応用数学演習問題（Practice_Mathematics Q）

第1章　ベクトルと行列の演算Ⅰ

1.1　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

問1.1.1

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

問1.1.2

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問1.1.3

$$7\vec{a} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ 21 \end{pmatrix}$$

問1.1.4

$$8(\vec{a} + \vec{b}) = 8\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 56 \end{pmatrix}$$

1.2　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

問1.2.1

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

問1.2.2

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

第2章 ベクトルと行列の演算Ⅱ

2.1 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

問2.1.1

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+12 \\ 5+0+0 \\ 3+0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

問2.1.2

$$B\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+9 \\ 0+0+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

問2.1.3

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+9 & 3+0+3 & 4+0+6 \\ 0+10+15 & 0+18+5 & 0+0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 10 \\ 25 & 23 & 10 \end{pmatrix}$$

問2.1.4

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

問2.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

問2.2.1

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3 & 6+1 \\ 4+3 & 12+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

問2.2.2

A^{-1} $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

左上を1にするため
1行目を$\frac{1}{2}$倍する

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

左下を0にするため
2行目に1行目を−4倍したものを
加える

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

右上を0にするため
1行目に2行目を$\frac{1}{2}$倍したものを
加える

右下を1にするため
2行目を−1倍する

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問2.2.3

B^{-1} $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

左下を0にするため
2行目に1行目を−3倍したものを
加える

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

右下を1にするため
2行目を$-\frac{1}{8}$倍する

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

右上を0にするため
1行目に2行目を−3倍したものを
加える

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

問2.2.4

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 38 \\ 2 & 26 \end{pmatrix}$$