

文章编号: 1006—155X(2002)02—062—04

基于解析性质的等参有限元逆变换高效算法

朱以文, 李 伟, 蔡元奇

(武汉大学土木建筑工程学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 由于等参元不存在逆变换的显式, 所以在有限元分析的列式中都回避等参元逆变换. 但是在工程分析中, 尤其在涉及两个物理场的耦合分析中, 往往会遇到等参逆变换的需求. 文章从两种常见的四节点平面等参元和八节点空间等参元入手, 通过分析等参变换的解析性质, 提出了一种等参有限元逆变换的新算法, 该算法具有简便、高效和高精度的特点, 便于在实际工程中应用.

关键词: 等参元; 局部坐标; 逆变换; 解析性质.

中图分类号: 0242. 21 **文献标识码:** A

等参元是当前有限元分析中的常用单元, 在诸如 NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, ADINA 等商业软件中占有统治地位, 被广泛应用在各种复杂的工程分析中. 等参元的坐标变换很关键. 其坐标变换是把整体坐标系 $x-y-z$ 下的各单元变换成为局部坐标系 $\xi-\eta-\zeta$ 下形态规则的单元. 这个变换的特殊性在于只能列出正变换的显式:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\y &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\z &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i\end{aligned}\quad (1)$$

而无法列出其逆变换的显式:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z) \\\eta &= \eta(x, y, z) \\\zeta &= \zeta(x, y, z)\end{aligned}\quad (2)$$

由于单元的所有矩阵的推演都在局部坐标系 $\xi-\eta-\zeta$ 中进行, 一般情况下可以回避逆变换式(2). 但在工程分析中, 有时难以回避逆变换, 如在两个物理场的相关分析或耦合分析时, 往往由于多种原因使两个物理场的有限元网格不能一致, 就需要由逆变换来确定局部坐标值, 文献[1]中也列举了多种需要应用逆变换的例子. 其实在大变形

分析和提高后处理精度时, 逆变换也起到重要的作用. 因此, 国内外均有学者对等参逆变换进行过研究. Murti 等人提出过一般性逆变换算法^[2,3], 但由于复杂, 未得到实际应用; 钱向东等人提出过用 Taylor 展开的线性项进行的逆变换算法^[1], 该算法作了较大程度的简化, 但在此算法中当变换点靠近单元边界时, 迭代难以收敛于单元内. 本文从四节点平面等参元和八节点空间等参元入手, 通过分析两种等参变换的解析性质, 提出了一种等参元逆变换的高效算法. 其优点是无论变换点处于何种位置, 都可以快速、高精度地求出其逆变换. 该算法已形成软件, 并在大型拱坝的复杂地基渗流场与应力场的耦合计算中得到成功应用.

1 四节点平面等参元的逆变换算法

问题的提法: 已知点 P 的整体坐标 (x_p, y_p) , 确定 P 点所属单元, 并求出其相应的局部坐标 (ξ_p, η_p) .

1.1 确定 P 点所属单元

如图 1 所示, 设单元 e 的所有节点的整体坐标分量的最大、最小值为 $x_{\max}^e, y_{\max}^e, x_{\min}^e, y_{\min}^e$, 若 P 点满足:

$$x_{\min}^e \leq x_p \leq x_{\max}^e$$

收稿日期: 2000—11—28

作者简介: 朱以文(1945—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士生导师, 从事计算力学与工程结构的教学与研究工作.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

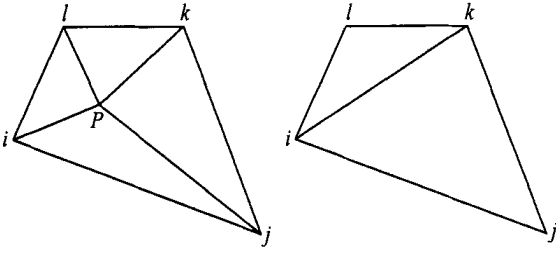


图1 四节点平面单元

$$y_{\min}^e \leq y_p \leq y_{\max}^e$$

则点 P 有可能处于单元 e 内, 满足条件的单元并非唯一, 还需用进一步确定.

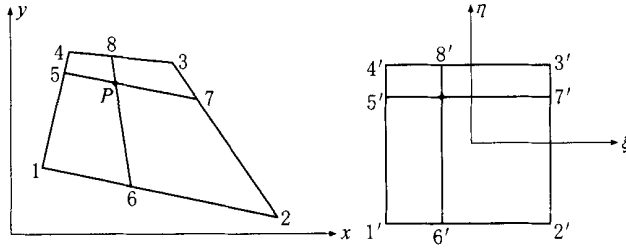


图2 平面等参元

其中: r_1, r_2 是两个待求参数. 从式(3)、(4)不难得出

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - r_1(x_4 - x_1) & y_5 &= y_4 - r_1(y_4 - y_1) \\ x_7 &= x_3 - r_1(x_3 - x_2) & y_7 &= y_3 - r_1(y_3 - y_2) \\ x_6 &= x_2 - r_2(x_2 - x_1) & y_6 &= y_2 - r_2(y_2 - y_1) \\ x_8 &= x_3 - r_2(x_3 - x_4) & y_8 &= y_3 - r_2(y_3 - y_4) \end{aligned} \quad (5)$$

而 P 点为 $\overline{57}$ 与 $\overline{68}$ 两条直线的交点, 有

$$\frac{y_p - y_5}{y_7 - y_5} = \frac{x_p - x_5}{x_7 - x_5} \quad (6)$$

$$\frac{y_p - y_8}{y_6 - y_8} = \frac{x_p - x_8}{x_6 - x_8} \quad (7)$$

将式(5)代入式(6)、(7), 可得

$$Ar_1^2 + Br_1 + D = 0 \quad (8)$$

$$A'r_2^2 + B'r_2 + D' = 0 \quad (9)$$

其中: A, B, D, A', B', D' 均为已知参数.

$$A = (x_4 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_4 - y_1)$$

$$\begin{aligned} B &= (x_4 - x_1)(y_p - y_4) + (x_p - x_4)(y_3 - y_2) + \\ &\quad (x_3 - x_4)(y_4 - y_1) - (x_3 - x_2)(y_p - y_4) - \\ &\quad (x_p - x_4)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_4) \end{aligned}$$

如果对于单元 e , 满足 $(\Delta_{ijk} + \Delta_{ikl}) - (\Delta_{pij} + \Delta_{pjk} + \Delta_{pkl} + \Delta_{pli}) \leq \epsilon$.

其中: Δ 是三角形面积; ϵ 为允许误差值, 是一个很小的正数; 则点 P 位于单元 e 内.

1.2 求 (ξ_p, η_p)

设单元 e 的节点坐标 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$. 由文献[4]可知, 过局部坐标系 $\xi - \eta$ 点 (ξ_p, η_p) 作坐标平行线 $\overline{5'7'}$ 与 $\overline{6'8'}$, 在整体坐标 $x - y$ 中对应的 $\overline{57}$ 与 $\overline{68}$ 必为直线, 且有如下的比例关系(图2):

$$\frac{\overline{3'7'}}{\overline{3'2'}} = \frac{\overline{37}}{\overline{32}} = \frac{\overline{4'5'}}{\overline{4'1'}} = \frac{\overline{45}}{\overline{41}} = r_1 \quad (3)$$

$$\frac{\overline{3'8'}}{\overline{3'4'}} = \frac{\overline{38}}{\overline{34}} = \frac{\overline{2'6'}}{\overline{2'1'}} = \frac{\overline{26}}{\overline{21}} = r_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} D &= (x_3 - x_4)(y_p - y_4) - (x_p - x_4)(y_3 - y_4) \\ A' &= (x_3 - x_4)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_4) \\ B' &= (x_3 - x_4)(y_p - y_3) + (x_p - x_3)(y_2 - y_1) + \\ &\quad (x_2 - x_3)(y_3 - y_4) - (x_2 - x_1)(y_p - y_3) - \\ &\quad (x_3 - x_4)(y_2 - y_3) - (x_p - x_3)(y_3 - y_4) \\ D' &= (x_2 - x_3)(y_p - y_3) - (x_p - x_3)(y_2 - y_3) \end{aligned}$$

若 P 点在单元 e 内, 则 $B^2 - 4AD \geq 0$ 与 $B'^2 - 4A'D' \geq 0$. 式(8)、(9)方程有实根, 求解式(8)、(9), 得到:

当 $A = 0$ 时,

$$r_1 = -\frac{D}{B} \quad (10)$$

当 $A \neq 0$ 时,

$$r_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} \quad (11)$$

当 $A' = 0$ 时,

$$r_2 = -\frac{D'}{B'} \quad (12)$$

当 $A' \neq 0$ 时,

$$r_2 = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'D'}}{2A'} \tag{13}$$

其中, 式(11)、(13)中的根应满足 $0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$, 由此可确定正负号。

继而可得 ξ_p, η_p

$$\begin{aligned} \xi_p &= 1 - 2r_1 \\ \eta_p &= 1 - 2r_2 \end{aligned} \tag{14}$$

2 八节点空间等参元的逆变换算法

问题的提法类似于四节点平面等参元. 确定点 P 所属单元的过程类似于四节点平面等参元, 只不过是把二维推广到三维, 在此不赘叙。

三维问题的特殊性在于单元表面是直纹面, 从性质上讲, 这类直纹面是双曲抛物面, 平面四边形是直纹面的特例. 参数曲线为直线的直纹面可完全由面上四个节点确定^[4], 设四个节点为 i, j, k, l , 其参数为 u, w 的直纹面方程为

$$\begin{aligned} x &= x_i + (x_j - x_i)u + \\ &w[x_k + (x_l - x_k)u - x_i - (x_j - x_i)u] \\ y &= y_i + (y_j - y_i)u + \\ &w[y_k + (y_l - y_k)u - y_i - (y_j - y_i)u] \\ z &= z_i + (z_j - z_i)u + \\ &w[z_k + (z_l - z_k)u - z_i - (z_j - z_i)u] \end{aligned} \tag{15}$$

由文献[5]可知: 整体坐标系下的单元棱边与局部坐标系下的单元棱边一一对应, 且棱边的等比率点亦一一对应, 对于直纹面, 整体坐标下棱边的等比率点的连线为直线. 整体坐标中点 $P(x_p, y_p, z_p)$ 是三个“正交”的直纹面的交点, 如图3所示. 等比率点 $x_i, y_i, z_i (i = 9, 10, \cdots, 20)$ 可由节点 $x_j, y_j, z_j (j = 1, 2, \cdots, 8)$ 表示, 而 $x_j, y_j, z_j (j = 1, 2, \cdots, 8)$ 已知. 以 x 坐标为例:

$$\begin{aligned} x_9 &= x_3 - r_1(x_3 - x_2), & x_{11} &= x_4 - r_1(x_4 - x_1) \\ x_{15} &= x_8 - r_1(x_8 - x_5), & x_{13} &= x_7 - r_1(x_7 - x_6) \\ x_{10} &= x_3 - r_2(x_3 - x_4), & x_{14} &= x_7 - r_2(x_7 - x_8) \\ x_{16} &= x_6 - r_2(x_6 - x_5), & x_{12} &= x_2 - r_2(x_2 - x_1) \\ x_{17} &= x_6 - r_3(x_6 - x_2), & x_{18} &= x_7 - r_3(x_7 - x_3) \\ x_{19} &= x_8 - r_3(x_8 - x_4), & x_{20} &= x_5 - r_3(x_5 - x_1) \end{aligned} \tag{16}$$

y, z 坐标类似

(i, j, k, l) 分别取 $(16, 14, 12, 10), (13, 15, 9, 11)$ 和 $(17, 20, 18, 19)$ 得到三组直纹面参数方程. 以 $(16, 14, 12, 10)$ 为例, 其参数 u, w 的直纹面方程为

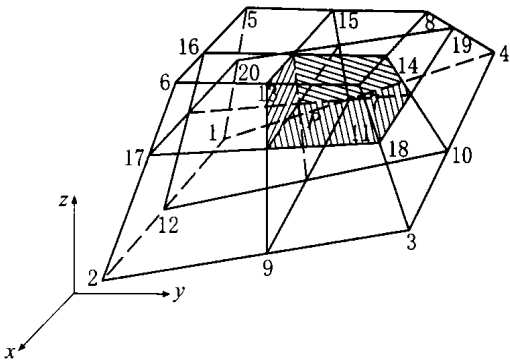


图3 空间等参元

$$\begin{aligned} x_p &= x_{16} + (x_{14} - x_{16})u + \\ &w[x_{12} + (x_{10} - x_{12})u - x_{16} - (x_{14} - x_{16})u] \\ y_p &= y_{16} + (y_{14} - y_{16})u + \\ &w[y_{12} + (y_{10} - y_{12})u - y_{16} - (y_{14} - y_{16})u] \\ z_p &= z_{16} + (z_{14} - z_{16})u + \\ &w[z_{12} + (z_{10} - z_{12})u - z_{16} - (z_{14} - z_{16})u] \end{aligned} \tag{17}$$

把式(16)代入式(17)得

$$\begin{aligned} A_x + B_x r_2 &= (C_x + D_x r_2)u + \\ &(E_x + F_x r_2)w + (G_x + H_x r_2)uw \\ A_y + B_y r_2 &= (C_y + D_y r_2)u + \\ &(E_y + F_y r_2)w + (G_y + H_y r_2)uw \\ A_z + B_z r_2 &= (C_z + D_z r_2)u + \\ &(E_z + F_z r_2)w + (G_z + H_z r_2)uw \end{aligned} \tag{18}$$

其中: $A_x, B_x, \cdots, H_x; A_y, B_y, \cdots, H_y; A_z, B_z, \cdots, H_z$ 均为已知值:

$$\begin{aligned} A_x &= x_p - x_6, & B_x &= x_6 - x_5 \\ B_x &= x_7 - x_6, & D_x &= x_6 - x_5 + x_8 - x_7 \\ E_x &= x_2 - x_6, & F_x &= x_6 - x_5 + x_1 - x_2 \\ G_x &= x_3 - x_2 + x_6 - x_7, \\ H_x &= x_2 - x_1 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_4 - x_3 \end{aligned} \tag{19}$$

以 y, z 轮换式(19)中 x 可以得到相应的 A_y, B_y, \cdots, H_y 和 A_z, B_z, \cdots, H_z . 消去式(18)中的参数 u, w 得一元九次方程:

$$\begin{aligned} &(C_x + D_x r_2)(K_x T_x - R_x M_x)(L_x T_x - M_x S_x) + \\ &(E_x + F_x r_2)(R_x L_x - K_x S_x)(L_x T_x - M_x S_x) + \\ &(G_x + H_x r_2)(R_x L_x - K_x S_x)(K_x T_x - R_x M_x) - \\ &(A_x + B_x r_2)(L_x T_x - M_x S_x)^2 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

其中:

$$\begin{aligned} K_x &= (B_x H_y - B_y H_x) r_2^2 + (B_x G_y + \\ &A_x H_y - B_y G_x - A_y H_x) r_2 + A_x G_y - A_y G_x \\ L_x &= (D_x H_y - D_y H_x) r_2^2 + (D_x G_y + \\ &C_x H_y - D_y G_x - C_y H_x) r_2 + C_x G_y - C_y G_x \\ M_x &= (F_x H_y - F_y H_x) r_2^2 + (F_x G_y + \\ &E_x H_y - F_y G_x - E_y H_x) r_2 + E_x G_y - E_y G_x \\ R_x &= (B_x H_z - B_z H_x) r_2^2 + (B_x G_z + \\ &A_x H_z - B_z G_x - A_z H_x) r_2 + A_x G_z - A_z G_x \\ S_x &= (D_x H_z - D_z H_x) r_2^2 + (D_x G_z + \\ &C_x H_z - D_z G_x - C_z H_x) r_2 + C_x G_z - C_z G_x \\ T_x &= (F_x H_z - F_z H_x) r_2^2 + (F_x G_z + \\ &E_x H_z - F_z G_x - E_z H_x) r_2 + E_x G_z - E_z G_x \end{aligned}$$

用 muller 法求解式(20), 可解出 r_2 .

r_2, u, w 须满足 $0 \leq r_2 \leq 1, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1$ 条件, 可确定出唯一的实根 r_2 .

同理可以分别求出 r_1, r_3 , 即可得

$$\begin{aligned} \xi_p &= 1 - 2r_1 \\ \eta_p &= 1 - 2r_2 \\ \zeta_p &= 1 - 2r_3 \end{aligned} \tag{21}$$

3 结束语

本文提出了一种基于解析性质的等参有限元逆变换的高效算法, 本算法是通过参数求解得出逆变换结果, 所求解的参数均是解耦的, 可以分别求出. 由于本算法是基于解析性质而得, 避免了数值迭代方法中的初值问题和收敛性问题, 因而求解

效率高, 精度高, 并且彻底解决了文献[1] 的算法中靠近边界的点不收敛于单元的不足.

本算法是基于四节点平面等参元与八节点空间等参元的空间变换特点推导而出的, 仅适用于这两种等参单元. 考虑到当前商业程序中的八节点平面元、二十节点空间元等阶等参元, 由于自动或半自动生成的原因, 其网格生成过程与四节点平面元、八节点空间元类似, 是在先生成角点后再在棱边中点增加一个节点而得, 其空间映射关系与四节点平面元、八节点空间元类似, 所以可以按本文的基本方法去寻找其逆变换算法. 从这个意义上讲, 本文提出的算法是解决当前商业程序中等参元逆变换的一种较普遍适用的方法.

本文提出的算法已在大型拱坝的复杂地基渗流场与应力场的耦合计算中得到成功应用, 并可应用于需要逆变换技术的各种分析中.

参考文献:

[1] 钱向东, 任青文, 赵 引. 一种高效的等参有限元逆变换算法[J]. 计算力学学报, 1998, 15(4): 31—36.
[2] MURTI V, VALLIAPPAN S. Numerical inverse isoparametric mapping in remeshing and nodal quantity contouring[J]. Computers & Structures, 1986, 22: 1011—1021.
[3] MURTI V, WANG Y, VALLIAPPAN S. Numerical inverse isoparametric mapping in 3D FEM[J]. Computers & Structures, 1988, 26: 611—622.
[4] 孙家广, 陈玉健, 韦凯宇. 计算机辅助几何造型技术[M]. 北京: 清华大学出版社. 1990.
[5] 李大潜. 有限元素法续讲[M]. 北京: 科学出版社. 1979.

An efficient inverse isoparametric mapping in FEM based on analytical character

ZHU Yi wen, LI Wei, CAI Yuan qi

(School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: There is no explicit formulation of inverse mapping about the isoparametric element, so inverse mapping is avoided in finite element analysis. In engineering analysis or coupled field analysis, it is often met about inverse mapping; and it is necessary to find an efficient numerical inverse mapping algorithm. Through analyzing the analytical character of inverse isoparametric mapping based on two usual isoparametric elements, four nodal isoparametric elements and eight nodal space isoparametric elements, an efficient inverse isoparametric mapping algorithm in FEM is presented. This algorithm is simple, efficient and accurate; and it is convenient to be use in actual projects.

Key words: isoparametric elements; local coordinates; inverse mapping; analytical method