Нургалиев А. Т.

ФРАКТАЛЫ

Приведены примеры расчета и построения графической интерпретации некоторых алгебраических и геометрических фракталов.

Фрактал – сложная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, т.е. из всей фигуры можно выделить части, подобные целой фигуре. Примеры самоподобных множеств известны с XIX века. Термин «фрактал» (от лат. *fractus* - раздробленный) впервые ввел в 1975 году математик исследовательского центра IBM Бенуа Мандельброт.

Фракталы можно разделить на несколько видов:

- Геометрические фракталы – строятся на основе исходной фигуры (линии, многоугольника или многогранника) путем ее дробления и выполнения различных преобразований полученных фрагментов.
- Алгебраические фракталы – строятся на основе алгебраических формул.
- Стохастические фракталы – получаются, если в итерационном процессе случайным образом изменять какие-либо параметры.

Фракталы нашли применение в физике (моделирование сложных процессов и материалов), биологии (моделирование популяций, описание сложных ветвящихся структур), технике (фрактальные антенны), экономике. Существуют алгоритмы сжатия изображений с помощью фракталов. В компьютерной графике фракталы используются для построения изображений природных объектов – растений, ландшафтов, поверхности морей и т.д.

Некоторые примеры алгебраических и геометрических фракталов.

1. Фрактал Мандельброта.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел:

$$z_{k+1} = z_k^2 + c,\ k = 0,1,2,...,\ z_0 = c$$

Множество точек c, для которого эта последовательность не расходится, называется множеством Мандельброта. Для построения его графической интерпретации нужно определить исходные данные:

- прямоугольное окно C с разрешением $n \times m$ точек;
- значение $r_{\min} = 2$ – минимальный радиус расходимости множества Мандельброта
- максимальное число итераций k_{max}

Если точка z_k вышла за пределы круга радиуса r_{min} при $k < k_{\max}$, то процесс вычисления останавливается.

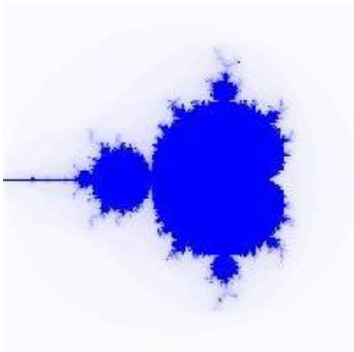
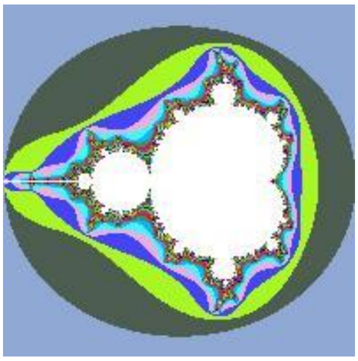
Построение: для каждой точки $c_{ij} \in C$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $c_x \in [-2,1]$, $c_y \in [-2,1.5]$) запустим итерационный процесс:

$$x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + c_x,\ x_0 = c_x$$

$$y_{k+1} = 2x_k y_k + c_y,\ y_9 = c_y$$

$$k = 0,1,2,...,k_{\max} \text{ и } \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \le r_{\min}$$

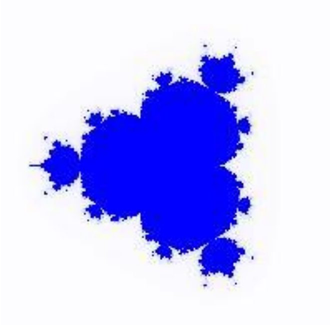
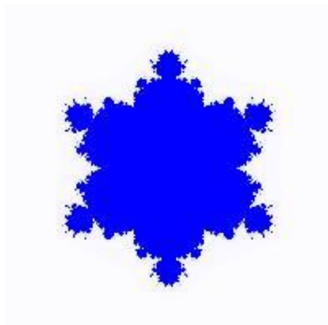
Составим матрицу M, элементы которой $m_{ij} \in [1, k_{\max}]$ равны номерам итераций, на которых процесс был остановлен. Далее матрицу можно вывести на экран как растровое изображение, предварительно сопоставив каждому числу из интервала $[1, k_{\max}]$ некоторый цвет.

Если представить множество в общем виде:

$$z_{k+1} = z_k^N + c\,,$$

то, изменяя значение N, можно получать симметричные фрактальные множества. Например, для $N = 4$ и $N = 7$:

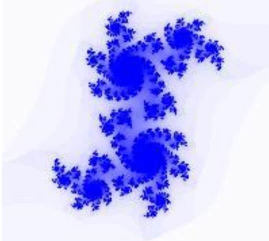
2. Фрактал Жюлиа.

Рассмотрим ту же последовательность комплексных чисел, что и для множества Мандельброта:

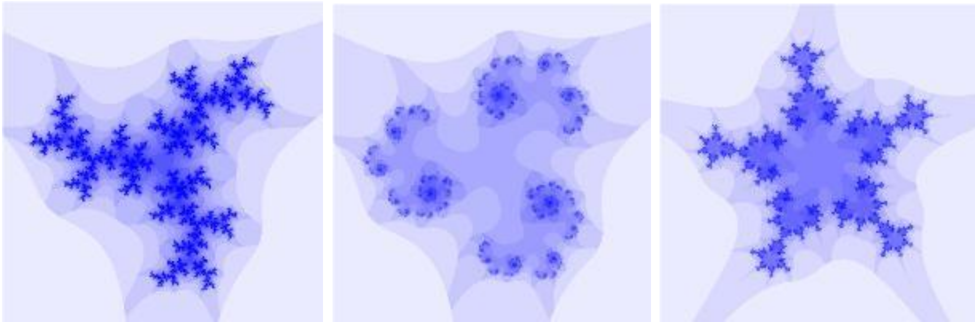
$$z_{k+1} = z_k^2 + c\,,\ k = 0,1,2,...\,,$$

Исходные данные, этапы построения и условия остановки – те же, что и для фрактала Мандельброта, за исключением:

- значение *c* фиксируется: $c = 0.36 + 0.36i$
- начальное значение z_0 перебирается дискретно в области $C \in [-1,1] + [-1,1]i$



Рассматривая множество в общем виде: $z_{k+1} = z_k^N + c$ и изменяя *N* и *c*, можно получать разнообразные фрактальные множества:



3. Бассейны Ньютона.

Области с фрактальными границами появляются при приближенном нахождении корней нелинейного уравнения алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости.

Рассмотрим уравнение:

$$p(z) = z^3 - 1$$

Общая формула метода Ньютона имеет вид:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

При выборе различных z_0 процесс будет сходиться к различным корням (областям притяжения). Границы этих областей имеют фрактальную структуру.

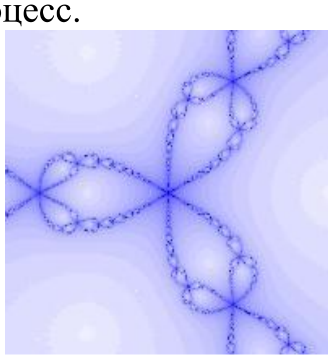
Подставив p(z) в формулу метода, получим итерационную формулу для построения фрактала:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2}$$

Итерационный процесс останавливается при:

$$|z_{k+1}^3 - 1| \le r_{\min}$$

Для построения графической интерпретации также как и для фрактала Мандельброта, используется матрица, элементы которой равны номеру итерации, на которой остановился процесс.

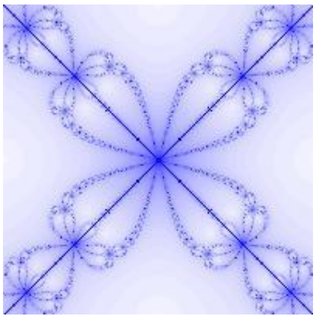
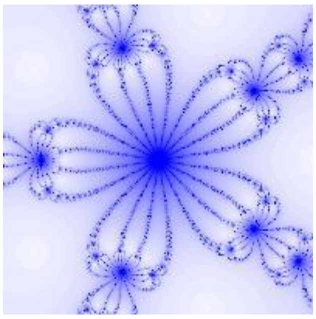
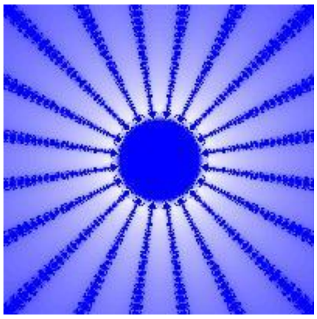


Если записать формулу в общем виде:

$$p(z) = z^N - 1$$

$$|z_{k+1}^N - 1| \le r_{\min},$$

то можно получить изображения фракталов более сложной формы:

4. L-системы.

В 1968 году венгерский биолог Аристид Линденмайер предложил математическую модель для изучения развития простых многоклеточных организмов, которая позже была расширена для моделирования сложных ветвящихся структур (разнообразных растений). Эта модель получила название Lindenmayer System (Система Линденмайера или L-система).

Рекурсивная природа L-систем позволяет строить с их помощью геометрические фрактальные изображения.

L-система определяется как $G = (V, \omega, P)$, где

- V - алфавит – множество символов, содержащее элементы, которые могут быть замещены (переменные).
- ω – строка символов из множества V, определяющая начальное состояние системы (аксиома).
- P – набор правил, определяющий, как переменные могут быть замещены другими переменными и константами.

Правила применяются итеративно, начиная с аксиомы. За одну итерацию применяются одновременно все правила.

Например, L-система имеет вид:

Переменные: A B

Аксиома: A

Правила: ($A \rightarrow AB$) ($B \rightarrow BA$)

После нескольких применений правил из аксиомы получаются строки:

0) A

1) AB

2) ABBA

3) ABBABAAB

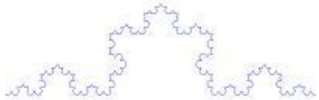
4) ABBABAABBAABABBA

...

Для построения графической интерпретации L-системы используется «черепашья графика», т.е. символам из V присваиваются команды управления некоторым простым интерпретатором («пройти вперед», «повернуться», и т.д.).

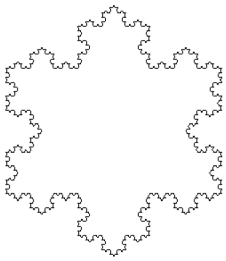
Примеры L-систем

Кривая Коха



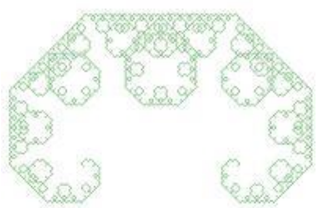
Описана в 1904 году Хельге фон Кохом.
L-система имеет вид:
Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F
Правила: $(F \to F + F - F - F + F)$
F означает «нарисовать отрезок»,
+ значит «повернуть налево на 60°»,
- значит «повернуть направо на 60°».

Снежинка Коха



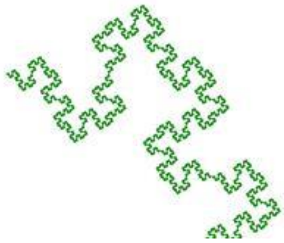
Переменные: F--F--F
Константы: + -
Аксиома: F
Правила: $(F \to F + F - F - F + F)$
Угол: 60°

Кривая Леви



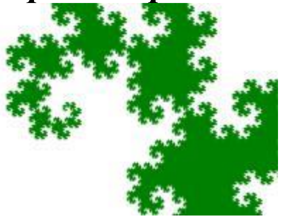
Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F
Правила: $(F \to F + F -)$
Угол: 90°

Кривая Минковского



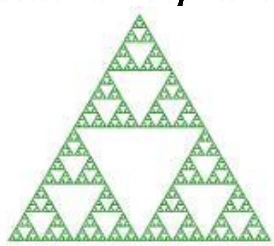
Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F
Правила:
$(F \to F + F - F - FF + F + F - F)$
Угол: 90°

Кривая дракона



Описана в 1967 году Мартином Гарднером.
Переменные: X Y
Константы: + - F
Аксиома: FX
Правила: $(X \to X + YF)$ $(Y \to FX - Y)$
Угол: 90°

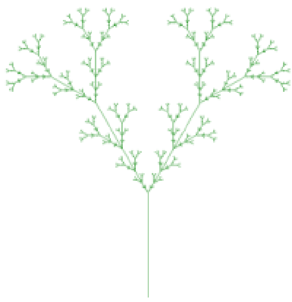
Треугольник Серпинского



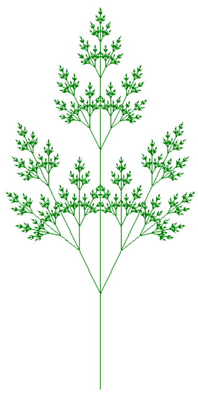
Описан в 1915 году Вацлавом Серпинским.
Переменные: A B
Константы: + -
Аксиома: A
Правила: $(A \to B - A - B)$
$(B \to B + A + B)$
Угол: 60°
A и B здесь означают «нарисовать отрезок».

Фрактальное растение

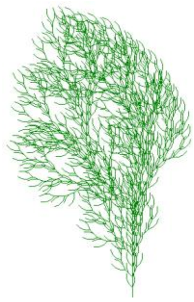
Переменные: X F
Константы: + - [ ]
Аксиома: X
Правила:
$(X \to F-[[X]+X]+F[+FX]-X)$
$(F \to FF)$
Угол: 25°
[означает «сохранить координаты в стеке»,
] означает «восстановить координаты из стека».



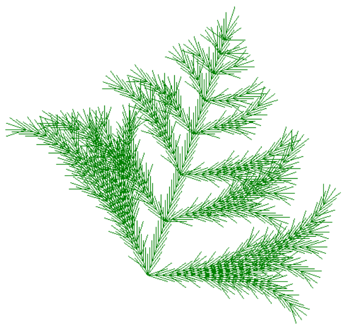
Переменные: X F
Константы: + - [ ]
Аксиома: X
Правила: $(X \to FX[+FX][-FX])$
$(F \to FF)$
Угол: 30°



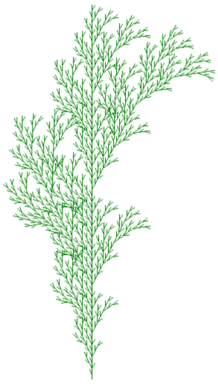
Переменные: X F
Константы: + - [ ]
Аксиома: X
Правила: $(X \to F[+X][-X]FX)$
$(F \to FF)$
Угол: 27,5°



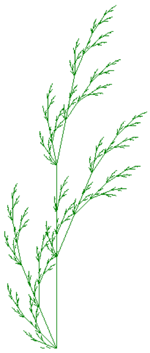
Переменные: F
Константы: + - [ ]
Аксиома: F
Правила:
$(F \to FF-[-F+F+F]+[+F-F-F])$
Угол: 22,5°



Переменные: G H L S T
Константы: F + - [ ]
Аксиома: ----SLFFF
Правила: $(G \to +H[-G]L)$
$(H \to -G[+H]L)$
$(L \to [-FFF][+FFF]F)$
$(S \to [+++G][---G]TS)$
$(T \to TL)$
Угол: 18°

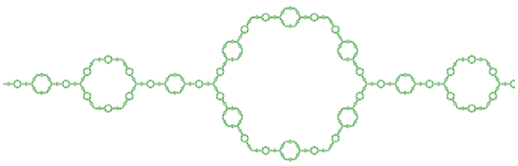


Переменные: F
Константы: + - [ ]
Аксиома: F
Правила: $(F \rightarrow \mathrm{F[-F]F[+F][F]})$
Угол: 27°



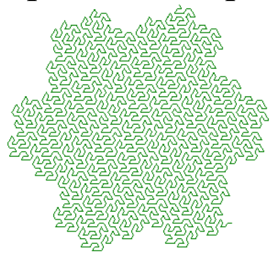
Переменные: C N
Константы: F + - [ ]
Аксиома: --------C
Правила: $(C \rightarrow \mathrm{[--C]N[++C]N+C})$
$(N \rightarrow NNF)$
Угол: 11,25°

Кольца



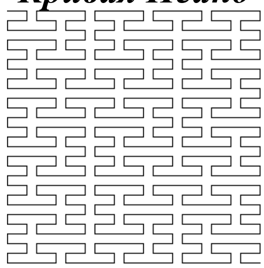
Переменные: F
Константы: + - [ ]
Аксиома: F
Правила: $(F \rightarrow FXF)$
$(X \rightarrow [-F+F+F]+F-F-F+)$
Угол: 60°

Кривая Госпера



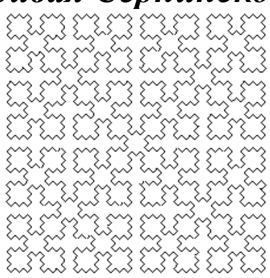
Переменные: X Y
Константы: F + -
Аксиома: XF
Правила:
$(X \rightarrow X+YF++YF-FX--FXFX-YF+)$
$(Y \rightarrow -FX+YFYF++YF+FX--FX-Y)$
Угол: 60°

Кривая Пеано



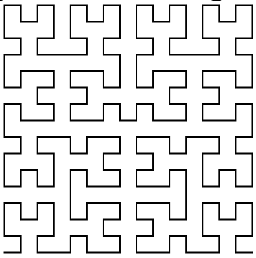
Переменные: X Y
Константы: F + -
Аксиома: X
Правила:
$(X \rightarrow XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX)$
$(Y \rightarrow YFXFY-F-XFYFX+F+YFXFY)$
Угол: 90°

Кривая Серпинского



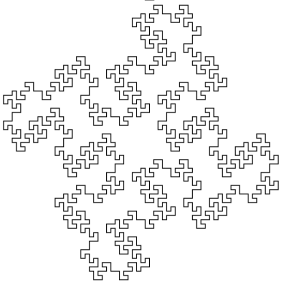
Переменные: X
Константы: F + -
Аксиома: F+XF+F+XF
Правила:
$(X \rightarrow \mathrm{XF-F+F-XF+F+XF-F+F-X})$
Угол: 90°

Кривая Гильберта

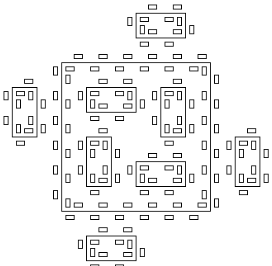


Переменные: X Y
Константы: F + -
Аксиома: X
Правила: ($X \rightarrow$ -YF + XFX + FY -)
($Y \rightarrow$ +XF - YFY - FX +)
Угол: 90°

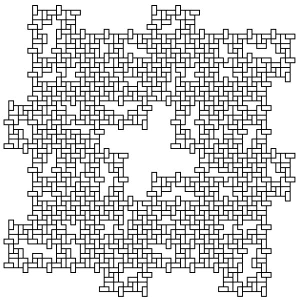
Узоры



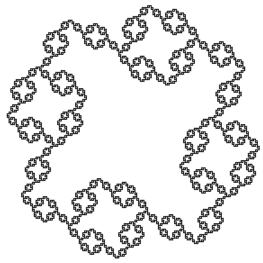
Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F
Правила:
$(F \rightarrow F + FF - FF - F - F + F + FF - F - F + F + FF + FF - F)$
Угол: 90°



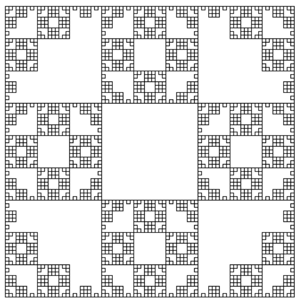
Переменные: F f
Константы: + -
Аксиома: F+F+F+F
Правила:
($F \rightarrow$ F + f - FF + F + FF + Ff + FF - f + FF - F - FF - Ff - FFF)
(f $\rightarrow$ ffffff)
Угол: 90°
f значит «пройти вперед без рисования»



Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F-F-F-F
Правила: ($F \rightarrow$ FF - F + F - F - FF)
Угол: 90°



Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F
Правила: ($F \rightarrow$ FF - F - F - F - F - F + F)
Угол: 90°



Переменные: F
Константы: + -
Аксиома: F-F-F-F
Правила: ($F \rightarrow$ FF - F - F - F - FF)
Угол: 90°

5. Лист папоротника.

Существует несколько способов построения этого фрактала.

1) Построение с помощью системы итерируемых функций (IFS)

Производится 20 итераций функции $f(x, y)$. Каждое новое значение (x', y') получается из предыдущего в зависимости от случайного числа, т.е. вычисляется с использованием таблицы распределения:

Вероятность	*x'*	*y'*
0,01	0	$0,16y$
0,85	$0,85x + 0,04y$	$-0,04x + 0,85y + 1,6$
0,07	$0,20x - 0,26y$	$0,23x + 0,22y + 1,6$
0,07	$-0,15x + 0,28y$	$0,26x + 0,24y + 0,44$

После выполнения всех итераций точка рисуется на экране.

Начальные значения x и y могут быть константами (желательно не большими, чем 1) или их можно выбирать случайным образом на отрезке [0;1].

2) Рекурсивное построение

Для построения используется процедура (псевдокод):

```
procedure fern(p0,h,ψ,side,δ,rec){
 if (rec=0) or (k2*h< δ) then exit;
 p1=p0+[0,k1*h]*R(ψ)
 p2=p0+[0,k2*h]*R(ψ)
 line(p0,p2) /* процедура построения отрезка по двум точкам */
 fern(p1,m1*h,ψ-side*(φ1+φ0),-side,δ,rec-1)
 fern(p2,m2*h,ψ+side*(φ2+φ0),side,δ,rec-1)
 fern(p2,m3*h,ψ-side*(φ3-φ0),side,δ,rec-1)
}
```

$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ - матрица поворота на угол φ.

Параметры процедуры:

- $p_0 = [x_0, y_0]$ - координаты начальной точки
- h – высота листа
- ψ – угол отклонения листа от вертикали
- *side* – направление изгиба ветви
- δ – минимальная длина ветви ветвящегося отрезка
- *rec* – максимальная глубина рекурсии

Рекомендуемые значения углов и коэффициентов:

$\varphi_0 = 14.9°$, $\varphi_1 = 37.7°$, $\varphi_2 = 36.8°$, $\varphi_3 = 17.6°$, $k_1 = 0.0483$, $k_2 = 0.162$, $m_1 = 0.371$, $m_2 = 0.336$, $m_3 = 0.849$

Для получения более реалистичного изображения можно использовать метод управляемой случайности. Метод заключается в том, что в процесс сознательно вносятся помехи. В алгоритме построения ветви папоротника можно внести изменения в углы ветвления $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Например, если ввести случайные воздействия на углы помех, равномерно распределенных на интервале (-10°;10°) можно получить изображения:


Литература:

1. Никулин Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005

2. L-System - http://en.wikipedia.org/wiki/L-system

3. Фрактал - http://ru.wikipedia.org/wiki/Фрактал

4. Лист папоротника - http://algolist.manual.ru/graphics/fern.php

5. Синтез фракталов: IFS и L-системы - http://habrahabr.ru/post/134616/

6. L-Systems — математическая красота растений - http://habrahabr.ru/post/69989/

7. FRACTALS – построение геометрических фракталов - http://flash.xaoc.ru/index.swf

8. Фракталы - http://elementy.ru/posters/fractals