# Topologia *

Mateusz Zugaj, Michal Zmyslowski

Listopad 2017

**Definicja 1** (Topologie na prostej)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów $\mathcal{T}_i$:

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ – topologia dyskretna
2. $\mathcal{T}_2 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t > s} [s, t) \subset U\}$ – topologia prawej strzałki
3. $\mathcal{T}_3 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t < s} (t, s] \subset U\}$ – topologia lewej strzałki
4. $\mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{r < s < t} (r, t) \subset U\}$ – topologia euklidesowa
5. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia lewych przedziałów
6. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia prawych przedziałów
7. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U$ jest zbiorem skończonym$\}$ – topologia Zariskiego
8. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ – topologia antydyskretna

**Zadanie 1.** *Niech $\mathcal{T}_i$ będą rodzinami podzbiorów prostej rzeczywistej opisanymi w Definicji 1.*
*a) Sprawdź, że rodziny $\mathcal{T}_i$ są topologiami.*
*b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i$, rysując diagram inkluzji tych Topologii i zbadaj ich przecięcia.*
*c) Zbadaj, które topologie $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.*
*d) O których parach przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$,$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij tabelkę.*

**Rozwiązanie** b) Ewidentnie $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_1$. Następnie $[0, 1) \in \mathcal{T}_2$, ale $[0, 1) \notin \mathcal{T}_3$. Podobnie $(0, 1] \in \mathcal{T}_3$, ale $(0, 1] \notin \mathcal{T}_2$. Mamy, że $(0, 1) \in \mathcal{T}_4$, jak również $(0, 1) \in \mathcal{T}_3$ i $(0, 1) \in \mathcal{T}_2$. Jednak $[0, 1) \notin \mathcal{T}_4$ i $(0, 1] \notin \mathcal{T}_4$. Czyli $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_3$. Teraz $(-\infty, 1) \in \mathcal{T}_5$, jak również $(-\infty, 1) \in \mathcal{T}_4$. Podobnie $(1, \infty) \in \mathcal{T}_6$ i $(1, \infty) \in \mathcal{T}_4$. Jednak $(0, 1) \notin \mathcal{T}_5$ i $(0, 1) \notin \mathcal{T}_6$. Tak więc, $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_4$ i $\mathcal{T}_6 \subset \mathcal{T}_4$. Mamy $(-\infty, 1) \notin \mathcal{T}_7$ i $(1, \infty) \notin \mathcal{T}_7$. Teraz $\mathbb{R} \setminus \{1\} \in \mathcal{T}_7$, ale $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{T}_5$ i $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{T}_6$. Jednak $\mathbb{R} \setminus \{1\} \in \mathcal{T}_4$. Czyli $\mathcal{T}_7 \subset \mathcal{T}_4$. Ostatecznie $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_6$, $\mathcal{T}_8 \subset \mathcal{T}_7$. c) Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że $x < y$. Teraz $\mathcal{T}_1$ ma własność Hausdorffa, bo $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{T}_1$. Następnie dobierzmy $s, t, r \in \mathbb{R}$, że $x \in (s, t)$ i $y \in (t, r)$. Teraz

$(s,t) \in \mathcal{T}_4$ i $(t,r) \in \mathcal{T}_4$. Więc $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ i $\mathcal{T}_4$ mają własność Hausdorffa. Przestrzenie $\mathcal{T}_i$ dla $i = 5,6,7,8$ nie mają własności Hausdorffa.
d) Od razu można powiedzieć, że każda $\mathcal{T}_i$ dla $i = 1,2,3,4$ nie jest homeomorficzna z żadną z $\mathcal{T}_j$ dla $j = 5,6,7,8$, bo wcześniejsze mają własność Hausdorffa, a późniejsze nie. Również $\mathcal{T}_1$ nie jest homeomorficzna z $\mathcal{T}_8$, bo moc pierwszej jest większa od drugiej, co wiadomo ze Wstępu do Matematyki. □

**Zadanie 2** (Bukiet prostych)**.** *Niech $J$ będzie dowolnym zbiorem. W zbiorze $\mathbb{R} \times J$ rozpatrzmy relację równoważności*

$$(t,i) \sim (s,j) \quad \textit{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad t = s = 0 \quad \textit{lub} \quad (t,i) = (s,j)$$

*a zbiór klas abstrakcji oznaczmy $\mathbb{R} \wedge J^+$. Zauważmy, że $\mathbb{R} \wedge J^+ = \mathbb{R} \times J / 0 \times J$ tzn. powstaje z iloczynu $\mathbb{R} \times J$ przez utożsamienie do punktu podzbioru $0 \times J$. W zbiorze $\mathbb{R} \wedge J^+$ rozpatrzymy dwie topologie:*

1. *Topologię $\mathcal{T}_k$ wyznaczoną przez metrykę węzła* $d_k((t,i),(s,j)) = \begin{cases} |t-s| \, \textit{jeśli} \, i = j \\ |t| + |s| \, \textit{jeśli} \, i \neq j \end{cases}$
2. *Topologię słabą $\mathcal{T}_w$ tzn. taką, że zbiór $U \subset \mathbb{R} \wedge J^+$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $i \in J$ zbiór $U \cap \mathbb{R} \times \{i\}$ jest otwarty w topologii euklidesowej prostej.*

*Zauważ, że*

1. $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_w$
2. *Jeśli $|J| \geqslant \aleph_0$, to topologia słaba nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności.*
3. *Jeśli $|J| \geqslant \aleph_0$, to topologia słaba jest niemetryzowalna.*

**Rozwiązanie**

1. Niech $U \in \mathcal{T}_k$. Zauważmy, że kule $B((x,i),r)$ w metryce $d_k$ występują w dwóch postaciach
   (a) $B((x,i),r)$ dla $r \leqslant |x|$ jest odcinkiem otwartym na i-tej prostej, tj.
   $$B((x,i),r) \cap (\mathbb{R} \times i) = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{przedział otwarty!}} \times \{i\}$$
   (b) Dla $r > |x|$ jest to suma dwóch zbiorów, odcinka otwartego zdefiniowanego tak samo jak wyżej ["patyczka"]
   $$B((x,i),r) \cap (\mathbb{R} \times i) = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\text{przedział otwarty!}} \times \{i\}$$
   oraz zbioru ["lizaka"]
   $$(-(r-|x|), r-|x|) \times (J \setminus \{i\})$$

Z definicji przestrzeni wyznaczanej przez metrykę każdy zbiór otwarty jest sumą kul w tej metryce, tj. $U = \bigcup_{u \in U} B_u$, gdzie $B_u = B(u, r)$ są zawarte w $U$.
Chcemy pokazać, że $U \in \mathcal{T}_w$, czyli że dla każdego $i$ zbiór $U \cap (\mathbb{R} \times \{i\})$ jest otwarty w topologii euklidesowej. Skoro $U = \bigcup B_u$ to wystarczy, że $B_u$ będzie otwarte w $\mathcal{T}_w$ - wtedy $U$ jako suma zbiorów otwartych w $\mathcal{T}_w$ będzie otwarta.
Ale każda kula jest otwarta w $\mathcal{T}_w$. Dla dowolnej zachodzi

$$B((x,j),r) \cap (\mathbb{R} \times \{i\}) = \begin{cases} (x-r, x+r) & r < |x| \vee j = i \\ (-(r-|x|), r-|x|) & r \geqslant |x| \wedge j \neq i \end{cases}$$

W każdym przypadku, iloczyn jest przedziałem otwartym w topologii euklidesowej. Zatem $B((x,j),r) \in \mathcal{T}_w$, więc $U \in \mathcal{T}_w$ zgodnie z tym co wcześniej ustaliliśmy.

2. Udowodnimy, że topologia słaba nie ma punktowej bazy przeliczalnej w 0. Załóżmy, że istnieje taka baza $= \{U_1, U_2, U_3, \cdots\}$. Niech $J_0 \subseteq J$ będzie zbiorem przeliczalnym w $J$ i $J_0 = \{j_1, j_2, \cdots\}$. Skonstruujemy taki zbiór otwarty $U$, że $0 \in V$ ale $\forall k \in \mathbb{N}\ U_k \nsubseteq V$. Mianowicie bierzemy zbiory

$$V_k \subsetneq U_k \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\})$$

I teraz $V = \bigcup V_k \cup ((J \setminus J_0) \times \mathbb{R})$. Widzimy, że gdyby $U_k \subseteq V$, to musiałoby być $U_k \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\}) \subseteq V \cap (\mathbb{R} \times \{j_k\}) = V_k$, co jest sprzeczne z definicji $V_k$. Zatem założenie o istnieniu bazy przeliczalnej w zerze jest fałszywe.

3. Gdyby przestrzeń była metryzowalna, to zbiór kul o promieniach wymiernych o środku w 0 byłaby bazą punktową przeliczalną w zerze, co przy tych założeniach jest niemożliwe na mocy poprzedniego podpunktu.

□

**Zadanie 3.** *Niech $d_i$ dla $i = 1, 2$ będą dwoma metrykami w zbiorze $X$. Następujące warunki są równoważne:*
*1. Topologia wyznaczona przez $d_2$ jest drobniejsza niż wyznaczona przez $d_1$, tzn. $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.*
*2. Dla każdej kuli $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$ istnieje liczba $r_2 > 0$ taka, że $\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$.*
*3. Jeśli ciąg jest zbieżny w metryce $d_2$ to jest zbieżny w metryce $d_1$ do tej samej granicy.*

**Rozwiązanie**
$1 \implies 2$
Załóżmy, że $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Niech $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_1)$. Z założenia $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1) \in \mathcal{T}(d_2)$. Z definicji topologii $\mathcal{T}(d_2)$ istnieje $r_2 > 0$ takie, że
$\mathcal{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$.
$2 \implies 1$
Załóżmy, że dla każdej kuli $\mathcal{B}_{d_1}(x, r_1)$ istnieje liczba $r_2 > 0$ taka, że

$\mathcal{B}_{d_2}(x,r_2) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x,r_1)$. Weźmy dowolny $y_s \in \mathcal{B}_{d_1}(x,r_1)$. Z definicji topologii $\mathcal{T}(d_1)$ istnieje $r>0$ takie, że $\mathcal{B}_{d_1}(y_s,r) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x,r_1)$. Z założenia istnieje $r_s>0$ takie, że $\mathcal{B}_{d_2}(y_s,r_s) \subset \mathcal{B}_{d_1}(y_s,r)$. Z tego wynika, że $\bigcup_s \mathcal{B}_{d_2}(y_s,r_s) = \mathcal{B}_{d_1}(x,r_1) \in \mathcal{T}(d_1)$. Z definicji topologii $\bigcup_s \mathcal{B}_{d_2}(y_s,r_s) \in \mathcal{T}(d_2)$. Tak, więc $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.
$1 \implies 3$
Załóżmy, że $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Niech ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbieżny do $x$ w metryce $d_2$. Załóżmy, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do $x$ w metryce $d_1$. Z tego wynika, że istnieje $\epsilon>0$, taki, że dla każdego $n_\epsilon$ istnieje $n>n_\epsilon$, że $x_n \notin \mathcal{B}_{d_1}(x,\epsilon)$. Z założenia $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$ wynika jednak, że istnieje liczba $r>0$ taka, że $\mathcal{B}_{d_2}(x,r) \subset \mathcal{B}_{d_1}(x,\epsilon)$. Jako, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $x$ w metryce $d_2$, to z definicji zbieżności prawie wszystkie wyrazy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ znajdują się w $\mathcal{B}_{d_2}(x,r)$, co jest sprzeczne z faktem, że $x_n \notin \mathcal{B}_{d_1}(x,\epsilon)$. Z tego wynika, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $x$ w metryce $d_1$.
$3 \implies 1$
Załóżmy, że jeśli ciąg jest zbieżny w metryce $d_2$ to jest zbieżny w metryce $d_1$. Zawieranie się topologii jest równoważne zawieraniu się rodziny zbiorów domkniętych, tzn. $\mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)} \iff \mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$. Udowodnimy ten fakt w "prawą" stronę. Niech $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)}$. Jako, że $A$ jest zbiorem domkniętym to $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym, więc $X \setminus A \in \mathcal{T}(d_1)$. Z założenia wynika, że $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$, więc również $X \setminus A \in \mathcal{T}(d_2)$. Niech $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)}$. Z definicji domknięcia dostajemy, że $M \subset cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M)$. Jeżeli $x \in cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M)$, to istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, taki, że $d_2(x_n,x) \to 0$. Z założenia dostajemy, że $d_1(x_n,x) \to 0$. Z tego wynika, że $x \in cl_{\mathcal{T}(d_1)}(M)$. M jest domknięty w $\mathcal{T}(d_1)$, czyli $M = cl_{\mathcal{T}(d_1)}(M)$. A z tego mamy, że $x \in M$, co daje $cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M) \subset M$. Wtedy $cl_{\mathcal{T}(d_2)}(M) = M$, a z tego wynika, że $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$, czyli $\mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_1)} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}(d_2)}$. Tak więc, na mocy faktu, który wcześniej udowodniliśmy $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$.

$\square$

**Definicja 2.** Niech $(X,\mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Przez $C(X)$ oznaczamy zbiór funkcji ciągłych $f:(X,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$, a przez $C_b(X)$ jego podzbiór składający się z funkcji ograniczonych. Dla dowolnej funkcji $f \in C_b(X)$ definiujemy $\|f\|_{sup} := sup\{|f(x)| : x \in X\}$ oraz $\|f\|_{L^1} := \int_0^1 |f(t)|dt$.

**Zadanie 4.** *Porównać topologię wyznaczoną przez normę $\|f\|_{sup}$ z topologią wyznaczoną przez normę $\|f\|_{L^1}$.*

**Rozwiązanie** Niech

$$f_n(x) := \begin{cases} 1-nx \ , \ x \in [0,\frac{1}{n}] \\ 0 \ , \ x \in (\frac{1}{n},1) \end{cases}$$

Wtedy $f_n \in C_b([0,1])$ i $\|f_n(x)\|_{L^1} = \frac{1}{2n} \to 0$, ale $\|f_n(x)\|_{sup} = 1 \not\to 0$.
Rozważmy $g_n \in C_b([0,1])$ taką, że $\|g_n(x)\|_{sup} \to 0$. Wtedy na mocy 9.31 $\|g_n(x)\|_{L^1} \leqslant sup(|g_n(x)|)(1-0) \to 0$.
Niech $d_{sup}(f,g) = \|f-g\|_{sup}$ i $d_{L^1}(f,g) = \|f-g\|_{L^1}$. Rozpatrzmy $(C_b(X),d_{sup})$ i $(C_b(X),d_{L^1})$. Jeżeli $f_n$ jest zbieżny do f w przestrzeni $(C_b(X),d_{sup})$, tzn.

$d_{sup}(f_n, f) \to 0$, to z wcześniejszych obserwacji $d_{L^1}(f_n, f) \to 0$, czyli jest zbieżny, również do f, w $(C_b(X), d_{L^1})$. Z poprzedniego zadania wiemy już, że wtedy $\mathcal{T}(d_{L^1}) \subset \mathcal{T}(d_{sup})$. $\square$