ALGORITMOS.

★ $f(n) = 100n + \lg n$

$g(n) = n + \lg^2 n$

Escoger qué $\Delta \in \{O, o, \Omega, \omega, \Theta\}$ satisface $f(n) = \Delta(g(n))$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{100n + \lg n}{n + \lg^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100 + \frac{\lg n}{n}\to 0}{1 + \frac{\lg^2 n}{n}\to 0} = 100$$

$f(n) \neq o(g(n))$

$g(n) \neq \omega(g(n))$

→ vamos a probar por transitividad que $f(n) = \Theta(g(n))$

→ Sea $h(n) = n$

- Vamos a probar que $f(n) = \Theta(n)$

$$0 \leq C_1 n \leq 100n + \lg n \leq C_2 n$$

$$0 \leq C_1 \leq 100 + \frac{\lg n}{n} \leq C_2$$

★ $\underbrace{100 + \frac{\lg n}{n}}_{j(n)} \longrightarrow j'(n) = \frac{1}{n \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \cdot \lg n$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{n^2} \lg n$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\ln 2} - \lg n\right)$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\ln 2} - \lg n\right)$$

$$j'(n) < 0 \quad \forall n > 2^{1/\ln 2}$$

↓

Decreciente.

(O) • $100 + \frac{\lg n}{n} \leq C_2$

Para asegurar que decrece. con $n_0 = 4$ $\quad C_2 \geq 100{,}5$

Dado que $j(n)$ es decreciente, se cumple la desigualdad, y por tanto $f(n) = O(n)$

(Ω). $C_1 \leq 100 + \frac{\lg n}{n}$

$$C_1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{100n + \lg n}{n}$$

↓

$$\lim_{n\to\infty} 100 + \frac{\lg n}{n}^{\,0} = 100$$

$C_1 \leq 100$ y $n_0 = 4$

Mediante el límite de $\frac{f(n)}{h(n)}$ se logra establecer que la desigualdad es cierta con $C_1 \leq 100$ y $n_0 = 1$ pues $j(n)$ es decreciente y tiende a 100

∴ $f(n) = \Omega(n)$

→ Dado que $f(n) = O(n)$ y $f(n) = \Omega(n) \Rightarrow f(n) = \Theta(n)$

→ Ahora debemos mostrar que $n = \Theta(n + \lg^2 n)$ mediante la propiedad simétrica de Θ

→ $n + \lg^2 n = \Theta(n)$

$$0 \leq c_1(n) \leq n + \lg^2 n \leq c_2(n)$$

$$0 \leq c_1 \leq 1 + \frac{\lg^2 n}{n} \leq c_2$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{j(n)} \Rightarrow j'(n) = \frac{2\lg n \cdot \frac{1}{n \cdot \ln 2} \cdot n - \lg^2 n}{n^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\ln 2} \lg n - \lg^2 n}{n^2}$$

$$= \frac{\lg n \left(\frac{2}{\ln 2} - \lg n\right)}{n^2}$$

$j'(n) < 0 \quad \forall n > 2^{\frac{2}{\ln 2}}$

⇓

Decreciente

- $c_1 \leq 1 + \frac{\lg^2 n}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n + \lg^2 n}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{\lg^2 n}{n}\right) = 1$$

Dado que la función es decreciente, y su límite al infinito tiende a 1, la igualdad se cumple con

$c \leq 1$ y $n \geq 8$ → Para asegurar que sea decreciente

$\Rightarrow n + \lg^2 n = O(n)$

- $1 + \frac{\lg^2 n}{n} \leq c_2$

Como la función es decreciente, la desigualdad va a ser cierta para

$n_0 = 8$ y $c \geq \frac{17}{8} \Rightarrow n + \lg^2 n = \Omega(n)$

→ Dado que $g(n) = O(n)$ y $g(n) = \Omega(n) \Rightarrow g(n) = \Theta(n)$ y por propiedad simétrica $n = \Theta(g(n))$

→ Ahora bien, como se demostró que $f(n) = \Theta(n)$ y $n = \Theta(g(n))$, por propiedad de transitividad, se puede concluir que $f(n) = \Theta(g(n))$, implicando que

$f(n) = \Delta(g(n))$ es cierto para $\Delta \in \{\Omega, \Theta, O\}$

$\square$