ФАКИ, группы 731, 735, весенний семестр 2020 – 2021

Задание № 1 по теме «Численные методы решения уравнения переноса»

Теоретическое задание

Для простейшего уравнения переноса

$$u_t + \lambda u_x = 0,\ \lambda = 1$$

все множество разностных схем

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu(\tau, h) u_{m+\mu}^{n+\nu} \text{ (в суммирование не входит точка } \mu = 0,\ \nu = 1\text{)}$$

исследовать на заданном сеточном шаблоне из индивидуального задания (см. ниже), найдя коэффициенты схемы как функции от числа Куранта $\sigma = \lambda\tau/h$:

(1т) для заданного сеточного шаблона получить аналитический вид для двухпараметрического множества положительных по Фридрихсу ($\alpha_\mu^\nu \geq 0$) схем 1-го порядка аппроксимации относительно двух выбранных коэффициентов α_μ^ν;

(2т) для заданного сеточного шаблона получить аналитический вид для однопараметрического множества схем 2-го порядка аппроксимации относительного выбранного коэффициента α_μ^ν;

(3т) для заданного сеточного шаблона получить аналитический вид для единственной схемы 3-го порядка аппроксимации;

(4т) среди положительных по Фридрихсу (монотонных, мажорантных) схем найти аналитический вид для наиболее точной схемы с минимальной «аппроксимационной вязкостью», а также для остальных вершин двухпараметрического множества монотонности;

(5т) среди схем 2-го порядка аппроксимации найти аналитический вид для наиболее близкой ко множеству положительных по Фридрихсу схем.

(6т) для заданного сеточного шаблона и значения числа Куранта изобразить все построенные в пунктах (1т) – (5т) схемы в пространстве двух выбранных в пункте (1т) коэффициентов α_μ^ν.

Практическое задание

Решить следующую краевую задачу для уравнения переноса:

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0,\ \lambda = 1\ \left(t > 0,\ 0 < x \le X,\ X = 2\right), \\ u\left(0, x\right) = \varphi\left(x\right)\ \left(0 \le x \le X\right), \\ u\left(t, 0\right) = 0\ \left(0 < t \le 100\tau\right), \end{cases}$$

где функция $\varphi\left(x\right)$ определяется одним их трех способов:

(а) «ступенька»

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0.4 \le x \le 0.6, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

(б) «полуэллипс»

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{1 - 100 \cdot \left(x - 0.5\right)^2} & \text{при } 0.4 \le x \le 0.6, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(в) «треугольник»

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} 10x - 4 & \text{при } 0.4 \le x \le 0.5, \\ -10x + 6 & \text{при } 0.5 \le x \le 0.6, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

на сетке с числом узлов 201 (h = 0.01) для заданного сеточного шаблона и указанного значения числа Куранта:

(1п) по четырем монотонным схемам первого порядка аппроксимации – вершинам области монотонных схем, включая схему с минимальной «аппроксимационной вязкостью» из (4т);

(2п) по наименее осциллирующей на разрывных решениях схеме 2-го порядка аппроксимации из (5т);

(3п) по двум схемам 2-го порядка аппроксимации, лежащим на прямой – однопараметрическом множестве схем 2-го порядка аппроксимации – по разные стороны от схемы из (5т);

(4п) по схеме 3-го порядка аппроксимации из (3т);

(5п) по гибридной схеме, полученной с использованием схем из пункта (3п) и сеточно-характеристического критерия монотонности;

(6п) по гибридным схемам, полученным с использованием одной из схем из пункта (3п), схемы из пункта (4п) и сеточно-характеристического критерия монотонности;

(7п) по гибридной схеме, полученной с одновременным использованием двух схем из пункта (3п), схемы из пункта (4п) и сеточно-характеристического критерия монотонности.

В каждом из пунктов (1п) – (7п) в конечный момент времени, т.е. через 100 шагов, вывести на одном графике точное решение и численное.

Если за время расчета возмущение выходит на правую границу расчетной области – увеличить значение X.

Результатами выполнения задания должны стать:

- ✓ программа, написанная на любом языке программирования, обеспечивающая выполнения практической части задания. Визуализация результатов возможна в любой доступной системе (Excel/Matlab/Mathematica и т.д.).
- ✓ отчет в формате .pdf в свободной форме с результатами выполнения теоретической и практической частей задания.

Номера шаблонов указаны по пособию Холодов Я.А., Уткин П.С., Холодов А.С. Монотонные разностные схемы высокого порядка аппроксимации для одномерных уравнений гиперболического типа: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2015. – С. 56 – 57.

1. **Быков Н.**
   Шаблон № 1, начальное условие «ступенька», $\sigma = 0.5$
2. **Гусева Е.**
   Шаблон № 2, начальное условие «полуэллипс», $\sigma = 0.5$
3. **Черный В.**
   Шаблон № 3, начальное условие «треугольник», $\sigma = 0.5$
4. **Фаттахов Э.**
   Шаблон № 4, начальное условие «ступенька», $\sigma = 0.25$
5. **Айданов И.**
   Шаблон № 5, начальное условие «полуэллипс», $\sigma = 0.25$
6. **Попов П.**
   Шаблон № 6, начальное условие «треугольник», $\sigma = 0.5$
7. **Песня Е.**
   Шаблон № 7, начальное условие «ступенька», $\sigma = 0.5$
8. **Концевая В.**
   Шаблон № 8, начальное условие «полуэллипс», $\sigma = 0.25$
9. **Ахметов И.**
   Шаблон № 9, начальное условие «треугольник», $\sigma = 0.25$
10. **Фукин И.**
   Шаблон № 10, начальное условие «ступенька», $\sigma = 0.5$