



UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI (UAC)
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES
(IMSP)

The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP)

PROJET SCIENTIFIQUE

Présenté en vue de l'obtention de la licence spéciale des classes
préparatoires, option: Mathématiques

PAR: EDAH FRANCO ROBERTO A. & ZODJI SAGBO MARCEL

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Encadreur: Professeur Liamidi Aremou LEADI
(*Maître de conférences des universités du CAMES*)

Année universitaire: 2017-2018

Dédicaces

A nos chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de notre études,
A nos chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,
A nos chers frères pour leur appui et leur encouragement,
A toutes nos famille pour leur soutien tout au long de notre formation,
Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible,
Merci d'être toujours là.

Remerciements

Nos sincères remerciements au Professeur Liamidi LEADI, notre encadreur pour la patience dont il a fait preuve à notre endroit, pour le suivi ininterrompu, pour ses conseils et son appui le long de ce projet. Qu'il soit chaleureusement remercié pour avoir accepté de nous guider durant cette étape cruciale de notre cursus.

Nos remerciements vont aussi à l'endroit du corps professoral et administratif de l'Institut de Mathématiques et des Sciences Physiques, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée. Particulièrement au Professeur Carlos OGOUYANDJOU qui tel un père, est pour nous une source de motivation et remise en question de soi et de notre travail.

Enfin nous remercions spécialement nos chers parents qui nous ont soutenus de toutes les façons possibles durant notre formation et toutes les personnes qui de près ou de loin nous ont aidés à être à ce niveau de notre cursus.

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Un peu d'histoire	2
1.2	Applications lipschitziennes	2
1.3	Espace de Banach	4
1.3.1	Suites convergentes	4
1.3.2	Espace de Banach	5
1.3.3	Théorème de point fixe	6
1.3.4	Théorème d'Ascoli	7
1.3.5	Théorème des accroissements finis	7
1.4	Équations différentielles	8
1.4.1	Définitions	8
1.4.2	Solutions d'une équation différentielle	10
1.4.3	Problème de Cauchy	11
2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	13
2.1	Théorème-local	13
2.2	Solutions maximales	19
2.3	Théorème-global	21
2.4	Dépendance par rapport aux conditions initiales	23
2.5	Dépendance par rapport aux paramètres	24
3	Quelques applications du théorème de Cauchy-Lipschitz	26
3.1	Résolution des équations différentielles ordinaires	26
3.1.1	Équation différentielle autonome	26
3.1.2	Équation différentielle non autonome :	27
3.2	Résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires	29

Introduction

Les équations différentielles constituent un objet d'étude de première importance aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Ceci est dû à leur utilité dans la construction des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques tels que la radioactivité, la mécanique céleste ou la dynamique des populations. Ainsi plusieurs théorèmes et procédés mathématiques concourent à leurs résolutions.

Dans ce mémoire, on étudie le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui étant donné une équation $(E) : x' = f(t, x)$ garantit l'existence d'une solution répondant à une condition initiale $x(t_0) = x_0$ dite de Cauchy et l'unicité d'une solution maximale, sous certaines hypothèses de régularité de la fonction f définissant l'équation.

Ce travail sera donc développé en trois parties :

La première où nous ferons un petit rappel historique, suivie de quelques notions et définitions qui nous seront utiles le long de ce mémoire. Puis une deuxième partie essentiellement consacrée au théorème de Cauchy-Lipschitz où nous énoncerons le théorème sous ses diverses formes (forte, faible, globale) et le démontrerons de diverses manières (par le théorème du point fixe et par le lemme de Grönwall). Enfin, une dernière partie où nous exposerons l'utilité dudit théorème à travers la résolution d'exemples d'équations et de système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre.

1 Généralités

1.1 Un peu d'histoire

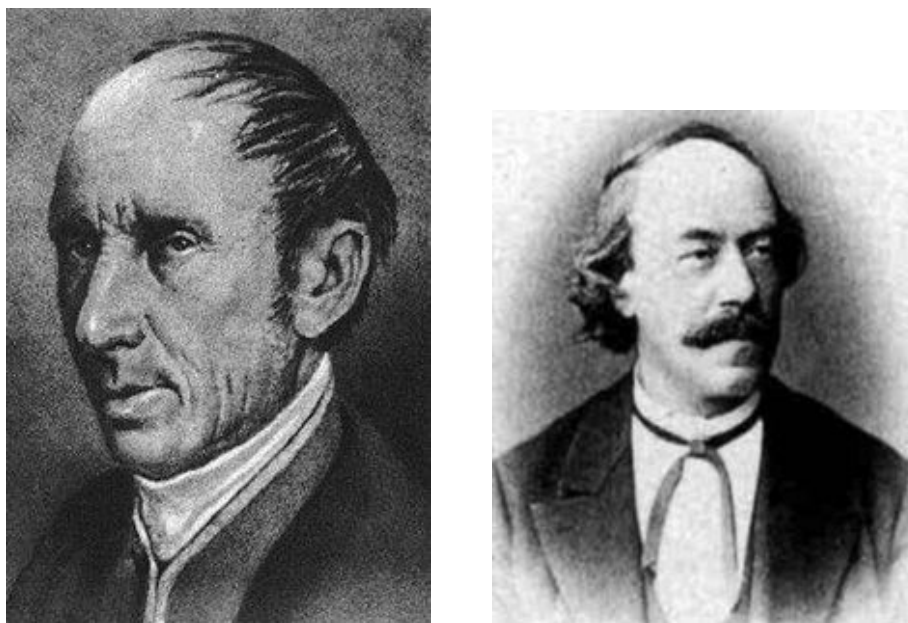


Figure 1: Augustin CAUCHY(1789-1857)-Rudolph LIPSCHITZ(1832-1903)

Au **XVII^{ème} siècle**, la notion de tangente apparaît, notamment chez Kepler qui cherchait à calculer la contenance d'un tonneau de vin et sera étudiée ensuite par Descartes, Roberval, Fermat ...

En **1680**, le développement du calcul infinitésimal par Leibniz et Newton (séparément) permet de généraliser le problème. Leibniz invente notamment les notions d'intégrale \int et de dérivée $\frac{dx}{dt}$ très utiles et cherche des solutions avec des fonctions connues. Newton énonce les principes fondamentales du mouvement qui sont une source inépuisable d'équation différentielle ordinaire et cherche des solutions sous forme de séries.

Au début du **XVIII^{ème} siècle** l'étude des équations différentielles ordinaires devient systématique et est ramenée à des quadratures (calculs d'intégrales). En **1768** Euler propose son algorithme sans se préoccuper de convergence (normal car la notion est encore mal définie à l'époque). En **1830** Cauchy prouve la convergence (locale) de la méthode d'Euler avec des fonctions de classe C_b^1 . En **1868** Lipschitz donne la version actuelle, locale et pour les fonctions qui portent son nom. Peano énonce en **1886** le théorème de Cauchy-Peano-Arzela, qui donne seulement l'existence si f est continue. Finalement ce fut Lindenhöf qui en **1894**, après des améliorations apportées à Fuchs, Painlevé, Picard, Poincaré, donne la version actuelle du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui porte aussi pour cela le nom de théorème de Picard-Lindenhöf dans les pays anglo-saxons. Cette version utilise l'analyse fonctionnelle, les espaces de Banach et le fameux théorème de Picard.

1.2 Applications lipschitziennes

Soient (E, d) , (F, d') deux espaces métriques, U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ une application.

Définition 1.1

On dit que l'application f est lipschitzienne sur U s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que:

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

On dit alors que f est lipschitzienne de rapport k ou k -lipschitzienne.

Si $0 \leq k < 1$ on dit que f est contractante.

Exemple 1.1

1. L'Application

$$\begin{aligned} f: (E, d) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, x_0) \end{aligned}$$

où x_0 est un point quelconque de E est 1-lipschitzienne.

En effet, soient x et y deux éléments de E

$$\text{On a: } |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$$

2. Soit A une partie non vide de E

On considère l'application $\delta: x \in E \mapsto \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$

δ ainsi définie est 1-lipschitzienne.

En effet, soient x et y deux éléments de E et $z \in A$

$$\text{on a: } \delta(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\text{Ainsi } \delta(x) - d(x, y) \leq d(y, z) \quad \forall z \in A \implies \delta(x) - d(x, y) \leq \delta(y) \text{ soit } \delta(x) - \delta(y) \leq d(x, y)$$

x et y étant arbitraires on peut les permuter, et on obtient finalement

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq d(x, y)$$

Définition 1.2

On dit que f est localement lipschitzienne sur U si tout point de U admet un voisinage sur lequel f est lipschitzienne.

Pour tout $x_0 \in U$ il existe $C_{x_0} \geq 0$ et un voisinage \mathcal{V} de x_0 tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}, \quad d'(f(x), f(y)) \leq C_{x_0} d(x, y)$$

Remarque 1.11. Si f est de classe \mathcal{C}^1 alors f est localement lipschitzienne.

Considérons $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

f' est bornée sur $B_f(x, 1)$ car continue et $B_f(x, 1)$ est compact dans \mathbb{R}^n .

Soit M un majorant de f' sur $B_f(x, 1)$.

En utilisant le théorème des accroissements finis f est M -lipschitzienne sur $B_f(x, 1)$.

2. Il est clair que toute application lipschitzienne l'est localement, mais la réciproque n'est

pas vraie.

L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est localement lipschitzienne car de classe \mathcal{C}^1 mais pas lipschitzienne.

Pour tout $k \geq 0$, $|(k+1)^2 - k^2| = 2k+1 > 1 = |k+1 - k|$

Donc $x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2$ n'est pas lipschitzienne.

Définition 1.3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $g : \Omega \rightarrow E$ une application

On dit que g est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que:

$$\forall ((t, x), (t, y)) \in \Omega^2, \quad d(g(t, x), g(t, y)) \leq kd(x, y)$$

On dira que g est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si tout point de Ω admet un voisinage sur lequel g est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

1.3 Espace de Banach

1.3.1 Suites convergentes

Définition 1.4 (Suites convergentes et de Cauchy)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E . On dit que la suite $(x_n)_n$ converge vers un élément $a \in E$, si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N_0 \implies \|x_n - a\| < \epsilon$$

Si la suite $(x_n)_n$ admet une limite a alors cette limite est unique et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$

La suite est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N_\epsilon \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

Proposition 1.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Toute suite convergente dans E est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy dans E est bornée.
3. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy de E est de Cauchy.

Preuve

1. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E convergeant vers $x \in E$

Soit $\epsilon > 0$

Il existe $N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, \quad \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$

Alors pour $n, m > N$ on a: $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \epsilon$
 $(x_n)_n$ est donc de Cauchy

2. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E et $\epsilon = 1 > 0$

Il existe $N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N, \|x_n - x_m\| < 1$

Soit $R = \max_{p \in \{1, \dots, N\}} \|x_p - x_{N+1}\|$

Alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{N+1}\| + \|x_{N+1} - x_m\| \leq 2 \max(1, R)$$

Donc $(x_n)_n$ est bornée

3. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E et $\epsilon > 0$

Il existe $N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N, \|x_n - x_m\| < \epsilon$

Soit ϕ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} alors on a $\phi(n) \geq n > N$

et $\phi(m) \geq m > N$. Donc on a $\|x_{\phi(n)} - x_{\phi(m)}\| < \epsilon$

Ainsi $(x_{\phi(n)})_n$ est de Cauchy.

Remarque 1.2

On vient de voir que toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque est fausse c'est-à-dire que toute suite de Cauchy n'est pas forcément convergente.

Définition 1.5

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E converge et a sa limite dans E .

1.3.2 Espace de Banach

Définition 1.6

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet i.e tout espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple 1.2

1. L'espace \mathbb{R} muni de la norme usuelle est complet.

2. L'espace vectoriel \mathbb{K}^n muni de l'une des normes suivantes: $(X = (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{K}^n)$

$$(a) \|X\|_1 = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|x_i\|_K$$

$$(b) \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(c) \|X\|_3 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_K$$

est un espace de Banach.

3. Soit E un espace topologique et $\mathcal{C}_b(E)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur E .

L'application

$$N: \mathcal{C}_b(E) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \sup_{x \in E} |f(x)|$$

ainsi définie est une norme sur $\mathcal{C}_b(E)$ et muni de cette norme $\mathcal{C}_b(E)$ est un espace de Banach.

1.3.3 Théorème de point fixe

Théorème 1.1

Soient (E, d) un espace métrique complet et $f: E \rightarrow E$ une application

Si f est contractante, alors elle admet un point fixe unique c'est-à-dire qu'il existe un unique point $a \in E$ tel que $f(a) = a$.

Ce point fixe est la limite de la suite récurrente définie par le choix d'un point quelconque $x_0 \in E$ et la relation $x_{n+1} = f(x_n)$.

Preuve

f est contractante alors il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Pour tous $q \geq p$, $d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} d(x_0, x_1)$.

En effet

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ (1)

Pour $n = 0$ l'inégalité est vraie.

Supposons que cette inégalité est vraie pour un n fixé dans \mathbb{N} .

On a, du fait que f est k -lipschitzienne

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n+1}, x_n) \leq k^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Montrons maintenant que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy.

$$\begin{aligned} \text{Pour tous } q \geq p \quad \text{ona} \quad d(x_q, x_p) &\leq \sum_{r=0}^{q-p-1} d(x_{p+r}, x_{p+r+1}) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \sum_{r=0}^{q-p-1} k^{p+r} d(x_0, x_1) \quad (d'après (1)) \\ &\leq k^p d(x_0, x_1) \sum_{r=0}^{q-p-1} k^r = k^p \frac{1 - k^{q-p}}{1 - k} d(x_0, x_1) \quad (|k| < 1) \\ &\leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

La suite $(k^n)_n$ est de Cauchy car convergente ($|k| < 1$)

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \mid \forall q \geq p \geq N_0, \text{ on a } d(x_q, x_p) \leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} d(x_0, x_1) < \epsilon.$$

on en déduit que $(x_n)_n$ est de cauchy et puisque E est complet alors elle converge vers un élément $a \in E$.

$(x_n)_n$ converge vers a , f est continue car lipschitzienne alors $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$ et comme les suites $(x_n)_n$ et $(f(x_n))_n$ sont identiques alors d'après l'unicité de la limite $f(a) = a$

Soit $b \in E$ tel que $f(b) = b$, alors on a: $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$, soit $(1-k)d(a, b) \leq 0$

Ce qui implique que $d(a, b) = 0$ (puisque $k \in [0, 1[$).

Ainsi $a = b$.

1.3.4 Théorème d'Ascoli

Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Soit E une partie de $\mathcal{C}^0(X, Y)$.

Définition 1.7

- On dit que E est équicontinue si:

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X, \forall f \in E, d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

- E est uniformément équicontinue si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall f \in E, d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

- E est équibornée si pour tout $x \in X$ l'adhérence de $E(x) = \{f(x) \mid f \in E\}$ est compacte dans Y .

Il faut noter que, grâce au théorème de Heine si X est compact, équicontinue est équivalente à uniformément continue.

Un ensemble des applications k -lipschitziennes est un exemple d'ensemble équicontinu.

Théorème 1.2 (Théorème d'Ascoli)

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E . Toute famille de fonctions continues sur K qui est équibornée et équicontinue est relativement compact dans l'espace des fonctions continues sur K muni de la topologie de la convergence uniforme.

Autrement dit, de toute suite de fonctions continues qui sont équibornées et équitotines sur K , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément.

1.3.5 Théorème des accroissements finis

Lemme 1.1

Soient E un espace vectoriel normé, $[a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} , $f: [a, b] \rightarrow E$ et $g: \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$.

On suppose que f et g possèdent en tout point $x \in [a, b]$, des dérivées à droite $f'_d(x)$ et $g'_d(x)$ vérifiant $\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x)$.

Alors on a:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$. Posons

$$A_\epsilon = \{x \in [a, b] \mid \forall z \in [a, x], \|f(z) - f(a)\| \leq g(z) - g(a) + \epsilon(z - a)\}.$$

D'après sa définition, A_ϵ est un intervalle de \mathbb{R} contenant a et contenu dans $[a, b]$. Les applications f et g étant continues, A_ϵ est fermé. Il contient donc sa borne supérieure c , qui est aussi son extrémité droite. Il s'agit de montrer que $b = c$.

On a manifestement $c \leq b$. Supposons $c < b$

Nous avons pour tout

$$x \in [a, c], \|f(z) - f(a)\| \leq g(z) - g(a) + \epsilon(z - a)$$

D'autre part, d'après la définition de la dérivée à droite d'une application,

$$\left\| \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]c, c + \eta[\subset [a, b]$ (on prend $\eta \leq b - c$),

$$\left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| \leq \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \epsilon$$

ce qui revient à $\|f(x) - f(c)\| \leq g(x) - g(c) + \epsilon(x - c)$.

Il en résulte que pour tout $x \in]c, c + \eta[$,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(x) - g(c) + \epsilon(x - c) + g(c) - g(a) + \epsilon(c - a) = g(x) - g(a) \\ &\quad + \epsilon(x - a) \end{aligned}$$

Par conséquent l'intervalle $]c, c + \eta[$ est contenu dans A_ϵ ce qui est absurde car $c = \sup A_\epsilon$.

On a donc $c = b$

Il s'ensuit que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \epsilon(b - a)$.

Cette égalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

1.4 Équations différentielles

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP). Dans la suite on ne traitera que des équations différentielles ordinaires.

1.4.1 Définitions

Définition 1.8

Soient E un espace de Banach, V un ouvert de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g : V \rightarrow E$ une application continue.

On appelle équation différentielle d'ordre n , d'inconnue la fonction $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ toute équation de la forme

$$g(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0_E$$

où g n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$ et I un intervalle de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier).

On dit que cette équation est scalaire si f est à valeurs dans \mathbb{R} c'est-à-dire $E = \mathbb{R}$.

Soient E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \rightarrow E$ une application continue.

Définition 1.9

1. Soient E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \rightarrow E$ une application continue.

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

2. Une équation différentielle d'ordre n est dite autonome si f ne dépend pas explicitement de t . C'est-à-dire

$$x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Dans ce cas f est définie d'un ouvert de E^n dans E

Remarque 1.3

Il faut noter qu'il est possible de réduire à l'ordre 1 toute équation différentielle d'ordre quelconque, en faisant quelques changements de variables. Toutefois, ce qu'on gagne dans la simplicité de l'ordre de dérivation, on le perd dans la dimension de l'espace d'arrivée de la fonction f .

Autrement dit, en abaissant l'ordre de l'équation différentielle, on augmente la dimension de l'espace d'arrivée de f et on passe nécessairement à la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre 1.

Méthode Considérons l'équation différentielle $f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$ d'ordre $n \geq 2$ où x est à valeur dans \mathbb{R} et $f : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n+1 \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$

On fait le changement d'inconnues $z = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$. On a alors $z \in \mathbb{R}^n$, et on pose $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, où chacun des $z_i = x^{(i-1)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. On se retrouve alors avec des relations entre les z_i :

$$\begin{cases} z'_i - z_{i+1} = 0, & \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \\ f(t, z_1, z_2, \dots, z_n, z'_n) = 0 \end{cases}$$

On a donc n équations, avec n inconnues, d'ordre 1.

Exemple 1.3

Soit l'équation différentielle : $x^{(3)} - 3t^5x^2x'' + x' - tx = 0$

$$\text{Posons } \begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \\ y_3 = x'' \end{cases} \quad \text{et } y = (y_1, y_2, y_3)$$

L'équation $x^{(3)} - 3t^5x^2x'' + x' - tx = 0$ est équivalente au système

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = 0 \\ y_2' - y_3 = 0 \\ y_3' - 3t^5y_1^2y_3 + y_2 - ty_1 = 0 \end{cases}$$

1.4.2 Solutions d'une équation différentielle**Définition 1.10 (SOLUTION)**

On appelle *solution* (ou *intégrale*) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction x définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I .

Cette solution est généralement notée (x, I) .

Si I contient sa borne inférieure notée a (respectivement supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$)

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 1.11 (PROLONGEMENT)

Soient (x, I) et (\tilde{x}, \tilde{I}) deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que (\tilde{x}, \tilde{I}) est un prolongement de (x, I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}|_I = x$

Définition 1.12 (SOLUTION MAXIMALE)

Soient I_1 et I_2 , deux intervalles de \mathbb{R} , tels que $I_1 \subset I_2$.

on dit qu'une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si x n'admet pas de prolongement (\tilde{x}, \tilde{I}) solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2$

Définition 1.13 (SOLUTION GLOBALE)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle tout entier.

Remarque 1.4

En reprenant les mêmes notations que dans les définitions précédentes, si une solution (x, I_1) peut se prolonger sur l'intervalle I_2 tout entier, alors x est globale dans I_2 .

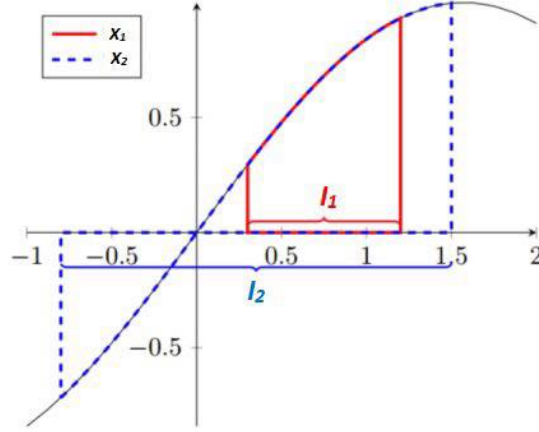


Figure 2: Notion de prolongement de solution et de solution maximale

1.4.3 Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: U \rightarrow E$ une application. On note $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Définition 1.14

Étant donné une équation différentielle du premier ordre sous forme normale

$$x' = f(t, x)$$

Pour tout point $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions x de l'équation $x' = f(t, x)$ telles que $x(t_0) = x_0$

Notation

On note le problème de Cauchy de la façon suivante:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Définition 1.15

Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} avec la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $x: I \rightarrow E$ telle que:

1. pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,
2. pour tout $t \in I$, $x'(t) = f(t, x(t))$,
3. $x(t_0) = x_0$

Théorème 1.3

Supposons $f : U \rightarrow E$ continue. Soit $(t_0, x_0) \in U$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et à valeurs dans E .

Une fonction x est solution du problème de Cauchy sur I si et seulement si

1. pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,
2. x est continue sur I ,
3. pour tout $t \in I$, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$

2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Il est possible de trouver des solutions explicites aux équations différentielles, mais ces cas ne sont pas nombreux. La résolution explicite de la plupart des équations différentielles reste encore un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude théorique qui permettait de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité par exemple) sans les connaître explicitement. Le théorème de Cauchy-Lipschitz fait partie de ces théories.

2.1 Théorème-local

Théorème 2.1 (Forme faible-Existence de solution locale)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: U \rightarrow E$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in U$, il existe un intervalle J contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du problème de Cauchy associé:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Preuve (Cauchy-Lipschitz)

f est par hypothèse continue, alors il existe $T_0 > 0$ et $R > 0$ tels que f soit borné et k -lipschitzienne par rapport à x sur le produit $V = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B_f(x_0, R)$.

Soit $M = \sup_{(t,x) \in V} \|f(t, x)\|$

Soit $T \leq \min(T_0, \frac{R}{M})$ et $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$

Remarquons que x définie sur I_0 est solution du problème de Cauchy si et seulement si x est dérivable sur I_0 , vérifie $x' = f(t, x)$ et $x(t_0) = x_0$. Comme f est continue, alors x est nécessairement \mathcal{C}^1 et vérifie :

$$\forall t \in I_0, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Réciproquement, si x est une solution de l'équation précédente, elle est dérivable et est solution du problème de Cauchy.

Toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $B_f(x_0, R)$

En effet soit $\tau \in I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ on a

$$\|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} x'(u) du \right\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} f(u, x(u)) du \right\| \leq TM \leq R$$

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $B_f(x_0, R)$

\mathcal{F} ainsi défini muni de la norme de la convergence uniforme est complet. On définit l'application

$$\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

$$x \mapsto \Phi(x): t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$$

Pour toute solution x du problème on a

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \Phi(x)(t)$$

On a donc ramené le problème de Cauchy à une recherche de point fixe pour Φ sur \mathcal{F} . Soit $(x, y) \in \mathcal{F}^2$, on a pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(u, x(u)) - f(u, y(u))] du \right\| \\ &\leq k \int_{t_0}^t \|x(u) - y(u)\| du \\ &\leq kT \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Et, si on choisit $T < \frac{1}{k}$, alors Φ est contractante, d'après le théorème de point fixe, il existe un unique point fixe x qui est l'unique solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ du problème de Cauchy $(\Phi(x) = x = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du)$.

Autre méthode

On peut démontrer l'unicité d'une éventuelle solution en utilisant le lemme de Grönwall.

Lemme 2.1 (Grönwall)

Soient ϕ et ψ deux fonctions réelles continues positives sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \phi(t) \leq \psi(t) + k \int_{t_0}^t \phi(s) ds,$$

où k est une constante réelle donnée et $t_0 \in I$. Alors

$$\forall t \geq t_0, \phi(t) \leq \psi(t) + k \int_{t_0}^t \psi(s) e^{k(t-s)} ds.$$

Preuve (Grönwall)

Soit $\theta: t \in I \mapsto \left(\int_{t_0}^t \phi(s) ds \right) e^{-kt}$

On a: $\theta'(t) = \phi(t) e^{-kt} - k\theta(t) \leq \psi(t) e^{-kt}$ par hypothèse.

En intégrant entre t_0 et t on obtient $\theta(t) \leq \int_{t_0}^t \psi(s) e^{-ks} ds$.

Ce qui combiné à l'hypothèse $\phi(t) \leq \psi(t) + k\theta(t) e^{-kt}$ donne le résultat.

Preuve (Cauchy-Lipschitz-Unicité)

Soient $(I_1, x_1), (I_2, x_2)$ deux solutions du même problème de Cauchy en t_0 . On veut montrer que x_1 et x_2 sont égales sur $I_0 = I_1 \cap I_2$. Pour cela on introduit l'ensemble

$$S = \{t \in I_0 \mid x_1(s) = x_2(s), \quad \forall s \in [t_0, t]\}$$

où $[t_0, t]$ est remplacé par $[t, t_0]$ si $t < t_0$.

Cet ensemble est non vide car il contient t_0 . On va montrer que $S \cap [t_0, +\infty[= I_0 \cap [t_0, +\infty[$

(la même idée montrerait l'égalité $S \cap]-\infty, t_0] = I_0 \cap]-\infty, t_0]$).

Supposons que $S \cap [t_0, +\infty[\neq I_0 \cap [t_0, +\infty[$

On pose alors $t^* = \sup(S)$. On a $t^* \geq t_0$ et $t^* \in \overset{\circ}{I}_0$.

En effet si ce n'était pas le cas on aurait $t^* \in \partial I_0$ et alors $x_1 = x_2$ sur $[t_0, \sup I_0[$ et donc $x_1 = x_2$ sur $I_0 \cap [t_0, +\infty[$, par continuité de x_1 et x_2 . Ceci contredit l'hypothèse. Par ailleurs par continuité de x_1 et x_2 , on sait que $x_1(t^*) = x_2(t^*) = \tilde{x}$.

Soit L une constante de Lipschitz de f sur le compact $K = [t^*, t^* + 1] \times B_f(\tilde{x}, 1)$. Par continuité il existe $\delta > 0$ tel que $t^* + \delta \in I_0$ et tel que

$$x_i(t) \in B_f(\tilde{x}, 1), \forall t \in [t^*, t^* + \delta], \forall i = 1, 2.$$

Par ailleurs, comme x_1 et x_2 vérifient l'équation $x' = f(t, x)$, on a:

$$x_i = x_i(t^*) + \int_{t^*}^t f(s, x_i(s)) ds \quad \forall i = 1, 2.$$

Par soustraction, on trouve

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_{t^*}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds, \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta]$$

Comme x_1 et x_2 prennent leurs valeurs dans K , on en déduit

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq L \int_{t^*}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds, \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta]$$

En appliquant le lemme de Grönwall avec $\phi(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ et $\psi(t) = 0$ et $k = L$ on a $|x_1(t) - x_2(t)| = 0$

Le lemme de Grönwall donne alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in [t^*, t^* + \delta]$. Ceci montre que $t^* + \delta \in S$ et contredit donc la définition de t^* \square

Il faut noter que toute application de classe \mathcal{C}^1 est localement lipschitzienne, ainsi on a le corollaire suivant:

Corollaire (Forme faible)

Soient $(E, ||.||)$ un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: U \rightarrow E$ une application continue. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in U$, il existe un intervalle J contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du problème de Cauchy associé:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Remarque 2.1

1. La condition f **localement lipschitzienne** est nécessaire pour l'unicité de la solution comme le montre l'exemple du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Pour tout $\lambda > 0$, la fonction x_λ définie sur \mathbb{R} par

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} (t - \lambda)^2, & t \geq \lambda \\ 0, & t < \lambda \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy ci-dessus.

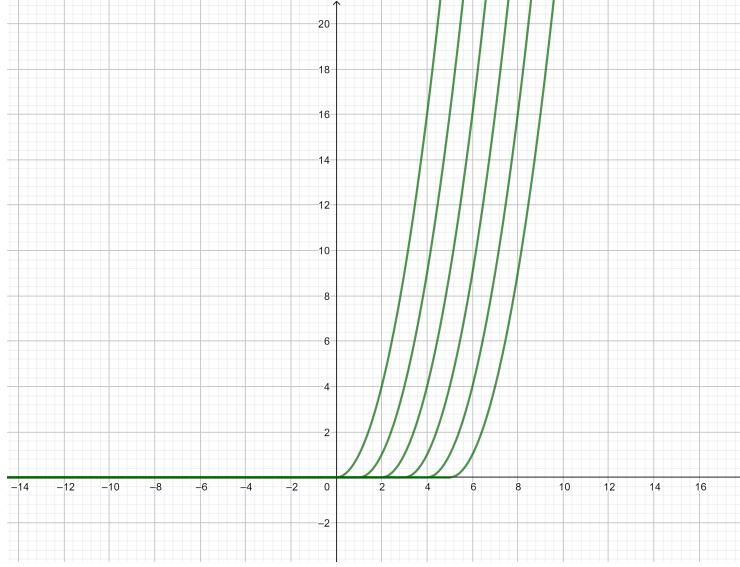


Figure 3: Quelques solutions

2. Si E est de dimension finie, il est possible de démontrer l'existence (mais pas l'unicité) de solutions locales de l'équation différentielle vérifiant la condition de Cauchy donnée, sous la seule condition de continuité sur f ; c'est-à-dire sans condition de Lipschitz: c'est le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà.

Théorème 2.2 (Cauchy-Peano-Arzelà)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: U \rightarrow E$ une application continue. Supposons que $U = I \times V$ où I et V sont des ouverts de \mathbb{R} et E respectivement, et soit $(t_0, x_0) \in U$.

Alors il existe un voisinage J de t_0 et une application $x: J \rightarrow V$ tels que

$$\forall t \in J, x'(t) = f(t, x(t)), \text{ et } x(t_0) = x_0.$$

Plus précisément, si $T =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(x_0, r)$ ($\alpha, r > 0$) a son adhérence dans U et si $M\alpha < r$ avec $M = \sup_{(t,x) \in T} \|f(t, x)\|$, alors il existe une solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

qui est définie sur $J =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

ce voisinage T de (t_0, x_0) est appelé **tonneau de sécurité**.

Preuve

f étant continue, donc bornée sur un voisinage compact de (t_0, x_0) on peut restreindre n'importe quel voisinage compact contenu dans U de ce point en un tonneau T vérifiant la condition donnée.

Considérons donc $T =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(x_0, r)$ ($\alpha, r > 0$) et soit $\epsilon > 0$.

L'application f est uniformément continue sur $\bar{T} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r)$; c'est-à-dire

qu'il existe $\eta > 0$, tel que $\forall((s, x), (t, x')) \in T^2$ si $|s - t| < \eta$ et $\|x - x'\|$ alors $\|f(s, x) - f(t, x')\| < \epsilon$.

Nous allons construire une application ϕ_ϵ sur $[t_0, t_0 + \alpha]$, le cas de l'autre moitié se traitant de la même manière.

Soient $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + \alpha$ une subdivision de $[t_0, t_0 + \alpha]$ de pas $h = \frac{\alpha}{N} < \inf(\eta, \frac{\eta}{N})$.

Posons $y_0 = x_0$ et, pour $0 \leq p \leq N - 1$, $y_{p+1} = y_p + hf(t_p, y_p)$.

On voit que $\|y_{p+1} - y_p\| \leq hM < \eta$.

Définissons sur $[t_0, t_0 + \alpha]$, l'application ϕ_ϵ comme affine sur chaque $[t_p, t_{p+1}[$, continue, dérivable à droite et telle que $\phi_\epsilon(t_p) = y_p$.

Pour $t \in [t_p, t_{p+1}[$, la dérivée à droite est

$$\phi'_{\epsilon,d}(t) = \frac{\phi_\epsilon(t_{p+1}) - \phi_\epsilon(t_p)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(t_p, y_p).$$

Ainsi en utilisant la continuité uniforme de f , on a

$$\|\phi'_{\epsilon,d}(t) - f(t, \phi_\epsilon(t))\| = \|f(t_p, y_p) - f(t, \phi_\epsilon(t))\| < \epsilon.$$

L'inégalité obtenue est vraie pour tout $t \in [t_0, t_0 + \alpha[$.

On étend cette construction sur tout l'intervalle $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $\phi_n = \phi_{\frac{1}{n}}$. Puisque $\|y_p - y_0\| \leq phM \leq NhM = \alpha M < r$, les applications ϕ_n définies sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ sont à valeurs dans $B(x_0, r)$.

Notons que la suite $(\phi_n)_n$ est équibornée.

Par ailleurs nous avons

$$\|\phi'_{n,d}(t)\| \leq \|\phi'_{n,d}(t) - f(t, \phi_n(t))\| + \|f(t, \phi_n(t))\| \leq \frac{1}{n} + M \leq 1 + M.$$

Il en résulte d'après le lemme 1.1 ci-dessus que, pour tous $s, t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\phi_n(s) - \phi_n(t)\| \leq (M + 1)|s - t|.$$

Ce qui entraîne que la suite $(\phi_n)_n$ est aussi équicontinue.

Il s'en suit d'après le Théorème 1.2 qu'il existe une sous-suite $(\phi_{n_k})_k$ de $(\phi_n)_n$ qui converge uniformément, disons vers ϕ_∞ .

Posons $\psi_n(t) = \phi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s))ds$. On a

$$\forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \|\psi'_{n,d}(t)\| = \|\phi'_{n,d}(t) - f(t, \phi_n(t))\| \leq \frac{1}{n}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il s'en suit que

$$\|\phi_{n_k}(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n_k}(s))ds\| = \|\psi_{n_k}(t) - \psi_{n_k}(t_0)\| \leq \frac{2\alpha}{n_k}.$$

En passant à la limite sur k , on obtient:

$$t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \phi_\infty(t) = x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \phi_\infty(s))ds.$$

Car f est uniformément continue et la sous-suite $(\phi_{n_k})_k$ converge uniformément vers ϕ_∞ . L'application ϕ_∞ ainsi obtenue est bien une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà garantit donc qu'un problème de Cauchy possède toujours au moins une solution locale, sous réserve que la fonction définissant l'équation différentielle soit continue. Contrairement à ce que permet de conclure le théorème de Cauchy-Lipschitz sous des hypothèses plus restrictives, il n'y a pas unicité ici, mais joint au critère de Nagumo, il assure la même conclusion que le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 2.3 (Critère de Nagumo)

Soient E un espace vectoriel normé, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f: U \rightarrow E$ une application continue.

Si f vérifie sur un cylindre fermé $S = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r) \subset U$ la condition

$$|t - t_0| \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|x - y\|,$$

alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

Preuve

f étant continue, alors d'après le théorème 2.4 le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Soient x_1 et x_2 deux solutions du problème de Cauchy.

Par définition d'une solution au problème de Cauchy, on a:

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \text{ ainsi que } x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) ds$$

En soustrayant les deux expressions et en passant à la norme, on a:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \right) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_{t_0}^t \left\| \frac{x_1(s) - x_2(s)}{s - t_0} \right\| ds \right\| \quad (*) \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est issue de la condition du critère de Nagumo qui est satisfaite tant que les graphes de x_1 et de x_2 sont dans S . Remarquons que, dans le dernier terme, l'intégrande est singulier en $s = t_0$. Cependant, en appliquant la règle de l'Hôpital sur chaque composante du vecteur $x_1 - x_2$, on obtient:

$$\lim_{s \rightarrow t_0} \frac{x_1(s) - x_2(s)}{s - t_0} = f(t_0, x_1(t_0)) - f(t_0, x_2(t_0)) = 0$$

où l'on a utilisé le fait que x_1 et de x_2 sont solutions du problème de Cauchy; l'intégrande est donc bornée sur le domaine d'intégration.

Supposons que $x_1 \neq x_2$ dans S , il existe alors $t_1 > t_0$ tel que sur $[t_0, t_1]$, les graphes de x_1

et de x_2 soient dans S et la fonction $x_1(t) - x_2(t)$ ne soit pas identiquement nulle. Par continuité, il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que:

$$\left\| \frac{x_1(t_2) - x_2(t_2)}{t_2 - t_0} \right\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \frac{x_1(t) - x_2(t)}{t - t_0} \right\| = M.$$

En utilisant l'inégalité (*), on a donc:

$$\begin{aligned} M &= \left\| \frac{x_1(t_2) - x_2(t_2)}{t_2 - t_0} \right\| \\ &\leq \frac{1}{t_2 - t_0} \left| \int_{t_0}^{t_2} \left\| \frac{x_1(s) - x_2(s)}{s - t_0} \right\| ds \right| \\ &< M \end{aligned}$$

La dernière inégalité se déduit du fait que l'intégrale est nulle en t_0 et donc strictement inférieure à M dans un voisinage de t_0 . L'intégrale est donc strictement inférieure à $M(t_2, t_0)$ d'où le résultat.

On aboutit donc à une contradiction ce qui achève la démonstration

Exemple 2.1

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \sqrt{t^2 + |x|} \end{aligned}$$

et soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

L'application f n'est pas lipschitzienne par rapport à x au voisinage de l'origine.

En effet, on sait que $f(0, x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas lipschitzienne à l'origine.

Cependant, pour tout $t \neq 0$, on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe c entre $t^2 + |x|$ et $t^2 + |y|$ tel que

$$\sqrt{t^2 + |x|} - \sqrt{t^2 + |y|} = \frac{|x| - |y|}{2\sqrt{c}}$$

Par conséquent satisfait le critère de Nagumo dans tout cylindre centré à l'origine puisque

$$|\sqrt{t^2 + |x|} - \sqrt{t^2 + |y|}| \leq \frac{|x - y|}{2|t|}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \neq 0$.

On conclut donc que le problème de Cauchy possède une et une seule solution.

2.2 Solutions maximales

Lemme 2.2 (Unicité sur des intervalles)

Soient J_1 et J_2 deux intervalles non réduits à un point tels que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$ et $x_j: J_j \rightarrow E$ deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

On suppose qu'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$.

Alors pour tout $t \in J_1 \cap J_2$, $x_1(t) = x_2(t)$.

Preuve

L'ensemble $A = \{t \in J_1 \cap J_2: x_1(t) = x_2(t)\}$ est une partie fermée non vide de l'intervalle $J_1 \cap J_2$ (car x_1 et x_2 sont continues). Soit $t \in A$ et $\alpha > 0$ tel que $[t, t + \alpha] \subset J_1 \cap J_2$ ou $[t - \alpha, t] \subset J_1 \cap J_2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'il existe T tel que sur $[t, t + T]$ (respectivement $[t - T, t]$), la solution est unique, donc puisque $x_1(t) = x_2(t)$, on a aussi $x_1(s) = x_2(s)$ pour tout s de $[t, t + T]$ ou $[t - T, t]$. ceci prouve que t est un point intérieur de A . A est donc ouvert dans $J_1 \cap J_2$. Comme $J_1 \cap J_2$ est un intervalle, il est donc connexe, par suite $A = J_1 \cap J_2$ et par conséquent pour tout $t \in J_1 \cap J_2$, $x_1(t) = x_2(t)$.

Maintenant si on pose

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } t \in J_1 \\ x_2(t) & \text{si } t \in J_2 \end{cases}$$

On obtient une application bien définie sur tout $J_1 \cup J_2$ solution du problème de Cauchy. Ainsi dès qu'on a deux solutions d'un problème de Cauchy on peut construire par prolongement une autre solution du même problème, on se pose alors la question de savoir si le problème n'admet pas de solution maximale.

Théorème 2.4 (Existence et unicité de solutions maximales)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: U \rightarrow E$ une application continue et localement lipschitzienne, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe une et une seule solution maximale $x: I \rightarrow E$ telle que $x(t_0) = x_0$.

Cette solution est définie sur un intervalle ouvert.

Preuve

On considère toutes les solutions $x_j: J_j \rightarrow E$ telles que J_j est un intervalle, $t_0 \in J_j$ et $x_j(t_0) = x_0$. On sait que grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz qu'il existe de telles solutions. L'union $I = \bigcup_j J_j$ des intervalles est une réunion de parties connexes qui ont toutes t_0 en commun, c'est un connexe de \mathbb{R} , donc un intervalle. D'après le lemme ci-dessus, pour tout j et pour tout k , on a $x_j(t) = x_k(t)$ dès que $t \in J_j \cap J_k$. Donc, on peut poser $x(t) = x_j(t)$ $t \in J_j$.

x définit une application sur tout I et est solution de l'équation $x' = f(t, x)$ avec la condition $x(t_0) = x_0$.

La solution $x: I \rightarrow E$ est maximale par construction puisqu'elle prolonge toutes les solutions ψ telles que $\psi(t_0) = x_0$.

Soient maintenant (I_1, x_1) et (I_2, x_2) deux solutions maximales du problème de Cauchy. D'après le lemme précédent x_1 et x_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.

On peut construire une application x_3 définie sur $I_1 \cup I_2$ dont les restrictions à I_1 et I_2 coïncident avec x_1 et x_2 respectivement. Cette solution contredit la maximalité de (I_1, x_1) et (I_2, x_2) si I_1 ou I_2 est strictement contenu dans $I_1 \cup I_2$.

On a alors $I_1 = I_2 = I_1 \cup I_2$, d'où l'unicité de la solution maximale.

L'intervalle I est ouvert sinon si b est par exemple sa borne supérieure: $I = (a, b]$, alors on

$a(b, x(b)) \in U$, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz on peut trouver un petit intervalle $]b - T, b + T[$ et une solution $y:]b - T, b + T[\rightarrow E$ telle que $y(b) = x(b)$. on peut alors prolonger x en une solution sur $I \cup]b - T, b + T[$ et x ne serait plus maximale. D'après tout ce qu'on vient de dire, x est l'unique solution maximale de condition initiale (t_0, x_0) .

2.3 Théorème-global

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: U \rightarrow E$ une application continue. On suppose ici que l'ouvert U soit de la forme $I \times E$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Toute solution globale de $x' = f(t, x)$ est évidemment maximale, mais la réciproque est fautive en général, plusieurs théorèmes d'échappement ou d'explosion, parfois joints au lemme de Grönwall donnent des conditions suffisantes pour une telle réciproque, mais l'énoncé suivant qui nous suffira par exemple dans la théorie des équations différentielles, se démontre directement.

Théorème 2.5

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f: I \times E \rightarrow E$ une application continue globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable c'est-à-dire pour tout compact

$$K \subset I, \exists k > 0 \mid \forall t \in K, (x, y) \in E^2, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, la solution maximale du problème de Cauchy associé est globale, c'est-à-dire définie sur I tout entier.

Preuve

Commençons par supposer I compact. Soit alors k la constante de Lipschitz associée au compact I et soit $l := \sup(I) - \inf(I)$ la longueur de I , $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0(I, E)$.

On munit \mathcal{F} de la norme définie par

$$\|\cdot\|_k : x \mapsto \max_{t \in I} (e^{-k|t-t_0|} \|x(t)\|) = \|e^{-k|t-t_0|} x\|_\infty.$$

On a alors :

$$\forall x \in E, \quad e^{-kl} \|x\|_\infty \leq \|x\|_k \leq \|x\|_\infty$$

De fait $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_k$ sont équivalentes sur E , alors $(E, \|\cdot\|_k)$ est un espace de Banach.

On définit sur \mathcal{F} l'application

$$\Phi: x \mapsto \Phi(x): t \in I \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Comme Φ est continue elle envoie bien E sur lui-même.

Également :

$$\forall x, y \in E, \forall t \leq t_0, \quad \Phi(x)(t) - \Phi(y)(t) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds$$

. D'où :

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathcal{F}, \forall t \leq t_0, \quad e^{-k(t-t_0)} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| &\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t k \|x(s) - y(s)\| ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t k e^{k(s-t_0)} (e^{-k(s-t_0)} \|x(s) - y(s)\|) ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t k e^{k(s-t_0)} \|x - y\|_k ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \|x - y\|_k (e^{k(t-t_0)} - 1) \\
&\leq (1 - e^{-k(t-t_0)}) \|x - y\|_k
\end{aligned}$$

On obtient exactement le même résultat pour $t \geq t_0$ en remplaçant $e^{-k(t-t_0)}$ par $e^{-k(t_0-t)}$, d'où :

$$\forall x, y \in \mathcal{F}, \forall t \in I, \quad e^{-k|t-t_0|} \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq (1 - e^{-k(t-t_0)}) \|x - y\|_k \leq (1 - e^{-kl}) \|x - y\|_k$$

D'où, en "passant au max" en t :

$$\forall x, y \in \mathcal{F}, \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_k \leq (1 - e^{-kl}) \|x - y\|_k$$

Φ est donc contractante ($0 < 1 - e^{-kl} < 1$) donc, par le théorème du point fixe de Picard, admet un unique point fixe, ce qui résout notre problème.

Si on ne suppose plus I compact, on peut trouver une suite croissante d'intervalles compacts $I_j; j \in \mathbb{N}$ tels que :

$$I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}, t_0 \in I_j.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ on note x_j la solution du problème de Cauchy sur I_j . Alors si x est solution sur I , par unicité sur les I_j on a nécessairement $x|_{I_j} = x_j$. Inversement, toujours par unicité sur les I_j , on peut recoller les x_j , c'est-à-dire que l'application $x : (t \in I_j) \mapsto x_j(t)$ est bien définie et dérivable.

Remarque 2.2

1. Par exemple pour résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On peut dire que, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si la solution n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annule jamais! On peut donc diviser par y^2 puis intégrer l'équation de part et d'autre afin de la résoudre.

L'ensemble de toutes les solutions est constitué de

$$(\mathbb{R}, 0)$$

$$(J_K^-, x_K^-) \text{ avec } J_K^- =]-\infty, K[, \text{ et } x_K^-(t) = \frac{1}{K-t}, \forall t \in J_K^-,$$

$$(J_K^+, x_K^+) \text{ avec } J_K^+ =]K, +\infty[, \text{ et } x_K^+(t) = \frac{1}{K-t}, \forall t \in J_K^+,$$

Avec $K = \frac{1}{x_0} + t_0$. Ces dernières solutions ne sont pas globales (i.e ne sont pas définies sur \mathbb{R} tout entier).

2. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est une fonction T -périodique. alors une solution (\mathbb{R}, x) de l'équation différentielle est T -périodique si et seulement s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$x(t_0 + T) = x(t_0)$$

En effet si x vérifie l'équation différentielle, alors la fonction $y = x(t_0 + T)$ vérifie la même équation que x et la même donnée de Cauchy $y(t_0) = x(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces deux fonctions sont identiques, ce qui prouve le résultat.

2.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales

On va voir dans cette section le comportement des solutions lorsqu'on perturbe les conditions initiales. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in I \times E$. On a le théorème suivant :

Théorème 2.6

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} . Soient $f \in C(I \times E, E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supposons que f est k -lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I . Soit $\Phi : I \times E \rightarrow E$ la fonction définie par :

$$\Phi(t, u) = x(t), \quad \forall u \in E$$

où x est la solution du problème de Cauchy de condition initiale $x(t_0) = u$. Alors la fonction Φ est continue par rapport à u sur E .

Preuve

Montrons que Φ est continue par rapport à la deuxième variable sur E .

Soient $u \neq v \in E$. Soit x et y les solutions du problème de Cauchy de conditions initiales u et v respectivement. On a :

$$x(t) = u + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad \text{et} \quad y(t) = v + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in I$$

Par définition de la fonction Φ on a $\Phi(t, u) = x(t)$ et $\Phi(t, v) = y(t)$. On remplace et on obtient pour tout t dans I :

$$[\Phi(t, u) - \Phi(t, v)] = u - v + \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s, u)) - f(s, \Phi(s, v))ds$$

$$[\Phi(t, u) - \Phi(t, v)] - [\Phi(t_0, u) - \Phi(t_0, v)] = \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s, u)) - f(s, \Phi(s, v))ds$$

Posons $J = [t, t_0]$ si $t \leq t_0$ et $J = [t_0, t]$ si $t_0 \leq t$.

Posons aussi :

$$\|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* = \max_{s \in J} [\exp(-k|s - t_0|) \|\Phi(s, u) - \Phi(s, v)\|]$$

Comme $\Phi(t_0, u) = u$ et $\Phi(t_0, v) = v$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v) - [u - v]\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \Phi(s, u)) - f(s, \Phi(s, v))) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_J (f(s, \Phi(s, u)) - f(s, \Phi(s, v))) ds \right\| \\ &\leq k \left\| \int_J \Phi(s, u) - \Phi(s, v) ds \right\| \\ &\leq k \int_J \exp(k|s - t_0|) \exp(-k|s - t_0|) \|\Phi(s, u) - \Phi(s, v)\| ds \\ &\leq \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* \int_J k \exp(k|s - t_0|) ds \\ &\leq \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* (\exp(k|s - t_0|) - 1) \end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout $t \in [a, b]$:

$$\exp(-k|s - t_0|) \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\| \leq (1 - \exp(-k(b - a))) \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* + \|u - v\|$$

Par passage au maximum et par la définition de la quantité $\|\cdot\|_*$ on obtient :

$$\|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* \leq (1 - \exp(-k(b - a))) \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* + \|u - v\|$$

Donc :

$$\exp(-k(b - a)) \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\|_* \leq \|u - v\|$$

Comme :

$$\exp(-k(b - a)) \leq \exp(-k|s - t_0|) \leq 1, \quad \forall s \in I.$$

Alors :

$$\max_{s \in I} \|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)\| \leq \exp(2k(b - a)) \|u - v\|$$

On en déduit que Φ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $[a, b]$ de constante de Lipschitz $\exp(2k(b - a))$ ce qui montre que Φ est continue par rapport à la deuxième variable sur E .

2.5 Dépendance par rapport aux paramètres

Une équation différentielle peut dépendre d'un paramètre. On va voir quelques résultats sur le comportement des solutions en variant un paramètre dans une équation différentielle. Soit

$$x' = f(t, x, \lambda)$$

une équation différentielle qui dépend du paramètre $\lambda \in [c, d] \subset \mathbb{R}$ et $f: I \times E \times [c, d] \rightarrow E$ une fonction définie de $I \times E \times [c, d]$ dans E où I est un intervalle borné dans \mathbb{R} . Pour chaque λ fixé dans $[c, d]$ supposons que $f(t, x, \lambda)$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I , donc le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in I \times E$ admet une solution $x_\lambda: I \rightarrow E$ qui dépend de $\lambda \in [c, d]$.

On a le théorème

Théorème 2.7

Soient $f \in \mathcal{C}(I \times E \times [c, d], E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\lambda \in [c, d]$

Supposons que pour tout $\lambda \in [c, d]$ fixé la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I .

Soit $\phi: I \times [c, d] \rightarrow E$ la fonction définie par $\phi(t, \lambda) = x_\lambda(t)$ où $x_\lambda: I \rightarrow E$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Alors ϕ est continue sur $I \times [c, d]$.

Preuve

L'étude de la dépendance par rapport aux paramètres revient, en réalité, à l'étude de la dépendance aux conditions initiales vue dans la session précédente.

Soient $F = E \times [c, d]$ et la fonction $g: I \times F \rightarrow F$ définie par $g(t, (x, \lambda)) = (f(t, x, \lambda); 0)$

Le problème de Cauchy ci-dessus est donc équivalent à

$$\begin{cases} \tilde{x}' = g(t, \tilde{x}) \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

où $\tilde{x}(t) = (x(t), y(t))$ et $\tilde{x}_0 = (x_0, \lambda)$

Donc varier le paramètre λ revient à varier la condition initiale $\tilde{x}(t)$. On peut donc utiliser le théorème précédent pour conclure la preuve du présent théorème.

3 Quelques applications du théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans ce chapitre, nous exposerons l'utilité du théorème de Cauchy-Lipschitz à travers la résolution de quelques exemples d'équations et de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

3.1 Résolution des équations différentielles ordinaires

3.1.1 Équation différentielle autonome

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \text{ avec } f(y) = \sin y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Vérification des hypothèses :

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 donc vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, ainsi il existe une unique solution maximale sur l'intervalle $]T_-, T_+[$ avec $(T_-, T_+) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$. Voyons si l'on peut trouver cette solution :

2. Résolution théorique :

- On remarque que $x \mapsto k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des solutions stationnaires au problème (en particulier $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \pi$ sont solutions). On montre alors facilement que pour $y_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\sin y \neq 0$.
- On montre maintenant en se limitant au cas où $y_0 \in]0, \pi[$ que l'unique solution y est dans $]0, \pi[$. En effet, si la solution déborde de cet intervalle, par continuité on a qu'il existe $c \in]T_-, T_+[$ tel que $y(c) = \pi$ or dans ce cas, y vérifie le même problème de Cauchy que les solutions stationnaires. En particulier, $y_0 = 0$ ou $y_0 = \pi$ ce qui est absurde.
- On montre que la solution maximale est définie sur \mathbb{R} . Supposons, sans perte de généralités, que $T_+ < +\infty$ alors, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow T_+ \\ x < T_+}} |y| = +\infty$. Or on a vu juste avant que y était bornée sur l'intervalle de définition.

Résolvons maintenant le problème de Cauchy pour $y_0 \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = \sin y$$

C'est une équation à variables séparées que l'on peut exprimer comme :

$$\frac{y'}{\sin y} = 1$$

On intègre de chaque coté :

$$\begin{aligned}
 \frac{y'}{\sin y} = 1 &\iff \int \frac{1}{\sin y} dy = \int 1 dx \\
 &\iff \int \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} dy = \int dx \\
 &\iff \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{y}{2}}}{\frac{\sin \frac{y}{2}}{\cos \frac{y}{2}}} dy = \int dx \\
 &\iff \int \frac{\tan' \frac{y}{2}}{\tan \frac{y}{2}} dy = \int dx \\
 &\iff \ln(\tan \frac{y}{2}) = x + c, c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

De plus, on a la condition $y(0) = y_0$ d'où l'on tire : $c = \ln(\tan \frac{y_0}{2})$. L'expression de y est donnée par $y(x) = \arctan(\tan(\frac{y_0}{2})e^x)$

3. Représentation des solutions :

On a tracé quelques solutions pour $y_0 \in [0, \pi]$:

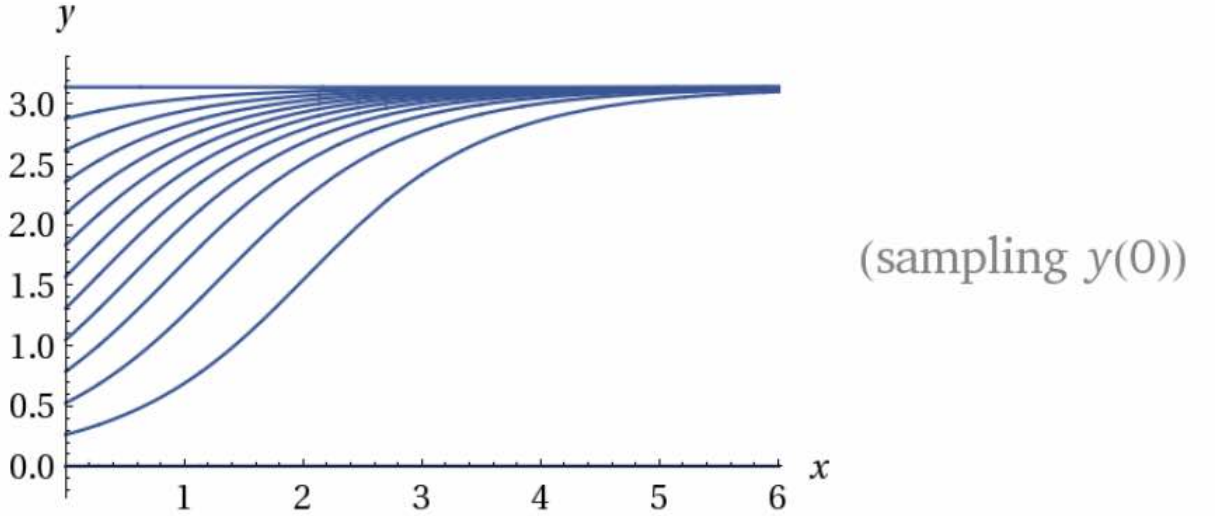


Figure 4: Quelques solutions de l'équation

3.1.2 Équation différentielle non autonome :

On considère cette fois-ci le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(t, y(x)) \text{ avec } f(t, y) = \frac{\cos t}{1+e^y} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Vérification des hypothèses :

f est lipschitzienne par rapport à y au sens où elle vérifie la condition suffisante suivante

:

$$\sup_{(t,y) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| < +\infty$$

Voici une proposition de preuve :

Preuve

On calcule la dérivée partielle de f par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \frac{-e^y \cos t}{(1+e^y)^2}$$

Comme $|\cos t| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| = \left| \frac{-e^y \cos t}{(1+e^y)^2} \right| \leq \frac{e^y}{(1+e^y)^2}$$

On sait que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, e^y \leq 1 + e^y \leq (1 + e^y)^2$$

donc :

$$\frac{1}{(1+e^y)^2} \leq \frac{1}{e^y}$$

Ainsi, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| \leq \frac{e^y}{(1+e^y)^2} \leq \frac{e^y}{e^y} \leq 1 < +\infty$$

Ce qui conclut la démonstration.

Comme f vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz, le théorème nous dit qu'il existe une unique solution maximale sur l'intervalle $[T_-, T_+]$ avec $(T_-, T_+) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$. On résout maintenant le problème :

2. Résolution théorique :

- (a) On montre de la même façon que dans l'exemple 1 que la solution maximale est définie sur \mathbb{R} tout entier en utilisant le critère d'explosion.
- (b) On peut maintenant résoudre le problème de Cauchy pour $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante:

$$y' = \frac{\cos t}{1 + e^y}$$

C'est une équation à variables séparées que l'on peut exprimer comme suit :

$$y'(1 + e^y) = \cos t$$

On intègre de chaque côté :

$$\int (1 + e^y) dy = \int \cos t dt$$

D'où :

$$\Longleftrightarrow y(t) + e^{y(t)} = \sin t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

De plus, on a la condition $y(0) = y_0$ d'où on tire : $c = y_0 + e^{y_0}$. Malheureusement, on ne peut pas contrairement à l'exemple précédent trouver une expression explicite de $y(t)$.

Cependant, on peut réécrire l'équation de façon plus agréable :

On pose la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F(t) = t + e^t \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} F(t) = t + e^t &\implies F'(t) = 1 + e^t \\ &\implies F'(t) \geq 0 ; \forall t \in \mathbb{R} \\ &\implies F \text{ croissante sur } \mathbb{R} \\ &\implies F \text{ est une bijection sur } \mathbb{R} \text{ (puisque } \mathbb{R} \text{ est continue)} \end{aligned}$$

On peut donc écrire la solution y sous la forme suivante :

$$\boxed{y(x) = F^{-1}(\sin x + e^{y_0} + y_0)}$$

3. Représentation des solutions :

On a tracé quelques solutions pour $y_0 \in [0, 3]$:

3.2 Résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires

Cherchons à résoudre le problème de Cauchy linéaire du premier ordre non homogène suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + e^{-t} & , y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -y_2(t) - 2e^{-2t} & , y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Si l'on pose $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ alors le problème de Cauchy s'écrit sous la forme matricielle $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, $Y(0) = Y_0$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

,
Posons :

$$\begin{aligned} F(t, Y) &= AY + B(t) \\ F(t, Y) &= \begin{pmatrix} y_1 + e^{-t} \\ -y_2 - 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le problème de Cauchy revient à ce système :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

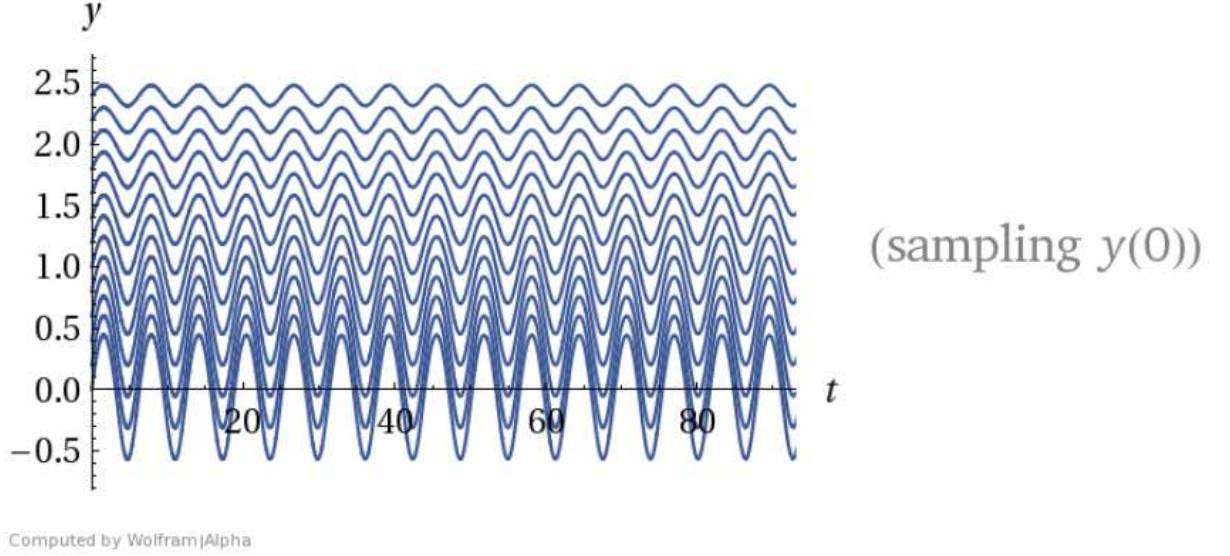


Figure 5: Quelques solutions de l'équation

1. Vérification des hypothèses :

La fonction F vérifie la condition de la forme faible du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet F est de classe \mathcal{C}^∞ donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 . Par conséquent ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale. De plus F est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Preuve

Soit $t \in \mathbb{R}$

Soit $Y = (y_1, y_2)$; $Z = (z_1, z_2)$ deux éléments de \mathbb{R}^2

On a :

$$\begin{aligned} \|F(t, Y) - F(t, Z)\| &= \left\| \begin{pmatrix} y_1 + e^{-t} - z_1 - e^{-t} \\ z_1 + e^{-t} - z_2 - e^{-t} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} y_1 - z_1 \\ y_2 - z_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \|Y - Z\| \end{aligned}$$

On a donc :

$$\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq \|Y - Z\|$$

F est donc 1-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable $\forall t \in \mathbb{R}$.

La solution maximale de ce problème de Cauchy est donc globale c'est-à-dire définie sur tout \mathbb{R} .

2. Résolution théorique :

La matrice A étant diagonale, l'exponentielle e^{At} est simplement :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ainsi la solution du problème homogène est :

$$Y_h(t) = e^{At}Y_0 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le terme :

$$\int_0^t e^{A(t-s)B(s)} ds$$

$$e^{A(t-s)B(s)} = \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{-(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ -2e^{-2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-2s} \\ -2e^{-t-s} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{A(t-s)B(s)} ds = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{t-2s} ds \\ \int_0^t -2e^{-t-s} ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t(e^{-2t} - 1) \\ 2e^{-t}(e^{-t} - 1) \end{pmatrix}$$

La solution du problème de Cauchy est :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t - \frac{1}{2}e^t(e^{-2t} - 1) \\ e^{-t} + 2e^{-t}(e^{-t} - 1) \end{pmatrix}$$

Conclusion

En somme, dans ce mémoire nous avons étudié le théorème de Cauchy-Lipschitz sous ses différents aspects. D'abord on rappelle que le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy sous réserve que la fonction f définissant le problème soit continue et lipschitzienne (localement ou globalement). Par ailleurs, la dépendance de cette solution par rapport aux conditions initiales est continue et même lipschitzienne. Si la fonction f définissant l'équation différentielle dépend d'un paramètre réel λ , alors la solution au problème de Cauchy est continûment dépendante du paramètre λ .

Aussi le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas une équivalence : on peut trouver une solution unique à un problème de Cauchy sans que f ne soit lipschitzienne grâce au théorème de Nagumo et si on enlève la condition de Lipschitz on n'a que l'existence et pas l'unicité de la solution. Enfin, il faut remarquer que bien que le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité de la solution, elle n'en donne pas l'expression.

Références

- [1] Léonard Todjihounde, Cours d'Équations Différentielles Ordinaires, 2017-2018
- [2] L. Pujo-Menjouet, Équations Différentielles Ordinaires et Partielles
- [3] Franck Boyer, Agrégation Externe de Mathématiques Équations différentielles ordinaires, Aix-Marseille Université 19 octobre 2017
- [4] Lefeuvre Thomas et Ginguené Franck, Théorème de Cauchy-Lipschitz et applications 30 mars 2012
- [5] W Oukil. Notes et exercices du cours d'Équations Différentielles . Licence. Algérie. 2017. < *cel* – 01627453v2 >
- [6] Université de Bourgogne, Licence de Mathématiques, Compléments d'analyse, Chapitre 8: Équations différentielles