

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU

OPTIMALNO UPRAVLJANJE SISTEMIMA
13M051OUS

Upravljanje dvostrukim inverznim klatnom

PROJEKTNI ZADATAK BROJ 2

Studenti:

Nikita Jokić 3279/2023

Ivona Dučić 3067/2023

Mentor:

doc. dr Aleksandra Krstić

Februar 2024

Sadržaj

1	Modeliranje sistema i analiza modela	2
1.1	Uvod	2
1.2	Modeliranje sistema	3
1.2.1	Matlab model	6
1.3	Linearizacija sistema	7
1.3.1	Kontrolabilnost	7
1.3.2	Opservabilnost	8
1.3.3	Stabilnost	8
1.4	Poremećaji u sistemu	9
1.5	Upravljački signali i ograničenja signala	9
2	Projektovanje sistema upravljanja	10
2.1	Generisanje trajektorije	10
2.1.1	Ad hoc strategije	10
2.1.2	Optimalno upravljanje	11
2.2	Projektovanje kontrolera	14
3	Komparativna analiza projektovanih sistema upravljanja	17
3.1	Poređenje odziva sistema	17
3.1.1	Stabilizacija u gornjem položaju	17
3.1.2	Robustnost na greške u modelovanju	17
3.1.3	Uticaj šuma	17
3.2	Potiskivanje poremećaja	17
4	Zaključak	17

1 Modeliranje sistema i analiza modela

1.1 Uvod

Furuta penduluma (FP) je rotaciono klatno koje se pokreće motorom jednosmerne struje. Dva najveća zahteva u vezi sa ovim sistemom su podizanje klatna iz donjeg u gornji položaj i održavanje klatna u uspravnom, nestabilnom ravnotežnom stanju. U ovom radu razmatrane su strategije upravljanja za nelinearni problem uspravljanja i balansiranja FP u uspravnom položaju. Iako ovo može delovati kao akademski problem, FP je ilustrativan za širok spektar dinamičkih sistema sa stvarnim primenama. Fokuseranje na ovu problematiku integrisano je u aktuelna istraživanja u oblasti sajber-fizičkih sistema (CPSs)¹ [inicijalna].

Furuta pendulum, kao jednostavan primer nelinearnog sistema, služi kao osnovno sredstvo za istraživanje ideja u oblasti nelinearnog upravljanja. Takođe predstavlja prototip za praktično važne uređaje poput robotskih ruku cilindričnog oblika, rotacionih dizalica ili transportnih sistema za visoke objekte. Kontrolni problemi usmeravanja i balansiranja penduluma oko nestabilne ravnoteže su dobro proučeni.

U radu [inicijalna] se navodi da do trenutka kada je rad napisan, problem uspravljanja FP nije rešavan metodama optimalnog upravljanja. Korišćenjem ovih metoda, problem se elegantno formuliše kao minimizacija odgovarajućeg troška uz poštovanje određenih ograničenja. Primenom ove tehnike, autor istražuje savremene tehnike upravljanja, njihovu primenljivost u sličnim problemima i razvija odgovarajuću strategiju upravljanja za ovu klasu uređaja. Pored primene optimalnog upravljanja razmatrane su i ad-hoc strategije koje se oslanjaju na principe izvedene iz fizike sistema. Balansiranje klatna oko njegovog nestabilnog ravnotežnog stanja se obavlja korišćenjem LQG. Primena LQG podrazumeva rešavanje problema kvadratnog programiranja nad linearizovnim sistemom i primenu Kalmanovog filtra za opservaciju stanja sistema.

¹Sajber-fizički sistemi (CPSs) predstavljaju integraciju računarskih elemenata sa fizičkim sistemima, stvarajući tako dinamičko i uzajamno povezano okruženje.

1.2 Modeliranje sistema

Modeli su ključni elementi u projektovanju kontrolera jer omogućavaju simulaciju sistema i testiranje kontrolera u preliminarnoj fazi, u offline režimu. U slučaju korišćenja nelinearnih MPC kontrolera, zahteva se da model bude ugrađen u sistem.

U zavisnosti od pristupa koji se koristi, za dizajn kontrolera potrebni su različiti tipovi modela. Pristupi koji se primenjuju za podizanje klatna iz donjeg u gornji položaj, kao što su ad hoc i optimalno upravljanje zahtevaju nelinearne modele, jer sistem prati putanju u prostoru stanja koja prolazi kroz različite regione sa različitom dinamikom. S druge strane, održavanje klatna u gornjem položaju zahteva samo kontroler koji može raditi nekoj okolini gorenjg položaja, te je za postizanje ovog cilja potreban samo linearni model.

Linearni modeli su mogu dobiti na dva načina: Jakobijan linearnizacijom nelinearnog modela u okolini željenog ravnotežnog stanja ili tehnikama identifikacije, gde se parametri linearnog modela procenjuju iz ekseprimenata. U otvorenoj sprezi, gornji položaj je nestabilan, i ako se primeni mala smetnja na ulazu, izlazni signal će rasti bez ograničenja. Da bi se izbegao ovaj problem, potrebno je prikupiti podatke u slučaju kada se na sistem primeni upravljanje sa stabilnim kontrolerom. Oblast identifikacije je detaljno proučavana krajem 1960-ih i početkom 1970-ih [identifikacija]. Glavni izazov je bio kako ukloniti šum koji se kontaminira sa ulazom i izlazom sistema.

Furuta pendulum je dinamički sistem koji se sastoji od dve osnovne komponente:

1. Horizontalna ruka: Ovo je čvrsta šipka ili krak koji je postavljen horizontalno. Na jednom kraju može biti pričvršćen za oslonac, dok je drugi kraj često povezan sa vertikalnim delom sistema, poznatim kao pendulum. Horizontalna ruka služi kao platforma za postavljanje i rotiranje vertikalnog penduluma.
2. Vertikalni pendulum: Ovaj deo predstavlja masu (obično šipka ili krak) koje je povezano sa horizontalnom rukom na jednom kraju, a drugi kraj se slobodno kreće. Rotacija penduluma oko vertikalne ose može se kontrolisati pomoću motora koji je integrisan u sistem. Ovaj motor omogućava sistemu da realizuje oscilatorne pokrete.

Na slici (1b) prikazan je šematski prikaz inverznog klatna. Horizontalna ruka je predstavljena segmentom P_0 i P_1 , dok je klatno predstavljeno segmentom P_1 i P_2 , ugao α predstavlja zglobov između baze i horizontalne ruke FP, dok β predstavlja ugao između horizontalne ruke i klatna.

Nelinearni model FP izveden je iz Langranžove mehanike. Energija sistema koji se sastoji od N krutih tela može se napisati kao zbir kinetičke energije τ i potencijalne energije ν [inicijalna].

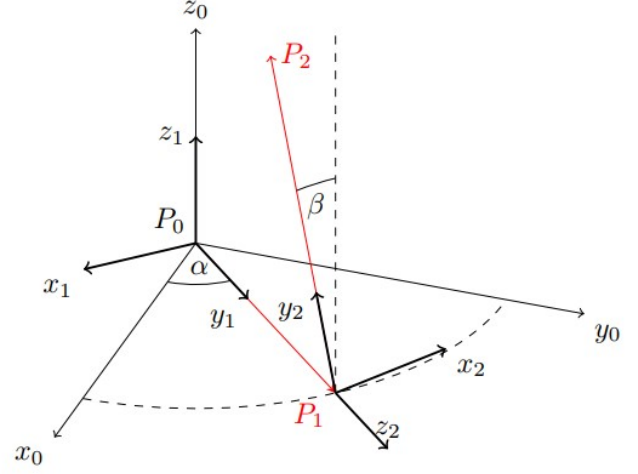
$$\tau = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} M_i |v_i|^2 + \frac{1}{2} \omega_i I_i \omega_i^T \right) \quad (1)$$

$$\nu = \sum_{i=1}^N M_i \cdot (-g) \quad (2)$$

Gde za svako kruto telo i , M_i je masa tela, v_i je brzina centra mase, I_i matrica inercije, ω_i ugaona brzina, r_i pozicija od centra mase, i g je gravitaciono ubrzanje.



(a)



(b)

Slika 1: (a) Aparatura za ekeperiment, (b) šematski prikaz inverznog klatna [inicijalna]

Langranžijan se računa kao :

$$\mathcal{L} = \tau - \nu, \quad (3)$$

dok se jednačine kretanja računaju preko Ojler-Langranžovih jednačina:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -K_{a1} \dot{\alpha} + K_f i, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -K_{a2} \dot{\beta} \quad (5)$$

Karakteristika motora data je jednačinom:

$$\frac{d}{dt} \left(L_b \frac{di}{dt} \right) + K_t \frac{d\alpha}{dt} + Ri = u \quad (6)$$

Kako bi se konstruisao nelinearni model sistema u prostoru stanja:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (7)$$

promenljive se definišu kao: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dot{\beta}$, $x_5 = i$.

Pri modelovanju i odredjivanju parametara sistema zanemarene su dinamičke karakteristike sistema: ne-elektične disipativne sile modelovane su kao viskozno trenje proporcionalnoj ugaonoj brzini zglobova, spoj između tela smatra se savršenim, uticaj, promena električnih karakteristika usled promene temperature aktuatora, zanemarivanje kapaciteta i induktivnosti žica raspodelejnih u prostoru i mehanički delovi su smatrani potpuno krutim.

Konačno model u prostoru stanja glasi:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2; \\
\dot{x}_2 &= -\frac{J_2(K_{a1}x_2 - K_fx_5 + x_4(L_{cm2}L_{e1}m_2x_4 + 2J_2x_2\cos(x_3))\sin(x_3))}{-L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 + J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)} \\
&\quad + \frac{L_{cm2}L_{e1}m_2\cos(x_3)(-K_{a2}x_4 + (gL_{cm2}m_2 + J_2x_2^2\cos(x_3))\sin(x_3))}{-L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 + J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)}; \\
\dot{x}_3 &= x_4; \\
\dot{x}_4 &= \frac{K_{a2}x_4 - gL_{cm2}m_2\sin(x_3)(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)}{L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 - J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)} \\
&\quad + \frac{\cos(x_3)(-J_0J_2x_2^2 + L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2x_4^2)\sin(x_3)}{L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 - J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)} \\
&\quad - \frac{J_2^2x_2^2\sin(x_3)^3 + L_{cm2}L_{e1}m_2(K_{a1}x_2 - K_fx_5 + J_2x_2x_4\sin(2x_3))}{L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 - J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)}; \\
\dot{x}_5 &= -\frac{K_tx_2 - Rx_5 + u}{L_b}.
\end{aligned} \tag{8}$$

U radu [inicijalna] za identifikaciju parametara korišćena je modifikovana metoda najmanjih kvadrata. Autor navodi da zbog prisutnih nelinearnosti primena klasične metode najmanjih kvadrata nije dovoljno pouzdana. Metoda najmanjih kvadrata podrazumeva da se za dati sistem u prostoru stanja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ odrede nepoznati parametri $\boldsymbol{\theta}$ minimizacijom kvadratne funkcije cene $J_N(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})\|_2^2$. Modifikacija koju autor uvodi podrazumeva uvođenje apriornog znanja o referentnoj vrednosti parametara $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ i standardnoj devijaciji $\boldsymbol{\sigma}_\theta$. Konačno funkcija cene poprima sledeći oblik: $J_N(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\sigma}_\theta^{-1}\|\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}\|_2^2 + \boldsymbol{\sigma}_y^{-1}\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})\|_2^2$, primenom funkcije cene ovog oblika se zapravo primenjuje Bejzova metoda najmanjih kvadrata. Eksperiment za potrebe identifikacije parametara je sproveden nad aparaturom prikazanom na slici (Sl. 1a). Rezultati su predstavljeni u tabeli 1.

Tabela 1: Vrednosti i opis parametara sistema

Parametar	Vrednost	Jedinica	Opis promenljive
L_{e1}	227 ± 1	mm	Dužina horizontalne ruke, FP
J_0	86.98 ± 0.03	$\text{g} \cdot \text{m}^2$	Moment inercije na spoju baze horizontalne ruke i klatna, FP
K_{a1}	1.0 ± 0.3	$\text{mN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	Koeficijent trenja između baze i horizontalne ruke, FP
M_2	309 ± 1	g	Masa klatna, FP
L_{cm2}	404 ± 1	mm	Udaljenost od ose rotacije do centra mase klatna, FP
J_2	28.37 ± 0.01	$\text{g} \cdot \text{m}^2$	Moment inercije na spoju klatna, FP
K_{a2}	0.136 ± 0.001	$\text{mN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	Koeficijent trenja između horizontalne ruke i klatna, FP
L_b	3.0 ± 0.1	mH	Električna impedansa motora (imaginarni deo), FP
R	2.266 ± 0.002	Ω	Električni unutrašnji otpor motora, FP
K_t	0.696 ± 0.001	$\text{V} \cdot \text{s}$	Kontra-elektromotorne sile, FP
K_f	3.377 ± 0.002	V	Obrtni moment koji proizvodi motor po jedinici struje, FP

1.2.1 Matlab model

Matlab model sistema je realizovan na osnovu izvedenih jednačina stanja (8). Prilikom implementacije modela inicijalno nije vođeno računa o adekvatnoj diskretizaciji kontinualnog modela. Primenjena je Ojlerova aproksimacija $\dot{\mathbf{x}} \approx \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\Delta t}$, \mathbf{x}_k predstavlja k-ti odabirak kontinualnog stanja \mathbf{x} .

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (9)$$

Međutim, primena Ojlerove metode nije adekvatna za ovaj sistem usled velikih numeričkih grešaka i nestabilnosti rezultujućeg modela. Dodatnim koraka diskretizacije Δt je moguće stabilizovati Ojlerovu metodu, ali to nije usvojeno kao prihvatljivo rešenje.

Problem nestabilnog modela je rešen primenom Runge-Kuta 4 (eng. *Runge-Kutta*) metode numeričke integracije, dalje u tekstu RK4. Primenom RK4 integracija se vrši na sledeći način:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{12}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (10)$$

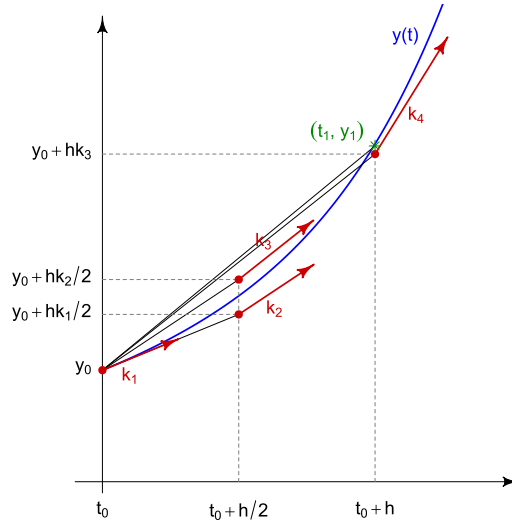
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (11)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \Delta t \frac{\mathbf{k}_1}{4}, \mathbf{u}_k\right), \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \Delta t \frac{\mathbf{k}_2}{4}, \mathbf{u}_k\right), \quad (13)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \Delta t \frac{\mathbf{k}_3}{2}, \mathbf{u}_k\right); \quad (14)$$

Iz jednačina (10) se vidi da se podrazumeva konstatno upravljanja tokom trajanja jedne periode odabiranja. Pored navedene metode postoje i brojne modifikacije koje pripadaju široj familiji Runge-Kuta metoda numeričke integracije.



Slika 2

Slika 3: Vizuelizacija Runge-Kuta integracije [rk4]

1.3 Linearizacija sistema

Nelinearni model (8) se može linearizovati razvijanjem u Tejlorov red u okoline tačke $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}(u - \bar{u}). \quad (15)$$

Neka su $A = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}$, $B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}$, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, i $\Delta u = u - \bar{u}$. Prethodna jednačina se može napisati kao:

$$\dot{\mathbf{x}} \approx A\Delta \mathbf{x} + B\Delta u + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}). \quad (16)$$

Linearizacija se obavlja za različite $\bar{\mathbf{x}}$ čime se dolazi do porodice linearnih modela. Linearni model u okolini tačke $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, u = 0) = \mathbf{0}$, može se napisati kao:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (17)$$

gde \mathbf{x} , u , i y označavaju odstupanje od ravnotežnog stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0174 & 20.7861 & -0.0023 & 57.5344 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -0.0174 & 63.8319 & -0.0071 & 57.4388 \\ 0 & -232.0252 & 0 & 0 & -755.4250 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 333.3367 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3.1 Kontrolabilnost

Kontinualni linearni sistem se smatra potpuno kontrolabilnim ako i samo ako iz početnog stanja, uz odgovarajući ulaz $u(t)$ sa $0 < t \leq t_f$ i konačnim horizontom t_f , može da se postigne proizvoljno stanje $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$.

Linearni sistem je potpuno kontrolabilan ako matrica kontrolabilnosti

$$C[A, B] = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (18)$$

ima pun rang n .

Kada se napon primeni na motor, stvara se struja i obrtni moment τ_1 se stvara u centru rotacije horizontalne ruke. Na metalnom vratilu gde je klatno pričvršćeno, sila nastala od τ_1 duž ruke l_{e1} je horizontalna i pravolinijska u odnosu na oba l_{e1} i τ_1 , u skladu sa opštom formulom:

$$\tau = r \times F. \quad (19)$$

Obrtni moment u centru mase klatna takođe je dat ovom formulom, iz kojeg se može izraziti amplituda τ_2 kao funkcija ugla β :

$$\tau_2 = l_{cm2} F \cos \beta, \quad (20)$$

gde je l_{cm2} rastojanje između metalnog vratila i centra mase klatna. Iz gornjih jednačina jasno je da je ulaz, napon primenjen na motor, direktna akcija na sve stanja sistema - struju motora, položaj i brzinu horizontalne ruke, kao i položaj i brzinu klatna. Postoji izuzetak za $\cos \beta = 0$, tj. kada je klatno horizontalno. U ovom slučaju, položaj i vektorske sile su paralelni, te stoga nije moguće primeniti obrtni moment. Stoga, varijable klatna nisu kontrolabilne u ovom trenutku.

1.3.2 Opservabilnost

Kontinualni sistem se smatra potpuno opservabilnim ako je poznavanje $y(t)$ za $0 \leq t \leq t_1$, sa t_1 konačnim, dovoljno za određivanje početnog stanja $\mathbf{x}(0)$.

Linearni sistem je opservabilan ako matrica

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ima pun rang n .

1.3.3 Stabilnost

Tačka $\bar{\mathbf{x}}$ dinamičkog sistema se klasifikuje kao Ljapunov stabilna ako važi:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta \wedge t > 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon, \quad (22)$$

i asimptotski stabilna ako dodatno važi:

$$\exists \epsilon > 0 : \|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}. \quad (23)$$

Asimptotska stabilnost nelinearnog sistema može se proceniti linearnizovanim sistemima dobijenim kod svake fiksne tačke pomoću Ljapunovljeve indirektna metode. Moguće je zaključiti da, za linearnizovani sistem (17):

1. ako sve sopstvene vrednosti matrice A imaju negativne realne delove, tada je fiksna tačka nelinearnog sistema stabilna;
2. ako bar jedna sopstvena vrednost matrice A ima pozitivan realni deo, tada je fiksna tačka nelinearnog sistema nestabilna;
3. ako nijedno od prethodno navedenog nije zadovoljeno, tj. ako bar jedna sopstvena vrednost leži iznad imaginarne ose, a nema sopstvene vrednosti sa pozitivnim realnim delom, onda se ne može izvesti zaključak.

Tabela 2: Sopstvene vrednosti linearizovanih modela, asimptotska stabilnost redukovanog sistema (X_2, \dots, X_5) , kontrolabilnost i observabilnost za 5 tačaka, gde su sve promenljive stanja postavljene na nulu, osim X_3 .

X_3	Sopstvene vrednosti	Stabilan	Kontrolabilan	Observabilan
0	$-737.2, -19.4, +7.0, -5.8, 0$	Ne	Da	Da
$\pi/4$	$-743.2, -11.8, -5.3, +5.0, 0$	–	Da	Da
$\pi/2$	$-746.2, -9.1, -0.0, 0, 0$	–	Ne	Da
$3\pi/4$	$-743.2, -12.4, +0.1 + 5.0i, +0.1 - 5.0i, 0$	–	Da	Da
π	$-737.2, -17.0, -0.5 + 6.8i, -0.5 - 6.8i, 0$	Da	Da	Da

U tabeli 2 je prikazana analiza za 5 različitih tačaka, čime se pokazuje da je $x_3 = 0$ (kada se sistem se nalazi u gornjem položaju) nestabilno stanje, ali ispunjava uslove kontrolabilnosti i opservabilnosti.

1.4 Poremećaji u sistemu

U radu [inicijalna] autor razmatra samo jedan izvor poremećaja i to step promenu stanja β . Razlog se ne navodi, ali je jasno da od 5 stanja datog sistema na stabilnost najveći uticaj ima stanje β . U sekciji (1.3.1) se razmatra uticaj stanja β na kontrolabilnost sa stanovništva fizike.

Pored analiziranog izvora poremećaja ima smisla razmotriti step promenu stanja α kao i impulsnu promenu stanja i . Razlog za razmatranje impulsnog poremećaja u slučaju struje i je taj što su vremenske konstante električnih sistema za red veličine manje od vremenskih konstanti mehaničkih sistema. Odnosno na step promenu struje jako brzo odreaguju kontroleri projektovani za stabilizaciju napona, pa to eksterno deluje kao impulsni poremećaj u struji.

Tokom simuliranja projektovanih kontrolera razmatraju se step promena stanja β inteziteta $+10^\circ$ i -10° .

1.5 Upravljački signali i ograničenja signala

Upravljački signal za razmatrani sistem je napon u motora koji je zadužen za rotaciju horizontalne sekcije klatna. Autor u radu [inicijalna] navodi sledeća ograničenja:

- Napon motora $u \in [-6, 6]$ V
- Vertikalni ugao $\beta \in [-12, 12]$ °
- Horizontalni ugao $\alpha \in [-180, 180]$ °

2 Projektovanje sistema upravljanja

Projektovanje sistema upravljanja se sastoji iz dva dela: generisanje željene trajektorije i projektovanje kontrolera koji treba da isprati željenu trajektoriju i održava sistem u gornjem položaju.

Često je korisno dizajnirati trajektorije van mreže, tj. definisati putanju u prostoru stanja koju sistem treba da izvede unapred. U takvoj situaciji nismo ograničeni vremenom ili računski potrebnom snagom da se izvrše proračuni tokom samog procesa, što je posebno korisno kod složenih sistema sa brзом dinamikom. Putanje se dizajniraju koristeći model sistema, analizirajući njegov odgovor na dostupne ulaze. Ova strategija se široko koristi u robotici, gde postoji potreba za planiranjem kretanja mobilnih robota u ograničenim prostorima [inicijalna].

Jedan od pristupa za generisanje trajektorije je optimalno upravljanje, koje se bavi problemom određivanja ulaza dinamičkog sistema koji opitimizuje (maksimizuje ili minimizuje) određenu funkciju troška koja govori o performansama sistema. Sa odgovarajućom funkcijom troška mogu se odrediti putanja i zakon upravljanja koji zadovoljava zahteve projektovanja. Takodje, većina nelinearnih problema se može rešiti oslanjanjem na numeričke metode. U radu se [inicijalna] kao alternativa optimizacionim metodama predlažu ad hoc strategije gde se implicitno formira upravljanje na bazi upravljanja veličina kao što je energija sistema.

Nakon što se izgeneriše trajektorija, potrebno je isprojektovati kontroler koji će pratiti zadati putanju. U radu [inicijalna] se predlažu dve metode za stabilizaciju klatna. Prvi pristup podrazumeva projektovanje globalnog LQR kontrolera na osnovu linearizovanog modela u ravnotežnom stanju. Mana ovog pristupa je to što se karakteristike sistema značajno menjaju u zavisnosti od položaja klatna, pa bi ovakav kontroler morao da ima loše performanse zbog veće potrebe za robusnošću. Drugi pristup podrazumeva projektovanje niza lokalnih LQR kontrolera za određene sekcije duž trajektorije. Prednost ovog pristupa je to što se mogu postići bolje performanse usled veće robusnosti sistema duž trajektorije.

2.1 Generisanje trajektorije

Ovo poglavlje istražuje kako pronaći optimalan ulaz za dinamički sistem, omogućavajući mu da sledi željenu putanju u prostoru stanja. Ova putanja treba da bude u skladu sa zadanim ograničenjima i optimizuje zadatu veličinu. Iako se različite strategije mogu koristiti za projektovanje putanja, fokus je stavljen na optimalno upravljanje. Ova tehnika pruža jasan okvir za pronalaženje rešenja za probleme podložne ograničenjima i ciljevima optimizacije. Pored optimalnog generisanja trajektorije, implementirane su i ad hoc metode za uspravljanje klatna kao alternativno i jednostavno rešenje.

2.1.1 Ad hoc strategije

Jedna od najčešće korišćenih metoda za podizanje FP je kontrola energije. U ovom slučaju se energija sistema kontroliše umesto direktnog kontrolisanja pozicije i brzina klatna [inicijalna]. U [energy_c] predložen je zakon upravljanja za uspravljanje klatna zasnovanoj na kontroli energije (eng *Energy control*):

$$u = \text{sat}[k_v(E - E_0)] \text{sign}(\dot{\beta} \cos \beta), \quad (24)$$

gde su E trenutna energija sistema, E_0 je željena energija sistema, k_v je pojačanje kontrolera, a β je ugao penduluma. Prvi pojam definiše amplitudu ulaza. Može se posmatrati kao proporcionalni kontroler, gde je promenljiva razlika u energiji između trenutnog stanja i energije ciljnog stanja, koja je konvencionalno postavljena na nulu. Amplituda je ograničena zbog fizičkih ograničenja aktuatora. Drugi pojam definiše znak upravljačkog ulaza i obezbeđuje da je efekat ulaza dodavanje energije sistemu. Član $\cos \beta$ procenjuje da li je trenutni položaj penduluma iznad ili ispod horizontalnog položaja. Za $\cos \beta = 0$, pendulum je horizontalan, stoga sistem nije kontrolabilan - nema prenosa energije na pendulum. Sa dodatnim članom $\dot{\beta}$, sila se primenjuje protiv smera kretanja penduluma kada je ispod horizontalnog položaja i u istom smeru kada je iznad.

Važno je napomenuti da je ovaj zakon upravljanja projektovan specifično za sistem FP, stoga nije vrlo opšte primenljiv. Takođe, ograničen je na situacije gde nivo energije ciljnog stanja nije degenerisan. Iako će kontroler dovesti sistem do stanja sa određenom energijom, ako postoji više konfiguracija sa istom energijom, nije moguće izabrati između njih. Ovo je slučaj kod FP, gde energija sistema ne zavisi od ugla horizontalne ruke α . Dakle, ovom tehnikom nema kontrole nad ovom varijablom tokom uspravljanja.

Zakon upravljanja definisan u jednačini (24) zahteva izračunavanje energije sistema. Modifikovana verzija kontrolera predložena je u **[energy_c]** koja uzima u obzir samo varijable prostora stanja. Ovaj zakon upravljanja poznate je kao *Exponentiation of the pendulum position* i glasi:

$$u = \text{sat}(k_v |\beta^n|) \text{sign}(\dot{\beta} \cos \beta) \quad (25)$$

U ovom slučaju, prvi član je modifikovan, sada uzimajući ugao između trenutnog položaja i vertikale. Dodaje se eksponent n izražen u izrazu, što povećava amplitudu ulaza kada je pendulum daleko od uspravnog položaja, ali je manja kada je bliže. U **[inicijalna]** navode da ovaj zakon omogućava gladi prelaz između nelinearnog upravljanja i upravljanja koji balansira klatno u gornjem položaju. Drugi član ostaje nepromenjen.

U **[ener_shaping]** je izveden i testiran zakon upravljanja poznat kao *energy shaping*. Pomenuti zakon upravljanja je izveden na osnovu inveznog klatna koji rotira samo oko vertikalne ose i glasi:

$$u = k_1(\dot{\alpha} + k_2 \cos(\beta)\dot{\beta}) \quad (26)$$

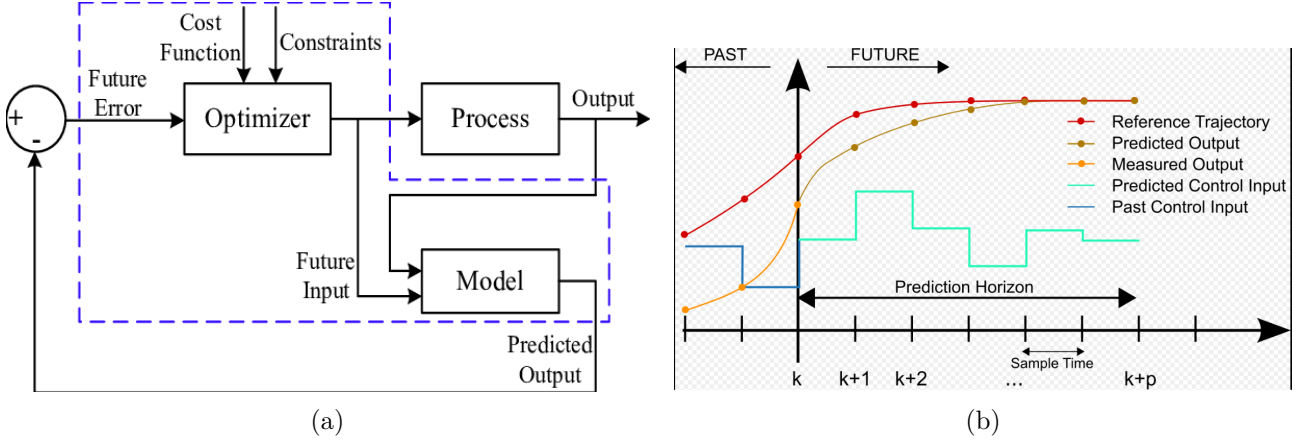
2.1.2 Optimalno upravljanje

Optimalna kontrola se bavi problemom određivanja ulaza dinamičkog sistema koji optimizuju, tj. minimiziraju ili maksimiziraju, određeni indeks performansi. Sa odgovarajućim izborom funkcije troška, mogu se odrediti trajektorije i zakoni upravljanja tako da zadovolje zahteve dizajna.

U ovom radu, koristili smo model prediktivnog upravljanja (engl. Model Predictive Control, MPC) kao pristup za optimalnu kontrolu.

MPC koristi matematički model sistema kako bi predvidio buduće ponašanje sistema na osnovu trenutnog stanja i unapred zadatih referenci. Model može biti linearni ili nelinearni, ali je ključno da bude dovoljno tačan za predviđanje sistema u predviđenom vremenskom horizontu. MPC optimizuje kontrolne akcije za određeni horizont vremena unapred. MPC ne razmatra samo trenutno stanje sistema, već razmatra niz budućih koraka, obično u diskretnim vremenskim koracima. Ovaj horizont

može biti kratkoročan ili dugoročan, u zavisnosti od zahteva sistema i dinamike procesa. MPC minimizira ili maksimizira funkciju cilja koja predstavlja kriterijum performansi sistema. To može uključivati minimizaciju greške u praćenju referenci, minimizaciju potrošnje energije ili slične ciljeve. MPC primjenjuje samo prvu kontrolnu akciju iz optimizacionog problema, nakon čega se proces ponavlja u svakom diskretnom vremenskom koraku. Ovaj pristup omogućava MPC-u da reaguje na promjene u stanju sistema i spreči akumulaciju grešaka. Njegova sposobnost da predviđa buduće stanje sistema i optimizuje kontrolne akcije čini ga moćnim alatom za upravljanje sistemima sa kompleksnom dinamikom i nelinearnostima [mpc].



Slika 4: (a) Šema MPC-a, (b) ilustracija rada MPC-a [mpc]

U radu [inicijalna] autor razmatra primenu optimizacionih metoda nad pojednostavljenim sistemom $\ddot{a}(t) = \omega_0^2 \sin \alpha(t) + u(t)$. Vršiti se direktna optimizacija Hamiltonijana oblika $H(u) = \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), u(t))$ dt, gde je $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), u(t))$ lagranžijan sistema. Lagranžijan sistema tipično reprezentuje energiju sistema i ima sledeći oblik: $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), u(t)) = \frac{1}{q} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{Q}}^q + \frac{1}{p} \|u(t)\|_W^p$. Prilikom analize ovog sistema autor ne specificira \mathbf{Q} , ali se navodi primena $q = 2$ norme nad stanjima i primena $p = 1$ i $p = 2$ norme nad upravljanjem. Primena $p = 1$ norme rezultuje upravljanjem koje je često u zacićenju i naglo menja polaritet dok $p = 2$ norma favorizuje glatko upravljanje.

U opštem slučaju određivanje optimalnog upravljanja za nelinearni sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ podrazumeva minimizaciju funkcije troška $J(\mathbf{u}(t)) = \Psi(\mathbf{x}(t)) + \int_{t_0}^T \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$, pod ograničenjem da je zadovoljena dinamika sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ i upravljanje $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$. Ovaj optimizacioni problem se rešava primenom Pontrjaginovog principa maksimuma, odnosno optimalno upravljanje $\mathbf{u}^*(t)$ je moguće odrediti minimizacijom Hamiltonijana $H(\mathbf{u}(t)) = \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Sprovođenje ovog postupka minimizacije podrazumeva rešavanje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina:

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla_{\lambda} H \quad (28)$$

. Sistem jednačina (27) je poznat kao i Hamiltonov sistem jednačina. Druga jednačina je ispunjena zbog dinamike sistema, pa se problem svodi na rešavanje:

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda^T(t) \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)) - \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \quad (29)$$

, uz početni uslov $\lambda^T(t) = \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(T))$.

U ovom radu za potrebe pronalaženje optimalne trajektorije primenjujemo MPC implementiran pomoću biblioteke za optimalno upravljanje [CASADI]. Ovaj softverski paket omogućuje korisniku

da formuliše optimizacione probleme, dok se rešavanje prosleđuje namenskim bibliotekama za rešavanje optimizacionih problema napisanih u C programskom jeziku.

Formulacija MPC za potrebe nalaženja optimalne trajektorije, odnosno optimalnog upravljanja, se razlikuje u zavisnosti od metode koja se koristi za rešavanje optimizacionog problema. U ovom radu se primenjuje *multiple shooting* metoda. Ova metoda pripada familiji direktnih za rešavanje problema optimalnog upravljanja. *Multiple shooting* podrazumeva diskretizaciju stanja sistema kao i upravljanja, a zatim rešavanje optimizacionog minimizacijom cene $J(\mathbf{u}(t))$ pod uslovom da su parcijalne trajektorije na granicama kontinualne. Odnosno na intervalu $t \in [t_i, t_{i+1}]$ se rešava diferencijalna jednačina:

$$\dot{x}_i(t; s_i; u_i) = f(x_i(t; s_i; u_i)) \quad (30)$$

$$x_i(t; s_i; u_i) = s_i \quad (31)$$

, pri čemu je s_i veštačka promenljiva koja se uključuje u proces optimizacije. Rešavanjem diferencijalnih jednačina (30) se izdvaja deo trajektorije $x_i(t; s_i; u_i)$ na intervalu $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Na osnovu dobijene trajektorije se može izračunati parcijalna cena $j_i(x_i(t; s_i; u_i), u_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{L}(x_i(t; s_i; u_i), u_i) dt$. Konačno može se formirati optimizacioni problem kao:

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{u}} \sum_{i=0}^{N-1} j_i(x_i(t; s_i; u_i), u_i) + E(s_N) \quad (32)$$

, pod uslovom:

$$s_0 - x_0 = 0 \quad (33)$$

$$s_{i+1} - x_i(t_{i+1}; s_i; u_i) = 0 \quad (34)$$

$$h(s_i, u_i) \geq 0 \quad (35)$$

$$r(s_N) \geq 0 \quad (36)$$

, gde $h(s_i, u_i)$ i $r(s_N)$ predstavljaju ograničenja nad trajektorijom i krajem trajektorije. **[multiple_shooting]**

Prilikom implementacije MPC primenom **[CASADI]** paketa definisani su sledeći parametri:

- Funkcija cene: $J = \gamma_1 \|\mathbf{x}(T)\|_{\mathbf{Q}_T}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_2 \|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \gamma_3 \|u(t_i)\|_R^2$.
- Horizont predikcije $N = 2500$.
- Matrice \mathbf{Q}_T , \mathbf{Q} i skalar R su izabrani tako da normalizuju stanja, odnosno upravljanje.
- Koficijenti skaliranja: $\gamma_1 = 0.1N\Delta t$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \Delta t$.

, pri čemu su koficijenti skaliranja birani tako da suma aproksimira integral. Međutim, bitan je samo relativan odnos ovih koeficijenata, pa moguće izabrati $\gamma_1 = 0.1N$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$. Prilikom primene *multiple shooting* metode neophodno je izračunavanje $x(t_{i+1}; s_i; u_i)$ na osnovu početne tačke trajektorije s_i , za te potrebe se primenjuje RK4 numerička integracija sa korakom 1ms.

Zbog problema sa konvergencijom u ovom radu su uvedene dve modifikacije:

- Ispituje je se samo $p = 2$ norma.
- Matrica \mathbf{Q}_T je svuda nula osim za stanja α i β .

2.2 Projektovanje kontrolera

Nakon generisanja referentnih trajektorije potrebno je projektovati kontroler čiji je zadatak da u što većoj meri isprati željenu trajektoriju i kontroler koji će održavati sistem u željenom, gornjem položaju.

Linearni kontroleri su validni samo u onom regionu gde je izvršena linearizacija sistema, a kako je zadatak upravljanje nelinearnim sistemom potrebno je napraviti ansambl kontrolera.

U radu [inicijalna] su se bavili projektovanjem LQG kontrolera. Kalman filter je optimalan za procenu stanja u linearnim sistemima, ali kada se primeni na nelinearne sisteme, može doći do netačnih procena stanja zbog odstupanja između stvarne nelinearnosti sistema i linearnog modela koji se koristi u Kalman filtru. Iz ovog razloga, u ovom radu smo se zadržali na korišćenju LQR kontrolera.

LQR (Linear Quadratic Regulator) je metoda optimalne kontrole koja se koristi za pronalaženje kontrolnih ulaza koji minimizuju određenu kvadratnu funkciju troška. LQR nudi nekoliko prednosti, uključujući jednostavnu implementaciju i robustnost, dok osigurava stabilnost sistema pod određenim uslovima. LQR kontroler ima nekoliko poželjnih svojstava, na primer, održava red sistema, ima faznu marginu od najmanje 60 stepeni i beskonačnu marginu pojačanja.

Da bi se primenio LQR na sistem, dve osobine koje mora da zadovolji sistem je da bude kontrolabilan i opservabilan u okolini tačke gde je izvršena linearizacija sistema. Na osnovu analize prikazane u tabeli 2 zaključuje se da jedino u slučaju kada je klatno u horizontalnom položaju ($\beta = \pi/2$) nije moguće primeniti LQR kontroler.

Cilj algoritma LQR je pronaći vektor pojačanja K za zakon povratne sprege u prostoru stanja

$$u = -Kx \quad (37)$$

koji se primenjuje na kontinualni linearni sistem, definisan u 1.3,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (38)$$

a minimizuje funkciju troška

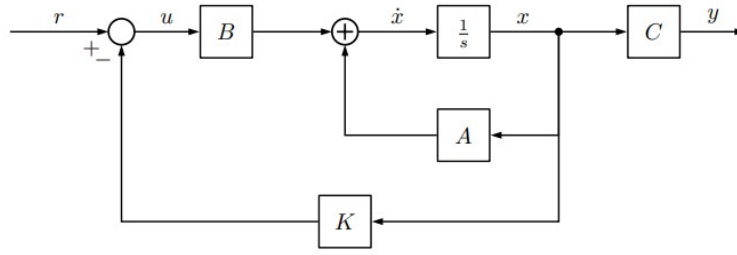
$$J = \int_0^\infty x^T Q_r x + u^T R_r u \quad (39)$$

Matrice Q_r i R_r određuju relativni značaj koji se pridaje regulaciji stanja i trošku ulaza, i treba ih odabrati uzimajući u obzir ciljeve dizajna sistema. Matrica P se dobija rešavanjem Rikatijske jednačine:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q_r = 0, \quad (40)$$

nakon čega se računa pojačanje K kao:

$$K = R_r^{-1}BP, \quad (41)$$



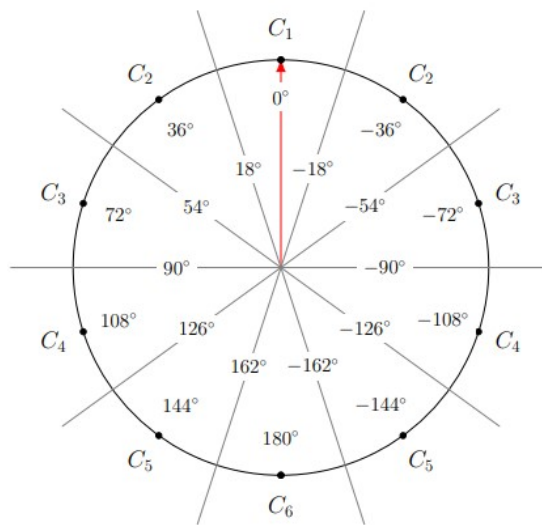
Slika 5: Blok dijagram feedback kontrolera [inicijalna]

Prelazak između kontrolera vrši se u dva različita režima rada:

1. Kontrola za podizanje sistema primenjuje se direktno na uređaj. Samo linearni kontroler oko krajnje tačke je aktivan (globalni LQR kontroler). Tranziciji između režima uspravljanja sistema i režima ravnoteže oko uspravnog položaja se dešava kada se ugao penduluma dovoljno približi nultom položaju ($\beta < 18^\circ$). Ovaj pristup se koristi kada nema referentne putanje, i podizanje sistema se izvodi u zatvorenoj petlji, na primer sa Ad hoc strategijama opisanim u 2.1.1.

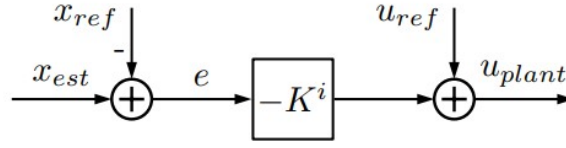
2. Referentna kontrola se primenjuje na uređaj, koji zauzvrat ima zatvoreni skup linearnih kontrolera koji stabilizuju razliku između izvedene putanje i referentne putanje. Ovo se naziva Gain Scheduling controller.

Gain Scheduling kontroler implementiran u upravljanju FP bira jedan od šest kontrolera koji se koristi u skladu sa trenutnim uglom β . Važno je napomenuti da su oni raspoređeni simetrično: prvi član Tejlorovog reda je identičan za $\beta = \pm\theta$, pa je i inkrementalni model isti. Na slici (Sl. 6) su prikazani regioni rada gain scheduling kontrolera, u funkciji ugla β (x_3). Tačke označavaju mesta gde je izvedena Jakovijeva linearizacija, a C_1 do C_6 označavaju kontrolere koji rade u tom konkretnom regionu. Na primer C_1 radi za $\beta \in [-18^\circ, 18^\circ]$, i odgovoran je za održavanje klatna u uravnoteženom položaju na gore.



Slika 6: Gain Scheduling kontroler [inicijalna]

Svaki LQR kontroler, koji je dizajniran nezavisno, koriguje vrednost ulazne promenljive kako bi aproksimirao ponašanje stvarnog sistema prema onom predviđenom u referentnoj putanji.



Slika 7: Arhitektura Gain Scheduling kontrolera. Vektor $K_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ se bira u skladu sa trenutnim uglom klatna [inicijalna]

Ostaje da se reši pitanje prelaza bez udara. U slučaju klasičnih kontrolera taj problem se elegantno rešava uvođenjem jednostavne modifikacije u originalni algoritam. U radu [inicijalna] autor predlaže formulisanje problema prelaza bez udara u formi optimizacionog problema. Za projektovani LQR čije je upravljanje definisano kao $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ treba da se minimizuje srednje kvadratno odstupanje početnog stanja \mathbf{x} LQR od stvarnog stanja sistema \mathbf{x}^* u trenutku komutacije. Odnosno treba da se reši sledeći optimizacioni problem:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \quad (42)$$

, pod uslovom:

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + u^* = 0 \quad (43)$$

, gde je u^* upravljanje u trenutku komutacije. U ovom zapisu problem se svodi na traženje uslovnog minimuma primenom metode Lagražovih multiplikatora. Kao rešenje sistema se dobijaju sledeće jednačine:

$$\lambda = 2 \frac{\mathbf{K}\mathbf{x}^* + u^*}{\mathbf{K}\mathbf{K}^T} \quad (44)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* - \frac{1}{2} \lambda \mathbf{K}^T \quad (45)$$

.

3 Komparativna analiza projektovanih sistema upravljanja

3.1 Poređenje odziva sistema

3.1.1 Stabilizacija u gornjem položaju

3.1.2 Robustnost na greške u modelovanju

3.1.3 Uticaj šuma

3.2 Potiskivanje poremećaja

Poređenje kontrolera					
	složenost	praćenje ref.	potiskivanje porem.	multivarijabilnost	prosek
K_{dec}	1	5	3	5	2.8
K_{dek0}	2	4	2	4	2.4
$K_{dek\omega_0}$	3	3	1	3	2
K_{invF}	4	2	5	1	2.4
K_{H_∞}	5	1	4	2	2.4

Tabela 3

4 Zaključak

Literatura

- [1] *Nonlinear control of an inverted pendulum*, António Samuel Ávila Balula, Thesis to obtain the Master of Science Degree in Engineering Physics 2016.
- [2] *Swinging up the furuta pendulum and its stabilization via model predictive control.*, P. Seman, B. Rohal'-Ilkiv, M. Juhas, and M. Salaj. Journal of Electrical Engineering, 64(3):152–158, 2013. ISSN 13353632. doi: 10.2478/jee-2013-0022.
- [3] *A normal form for energy shaping: application to the furuta pendulum* S. Nair and N. E. Leonard. In Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on, volume 1, pages 516–521. IEEE, 2002
- [4] *Identification of Dynamic System*, R. Isermann and M. Munchhof, Springer, 2011.
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Model_predictive_control
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods
- [7] <https://web.casadi.org/>
- [8] *Nonlinear Model Predictive Control Using Multiple Shooting Combined with Collocation on Finite Elements*, Jasem Tamimi and Pu Li.