y) = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ , są rzeczywiste. Niemniej program *Mathematica* zwrócił także ostrzeżenie, że być może nie wszystkie rozwiązania zostały znalezione.<sup>12</sup> Dlatego na wszelki wypadek spróbujmy sprawdzić, czy otrzymana lista rzeczywiście jest pełna. Obliczenie gradientu `Simplify[D[f[x, y], {{x, y}}]]` zwraca nam wektor

$$\text{grad } f(x, y) = (-e^{-2x^2-y^2} x(-3x + 4x^3 + 4y), e^{-2x^2-y^2}(1 - 2x^3y - 2y^2)).$$

---

<sup>12</sup>Jest to typowe zachowanie się programu *Mathematica* przy rozwiązywaniu bardziej złożonych równań.

Ponieważ eksponenta jest zawsze dodatnia, zagadnienie znalezienia miejsc zerowych gradienatu sprowadza się do rozwiązywania układu równań

$$\begin{aligned} x(-3x + 4x^3 + 4y) &= 0 \\ 1 - 2x^3y - 2y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Kładąc  $x = 0$  natychmiast otrzymamy znalezione wcześniej rozwiązania rzeczywiste  $(x, y) = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Gdy  $x \neq 0$  możemy wyznaczyć  $y$  w funkcji  $x$  z drugiego równania i wstawić wynik do pierwszego z równań:

```
Solve[(1 - 2 x^3 y - 2 y^2) == 0, y];
(-3 x + 4 x^3 + 4 y) /. %;
Simplify[%].
```

Otrzymaliśmy w ten sposób dwa równania  $-3x + 2x^3 \pm 2\sqrt{2+x^6} = 0$ . Chcemy pokazać, że nie mają one rozwiązań rzeczywistych. Dla ustalenia uwagi zajmijmy się tylko jednym z równań  $-3x + 2x^3 - 2\sqrt{2+x^6} = 0$ . Rozważania dla drugiego z nich są analogiczne. Łatwo się przekonać, że *Mathematica* zwraca tylko rozwiązania zespolone. Bardziej bezpośredni argument może być następujący. Z obserwacji wykresu `Plot[-3 x + 2 x^3 - 2 Sqrt[2 + x^6], {x, -3, 3}]` wynika, że badana funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne. Można by to scieśle uzasadnić wyliczając jej maksimum i sprawdzając, że jest ono mniejsze od zera, co jednak wymaga dość złożonych obliczeń. Znacznie prościej jest udowodnić nierówność  $-3x + 2x^3 < 2\sqrt{2+x^6}$ . Dla  $x \geq 0$  wynika ona bezpośrednio z oczywistej nierówności  $\sqrt{2+x^6} > x^3$  zaś dla  $x < 0$  możemy użyć oszacowania (udowodnij je!)  $-3x + 2x^3 \leq \frac{5}{2\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2+x^6}$ . Podsumowując, jedyne punkty krytyczne funkcji  $f$  to  $(x, y) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  oraz  $(x, y) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . Odpowiadają one odpowiednio wartościami  $\frac{1}{\sqrt{2e}}$  i  $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ .

Spróbujemy teraz pokazać, że otrzymane punkty to, odpowiednio, maksimum i minimum wartości funkcji  $f$  na całej dziedzinie. W tym celu powinniśmy zbadać asymptotyczne zachowanie się tej funkcji. Ponieważ  $f$  jest iloczynem wielomianu i eksponenty, spodziewamy się, że asymptotycznie dominować będzie czynnik eksponencjalny, a zatem  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$  (to zachowanie dobrze widać na wykresach funkcji  $f$  rozważanych w rozdziale D.2.1). To przypuszczenie można prosto uzasadnić używając współrzędnych biegunkowych. Jak łatwo sprawdzić

$$f(r \cos \phi, r \sin \phi) = e^{-\frac{1}{2}r^2(3+\cos(2\phi))} r(r^2 \cos(\phi)^3 + \sin(\phi)),$$

a stąd już łatwo oszacować (udowodnij to!)

$$|f(r \cos \phi, r \sin \phi)| \leq e^{-r^2}(r^3 + r).$$

Prawa strona powyższej nierówności oczywiście dąży do 0 przy  $r \rightarrow \infty$ . Aby zakończyć dowód, że funkcja  $f$  przyjmuje swoje kresy w punktach krytycznych położymy teraz  $R$  tak duże aby  $e^{-r^2}(r^3 + r) < 0.01$  dla każdego  $r \geq R$ . Istnienie takiego  $R$  wynika wprost z definicji granicy funkcji w nieskończoności. Kula domknięta  $B(0, R)$  jest zbiorem zjącym, zatem funkcja  $f$  musi przyjąć na niej swoje kresy. Ponieważ na brzegu rozważanego zbioru  $|f(x, y)| < 0.01 < \frac{1}{\sqrt{2e}}$  kresami tymi muszą być oczywiście wartości krytyczne  $\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$ . Z kolei ze sposobu w jaki wybraliśmy promień  $R$  wynika, że poza kołem  $B(0, R)$  funkcja  $f$

przyjmuje tylko wartości mniejsze co do wartości bezwzględnej niż 0.01. To kończy nasze rozumowanie.

Na koniec naszych rozważań rozwiążmy jeszcze jeden podobny problem.

**Zadanie D.7.3.** Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji  $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - 2xy^3$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Sklasyfikuj te punkty (minimum lokalne, maksimum lokalne, punkt siodłowy).

### Rozwiązanie:

Zacznijmy od wyznaczenia wszystkich punktów krytycznych:

```
f[x_, y_] := x^2 + 2 x y^2 - 2 y^3 x;
Solve[D[f[x, y], {{x, y}}] == 0, {x, y}]
```

Otrzymaliśmy trzy rozwiązania:  $(0, 0)$  (pierwiastek potrójny),  $(0, 1)$  oraz  $(-\frac{4}{27}, \frac{2}{3})$ . Macierz Hessego w tych punktach obliczymy łatwo za pomocą polecenia

```
D[f[x, y], {{x, y}, 2}] /. Solve[D[f[x, y], {{x, y}}] == 0, {x, y}]
```

Pozostaje już tylko sprawdzić określoność tych macierzy korzystając z kryterium Sylwestera (Twierdzenie 2.66), na przykład z użyciem polecenia Eigenvalues – por. rozdział D.3. Jak łatwo się przekonać obie wartości własne w punkcie  $(-\frac{4}{27}, \frac{2}{3})$  są dodatnie – jest to zatem lokalne minimum, zaś w punkcie  $(0, 1)$  są różnych znaków – jest to punkt siodłowy. Pewnej uwagi wymaga jedynie punkt  $(0, 0)$  odpowiadający wartościom własnym 2 i 0. Potencjalnie jest to zatem lokalne minimum funkcji  $f$ , o ile potrafilibyśmy dowieść, że w pewnym otoczeniu punktu  $(0, 0)$  wartości funkcji  $f$  są nie mniejsze niż  $f(0, 0) = 0$ . Chwila zastanowienia (albo kilka prostych prób) pozwala jednak stwierdzić, że tak nie jest. Na przykład  $f(y^3, y) = 2y^5 - y^6$  przyjmuje różne znaki dowolnie blisko punktu  $y = 0$ . Punkt  $(0, 0)$  jest zatem punktem siodłowym.

W podobnych wątpliwych przypadkach wygodnie jest wspomóc się odpowiednim rysunkiem. Polecam

```
ContourPlot[f[x, y], {x, -0.1, 0.1}, {y, -0.2, 0.2}, ContourStyle -> Thick
Contours -> 25, PlotPoints -> 40, ContourLabels -> True]
```

może podpowiedzieć nam jaka jest natura badanego punktu  $(0, 0)$ . Na Rysunku D.14 widać, że blisko niego znajdziemy zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Co więcej rysunek sugeruje nam jak znaleźć punkty o wartościach ujemnych: powinniśmy podchodzić do punktu  $(0, 0)$  możliwie blisko prostej  $x = 0$  od strony  $x < 0$ .

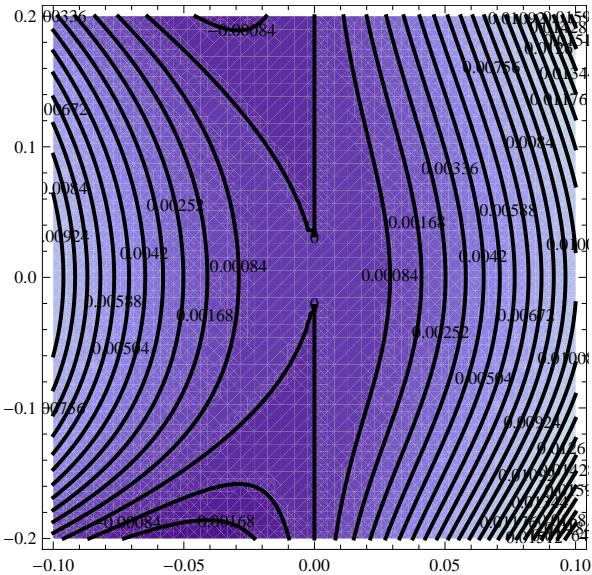
### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.7.4.** Wykaż, że dla funkcji  $f(x, y)$  z zadania D.7.2 punkt  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  jest jej ścisłym maksimum, a punkt  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  ścisłym minimum lokalnym.

**Zadanie D.7.5.** Znajdź kresy zbioru wartości funkcji  $f(x, y) = \frac{y}{x^2+4y^2+1}$  w półprzestrzeni  $x \geq 0$ .

**Zadanie D.7.6.** Znajdź kresy zbioru wartości funkcji  $f(x, y) = x(y - x)e^{x+y}$  na tójkącie  $T = \{-3 \leq 3x \leq y \leq 2\}$ .

**Zadanie D.7.7.** Znajdź wszystkie punkty krytyczne funkcji  $f(x, y) = y^2 + 3x^2y - x^3y$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Sklasyfikuj te punkty (minimum lokalne, maksimum lokalne, punkt siodłowy).



Rysunek D.14: Poziomice w okolicy punktu siodłowego.

### D.7.2 Ekstrema warunkowe

*MJ dziękuje dr Gabrielowi Pietrzkowskemu za pomoc w wyborze zadań do tego rozdziału.*

**Nowe umiejętności:** Znajdowanie ekstremów funkcji różniczkowalnych przy zadanych ograniczeniach równościowych.

**Skrypt:** Rozdział 3.6.

Przypomnijmy podstawowe wiadomości dotyczące ekstremów warunkowych (Twierdzenie 3.28). Niech  $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$  będzie  $n$ -wymiarową rozmaitością zanurzoną. Jeśli funkcja różniczkowalna  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  osiąga swój kres górnny lub dolny na  $M$  w punkcie  $p \in M$ , to gradient  $\text{grad } f(p)$  jest prostopadły do przestrzeni stycznej  $T_p M$ . W przypadku, gdy  $M$  w otoczeniu  $U$  punktu  $p$  jest zadane przez  $m$  ograniczeń równościowych  $g_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , takich że funkcje  $g_i : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne i ich gradienty  $\text{grad } g_i$  rozpinają  $m$ -wymiarową przestrzeń liniową w każdym punkcie  $U$  warunek prostopadłości możemy zapisać jako:

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } g_i(p),$$

gdzie  $\lambda_i$  są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi. Innymi słowy, w punkcie ekstremalnym  $f|_M$  gradient  $f$  jest kombinacją liniową gradientów funkcji  $g_i$ , definiujących rozmaistość  $M$ . Wynik ten znany jest w literaturze jako *Twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a*.

Spróbujmy teraz zobaczyć jak w praktyce wygląda wykorzystanie omówionego wyżej twierdzenia. Warto pamiętać, że przy rozwiązywaniu zadań o ekstremach warunkowych (jak zresztą przy korzystaniu z każdego twierdzenia matematycznego) należy zawsze pa-

miętać o sprawdzeniu założen. Poniższy prosty przykład ilustruje jedną z możliwych pułapek tego typu.

**Zadanie D.7.8.** Znajdź minimum globalne funkcji  $f(x, y) = x^2 + (y + 1)^2$  na zbiorze  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 = 0\}$ .

### Rozwiązanie:

Spróbujmy zastosować do rozważanego problemu metodę mnożników Lagrange'a. Zaczniemy od policzenia gradientów funkcji  $f$  i  $g(x, y) = x^2 - y^3$ :

```
f[x_, y_] := x^2 + (y + 1)^2;
g[x_, y_] := x^2 - y^3;
D[f[x, y], {{x, y}}]
D[g[x, y], {{x, y}}]
```

Jak widać  $\text{grad } f(x, y) = (2x, 2(y+1))$  zaś  $\text{grad } g(x, y) = (2x, -3y^2)$ . Łatwo teraz zauważyc, że warunek  $\text{grad } f = \lambda \text{grad } g$  prowadzi do równania  $2x = \lambda 2x$ , skąd  $x = 0$  lub  $\lambda = 1$ . W pierwszym przypadku warunek  $g(x, y) = 0$  implikuje  $y = 0$ , a wówczas  $\text{grad } f = (0, 2)$  oraz  $\text{grad } g = (0, 0)$ . Jak widzimy, nie znajdziemy wówczas takiego  $\lambda$  aby  $\text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ . W drugim z przypadków równanie

```
Solve[D[f[x, y], {{x, y}}] == D[g[x, y], {{x, y}}], y]
```

nie ma rozwiązań rzeczywistych. Metoda mnożników Lagrange'a nie wskazała nam zatem żadnych podejrzanych. Czy wynika stąd, że rozważany problem nie ma rozwiązania?

Z drugiej strony nasze zadanie możemy rozwiązać metodami elementarnymi: wyliczając  $x^2$  z równania  $g(x, y) = 0$  i wstawiając je do  $f$  staniemy przed problemem znalezienia minimum funkcji  $y \mapsto y^3 + (y + 1)^2$  na zbiorze  $y$  takich, że dla pewnego  $x \in \mathbb{R}$  punkt  $(x, y)$  należy do  $A$ . Nietrudno się przekonać, że ten zbiór to po prostu  $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ . Jest jasne, że rozważana funkcja osiąga w  $B$  minimum równe 1 w punkcie  $y = 0$  (a zatem wobec  $g(x, y) = 0$  mamy  $x = 0$ ). Dlaczego zatem metoda Lagrange'a nie wskazała punktu  $(0, 0)$  jako potencjalnego rozwiązania?

Problem polega na tym, że w punkcie  $(0, 0)$  założenia twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a nie są spełnione:  $\text{grad } g(0, 0) = (0, 0)$  nie rozpina 1-wymiarowej przestrzeni liniowej. W istocie zbiór  $A$  nie jest rozmaitością zanurzoną – posiada „osobliwość” w punkcie  $(0, 0)$ , o czym łatwo się przekonać rysując go w programie *Mathematica*

```
ContourPlot[g[x, y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -1, 2}]
```

Po usunięciu punktu  $(0, 0)$  otrzymamy natomiast uczciwą rozmaistość  $A \setminus \{(0, 0)\}$  w  $\mathbb{R}^2$  (składającą się z dwóch rozłącznych gałęzi). Na tym zbiorze Twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a można stosować w całej rozciągłości i na mocy naszych wcześniejszych rozważań wiemy już, że nie ma tam żadnych punktów ekstremalnych. Punkt  $(0, 0)$  powinniśmy natomiast rozpatrzyć osobno jako potencjalny punkt podejrzany o istnienie minimum.

**Zadanie D.7.9.** Znajdź ekstrema funkcji  $f(x, y, z) = 2x + 2y - 3z$  na zbiorze  $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy + yz + zx = 8\}$ .

### Rozwiążanie:

Zacznijmy od spostrzeżenia, że zbiór  $D$  jest zwarty jako domknięty podzbiór sfery, a zatem zadanie ma rozwiązanie. Oczywiście użyjemy metody mnożników Lagrange'a. Zacznijmy od zdefiniowania odpowiednich funkcji i sprawdzenia w których miejscach założenia o liniowej niezależności gradientów nie są spełnione.

```
f[x_, y_, z_] := 2 x + 2 y - 3 z;
g1[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2 - 9;
g2[x_, y_, z_] := x y + y z + z x - 8;
D[g1[x,y,z],{{x,y,z}}]
D[g2[x,y,z],{{x,y,z}}]
```

Jak widzimy gradienty funkcji  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$  i  $g_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8$  to, odpowiednio, wektory  $(2x, 2y, 2z)$  oraz  $(y+z, x+z, x+y)$ . Niestety przy badaniu ich liniowej niezależności musimy pomóczyć się sami: *Mathematica* zwraca wynik 2 dla polecenia `MatrixRank[{{2x, 2y, 2z}, {y+z, x+z, x+y}}]`, co jest prawdą dla dostatecznie ogólnych  $x, y$  i  $z$ , ale bynajmniej nie dla wszystkich z nich. Łatwo się przekonać (zostawiamy to jako ćwiczenie dla Czytelnika), że rząd rozważanej macierzy jest mniejszy niż 2 dokładnie w dwóch sytuacjach: gdy  $x = y = z$  lub gdy  $x + y + z = 0$ . Bez trudu sprawdzamy (tu może nam już pomóc *Mathematica*), że przypadki te są rozłączne ze zbiorem  $D$ . Wobec tego metodę mnożników Lagrange'a możemy stosować bez żadnych zastrzeżeń. Niestety próba rozwiązania układu równań

```
Solve[D[f[x, y, z], {{x, y, z}}] ==
  lambda D[g1[x, y, z], {{x, y, z}}] + mu D[g2[x, y, z], {{x, y, z}}]
  && g1[x, y, z] == 0 && g2[x, y, z] == 0, {x, y, z, mu, lambda}]
```

nie przynosi rezultatu: program nie jest w stanie zakończyć obliczeń – widocznie rozważany układ równań jest dla niego zbyt skomplikowany. Wobec tego spróbujmy rozwiązać problem na raty: najpierw z równania  $\text{grad } f = \lambda \text{grad } g_1 + \mu \text{grad } g_2$  wyliczymy  $x, y$  i  $z$  w funkcji  $\lambda$  i  $\mu$ , a następnie wstawimy otrzymane wielkości do równań  $g_1(x, y, z) = 0 = g_2(x, y, z)$ .

```
xyz = Solve[D[f[x, y, z], {{x, y, z}}] == Lambda D[g1[x, y, z], {{x, y, z}}]
  + Mu D[g2[x, y, z], {{x, y, z}}], {x, y, z}];
Simplify[g1[x, y, z] /. xyz]
Simplify[g2[x, y, z] /. xyz]
```

W rezultacie dostaliśmy dość skomplikowane wyrażenia wymierne, które powinny tożsamiościowo znikać. Problem znów wygląda na skomplikowany, ale program *Mathematica* łatwo sobie z nim poradzi. Również Czytelnik uzbrojony jedynie w papier i ołówek byłby w stanie to zrobić: warto zauważyc, że, zarówno w wrażeniu  $xyz$  jak i ewaluacji na nim funkcji  $g_1$  i  $g_2$ , pojawiają się w sposób naturalny jednomiany  $2\lambda - \mu$  oraz  $\lambda + \mu$ . Rozsądny jest zatem podejrzewać, że podstawienie  $A = 2\lambda - \mu$  oraz  $B = \lambda + \mu$  może znacznie uprościć obliczenia. Tak jest w istocie

```
A=2 Lambda- Mu; B=Lambda+ Mu;
Simplify[xyz]
Simplify[g1[x,y,z]/. xyz]
Simplify[g2[x,y,z]/. xyz]
```

Udało się nam znacznie uprościć wyniki. Pozostaje rozwiązać odpowiednie równania i sprawdzić które z rozwiązań odpowiadają minimom, a które maksymom funkcji  $f$  na zbiorze  $D$ :

```
Solve[-9 + 50/(3 A^2) + 1/(12 B^2) == 0
&& -8 - 25/(3 A^2) + 1/(12 B^2) == 0, {A, B}]
xyz/. %
f[x,y,z] /. %
```

Jak widzimy funkcja  $f$  osiąga w punkcie  $(-2, -2, -1)$  minimum równe  $-5$  i w punkcie  $(2, 2, 1)$  maksimum równe  $5$ .

Metodę mnożników Lagrange'a dość łatwo zaadoptować do szukania ekstremów funkcji z warunkami nierównościowymi.

**Zadanie D.7.10.** Znajdź punkt w zbiorze  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 3z^2 \leq 1\}$  najbardziej odległy od punktu  $(0, 0, 0)$ . Znajdź punkt w zbiorze  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 3z^2 \leq 1\}$  najbardziej odległy od punktu  $(0, 0, 0)$ .

#### Rozwiązanie:

Powysze zadanie możemy potraktować jak standardowe zadanie na wyznaczanie ekstremum funkcji różniczkowej  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  w danym zbiorze.<sup>13</sup> Warto zauważyć, że ponieważ zbiór  $E$  jest zwarty, a odległość punktu od początku układu współrzędnych jest funkcją ciągłą rozwiązywanie na pewno istnieje. Stosując opisaną w poprzednim rozdziale „metodę policyjną” najpierw szukamy punktów krytycznych funkcji  $f$  w punktach w których obcięcie  $f|_E$  jest różniczkowalne, czyli w punktach wewnętrznych zbioru  $E$  (lątwo zauważyć, że  $E$  jest pełną elipsoidą z brzegiem  $\partial E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 3z^2 = 1\}$  – narysuj tę powierzchnię korzystając z polecenia ContourPlot3D!). Prosty rachunek, który tutaj pominiemy pokazuje, że  $f$  ma tylko jeden punkt krytyczny  $(0, 0, 0)$ , który oczywiście należy do  $E$  i odpowiada minimum wartości  $f$  w zbiorze  $E$ . Pozostaje nam teraz zbadać funkcję  $f$  w miejscach gdzie  $f|_E$  nie jest różniczkowalne, czyli na brzegu  $\partial E$ . Jest to standardowe zadanie z optymalizacji warunkowej. Rozwiążemy je korzystając z metody mnożników Lagrange'a.

Zacznijmy od zdefiniowania funkcji  $f$  i funkcji  $g$  takiej, że  $\partial E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$  i sprawdzenia czy spełnione są założenia twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a

```
f[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2;
g[x_, y_, z_] := 3 x^2 + 3 y^2 + 2 x y + 3 z^2 - 1;
Solve[D[g[x, y, z], {{x, y, z}}] == {0, 0, 0}, {x, y, z}]
```

Jak widzimy wektor grad  $g$  jest zerowy tylko w punkcie  $(0, 0, 0)$ , który nie należy do  $\partial E$ , możemy zatem bez zastrzeżeń stosować metodę mnożników Lagrange'a:

---

<sup>13</sup>Uważny Czytelnik może spytać dlaczego nie badamy prawdziwej odległości, czyli funkcji  $\sqrt{f} : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , tylko jej kwadrat. Po pierwsze problemy dla  $\sqrt{f}$  i  $f$  są równoważne: jeśli odległość osiąga minimum albo maksimum w danym punkcie to także jej kwadrat ma w tym punkcie, odpowiednio, minimum albo maksimum. Zaletą używania funkcji  $f$  zamiast prawdziwej odległości jest to że w przeciwnieństwie do tej ostatniej jest ona wszędzie różniczkowalna i jej pochodna ma bardzo prostą postać. Sztuczka z zamianą problemu minimalizacji danej funkcji na równoważny problem z funkcją, która „lepiej się zachowuje” pojawia się dość często również w zaawansowanych badaniach matematycznych.

```
Solve[D[f[x, y, z], {x, y, z}] == lambda D[g[x, y, z], {x, y, z}]]  
&& g[x, y, z] == 0, {x, y, z, lambda}]  
f[x, y, z] /. %
```

Powyższa sekwencja komend znajduje wszystkie punkty podejrzane o bycie ekstremum i wylicza odpowiadające im wartości funkcji  $f$ . Rzut oka na wyniki pozwala stwierdzić, że  $f$  ma na  $\partial E$  (a więc i na  $E$ ) dokładnie dwa maksima w punktach  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$  i  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  odpowiadające wartości  $f$  równej  $\frac{1}{2}$ .

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.7.11.** Znajdź punkt leżący na walcu  $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 16\}$  najbliższy punktowi  $(1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ .

**Zadanie D.7.12.** Znajdź punkt elipsoidy  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy + xz + yz \leq 1\}$  najbardziej odległy od osi  $z$ .

**Zadanie D.7.13.** Znajdź ekstrema funkcji  $f(x, y, z) = xyz$  na zbiorze  $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy + yz + zx = 8\}$ .

## D.8 Formy różniczkowe

**Nowe umiejętności:** Definiowanie i podstawowe operacje na formach różniczkowych w przestrzeni Euklidesowej. Przeciąganie formy, całka z formy na rozmaitości.

**Skrypt:** Rozdział 7.

### Nowe funkcje:

<i>Mathematica</i>	<i>Sage</i>	<i>Opis</i>
d		różniczka zewnętrzna
Component		składowa formy
Wedge		iloczyn zewnętrzny
Pullback		przeciągnięcie formy
Chain		definicja podrozmaitości sparametryzowanej
Integral		całka z formy wzduż podrozmaitości

*Mathematica* nie oferuje wbudowanych operacji na formach różniczkowych ale jest wiele pakietów rozszerzających program *Mathematica* o tę funkcjonalność dostępnych na różnych licencjach (jako wolne oprogramowanie lub jako komercyjne produkty). Przyjrzymy się tutaj pakietowi *DifferentialForms* [1], który ma tę zaletę, że nie wymaga skomplikowanych operacji inicjalizacyjnych.

Na początek należy pobrać ze strony [1] plik *DifferentialForms.m* i umieścić go w katalogu roboczym. Po uruchomieniu *Mathematica* należy wpisać

```
Needs["DifferentialForms`"]
```

Teraz możemy zdefiniować przykładową 1-formę  $\eta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$  pisząc

```
eta = (1/2) x d[y] - (1/2) y d[x]
```

oraz obliczyć różniczkę zewnętrzną wykonując polecenie

```
d[eta]
```

Funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  może być interpretowana jako 0-forma, więc jej różniczka zewnętrzna będzie 1-formą  $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ . Spróbujmy wykonać

```
d[f[x,y]]
```

```
d[Sin[x*y]]
```

Możemy też obliczyć iloczyn zewnętrzny dwóch form, np.

```
Wedge[eta, d[Sin[x*y]]]
```

```
Wedge[eta, d[Log[x/y]]]
```

Zajmiemy się teraz obliczaniem operacji przeciagnięcia formy różniczkowej za pomocą przekształcenia różniczkowalnego.

**Zadanie D.8.1.** Niech  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie przekształceniem biegunowym (patrz rozdział [D.4.2](#)). Oblicz przeciagnięcie standardowej formy objętości  $dx \wedge dy$  określonej na  $\mathbb{R}^2$  za pomocą przekształcenia  $\Phi$ .

### Rozwiązanie:

Ten przykład został już omówiony na wykładzie z użyciem wzoru [\(7.22\)](#). W praktyce ten sposób obliczania przeciagnięcia formy nie jest jednak zbyt wygodny, szczególnie gdy rozpatrujemy przeciaganie form względem dość skomplikowanych przekształceń. Najprościej jest wyznaczać wynik operacji przeciagania, korzystając z jej dwóch fundamentalnych własności: przemienności z operacją iloczynu zewnętrznego, tj. ze Stwierdzeniu [7.30](#) (ii), mówiącego, że  $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ , oraz przemienności z operacją różniczki zewnętrznej, Twierdzenie [7.34](#) (iv), t.j.  $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$ . W powyższych wzorach  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  jest dowolnym przekształceniem różniczkowalnym pomiędzy zbiorami otwartymi  $V$  i  $U$ , zaś  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi formami różniczkowymi na  $U$ . W rozważanym przez nas przypadku daje to

$$\Phi^*(dx \wedge dy) = (\Phi^*dx) \wedge (\Phi^*dy) = d(\Phi^*x) \wedge d(\Phi^*y).$$

Pamiętając teraz, że przeciaganie funkcji to po prostu składanie mamy  $(\Phi^*x)(r, \phi) = x(\Phi(r, \phi)) = r \cos(\phi)$  i podobnie  $\Phi^*y(r, \phi) = r \sin(\phi)$ . Stąd już łatwo możemy policzyć żądaną formę:

```
x = r Cos[phi];
y = r Sin[phi];
Wedge[d[x], d[y]];
Simplify[%] .
```

Otrzymaliśmy  $-rd\phi \wedge dr = rdr \wedge d\phi$ , zgodnie z wynikami z wykładu.

Spróbujmy policzyć jeszcze jeden przykład tego typu.

**Zadanie D.8.2.** Oblicz przeciagnięcie formy  $\alpha = zdx \wedge dy + xz^2dy \wedge dz$  za pomocą przekształcenia  $f(x, y, z) = (x^2 \sin(y), e^{3z}, xyz)$ .

### Rozwiążanie:

Postępując analogicznie jak poprzednio łatwo otrzymamy wzór:

$$f^*\alpha = (f^*z)d(f^*x) \wedge d(f^*y) + (f^*x)(f^*z)^2d(f^*y) \wedge (f^*z),$$

gdzie  $(f^*x)(x, y, z) = x^2 \sin(y)$ ,  $(f^*y)(x, y, z) = e^{3z}$  oraz  $(f^*z)s(x, y, z) = xyz$ . Niezbędne obliczenia łatwo wykonamy w programie Mathematica:<sup>14</sup>

```
alpha = z Wedge[d[x], d[y]] + x z^2 Wedge[d[y], d[z]];
x = X^2 Sin[Y];
y = E^(3 Z);
z = X Y Z;
Simplify[alpha]
```

W wyniku otrzymaliśmy

$$f^*\alpha = (-3)e^{3z}x^2yz [(-2 + x^2y^2z^2)\sin(y)dx \wedge dz + x(-\cos(y) + x^2yz^2\sin(y))dy \wedge dz].$$

Pakiet *DifferentialForms* pozwala także całkować  $k$  formy wzdłuż  $k$  wymiarowych podrozmańości  $\mathbb{R}^n$  sparametryzowanych pojedynczym przekształceniem  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Obliczmy zatem objętość kuli o promieniu  $R$  w  $\mathbb{R}^3$  – w tym celu wystarczy scałkować formę  $dx \wedge dy \wedge dz$  po kuli

```
Integral[ d[x,y,z], Chain[-1, {x -> r Cos[theta] Sin[phi],
                                y -> r Sin[theta] Sin[phi],
                                z -> r Cos[phi]}, {r, 0, R}, {theta, 0, 2Pi}, {phi, 0, Pi}] ]
```

Polecenie  $d[x, y, z]$  tworzy formę  $dx \wedge dy \wedge dz$ , zaś funkcja *Chain* służy do zbudowania podzbioru  $\mathbb{R}^3$  sparametryzowanego pewnym przekształceniem. W naszym przypadku bierzemy funkcję  $F(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$ , która przekształca prostopadłościan  $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  na kulę o promieniu  $R$  (jest to wersja przekształcenia sferycznego – por. Rozdział D.4.2). Dodatkowy parametr  $-1$  przekazany do *Chain* mówi, że dana podrozmańość jest zorientowana przeciwnie do domyślnej orientacji – polecenie *Chain* sortuje nazwy zmiennych alfabetycznie (czyli u nas  $(\phi, r, \theta)$ ) i uznaje takie uszeregowanie za bazę zorientowaną dodatnio.

Niestety pakiet *DifferentialForms* zawiera błędy. Można się o tym przekonać próbując scałkować formę  $\eta = \frac{1}{2}xdy - \frac{1}{2}ydx$  wzdłuż okręgu o promieniu  $R$ .

```
Integral[eta, { x -> R Cos[theta], y -> R Sin[theta]}, {theta, 0, 2 Pi}]
```

Niestety podany wynik jest błędny i dlatego zalecamy nie używać polecenia *Integral*. Lepiej posłużyć się poleceniami *Pullback* oraz *Component*. Jeśli  $f(\theta) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta))$ , to by obliczyć przeciagnięcie formy  $f^*\eta$  piszemy

```
Pullback[eta, {x -> R Cos[theta], y -> R Sin[theta]}]
```

---

<sup>14</sup>W poniżej używamy nowych zmiennych  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ , gdyż użycie wyjściowych zmiennych  $x$ ,  $y$  i  $z$  może spowodować problemy obliczeniowe: definicje rekursywne typu  $x = x^2 \sin(y)$  itp.

Następnie wyłuskujemy współczynnik stojący przy  $d\theta$ .

```
Component[..., d[theta]]
```

Na koniec całkujemy korzystając z wbudowanej funkcji Integrate.

```
Integrate[Component[
  Pullback[eta, {x -> R Cos[theta], y -> R Sin[theta]}],
  d[theta]], {theta, 0, 2 Pi}]
```

Teraz dostajemy poprawną odpowiedź  $\pi R^2$ , czyli pole koła o promieniu  $R$  (por. Przykład 7.11).

**Geometryczna definicja dywergencji i laplasjanu.** Wróćmy teraz do przykładu z końca rozdziału D.4.2: problemu obliczania laplasjanu po zmianie współrzędnych. Rozważany wówczas przykład sugeruje, że definicja laplasjanu funkcji  $f$  jako sumy drugich pochodnych cząstkowych  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots$  jest właściwa tylko we współrzędnych kartezjańskich i w ogólności nie obowiązuje po zmianie zmiennych. Pokażemy teraz jak wyprowadzić wzór na laplasjan obowiązujący we współrzędnych nieeuklidesowych. Dla ustalenia uwagi ograniczymy nasze rozważania do przekształcenia biegunoowego  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \ni (r, \phi) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$  zadanego przez równości  $x = r \cos \phi$  i  $y = r \sin \phi$  (patrz rozdział D.4.2), niemniej schemat postępowania pozostaje taki sam w przypadku każdej innej zamiany zmiennych. Dla rozróżnienia między formułami na laplasjan we współrzędnych  $(x, y)$  oraz  $(r, \phi)$  będziemy używać oznaczeń, odpowiednio,  $\Delta_{(x,y)}$  oraz  $\Delta_{(r,\phi)}$ .

Zacznijmy od sprecyzowania problemu: chcemy znaleźć taki operator  $\Delta_{(r,\phi)}$  aby dla każdej funkcji dwukrotnie różniczkowej  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zachodziła równość

$$\Delta_{(r,\phi)} F(r, \phi) = (\Delta_{(x,y)} f)(x, y),$$

gdzie  $(x, y) = \Phi(r, \phi)$  zaś  $F(r, \phi) = f(\Phi(r, \phi))$  to funkcja  $f$  wyrażona we współrzędnych biegunkowych. W języku przeciagania form różniczkowych (a więc także i funkcji) oznacza to:

$$\Delta_{(r,\phi)} \Phi^* f = \Phi^*(\Delta_{(x,y)} f). \quad (\text{D.4})$$

Jak już wspominaliśmy w rozdziale D.4.2 geometrycznie laplasjan możemy zdefiniować jako dywergencję gradientu  $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ . Niezależna od wyboru współrzędnych definicja dywergencji zależy od wyboru *formy objętości* (nieznikającej formy różniczkowej maksymalnego rzędu). Jeśli  $\omega \in \Omega^n(U)$  jest taką formą na zbiorze otwartym  $U \subset \mathbb{R}^n$ , zaś  $X$  jest polem wektorowym na  $U$ , wówczas (por. dowód Twierdzenia 7.53)

$$\operatorname{div}(X) \cdot \omega := d(X \lrcorner \omega). \quad (\text{D.5})$$

Wyrażenie  $X \lrcorner \omega$  oznacza tutaj ewaluację  $n$ -formy różniczkowej  $\omega$  (która jest funkcją  $n$ -liniową w każdym punkcie  $U$ ) na polu  $X$ , tzn.  $(X \lrcorner \omega)(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{n-1})$ . Otrzymujemy w ten sposób  $(n-1)$ -formę różniczkową (funkcję  $(n-1)$ -liniową w każdym punkcie  $U$ ), z której po zastosowaniu różniczki zewnętrznej  $d$  z powrotem otrzymujemy  $n$ -formę. Geometryczna interpretacja dywergencji jest następująca: jest to funkcja, która mówi nam jak zmienia się jednostkowa objętość pod wpływem ruchu w kierunku pola  $X$ . Inaczej: jak bardzo ruch w kierunku  $X$  rozciąga albo ściska jednostkową objętość.

Z równania (D.5) i z podstawowych własności operacji przeciagania formy różniczkowej łatwo wyprowadzić reguły transformacyjne dla operatora dywergencji przy zamianie zmiennych (ostatnia z poniższych równości łatwo wynika z definicji operacji  $\lrcorner$  i operacji przeciagania form):

$$\Phi^*(\operatorname{div} X) \cdot \Phi^*\omega = \Phi^*(\operatorname{div}(X \cdot \omega)) = \Phi^*(d(X \lrcorner \omega)) = d(\Phi^*(X \lrcorner \omega)) = d(D\Phi^{-1}(X) \lrcorner \Phi^*\omega).$$

Podsumowując: przeciagnięcie funkcji  $\operatorname{div}(X)$  za pomocą odwzorowania  $\Phi$  to dywergencja pola  $D\Phi^{-1}(X)$  liczona względem przeciagniętej formy objętości  $\Phi^*\omega$ , tzn.

$$\Phi^* \operatorname{div}_\omega(X) = \operatorname{div}_{\Phi^*\omega}(D\Phi^{-1}(X)). \quad (\text{D.6})$$

Korzystając z powyższego wzoru łatwo sprawdzić, że laplasjan  $\Delta_{(r,\phi)}$  zdefiniowany jako

$$\Delta_{(r,\phi)} F := \operatorname{div}_{\Phi^*\omega}(\operatorname{grad}_{(r,\phi)} F), \quad (\text{D.7})$$

gdzie  $\operatorname{grad}_{(r,\phi)} F$  oznacza gradient we współrzędnych biegunkowych (patrz równanie (D.1)), spełnia zależność (D.4). Istotnie,

$$\begin{aligned} \Delta_{(r,\phi)} \Phi^* f &\stackrel{(\text{D.7})}{=} \operatorname{div}_{\Phi^*\omega}(\operatorname{grad}_{(r,\phi)} \Phi^* f) \stackrel{(\text{D.6})}{=} \Phi^* \left( \operatorname{div}_\omega(D\Phi(\operatorname{grad}_{(r,\phi)} \Phi^* f)) \right) \stackrel{(\text{D.1})}{=} \\ &\Phi^* \left( \operatorname{div}_\omega(\operatorname{grad}_{(x,y)} f) \right) = \Phi^*(\Delta_{(x,y)} f). \end{aligned}$$

Teraz pozostaje nam już tylko wykonać niezbędne rachunki korzystając ze wzoru (D.7) i programu *Mathematica*. Zaczniemy od zdefiniowania przekształcenia biegunkowego, gradientu (odpowiedni wzór (D.1) we współrzędnych biegunkowych znamy już z rozdziału D.4.2) i cofnięcia standardowej formy objętości

```
x = r Cos[Phi]; y = r Sin[Phi];
gradient = D[F[r, Phi], r] X[r] + D[F[r, Phi], Phi]/r^2 X[Phi];
volume = Wedge[d[x], d[y]]
```

Zauważmy przy okazji, że użyliśmy funkcji  $X[r]$  i  $X[\Phi]$ . W języku pakietu *DifferentialForms*  $X[z]$  oznacza standardowy wektor  $e_z$  skierowany wzdłuż współrzędnej  $z$ . Teraz pozostaje już tylko policzyć ewaluację gradientu na formie objętości (używamy do tego celu polecenia *InteriorProduct*) i obliczyć różniczkę tak otrzymanej 1-formy

```
InteriorProduct[gradient, volume];
FullSimplify[d[%]]
```

Porównując to ostatnie wyrażenie z formą objętości *volume* (w tym celu można skorzystać z polecenia *Component*) i korzystając z definicji dywergencji (D.5) łatwo wnioskujemy, że

$$\Delta_{(r,\phi)} F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}. \quad (\text{D.8})$$

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie D.8.3.** Oblicz przeciagnięcie standardowej formy objętości  $dx \wedge dy \wedge dz$  w  $\mathbb{R}^3$  za pomocą przekształcenia sferycznego (patrz rozdział D.4.2).

**Zadanie D.8.4.** Oblicz przeciagnięcie formy różniczkowej  $\beta = zxdx \wedge dy + zydy \wedge dz$  za pomocą przekształcenia  $f(x, y, z) = (e^{xy}, xz, yz)$ .

**Zadanie D.8.5.** Rozważmy formę różniczkową  $\omega = dy - zdx$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Udowodnij, że forma  $-\omega \wedge d\omega$  jest równa standardowej formie objętości  $dx \wedge dy \wedge dz$  w  $\mathbb{R}^3$ . Rozważmy przekształcenia  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dane wzorami  $f(x, y, z) = (z, y - xz, -x)$  oraz  $g(z, y, z) = (z, y + e^{x^2} \sin(x), z + e^{x^2}(\cos(x) + 2x \sin(x)))$ . Oblicz przeciagnięcie formy  $\omega$  za pomocą przekształceń  $f$  i  $g$ . Co zaobserwował(a)eś?

*Uwaga.* Forma  $\omega$  jest przykładem tak zwanej *formy kontaktowej*, zaś przekształcenia  $f$  i  $g$  to przykłady przekształceń zachowujących tę formę (*kontaktomorfizmów* albo *transformacji kontaktowych*). Formy kontaktowe pojawiają się w wielu kontekstach w matematyce (teoria równań różniczkowych cząstkowych, teoria sterowania) i fizyce (mechanika klasyczna, termodynamika).

**Zadanie D.8.6.** Korzystając ze wzoru (D.8) na laplasjan we współrzędnych biegunowych sprawdź, że funkcja  $u(r, \phi) = \frac{1}{b^4 - a^2}(r^2 - \frac{a^2}{r^2}) \sin(2\phi)$  spełnia równanie Laplace'a  $\Delta_{(r, \phi)} u = 0$ . Zapisz tę funkcję we współrzędnych kartezjańskich i sprawdź, że w tych współrzędnych równanie Laplace'a także zachodzi.

**Zadanie D.8.7.** Korzystając z pomocy programu *Mathematica* udowodnij wzór (D.8) sposobem rachunkowym, tzn. używając wzorów na pochodną złożenia wyraź drugie pochodne funkcji  $f(x, y)$  po  $x$  i  $y$  przez drugie pochodne złożenia  $f(\Phi(r, \phi))$  po  $r$  i  $\phi$  oraz pochodne  $x$  i  $y$  po  $r$  i  $\phi$ .

**Zadanie D.8.8.** Wykaż, że laplasjan funkcji  $f$  we współrzędnych sferycznych wyraża się wzorem

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin(\theta)}{r^2 \cos(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Sprawdź, że tak liczony laplasjan znika dla  $f(r, \phi, \theta) = \frac{1}{r}$  (por. koniec rozdziału D.4.2).

**Zadanie D.8.9.** Popraw plik DifferentialForms.m tak, by polecenie

```
Integral[(1/2) x d[y] - (1/2) y d[x] ,
 {x -> R Cos[theta], y -> R Sin[theta]}, {theta, 0, 2 Pi}]
```

zwracało poprawną odpowiedź  $\pi R^2$ .

## Bibliografia dodatku B.

- [1] Pakiet DifferentialForms. <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/482/>.
- [2] Dokumentacja programu *Mathematica*. <http://reference.wolfram.com>.
- [3] S. Kolasiński, M. Józwikowski. Dodatek do skryptu z Analizy Matematycznej I. 2013.
- [4] P. Strzelecki. Analiza Matematyczna II. 2014. <http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/>.
- [5] Wikipedia: Comparison of computer algebra systems.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison\\_of\\_computer\\_algebra\\_systems](http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_computer_algebra_systems).