Topologia *

Mateusz Zugaj, Michal Zmyslowski

Listopad 2017

Definicja 1 (Topologie na prostej)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów $\mathcal{T}_i$:

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ – topologia dyskretna
2. $\mathcal{T}_2 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t>s} [s,t) \subset U\}$ – topologia prawej strzałki
3. $\mathcal{T}_3 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t<s} (t,s] \subset U\}$ – topologia lewej strzałki
4. $\mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{r<s<t} (r,t) \subset U\}$ – topologia euklidesowa
5. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia lewych przedziałów
6. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia prawych przedziałów
7. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U$ jest zbiorem skończonym$\}$ – topologia Zariskiego
8. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ – topologia antydyskretna

Zadanie 1. *Niech $\mathcal{T}_i$ będą rodzinami podzbiorów prostej rzeczywistej opisanymi w Definicji 1.*
a) Sprawdź, że rodziny $\mathcal{T}_i$ są topologiami.
b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i$, rysując diagram inkluzji tych Topologii i zbadaj ich przecięcia.
c) Zbadaj, które topologie $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.
d) O których parach przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$,$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij tabelkę.

Rozwiązanie b) Ewidentnie $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1$. Następnie $[0,1) \in \mathcal{T}_2$, ale $[0,1) \notin \mathcal{T}_3$. Podobnie $(0,1] \in \mathcal{T}_3$, ale $(0,1] \notin \mathcal{T}_2$. Mamy, że $(0,1) \in \mathcal{T}_4$, jak również $(0,1) \in \mathcal{T}_3$ i $(0,1) \in \mathcal{T}_2$. Jednak $[0,1) \notin \mathcal{T}_4$ i $(0,1] \notin \mathcal{T}_4$. Czyli $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_3$. Teraz $(-\infty,1) \in \mathcal{T}_5$, jak również $(-\infty,1) \in \mathcal{T}_4$. Podobnie $(1,\infty) \in \mathcal{T}_6$ i $(1,\infty) \in \mathcal{T}_4$. Jednak $(0,1) \notin \mathcal{T}_5$ i $(0,1) \notin \mathcal{T}_6$. Tak więc, $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_4$ i $\mathcal{T}_6 \subset \mathcal{T}_4$. Mamy $(-\infty,1) \notin \mathcal{T}_7$ i $(1,\infty) \notin \mathcal{T}_7$. Teraz $\mathbb{R} \setminus \{1\} \in \mathcal{T}_7$, ale $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{T}_5$ i $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{T}_6$. Jednak $\mathbb{R} \setminus \{1\} \in \mathcal{T}_4$. Czyli $\mathcal{T}_7 \subset \mathcal{T}_4$. Ostatecznie $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_6$, $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_7$. c) Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $x < y$. Teraz $\mathcal{T}_1$ ma własność Hausdorffa, bo $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{T}_1$. Następnie dobierzmy $s, t, r \in \mathbb{R}$, że $x \in (s,t)$ i $y \in (t,r)$. Teraz

$(s,t) \in \mathcal{T}_4$ i $(t,r) \in \mathcal{T}_4$. Więc $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ i $\mathcal{T}_4$ mają własność Hausdorffa. Pokażemy, że przestrzeń $\mathcal{T}_5$ nie ma własności Hausdorffa, z czego przez analogiczny sposób rozumowania będzie wynikało, że $\mathcal{T}_6$ też nie ma. Weźmy $x, y \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności, załóżmy, że $x < y$. Zbiór otwarty w $\mathcal{T}_5$ zawierający y będzie miał postać $(-\infty, s)$ dla $s \in \mathbb{R}$. Z założenia, że $x < y$ dostajemy $x \in (-\infty, s)$. Teraz udowodnimy, że $\mathcal{T}_7$ nie ma własności Hausdorffa. Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_7$ takie, że $x \in \mathcal{U}$ i $y \in \mathcal{V}$. Teraz $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{T}_7$, z czego wynika, że $\mathbb{R} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ jest skończony. Tak więc, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$, bo w przeciwnym przypadku $\mathbb{R} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ byłby nieprzeliczalny. W $\mathcal{T}_8$ jedynymi zbiorami otwartymi są $\varnothing$ i $\mathbb{R}$, czyli dowolne dwa punkty leżą w tym samym zbiorze, mianowicie $\mathbb{R}$. Tak więc, $\mathcal{T}_8$ nie jest Hausdorffa.
d) Od razu można powiedzieć, że każda $\mathcal{T}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ nie jest homeomorficzna z żadną z $\mathcal{T}_j$ dla $j = 5, 6, 7, 8$, bo wcześniejsze mają własność Hausdorffa, a późniejsze nie. Również $\mathcal{T}_1$ nie jest homeomorficzna z $\mathcal{T}_8$, bo moc pierwszej jest większa od drugiej, co wiadomo ze Wstępu do Matematyki. □

Zadanie 2 (Bukiet prostych)**.** *Niech J będzie dowolnym zbiorem. W zbiorze $\mathbb{R} \times J$ rozpatrzmy relację równoważności*

$$(t,i) \sim (s,j) \quad \textit{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad t = s = 0 \quad \textit{lub} \quad (t,i) = (s,j)$$

a zbiór klas abstrakcji oznaczmy $\mathbb{R} \wedge J^+$. Zauważmy, że $\mathbb{R} \wedge J^+ = \mathbb{R} \times J / 0 \times J$ tzn. powstaje z iloczynu $\mathbb{R} \times J$ przez utożsamienie do punktu podzbioru $0 \times J$. W zbiorze $\mathbb{R} \wedge J^+$ rozpatrzymy dwie topologie:

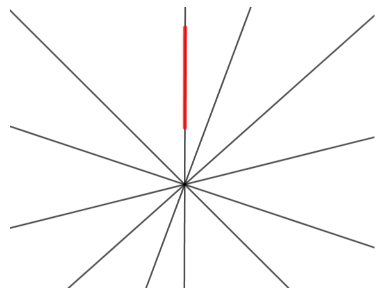
1. *Topologię $\mathcal{T}_k$ wyznaczoną przez metrykę węzła* $d_k((t,i),(s,j)) = \begin{cases} |t-s| \, \textit{jeśli} \, i = j \\ |t| + |s| \, \textit{jeśli} \, i \neq j \end{cases}$
2. *Topologię słabą $\mathcal{T}_w$ tzn. taką, że zbiór $U \subset \mathbb{R} \wedge J^+$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $i \in J$ zbiór $U \cap \mathbb{R} \times \{i\}$ jest otwarty w topologii euklidesowej prostej.*

Udowodnij, że

1. $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_w$
2. *Jeśli $|J| \geqslant \aleph_0$, to topologia słaba nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności.*
3. *Jeśli topologia nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności, to nie jest metryzowalna.*

Rozwiązanie

1. Niech $U \in \mathcal{T}_k$. Zauważmy, że kule $B((x,i),r)$ w metryce d_k występują w dwóch postaciach
   (a) $B((x,i),r)$ dla $r \leqslant |x|$ jest odcinkiem otwartym na i-tej prostej, tj.
   $$B((x,i),r) \cap (\mathbb{R} \times i) = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{przedział otwarty!}} \times \{i\}$$

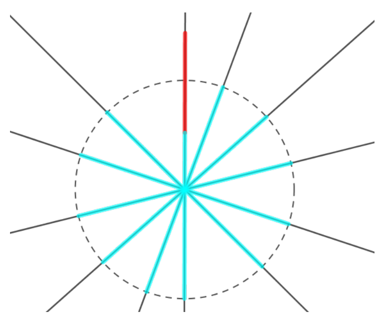


(b) Dla $r > |x|$ jest to suma dwóch zbiorów, odcinka otwartego zdefiniowanego tak samo jak wyżej ["patyczka"]

$$B((x,i),r) \cap (\mathbb{R} \times i) = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{przedział otwarty!}} \times \{i\}$$

oraz zbioru ["lizaka"]

$$(-(r-|x|), r-|x|) \times (J \setminus \{i\})$$



Z definicji przestrzeni wyznaczanej przez metrykę każdy zbiór otwarty jest sumą kul w tej metryce, tj. $U = \bigcup_{u \in U} B_u$, gdzie $B_u = B(u,r)$ są zawarte w U.
Chcemy pokazać, że $U \in \mathcal{T}_w$, czyli że dla każdego i zbiór $U \cap (\mathbb{R} \times \{i\})$ jest otwarty w topologii euklidesowej. Skoro $U = \bigcup B_u$ to wystarczy, że B_u będzie otwarte w $\mathcal{T}_w$ - wtedy U jako suma zbiorów otwartych w $\mathcal{T}_w$ będzie otwarta.
Ale każda kula jest otwarta w $\mathcal{T}_w$. Dla dowolnej zachodzi

$$B((x,j),r) \cap (\mathbb{R} \times \{i\}) = \begin{cases} (x-r, x+r) & r < |x| \vee j = i \\ (-(r-|x|), r-|x|) & r \geqslant |x| \wedge j \neq i \end{cases}$$

W każdym przypadku, iloczyn jest przedziałem otwartym w topologii euklidesowej. Zatem $B((x,j),r) \in \mathcal{T}_w$, więc $U \in \mathcal{T}_w$ zgodnie z tym co wcześniej ustaliliśmy.

2. Udowodnimy, że topologia słaba nie ma punktowej bazy przeliczalnej w 0. Załóżmy, że istnieje taka baza $= \{U_1, U_2, U_3, \cdots\}$. Niech $J_0 \subseteq J$ będzie zbiorem przeliczalnym w J i $J_0 = \{j_1, j_2, \cdots\}$. Skonstruujemy taki zbiór otwarty U, że $0 \in V$ ale $\forall k \in \mathbb{N}\ U_k \not\subseteq V$. Mianowicie bierzemy zbiory

$$V_k \subsetneq U_k \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\})$$

I teraz $V = \bigcup V_k \cup ((J \setminus J_0) \times \mathbb{R})$. Widzimy, że gdyby $U_k \subseteq V$, to musiałoby być $U_k \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\}) \subseteq V \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\}) = V_k$, co jest sprzeczne z definicji V_k. Zatem założenie o istnieniu bazy przeliczalnej w zerze jest fałszywe.

3. Gdyby przestrzeń była metryzowalna, to zbiór kul o promieniach wymiernych o środku w 0 byłaby bazą punktową przeliczalną w zerze, co przy tych założeniach jest niemożliwe na mocy poprzedniego podpunktu.

$\square$

Zadanie 3. *Niech d_i dla $i = 1, 2$ będą dwoma metrykami w zbiorze X. Następujące warunki są równoważne:*
1. Topologia wyznaczona przez d_2 jest drobniejsza niż wyznaczona przez d_1, tzn. $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.
2. Dla każdej kuli $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$ istnieje liczba $r_2 > 0$ taka, że $\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$.
3. Jeśli ciąg jest zbieżny w metryce d_2 to jest zbieżny w metryce d_1 do tej samej granicy.

Rozwiązanie
$1 \implies 2$
Załóżmy, że $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Niech $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_1)$. Z założenia $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_2)$. Z definicji topologii $\mathcal{T}(d_2)$ istnieje $r_2 > 0$ takie, że
$\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$.
$2 \implies 1$
Załóżmy, że dla każdej kuli $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$ istnieje liczba $r_2 > 0$ taka, że
$\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$. Weźmy dowolny $y_s \in \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$. Z definicji topologii $\mathcal{T}(d_1)$ istnieje $r > 0$ takie, że $\mathcal{B}_{d_1}(y_s, r) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$. Z założenia istnieje $r_s > 0$ takie, że $\mathcal{B}_{d_2}(y_s, r_s) \subset \mathcal{B}_{d_1}(y_s, r)$. Z tego wynika, że $\bigcup_s \mathcal{B}_{d_2}(y_s, r_s) = \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_1)$. Z definicji topologii $\bigcup_s \mathcal{B}_{d_2}(y_s, r_s) \in \mathcal{T}(d_2)$. Tak, więc $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.
$1 \implies 3$
Załóżmy, że $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Niech ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbieżny do x w metryce d_2. Załóżmy, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do x w metryce d_1. Z tego wynika, że istnieje $\epsilon > 0$, taki, że dla każdego n_ϵ istnieje $n > n_\epsilon$, że $x_n \notin \mathcal{B}_{d_1}(x, \epsilon)$. Z założenia $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$ wynika jednak, że istnieje liczba $r > 0$ taka, że $\mathcal{B}_{d_2}(x, r) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, \epsilon)$. Jako, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x w metryce d_2, to z definicji zbieżności prawie wszystkie wyrazy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ znajdują się w $\mathcal{B}_{d_2}(x, r)$, co jest sprzeczne z faktem, że $x_n \notin \mathcal{B}_{d_1}(x, \epsilon)$. Z tego wynika, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x w metryce d_1.
$3 \implies 1$
Załóżmy, że jeśli ciąg jest zbieżny w metryce d_2 to jest zbieżny w metryce d_1. Zawieranie się topologii jest równoważne zawieraniu się rodziny zbiorów

domkniętych, tzn. $\mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)} \iff \mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Udowodnimy ten fakt w "prawą" stronę. Niech $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)}$. Jako, że A jest zbiorem domkniętym to $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, więc $X \setminus A \in \mathcal{T}(d_1)$. Z założenia wynika, że $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$, więc również $X \setminus A \in \mathcal{T}(d_2)$. Niech $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)}$. Z definicji domknięcia dostajemy, że $M \subset cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M)$. Jeżeli $x \in cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M)$, to istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, taki, że $d_2(x_n, x) \to 0$. Z założenia dostajemy, że $d_1(x_n, x) \to 0$. Z tego wynika, że $x \in cl_{\mathcal{T}(d_1)}(M)$. M jest domknięty w $\mathcal{T}(d_1)$, czyli $M = cl_{\mathcal{T}(d_1)}(M)$. A z tego mamy, że $x \in M$, co daje $cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M) \subset M$. Wtedy $cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M) = M$, a z tego wynika, że $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$, czyli $\mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$. Tak więc, na mocy faktu, który wcześniej udowodniliśmy $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.

$\square$

Definicja 2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Przez $C(X)$ oznaczamy zbiór funkcji ciągłych $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, a przez $C_b(X)$ jego podzbiór składający się z funkcji ograniczonych. Dla dowolnej funkcji $f \in C_b(X)$ definiujemy $\|f\|_{sup} := sup\{|f(x)| : x \in X\}$ oraz $\|f\|_{L^1} := \int_0^1 |f(t)|dt$.

Zadanie 4. *Porównać topologię wyznaczoną przez normę $\|f\|_{sup}$ z topologią wyznaczoną przez normę $\|f\|_{L^1}$.*

Rozwiązanie Niech

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx \ , \ x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \ , \ x \in (\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Wtedy $f_n \in C_b([0,1])$ i $\|f_n(x)\|_{L^1} = \frac{1}{2n} \to 0$, ale $\|f_n(x)\|_{sup} = 1 \not\to 0$.
Rozważmy $g_n \in C_b([0,1])$ taką, że $\|g_n(x)\|_{sup} \to 0$. Wtedy na mocy 9.31 $\|g_n(x)\|_{L^1} \leqslant sup(|g_n(x)|)(1-0) \to 0$.
Niech $d_{sup}(f,g) = \|f-g\|_{sup}$ i $d_{L^1}(f,g) = \|f-g\|_{L^1}$. Rozpatrzmy $(C_b(X), d_{sup})$ i $(C_b(X), d_{L^1})$. Jeżeli f_n jest zbieżny do f w przestrzeni $(C_b(X), d_{sup})$, tzn. $d_{sup}(f_n, f) \to 0$, to z wcześniejszych obserwacji $d_{L^1}(f_n, f) \to 0$, czyli jest zbieżny, również do f, w $(C_b(X), d_{L^1})$. Z poprzedniego zadania wiemy już, że wtedy $\mathcal{T}(d_{L^1}) \subset \mathcal{T}(d_{sup})$. $\square$

Definicja 3. Grupą topologiczną nazywamy zbiór G wyposażony w topologię i strukturę grupową tak, że działanie grupowe $G \times G \to G$ oraz branie elementu odwrotnego $-^{-1} \colon G \to G$ są odwzorowaniami ciągłymi. Homomorfizmem grup topologicznych nazywamy homomorfizm grup, który jest ciągły.

Zadanie 5. *Przestrzeń grupy topologicznej jest jednorodna tzn. dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in G$ istnieje homeomorfizm $f \colon G \to G$ taki, że $f(y) = x$.*

Rozwiązanie Niech $x, y \in G$ i $f_{xy^{-1}} : G \to G$ będzie funkcją taką, że
$f_{xy^{-1}}(a) := xy^{-1}a$. Zauważmy, że $f_{xy^{-1}}(y) := xy^{-1}y = x$. Pokażemy, że jest to homeomorfizm. $f_{xy^{-1}}$ jest surjekcją, ponieważ dla dowolnego $a \in G$ mamy $f_{xy^{-1}}(yx^{-1}a) = xy^{-1}yx^{-1}a = a$. $f_{xy^{-1}}$ jest iniekcją, bo jeżeli $f_{xy^{-1}}(a) = f_{xy^{-1}}(b)$, to $xy^{-1}a = xy^{-1}b$, czyli $a = b$. Tak więc, $f_{xy^{-1}}$ jest bijekcją. Żeby pokazać, że $f_{xy^{-1}}$ jest ciągłe i otwarte udowodnimy ogólniejsze prawdę, która

przyda nam się również w późniejszych rozważaniach. Niech $\phi_g : G \to G$ takie, że $\phi_g(x) = gx$. Pokażemy, że ϕ_g jest homeomorfizmem. Jest bijekcją, ponieważ $\phi_{g^{-1}}$ jest przekształceniem do niego odwrotnym. Niech $U \subset G$ będzie otwarty. Działanie grupowe jest ciągłe, więc $V = \{(x, y) \in G : xy \in U\}$ jest otwarty w $G \times G$. Niech $\pi : G \times G \to G$ takie, że $\pi(x, y) := y$ i $G_g = \{g\} \times G$. Odwzorowanie π jest otwarte (Wniosek 5.4.1). Teraz $V \cap G_g$ jest otwarte w G_g, więc $\pi[V \cap G_g]$ jest otwarte w G. Mamy, $\pi[V \cap G_g] = \{x \in G : (g, x) \in V\} = \{x \in G : gx \in U\} = \phi_g^{-1}[U]$. Przeciwobraz $\phi_g^{-1}[U]$ jest otwarty, więc ϕ_g jest ciągłe. Również $\phi_{g^{-1}}$ jest ciągłe, bo g było dowolne. Tak więc, ϕ_g jest homeomorfizmem. Homeomorfizm jest otwarty, więc $\phi_g[U] = gU$ jest otwarty. □

Zadanie 6. *Jeśli $H \subset G$ jest podgrupą normalną, to grupa ilorazowa G/H z topologią ilorazową jest grupą topologiczną. (Wsk. Odwzorowanie ilorazowe $p\colon G \to G/H$ jest otwarte). Udowodnij, że odwzorowanie $p : \mathbb{R} \to S^1$, gdzie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, dane wzorem $p(t) := \cos 2\pi t + (\sin 2\pi t)i = e^{2\pi i t}$ jest homomorfizmem grup topologicznych (w $\mathbb{R}$ struktura addytywna, w S^1 multiplikatywna) oraz definiuje izomorfizm grup topologicznych $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$.*

Rozwiązanie Odwzorowanie ilorazowe $\pi : G \to G/H$ jest zdefiniowane następująco $\pi(g) := gH$. Ciągłość π wynika z definicji topologii ilorazowej. □