

Real-Time Physically-Based Materials

Mengzhu Wang

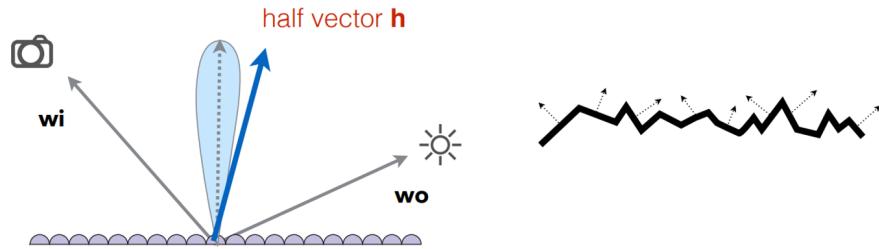
2024 年 5 月 17 日

1 Microfacet BRDF

微表面模型认为宏观上是平的，微观上会看到各种微表面，微表面的法线朝向不同，其分布导致渲染结果也各不相同。微表面 BRDF 的公式如下：

$$f(i, o) = \frac{F(i, h)G(i, o, h)D(h)}{4(n, i)(n, o)}$$

其中 F 是菲涅尔项 (fresnel term)， G 是几何项 shadowing-masking term， D 是法线分布函数，分母用来归一化保证能量守恒。



1.1 The Fresnel Term

菲涅尔项表示观察角度与反射的关系。反射取决于入射光的角度，当入射方向接近 grazing angle 时光线反射最多，也就是说入射方向与法线几乎垂直时反射的 radiance 最多。

精确计算菲涅尔项需要考虑光的 S 极化和 P 极化，公式如下：

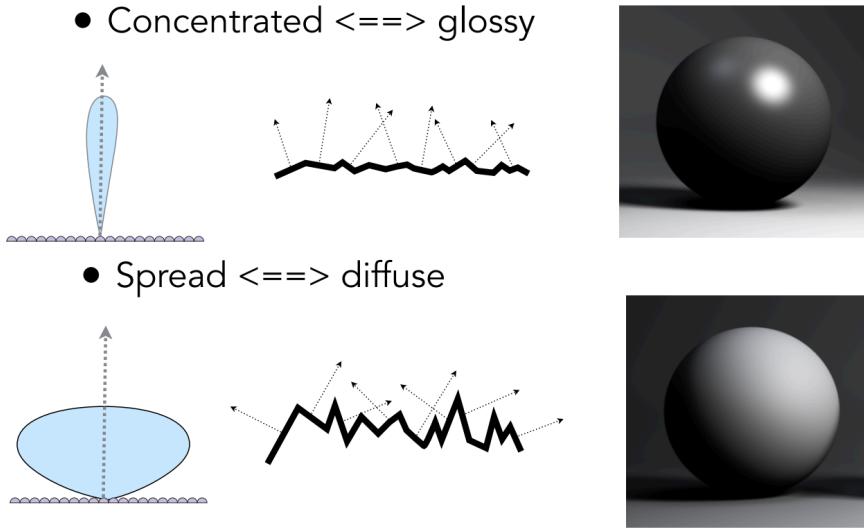
$$R_s = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2}} \right|^2$$
$$R_p = \left| \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2} - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2} + n_2 \cos \theta_i} \right|^2$$
$$R_{eff} = \frac{1}{2}(R_s + R_p)$$

上式十分复杂，可以用 Schlick's approximation 来近似，

$$R(\theta) = R_0 + (1 - R_0)(1 - \cos \theta)^5 \quad R_0 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

1.2 Normal Distribution Functions (NDF)

NDF 是指微表面的法线分布。法线朝向集中时得到 glossy 的结果，法线分布比较分散时得到 diffuse 的结果。常用的 NDF 模型有 Beckmann 和 GGX 等。



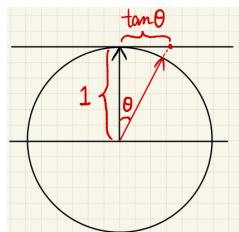
1.2.1 Beckmann

微表面的法线方向是半程向量 h 的函数，法线分布函数类似高斯函数，定义为

$$D(h) = \frac{e^{-\frac{\tan^2 \theta_h}{\alpha^2}}}{\pi \alpha^2 \cos^4 \theta_h}$$

α 描述法线粗糙程度，该值越小则表面越光滑。 θ_h 表示半程向量 h 和宏观法线 n 之间的夹角。定义只与 θ 有关，与 ϕ 无关，因此表示各向同性，即沿着中心旋转仍能得到相同结果。

Beckmann NDF 定义在 slope space 中，使用 $\tan \theta$ 而非 θ 。因为高斯函数定义域无限大，对 $\tan \theta$ 而言，即使在平面的无限远处，也不可能出现微表面法线朝下的情况。但若采用 θ ，大于 90° 时仍会有对应函数值，法线朝下。

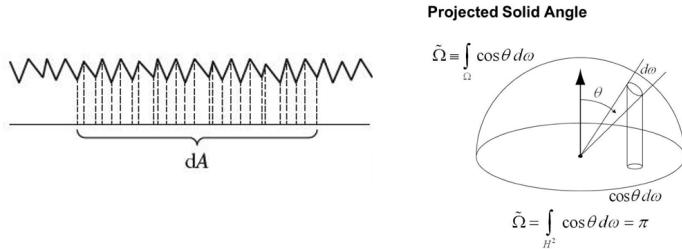


分母部分 $\pi\alpha^2 \cos^4 \theta_h$ 用于归一化，为了保证在投影立体角 (projected solid angle) 上积分为 1。NDF 关于投影立体角积分为 1 的推导如下：选取宏观表面的面积微元 dA ，用 $D'(h)$ 表示该区域内法线方向为 h 的微表面面积和，得到

$$dA = \int_{\Omega} D'(h) \cos \theta_h dh$$

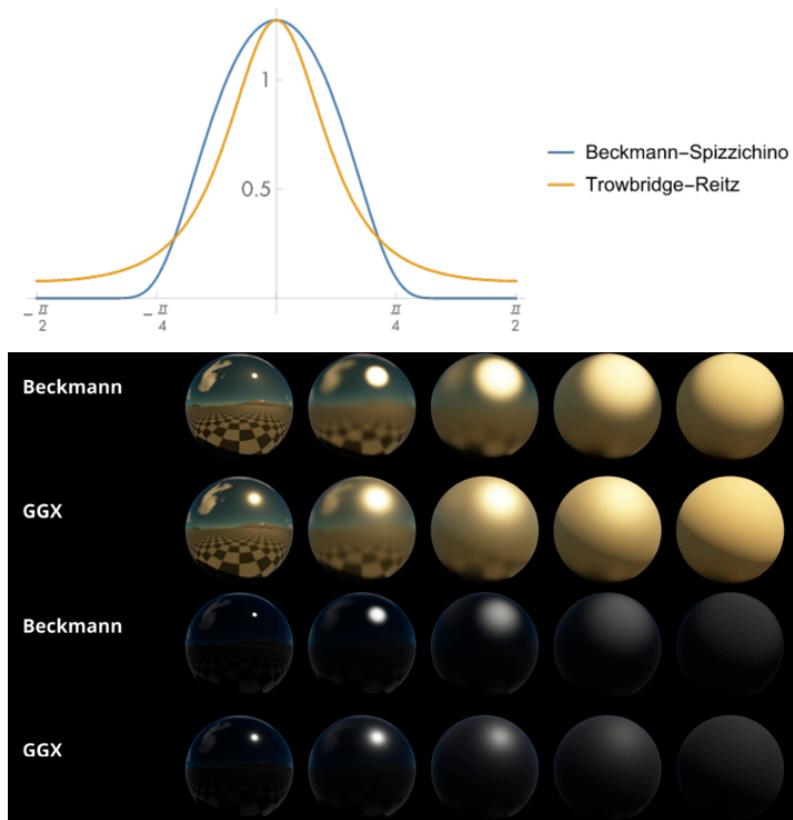
$$1 = \int_{\Omega} \frac{D'(h)}{dA} \cos \theta_h dh = \int_{\Omega} D(h) \cos \theta_h dh$$

其中 $\cos \theta_h dh$ 为投影立体角。



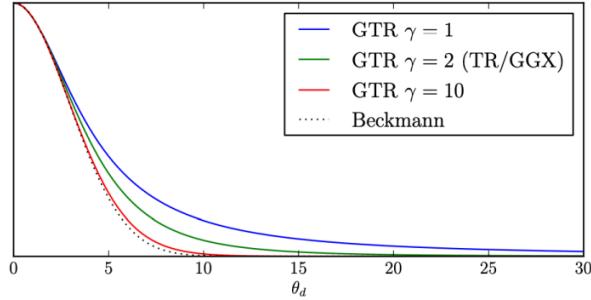
1.2.2 GGX (or Trowbridge-Reitz)

GGX 比 Beckmann 有更好的长尾 (long tail) 性质。它衰减快，但在衰减到一定程度时变慢，在 grazing angle 时不为 0。因此，GGX 的高光边缘更加柔和，有光晕的感觉。除了高光之外，其他部分类似 diffuse。



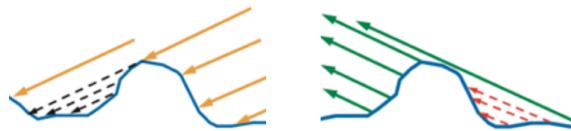
1.2.3 Generalized Trowbridge-Reitz (GTR)

GTR 是 GGX 的扩展，它有更长的拖尾。GGX 引入参数 γ ，当 $\gamma = 2$ 时是 GGX， γ 超过 10 接近 Beckmann。



1.3 Shadowing-Masking Term

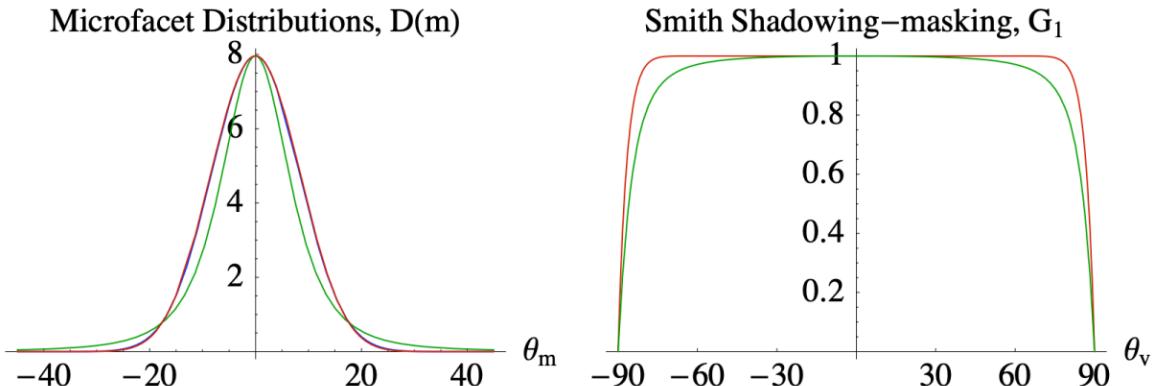
Shadowing-masking term 也可以称作几何项 (geometry term)，它用来解决微表面的自遮挡变暗问题。shadowing 指从 light 出发，遮挡入射光线；masking 指从 eye 出发，遮挡出射光线。



G 项在接近 grazing angle 时遮挡现象最大也就是接近于 0，垂直看向时无遮挡也就是 1。若不考虑 G 项，垂直看时无遮挡结果正常。但从 grazing angle 看时， F 为 1， D 是正常的法线分布， G 为 1，分母中由于入射出射角度接近 90° ，点积后接近 0，整个式子结果很大，导致边缘很亮。 G 项的作用就是在接近 grazing angle 时使其变暗。

常用的是 Smith shadowing-masking term，它拆分了 shadowing 和 masking，即

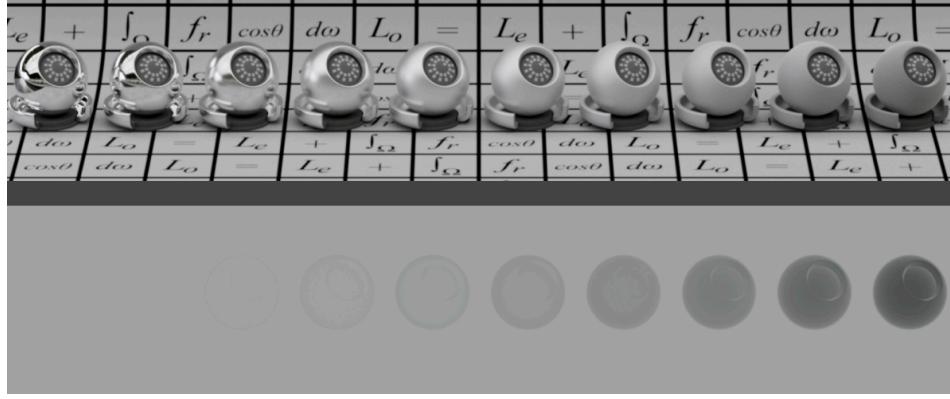
$$G(i, o, m) \approx G_1(i, m)G_1(o, m)$$



1.4 Energy Compensation

1.4.1 Missing Energy

随着粗糙度的增加，渲染结果变暗。对其做白炉测试 (white furnace test)，即在 $F = 1$ 情况下使用 uniform irradiance=1 的光照，检测材质反射的能量，可见粗糙度越大，颜色越深，表示能量损失的越多。



这是因为没有考虑多次 bounce。表面越粗糙时，反射光越容易被表面遮挡，所以越粗糙的表面在表面之间的 bounce 就越多。只考虑一次 bounce 就会产生能量损失。

当前有精确的方法补偿损失的能量，但是对实时渲染太慢。

1.4.2 The Kulla-Conty Approximation

考虑到一条光线如果被遮挡，就相当于会发生另一次 bounce。工业界通过经验去补偿多次反射丢失的能量，其实是创建一个模拟多次反射表面反射的附加 BRDF lobe 来估计。

首先假设 uniform radiance 为 1，一次反射后出射的能量为

$$E(\mu_o) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\mu_o, \mu_i, \phi) \mu_i d\mu_i d\phi$$

上式相当于求 BRDF 的余弦加权半球积分，其推导过程如下：

$$\begin{aligned} E(\mu_o) &= \int_{\Omega^+} f_{ms}(\mu_o, \mu_i, \phi) \cos \theta d\omega \\ &\stackrel{d\omega = \sin \theta d\theta d\phi}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_{ms}(\mu_o, \mu_i, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &\stackrel{\cos \theta d\theta = d \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_{ms}(\mu_o, \mu_i, \phi) \sin \theta d\sin \theta d\phi \\ &\stackrel{\mu = \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_{ms}(\mu_o, \mu_i, \phi) \mu d\mu d\phi \end{aligned}$$

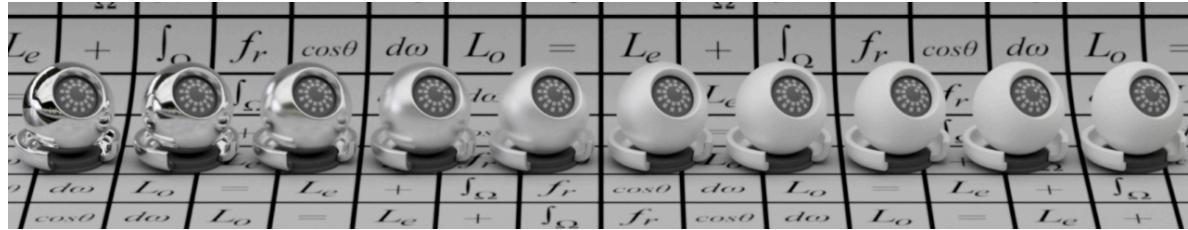
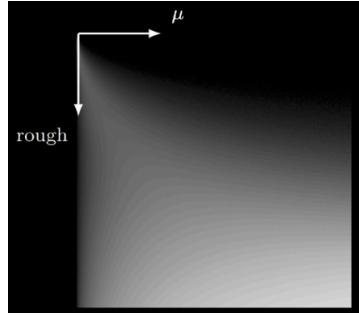
那么光线损失的能量则是 $1 - E(\mu_o)$ 。由于 BRDF 可逆，入射出射方向的损失都要考虑，因此 BRDF 应为

$$f_{ms}(\mu_o, \mu_i, \phi) = c(1 - E(\mu_i))(1 - E(\mu_o))$$

其中 $c = \frac{1}{\pi(1-E_{avg})}$, $E_{avg} = 2 \int_0^1 E(\mu) \mu d\mu$ 为半球上的余弦加权平均。上式推导如下：

$$\begin{aligned}
 E_{ms}(\mu_o) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_{ms}(\mu_o, \mu_i, \phi) \mu_i d\mu_i d\phi \\
 &= 2\pi \int_0^1 c(1 - E(\mu_i))(1 - E(\mu_o)) \mu_i d\mu_i \\
 &= 2\pi c(1 - E(\mu_o)) \int_0^1 (1 - E(\mu_i)) \mu_i d\mu_i \\
 &= \pi c(1 - E(\mu_o))(1 - E_{avg}) \\
 &= 1 - E(\mu_o)
 \end{aligned}$$

$E(\mu)$ 和 E_{avg} 没有解析解，可以采用预算算、打表处理。这里 $E(\mu)$ 依赖于粗糙度和 μ ，可以用二维表实现； E_{avg} 只依赖粗糙度，一维纹理即可。

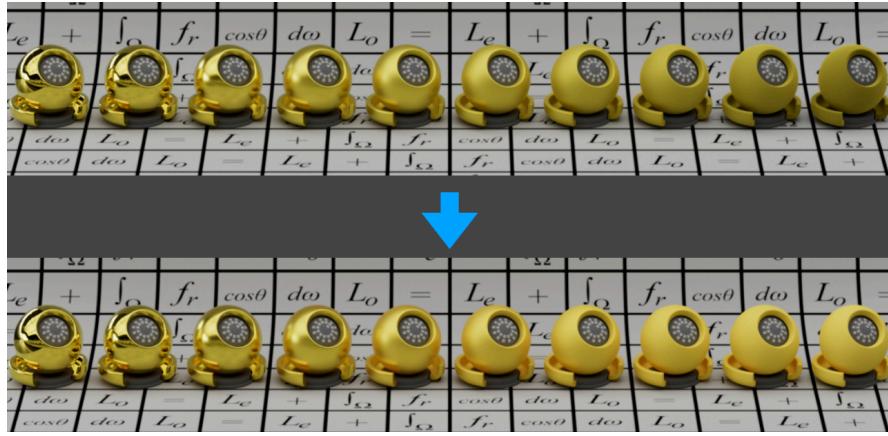


若材质有颜色，意味着能吸收能量，造成能量损失。所以先考虑没有颜色时的损失，然后再考虑颜色引起的损失。

定义平均菲涅尔项，表示平均每次反射的能量

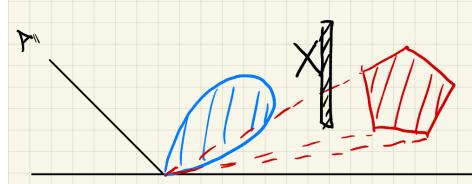
$$F_{avg} = \frac{\int_0^1 F(\mu) \mu d\mu}{\int_0^1 \mu d\mu} = 2 \int_0^1 F(\mu) \mu d\mu$$

有颜色时，第一次有 $F_{avg}E_{avg}$ 的能量被反射，第二次有 $F_{avg}(1 - E_{avg})F_{avg}E_{avg}$ 的能量被反射，第 k 次有 $F_{avg}^k(1 - E_{avg})^k F_{avg}E_{avg}$ 的能量被反射。这些能量求和得到 $\frac{F_{avg}E_{avg}}{1 - F_{avg}(1 - E_{avg})}$ ，该项与没有颜色的结果相乘，即可补足颜色的能量损失。



1.5 Linearly Transformed Cosines (LTC)

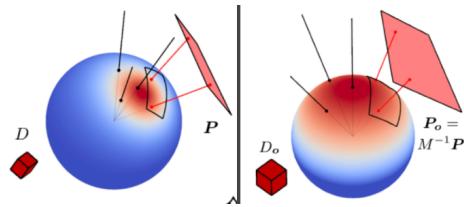
LTC 能解决微表面模型下多边形光源采样的 shading 问题，它主要用于 GGX NDF 且不生成阴影。

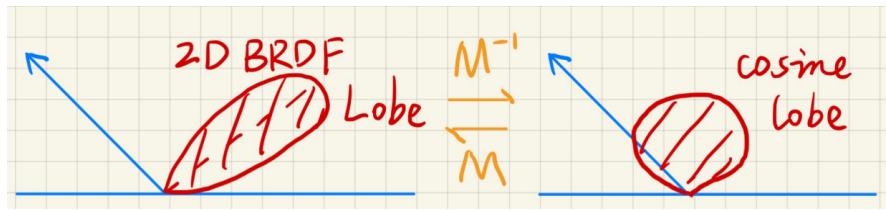


shading 最直接的想法就是对光源采样，LTC 可以避免采样。它的核心思想是 BRDF lobe 可以变换为余弦函数，多边形光源也随之变换，从而问题转变为在固定余弦下对任意多边形光源积分，这是有解析解的。

具体做法是对任意观察方向预计算一个变换矩阵 M^{-1} （原论文中将余弦空间转化为标准空间的变换定义为 M ），将标准空间的 BRDF 转换到余弦空间。假设面光源 L_i 是 uniform 的，代入余弦变换

$$\begin{aligned} L(\omega_o) &= L_i \int_P F(\omega_i) \omega_i \\ &= L_i \int_P \cos(\omega'_i) d\frac{M\omega'_i}{\|M\omega_i\|} \\ &= L_i \int_P' \cos(\omega'_i) J d\omega'_i \end{aligned}$$

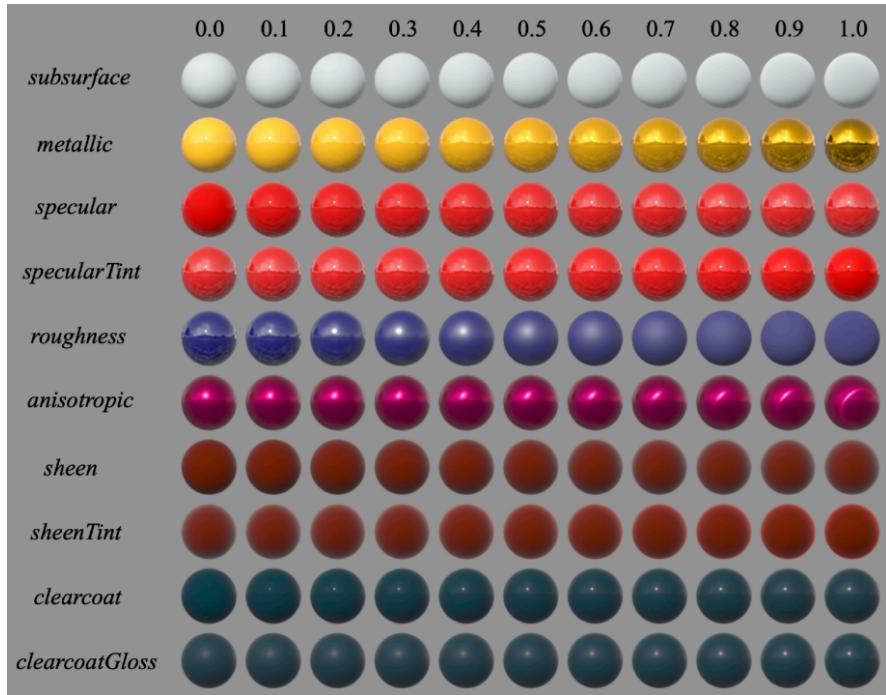




2 Disney's Principled BRDF

多层复合材质无法用微表面模型表示。同时，微表面模型对于艺术家不友好，其参数与物理量相关。Disney's Principled BRDF 是一种艺术导向的模型，它的几条重要原则如下：

- 更加直观而非物理的
- 尽可能少的参数
- 参数范围在 0 到 1 之间
- 允许参数在必要的情况下超出正常的合理范围
- 参数组合尽可能合理可靠



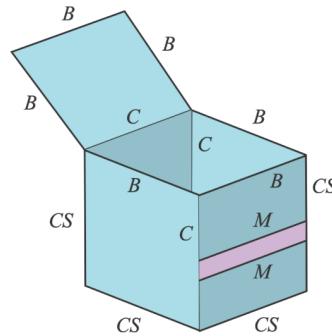
该模型的优点是易于理解控制，一个模型能描述多种材质。它并非基于物理的，比较大的参数空间也可能带来冗余。

3 Non-Photorealistic Rendering (NPR)

NPR 是为了生成风格化的艺术效果。它的主要流程是从真实渲染出发，再从中抽象、强调重要的部分。

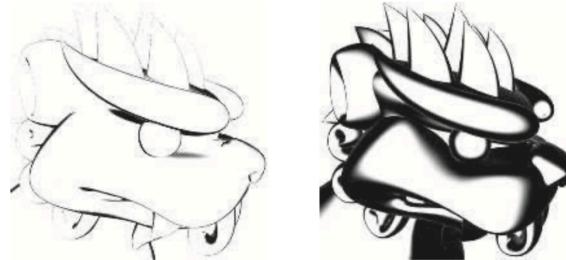
3.1 Outline Rendering

outline 不仅仅是 contours，它包括面的边缘 (boundary)、折痕 (crease)、材质边缘 (material edge) 和多个面共享的外边缘 (silhouette edge)。

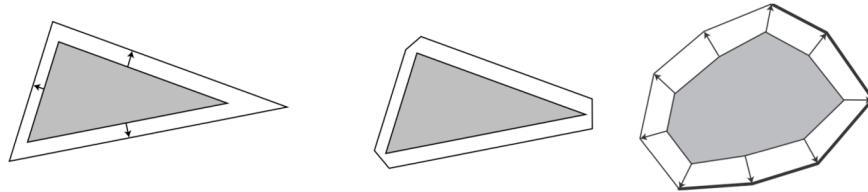


它可以通过以下这些方法得到：

- Shading: 可以使模型法线垂直于视线的地方变暗，也就是 grazing angle 处，然后使用阈值等方法取出来，可能导致 outline 粗细不一。



- Geometry: 只扩大模型背对视角的面使背面模型大一圈，并用黑色渲染，然后再渲染正面。

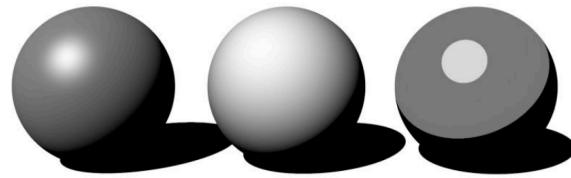


- Image: 对图像进行边缘检测，常用 sobel 算子。还可以对法线和深度图处理得到。

3.2 Color Blocks

色块效果有两种不同方法

- Hard shading: 在 shading 时阈值化
- Posterization: 对最后的图像阈值化



3.3 Strokes Surface Stylization

素描效果可以通过用预先生成的素描纹理代替基于点的 shading 实现。Tonal art maps (TAMs) 方法的步骤是

- 设计不同笔触的纹理，并为每个纹理制作 mipmap，这里缩小的同时没有更密集
- 根据 shading point 的明暗和位置查找对应纹理

