

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU

OPTIMALNO UPRAVLJANJE SISTEMIMA

13M051OUS

---

# Upravljanje dvostrukim inverznim klatnom

PROJEKTNI ZADATAK BROJ 2

*Studenti:*

Nikita Jokić 3279/2023

Ivona Dučić 3067/2023

*Mentor:*

doc. dr Aleksandra Krstić

Februar 2024

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Modeliranje sistema i analiza modela</b>	<b>2</b>
1.1	Uvod . . . . .	2
1.2	Modeliranje sistema . . . . .	3
1.2.1	Matlab model . . . . .	6
1.3	Linearizacija sistema . . . . .	7
1.3.1	Kontrolabilnost . . . . .	7
1.3.2	Opservabilnost . . . . .	8
1.3.3	Stabilnost . . . . .	8
1.4	Poremećaji u sistemu . . . . .	9
1.5	Upravljački signali i ograničenja signala . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Projektovanje sistema upravljanja</b>	<b>10</b>
2.1	Generisanje trajektorije . . . . .	10
2.1.1	Ad hoc strategije . . . . .	10
2.1.2	Optimalno upravljanje . . . . .	11
2.2	Projektovanje kontrolera . . . . .	14
2.2.1	<i>Feedforward</i> LQR . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Komparativna analiza algoritama za uspravljanje klatna</b>	<b>17</b>
3.1	Diskusija . . . . .	17
3.2	Rezultati simulacije . . . . .	18
3.2.1	Stabilizacija u gornjem položaju . . . . .	22
3.2.2	Tabelarni prikaz rezultata simulacije . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Zaključak</b>	<b>24</b>

# 1 Modeliranje sistema i analiza modela

## 1.1 Uvod

Furuta penduluma (FP) je rotaciono klatno koje se pokreće motorom jednosmerne struje. Dva najveća zahteva u vezi sa ovim sistemom su podizanje klatna iz donjeg u gornji položaj i održavanje klatna u uspravnom, nestabilnom ravnotežnom stanju. U ovom radu razmatrane su strategije upravljanja za nelinearni problem uspravljanja i balansiranja FP u uspravnom položaju. Iako ovo može delovati kao akademski problem, FP je ilustrativan za širok spektar dinamičkih sistema sa stvarnim primenama. Fokusranje na ovu problematiku integrisano je u aktuelna istraživanja u oblasti sajber-fizičkih sistema (CPSs)<sup>1</sup> [inicijalna].

Furuta pendulum, kao jednostavan primer nelinearnog sistema, služi kao osnovno sredstvo za istraživanje ideja u oblasti nelinearnog upravljanja. Takođe predstavlja prototip za praktično važne uređaje poput robotskih ruku cilindričnog oblika, rotacionih dizalica ili transportnih sistema za visoke objekte. Kontrolni problemi usmeravanja i balansiranja penduluma oko nestabilne ravnoteže su dobro proučeni. U sekciji (1) se izvodi model sistema i predstavlja način realizaciji istog u okviru simulacije. Pored navedenog razmatraju se i drugi aspekti od značaja za sistem, kao što su: linearizacija, opservabilnost, kontrolabilnost...

U radu [inicijalna] se navodi da do trenutka kada je rad napisan, problem uspravljanja FP nije rešavan metodama optimalnog upravljanja. Korišćenjem ovih metoda, problem se elegantno formuliše kao minimizacija odgovarajućeg troška uz poštovanje određenih ograničenja. Primenom ove tehnike, autor istražuje savremene tehnike upravljanja, njihovu primenljivost u sličnim problemima i razvija odgovarajuću strategiju upravljanja za ovu klasu uređaja. Pored primene optimalnog upravljanja razmatrane su i ad-hoc strategije koje se oslanjaju na principe izvedene iz fizike sistema. Balansiranje klatna oko njegovog nestabilnog ravnotežnog stanja se obavlja korišćenjem LQG. Primena LQG podrazumeva rešavanje problema kvadratnog programiranja nad linearizovnim sistemom i primenu Kalmanovog filtra za opservaciju stanja sistema. U sekciji (2.2) se predstavlja teorija LQR upravljanja i uvodi se koncept *feedforward* dejstva za potrebe praćenja reference.

Cilj autora rada [inicijalna] je da ispita performanse algoritama za uspravljanje klatna. Svi ispitani algoritmi su uspešno primenjeni u simulaciji, kao i na realnom sistemu. Cilj ovog rada je da reprodukuje uspešnost navedenih algoritama, kao i da uvede inovaciju kroz primenu prediktivnog upravljanja na bazi modela. U sekciji (2.1.1) se predstavljaju načini generisanja trajektorije. Svi algoritmi su uspešno reprodukovali ponašanje iz originalnog rada.

Rezultati ovog rada su prikazani u sekciji (3). Uvedene su 3 metrike za potrebe poređenja performansi algoritama za uspravljanje klatna. Pored verifikacije uspešnosti algoritama sprovedena je kratka analiza robustnosti kontrolera na poremećaje, kao i robustnost generisanih upravljanja na greške u modelu.

Nakon izlaganja rezultata simulacija i tabelarnog prikaza metrika zaključak se donosi u sekciji (4). Komentarišu se nedostaci ovog rada, kao i teme za buduća istraživanja.

---

<sup>1</sup>Sajber-fizički sistemi (CPSs) predstavljaju integraciju računarskih elemenata sa fizičkim sistemima, stvarajući tako dinamičko i uzajamno povezano okruženje.

## 1.2 Modeliranje sistema

Modeli su ključni elementi u projektovanju kontrolera jer omogućavaju simulaciju sistema i testiranje kontrolera u preliminarnoj fazi, u offline režimu. U slučaju korišćenja nelinearnih MPC kontrolera, zahteva se da model bude ugrađen u sistem.

U zavisnosti od pristupa koji se koristi, za dizajn kontrolera potrebni su različiti tipovi modela. Pristupi koji se primenjuju za podizanje klatna iz donjeg u gornji položaj, kao što su ad hoc i optimalno upravljanje zahtevaju nelinearne modele, jer sistem prati putanju u prostoru stanja koja prolazi kroz različite regione sa različitom dinamikom. S druge strane, održavanje klatna u gornjem položaju zahteva samo kontroler koji može raditi nekoj okolini gorenjg položaja, te je za postizanje ovog cilja potreban samo linearni model.

Linearni modeli su mogu dobiti na dva načina: Jakobijan linearnizacijom nelinearnog modela u okolini željenog ravnotežnog stanja ili tehnikama identifikacije, gde se parametri linearnog modela procenjuju iz ekseprimenata. U otvorenoj sprezi, gornji položaj je nestabilan, i ako se primeni mala smetnja na ulazu, izlazni signal će rasti bez ograničenja. Da bi se izbegao ovaj problem, potrebno je prikupiti podatke u slučaju kada se na sistem primeni upravljanje sa stabilnim kontrolerom. Oblast identifikacije je detaljno proučavana krajem 1960-ih i početkom 1970-ih [identifikacija]. Glavni izazov je bio kako ukloniti šum koji se kontaminira sa ulazom i izlazom sistema.

Furuta pendulum je dinamički sistem koji se sastoji od dve osnovne komponente:

1. Horizontalna ruka: Ovo je čvrsta šipka ili krak koji je postavljen horizontalno. Na jednom kraju može biti pričvršćen za oslonac, dok je drugi kraj često povezan sa vertikalnim delom sistema, poznatim kao pendulum. Horizontalna ruka služi kao platforma za postavljanje i rotiranje vertikalnog penduluma.
2. Vertikalni pendulum: Ovaj deo predstavlja masu (obično šipka ili krak) koje je povezano sa horizontalnom rukom na jednom kraju, a drugi kraj se slobodno kreće. Rotacija penduluma oko vertikalne ose može se kontrolisati pomoću motora koji je integrisan u sistem. Ovaj motor omogućava sistemu da realizuje oscilatorne pokrete.

Na slici (1b) prikazan je šematski prikaz inverznog klatna. Horizontalna ruka je predstavljena segmentom  $P_0$  i  $P_1$ , dok je klatno predstavljeno segmentom  $P_1$  i  $P_2$ , ugao  $\alpha$  predstavlja zglobov između baze i horizontalne ruke FP, dok  $\beta$  predstavlja ugao između horizontalne ruke i klatna.

Nelinearni model FP izveden je iz Langranžove mehanike. Energija sistema koji se sastoji od  $N$  krutih tela može se napisati kao zbir kinetičke energije  $\tau$  i potencijalne energije  $\nu$  [inicijalna].

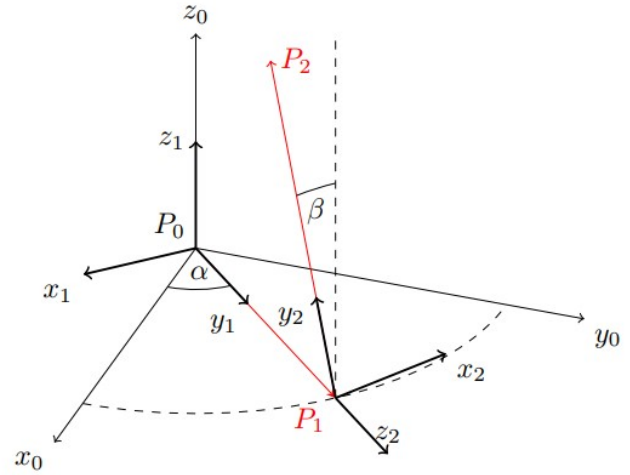
$$\tau = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} M_i |v_i|^2 + \frac{1}{2} \omega_i I_i \omega_i^T \right) \quad (1)$$

$$\nu = \sum_{i=1}^N M_i \cdot (-g) \quad (2)$$

Gde za svako kruto telo  $i$ ,  $M_i$  je masa tela,  $v_i$  je brzina centra mase,  $I_i$  matrica inercije,  $\omega_i$  ugaona brzina,  $r_i$  pozicija od centra mase, i  $g$  je gravitaciono ubrzanje.



(a)



(b)

Slika 1: (a) Aparatura za ekeperiment, (b) šematski prikaz inverznog klatna [inicijalna]

Langranžijan se računa kao :

$$\mathcal{L} = \tau - \nu, \quad (3)$$

dok se jednačine kretanja računaju preko Ojler-Langranžovih jednačina:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -K_{a1} \dot{\alpha} + K_f i, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -K_{a2} \dot{\beta} . \quad (5)$$

Karakteristika motora data je jednačinom:

$$\frac{d}{dt} \left( L_b \frac{di}{dt} \right) + K_t \frac{d\alpha}{dt} + Ri = u . \quad (6)$$

Kako bi se konstruisao nelinearni model sistema u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (7)$$

promenljive se definišu kao:  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \dot{\alpha}$ ,  $x_3 = \beta$ ,  $x_4 = \dot{\beta}$ ,  $x_5 = i$ .

Pri modelovanju i odredjivanju parametara sistema zanemarene su dinamičke karakteristike sistema: ne-elektične disipativne sile modelovane su kao viskozno trenje proporcionalnoj ugaonoj brzini zglobova, spoj između tela smatra se savršenim, uticaj, promena električnih karakteristika usled promene temperature aktuatora, zanemarivanje kapaciteta i induktivnosti žica raspodelejnih u prostoru i mehanički delovi su smatrani potpuno krutim.

Konačno model u prostoru stanja glasi:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2; \\
\dot{x}_2 &= -\frac{J_2(K_{a1}x_2 - K_fx_5 + x_4(L_{cm2}L_{e1}m_2x_4 + 2J_2x_2\cos(x_3))\sin(x_3))}{-L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 + J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)} \\
&\quad + \frac{L_{cm2}L_{e1}m_2\cos(x_3)(-K_{a2}x_4 + (gL_{cm2}m_2 + J_2x_2^2\cos(x_3))\sin(x_3))}{-L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 + J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)}; \\
\dot{x}_3 &= x_4; \\
\dot{x}_4 &= \frac{K_{a2}x_4 - gL_{cm2}m_2\sin(x_3)(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)}{L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 - J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)} \\
&\quad + \frac{\cos(x_3)(-J_0J_2x_2^2 + L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2x_4^2)\sin(x_3)}{L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 - J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)} \\
&\quad - \frac{J_2^2x_2^2\sin(x_3)^3 + L_{cm2}L_{e1}m_2(K_{a1}x_2 - K_fx_5 + J_2x_2x_4\sin(2x_3))}{L_{cm2}^2L_{e1}^2m_2^2\cos(x_3)^2 - J_2(J_0 + J_2\sin(x_3)^2)}; \\
\dot{x}_5 &= -\frac{K_tx_2 - Rx_5 + u}{L_b}.
\end{aligned} \tag{8}$$

U radu [inicijalna] za identifikaciju parametara korišćena je modifikovana metoda najmanjih kvadrata. Autor navodi da zbog prisutnih nelinearnosti primena klasične metode najmanjih kvadrata nije dovoljno pouzdana. Metoda najmanjih kvadrata podrazumeva da se za dati sistem u prostoru stanja  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  odrede nepoznati parametri  $\boldsymbol{\theta}$  minimizacijom kvadratne funkcije cene  $J_N(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})\|_2^2$ . Modifikacija koju autor uvodi podrazumeva uvođenje apriornog znanja o referentnoj vrednosti parametara  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  i standardnoj devijaciji  $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ . Konačno funkcija cene poprima sledeći oblik:  $J_N(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\sigma}_\theta^{-1}\|\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}\|_2^2 + \boldsymbol{\sigma}_y^{-1}\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})\|_2^2$ , primenom funkcije cene ovog oblika se zapravo primenjuje Bejzova metoda najmanjih kvadrata. Eksperiment za potrebe identifikacije parametara je sproveden nad aparaturom prikazanom na slici (Sl. 1a). Rezultati su predstavljeni u tabeli 1.

Tabela 1: Vrednosti i opis parametara sistema

Parametar	Vrednost	Jedinica	Opis promenljive
$L_{e1}$	$227 \pm 1$	mm	Dužina horizontalne ruke, FP
$J_0$	$86.98 \pm 0.03$	$\text{g} \cdot \text{m}^2$	Moment inercije na spoju baze horizontalne ruke i klatna, FP
$K_{a1}$	$1.0 \pm 0.3$	$\text{mN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	Koeficijent trenja između baze i horizontalne ruke, FP
$M_2$	$309 \pm 1$	g	Masa klatna, FP
$L_{cm2}$	$404 \pm 1$	mm	Udaljenost od ose rotacije do centra mase klatna, FP
$J_2$	$28.37 \pm 0.01$	$\text{g} \cdot \text{m}^2$	Moment inercije na spoju klatna, FP
$K_{a2}$	$0.136 \pm 0.001$	$\text{mN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	Koeficijent trenja između horizontalne ruke i klatna, FP
$L_b$	$3.0 \pm 0.1$	mH	Električna impedansa motora (imaginarni deo), FP
$R$	$2.266 \pm 0.002$	$\Omega$	Električni unutrašnji otpor motora, FP
$K_t$	$0.696 \pm 0.001$	$\text{V} \cdot \text{s}$	Kontra-elektromotorne sile, FP
$K_f$	$3.377 \pm 0.002$	V	Obrtni moment koji proizvodi motor po jedinici struje, FP

### 1.2.1 Matlab model

Matlab model sistema je realizovan na osnovu izvedenih jednačina stanja (8). Prilikom implementacije modela inicijalno nije vođeno računa o adekvatnoj diskretizaciji kontinualnog modela. Primenjena je Ojlerova aproksimacija  $\dot{\mathbf{x}} \approx \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\Delta t}$ ,  $\mathbf{x}_k$  predstavlja k-ti odabirak kontinualnog stanja  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k). \quad (9)$$

Međutim, primena Ojlerove metode nije adekvatna za ovaj sistem usled velikih numeričkih grešaka i nestabilnosti rezultujućeg modela. Dodatnim koraka diskretizacije  $\Delta t$  je moguće stabilizovati Ojlerovu metodu, ali to nije usvojeno kao prihvatljivo rešenje.

Problem nestabilnog modela je rešen primenom Runge-Kuta 4 (eng. *Runge-Kutta*) metode numeričke integracije, dalje u tekstu RK4. Primenom RK4 integracija se vrši na sledeći način:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{12}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (10)$$

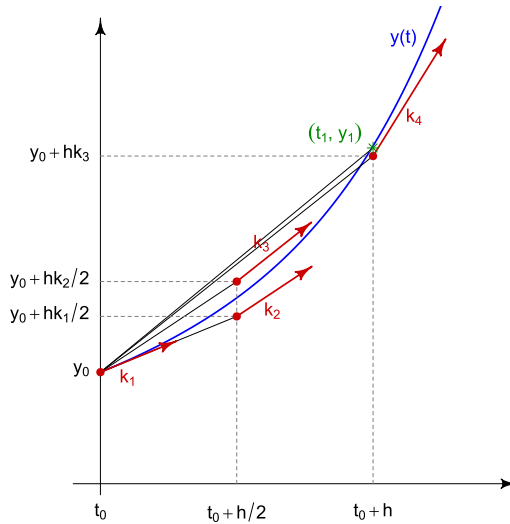
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (11)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \Delta t \frac{\mathbf{k}_1}{4}, \mathbf{u}_k), \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \Delta t \frac{\mathbf{k}_2}{4}, \mathbf{u}_k), \quad (13)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \Delta t \frac{\mathbf{k}_3}{2}, \mathbf{u}_k); \quad (14)$$

Iz jednačina (10) se vidi da se podrazumeva konstatno upravljanja tokom trajanja jedne periode odabiranja. Pored navedene metode postoje i brojne modifikacije koje pripadaju široj familiji Runge-Kuta metoda numeričke integracije.



Slika 2

Slika 3: Vizuelizacija Runge-Kuta integracije [rk4]

### 1.3 Linearizacija sistema

Nelinearni model (8) se može linearizovati razvijanjem u Tejlorov red u okoline tačke  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}(u - \bar{u}). \quad (15)$$

Neka su  $\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}$ ,  $B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})}$ ,  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ , i  $\Delta u = u - \bar{u}$ . Prethodna jednačina se može napisati kao:

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + B \Delta u + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}). \quad (16)$$

Linearizacija se obavlja za različite  $\bar{\mathbf{x}}$  čime se dolazi do porodice linearnih modela. Linearni model u okolini tačke  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, u = 0) = \mathbf{0}$ , može se napisati kao:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t), \end{aligned} \quad (17)$$

gde  $\mathbf{x}$ ,  $u$ , i  $y$  označavaju odstupanje od ravnotežnog stanja.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0174 & 20.7861 & -0.0023 & 57.5344 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -0.0174 & 63.8319 & -0.0071 & 57.4388 \\ 0 & -232.0252 & 0 & 0 & -755.4250 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 333.3367 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### 1.3.1 Kontrolabilnost

Kontinualni linearni sistem se smatra potpuno kontrolabilnim ako i samo ako iz početnog stanja, uz odgovarajući ulaz  $u(t)$  sa  $0 < t \leq t_f$  i konačnim horizontom  $t_f$ , može da se postigne proizvoljno stanje  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ .

Linearni sistem je potpuno kontrolabilan ako matrica kontrolabilnosti

$$\mathbf{C}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ima pun rang  $n$ .



Kada se napon primeni na motor, stvara se struja i obrtni moment  $\tau_1$  se stvara u centru rotacije horizontalne ruke. Na metalnom vratilu gde je klatno pričvršćeno, sila nastala od  $\tau_1$  duž ruke  $l_{e1}$  je horizontalna i pravolinijska u odnosu na oba  $l_{e1}$  i  $\tau_1$ , u skladu sa opštom formulom:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (19)$$

Obrtni moment u centru mase klatna takođe je dat ovom formulom, iz kojeg se može izraziti amplituda  $\tau_2$  kao funkcija ugla  $\beta$ :

$$\tau_2 = l_{cm2} F \cos \beta, \quad (20)$$

gde je  $l_{cm2}$  rastojanje između metalnog vratila i centra mase klatna. Iz gornjih jednačina jasno je da je ulaz, napon primenjen na motor, direktna akcija na sve stanja sistema - struju motora, položaj i brzinu horizontalne ruke, kao i položaj i brzinu klatna. Postoji izuzetak za  $\cos \beta = 0$ , tj. kada je klatno horizontalno. U ovom slučaju, položaj i vektorske sile su paralelni, te stoga nije moguće primeniti obrtni moment. Stoga, varijable klatna nisu kontrolabilne u ovom trenutku.

### 1.3.2 Opservabilnost

Kontinualni sistem se smatra potpuno opservabilnim ako je poznavanje  $\mathbf{y}(t)$  za  $0 \leq t \leq t_1$ , sa  $t_1$  konačnim, dovoljno za određivanje početnog stanja  $\mathbf{x}(0)$ .

Linearni sistem je opservabilan ako matrica

$$\mathbf{O}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ima pun rang  $n$ .

### 1.3.3 Stabilnost

Tačka  $\bar{\mathbf{x}}$  dinamičkog sistema se klasifikuje kao Ljapunov stabilna ako važi:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta \wedge t > 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon, \quad (22)$$

i asimptotski stabilna ako dodatno važi:

$$\exists \epsilon > 0 : \|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}. \quad (23)$$

Asimptotska stabilnost nelinearnog sistema može se proceniti linearnizovanim sistemima dobijenim kod svake fiksne tačke pomoću Ljapunovljeve indirektna metode. Moguće je zaključiti da, za linearnizovani sistem (17):

1. ako sve sopstvene vrednosti matrice  $A$  imaju negativne realne delove, tada je fiksna tačka nelinearnog sistema stabilna;
2. ako bar jedna sopstvena vrednost matrice  $A$  ima pozitivan realni deo, tada je fiksna tačka nelinearnog sistema nestabilna;
3. ako nijedno od prethodno navedenog nije zadovoljeno, tj. ako bar jedna sopstvena vrednost leži iznad imaginarne ose, a nema sopstvene vrednosti sa pozitivnim realnim delom, onda se ne može izvesti zaključak.

Tabela 2: Sopstvene vrednosti linearizovanih modela, asimptotska stabilnost redukovano sistema  $(X_2, \dots, X_5)$ , kontrolabilnost i observabilnost za 5 tačaka, gde su sve promenljive stanja postavljene na nulu, osim  $X_3$ .

$X_3$	Sopstvene vrednosti	Stabilan	Kontrolabilan	Observabilan
0	$-737.2, -19.4, +7.0, -5.8, 0$	Ne	Da	Da
$\pi/4$	$-743.2, -11.8, -5.3, +5.0, 0$	–	Da	Da
$\pi/2$	$-746.2, -9.1, -0.0, 0, 0$	–	Ne	Da
$3\pi/4$	$-743.2, -12.4, +0.1 + 5.0i, +0.1 - 5.0i, 0$	–	Da	Da
$\pi$	$-737.2, -17.0, -0.5 + 6.8i, -0.5 - 6.8i, 0$	Da	Da	Da

U tabeli 2 je prikazana analiza za 5 različitih tačaka, čime se pokazuje da je  $x_3 = 0$  (kada se sistem se nalazi u gornjem položaju) nestabilno stanje, ali ispunjava uslove kontrolabilnosti i opservabilnosti.

## 1.4 Poremećaji u sistemu

U radu [inicijalna] autor razmatra samo jedan izvor poremećaja i to step promenu stanja  $\beta$ . Razlog se ne navodi, ali je jasno da od 5 stanja datog sistema na stabilnost najveći uticaj ima stanje  $\beta$ . U sekciji (1.3.1) se razmatra uticaj stanja  $\beta$  na kontrolabilnost sa stanovništva fizike.

Pored analiziranog izvora poremećaja ima smisla razmotriti step promenu stanja  $\alpha$  kao i impulsnu promenu stanja  $i$ . Razlog za razmatranje impulsnog poremećaja u slučaju struje  $i$  je taj što su vremenske konstante električnih sistema za red veličine manje od vremenskih konstanti mehaničkih sistema. Odnosno na step promenu struje jako brzo odreaguju kontroleri projektovani za stabilizaciju napona, pa to eksterno deluje kao impulsni poremećaj u struji.

Tokom simuliranja projektovanih kontrolera razmatraju se step promena stanja  $\beta$  inteziteta  $+10^\circ$  i  $-10^\circ$ .

## 1.5 Upravljački signali i ograničenja signala

Upravljački signal za razmatrani sistem je napon  $u$  motora koji je zadužen za rotaciju horizontalne sekcije klatna. Autor u radu [inicijalna] navodi sledeća ograničenja:

- Napon motora  $u \in [-6, 6]$  V, međutim svi grafici autora prikazuju opseg  $u \in [-5, 5]$  V. U radu se usvaja vrednost sa grafika autora.
- Vertikalni ugao  $\beta \in [-12, 12]^\circ$
- Horizontalni ugao  $\alpha \in [-180, 180]^\circ$

## 2 Projektovanje sistema upravljanja

Projektovanje sistema upravljanja se sastoji iz dva dela: generisanje željene trajektorije i projektovanje kontrolera koji treba da isprati željenu trajektoriju i održava sistem u gornjem položaju.

Često je korisno dizajnirati trajektorije van mreže, tj. definisati putanju u prostoru stanja koju sistem treba da izvede unapred. U takvoj situaciji nismo ograničeni vremenom ili računski potrebnom snagom da se izvrše proračuni tokom samog procesa, što je posebno korisno kod složenih sistema sa brзом dinamikom. Putanje se dizajniraju koristeći model sistema, analizirajući njegov odgovor na dostupne ulaze. Ova strategija se široko koristi u robotici, gde postoji potreba za planiranjem kretanja mobilnih robota u ograničenim prostorima [inicijalna].

Jedan od pristupa za generisanje trajektorije je optimalno upravljanje, koje se bavi problemom određivanja ulaza dinamičkog sistema koji opitimizuje (maksimizuje ili minimizuje) određenu funkciju troška koja govori o performansama sistema. Sa odgovarajućom funkcijom troška mogu se odrediti putanja i zakon upravljanja koji zadovoljava zahteve projektovanja. Takodje, većina nelinearnih problema se može rešiti oslanjanjem na numeričke metode. U radu se [inicijalna] kao alternativa optimizacionim metodama predlažu ad hoc strategije gde se implicitno formira upravljanje na bazi upravljanja veličina kao što je energija sistema.

Nakon što se izgeneriše trajektorija, potrebno je isprojektovati kontroler koji će pratiti zadati putanju. U radu [inicijalna] se predlažu dve metode za stabilizaciju klatna. Prvi pristup podrazumeva projektovanje globalnog LQR kontrolera na osnovu linearizovanog modela u ravnotežnom stanju. Mana ovog pristupa je to što se karakteristike sistema značajno menjaju u zavisnosti od položaja klatna, pa bi ovakav kontroler morao da ima loše performanse zbog veće potrebe za robusnošću. Drugi pristup podrazumeva projektovanje niza lokalnih LQR kontrolera za određene sekcije duž trajektorije. Prednost ovog pristupa je to što se mogu postići bolje performanse usled veće robusnosti sistema duž trajektorije.

### 2.1 Generisanje trajektorije

Ovo poglavlje istražuje kako pronaći optimalan ulaz za dinamički sistem, omogućavajući mu da sledi željenu putanju u prostoru stanja. Ova putanja treba da bude u skladu sa zadanim ograničenjima i optimizuje zadatu veličinu. Iako se različite strategije mogu koristiti za projektovanje putanja, fokus je stavljen na optimalno upravljanje. Ova tehnika pruža jasan okvir za pronalaženje rešenja za probleme podložne ograničenjima i ciljevima optimizacije. Pored optimalnog generisanja trajektorije, implementirane su i ad hoc metode za uspravljanje klatna kao alternativno i jednostavno rešenje.

#### 2.1.1 Ad hoc strategije

Jedna od najčešće korišćenih metoda za podizanje FP je kontrola energije. U ovom slučaju se energija sistema kontroliše umesto direktnog kontrolisanja pozicije i brzina klatna [inicijalna]. U [energy\_c] predložen je zakon upravljanja za uspravljanje klatna zasnovanoj na kontroli energije (eng *Energy control*):

$$u = \text{sat} [k_v(E - E_0)] \text{sign}(\dot{\beta} \cos \beta), \quad (24)$$

gde su  $E$  trenutna energija sistema,  $E_0$  je željena energija sistema,  $k_v$  je pojačanje kontrolera, a  $\beta$  je ugao penduluma. Prvi pojam definiše amplitudu ulaza. Može se posmatrati kao proporcionalni kontroler, gde je promenljiva razlika u energiji između trenutnog stanja i energije ciljnog stanja, koja je konvencionalno postavljena na nulu. Amplituda je ograničena zbog fizičkih ograničenja aktuatora. Drugi pojam definiše znak upravljačkog ulaza i obezbeđuje da je efekat ulaza dodavanje energije sistemu. Član  $\cos \beta$  procenjuje da li je trenutni položaj penduluma iznad ili ispod horizontalnog položaja. Za  $\cos \beta = 0$ , pendulum je horizontalan, stoga sistem nije kontrolabilan - nema prenosa energije na pendulum. Sa dodatnim članom  $\dot{\beta}$ , sila se primenjuje protiv smera kretanja penduluma kada je ispod horizontalnog položaja i u istom smeru kada je iznad.

Važno je napomenuti da je ovaj zakon upravljanja projektovan specifično za sistem FP, stoga nije vrlo opšte primenljiv. Takođe, ograničen je na situacije gde nivo energije ciljnog stanja nije degenerisan. Iako će kontroler dovesti sistem do stanja sa određenom energijom, ako postoji više konfiguracija sa istom energijom, nije moguće izabrati između njih. Ovo je slučaj kod FP, gde energija sistema ne zavisi od ugla horizontalne ruke  $\alpha$ . Dakle, ovom tehnikom nema kontrole nad ovom varijablom tokom uspravljanja.

Zakon upravljanja definisan u jednačini (24) zahteva izračunavanje energije sistema. Modifikovana verzija kontrolera predložena je u **[energy\_c]** koja uzima u obzir samo varijable prostora stanja. Ovaj zakon upravljanja poznate je kao *exponentiation of the pendulum position* i glasi:

$$u = \text{sat}(k_v |\beta^n|) \text{sign}(\dot{\beta} \cos \beta). \quad (25)$$

U ovom slučaju, prvi član je modifikovan, sada uzimajući ugao između trenutnog položaja i vertikale. Dodaje se eksponent  $n$  izražen u izrazu, što povećava amplitudu ulaza kada je pendulum daleko od uspravnog položaja, ali je manja kada je bliže. U **[inicijalna]** navode da ovaj zakon omogućava gladi prelaz između nelinearnog upravljanja i upravljanja koji balansira klatno u gornjem položaju. Drugi član ostaje nepromenjen.

U **[ener\_shaping]** je izveden i testiran zakon upravljanja poznat kao *energy shaping*. Pomenuti zakon upravljanja je izveden na osnovu inervznog klatna koji rotira samo oko vertikalne ose i glasi:

$$u = \text{sat}(k_1(\dot{\alpha} + k_2 \cos(\beta)\dot{\beta})). \quad (26)$$

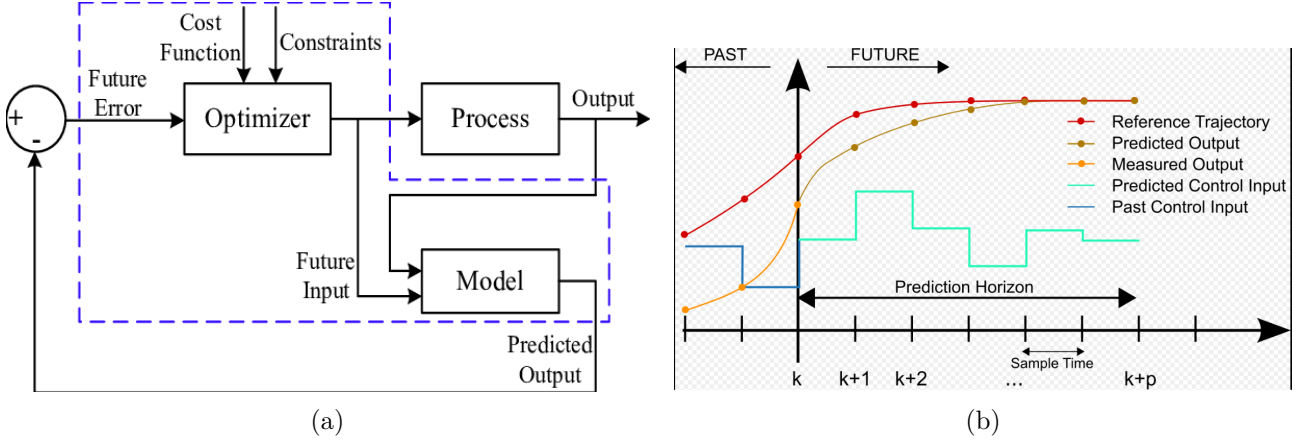
### 2.1.2 Optimalno upravljanje

Optimalna kontrola se bavi problemom određivanja ulaza dinamičkog sistema koji optimizuju, tj. minimiziraju ili maksimiziraju, određeni indeks performansi. Sa odgovarajućim izborom funkcije troška, mogu se odrediti trajektorije i zakoni upravljanja tako da zadovolje zahteve dizajna.

U ovom radu, koristili smo model prediktivnog upravljanja (engl. *Model Predictive Control*, MPC) kao pristup za optimalnu kontrolu.

MPC koristi matematički model sistema kako bi predvidio buduće ponašanje sistema na osnovu trenutnog stanja i unapred zadatih referenci. Model može biti linearni ili nelinearni, ali je ključno da bude dovoljno tačan za predviđanje sistema u predviđenom vremenskom horizontu. MPC optimizuje kontrolne akcije za određeni horizont vremena unapred. MPC ne razmatra samo trenutno stanje sistema, već razmatra niz budućih koraka, obično u diskretnim vremenskim koracima. Ovaj horizont

može biti kratkoročan ili dugoročan, u zavisnosti od zahteva sistema i dinamike procesa. MPC minimizira ili maksimizira funkciju cilja koja predstavlja kriterijum performansi sistema. To može uključivati minimizaciju greške u praćenju referenci, minimizaciju potrošnje energije ili slične ciljeve. MPC primjenjuje samo prvu kontrolnu akciju iz optimizacionog problema, nakon čega se proces ponavlja u svakom diskretnom vremenskom koraku. Ovaj pristup omogućava MPC-u da reaguje na promjene u stanju sistema i spreči akumulaciju grešaka. Njegova sposobnost da predviđa buduće stanje sistema i optimizuje kontrolne akcije čini ga moćnim alatom za upravljanje sistemima sa kompleksnom dinamikom i nelinearnostima [mpc].



Slika 4: (a) Šema MPC-a, (b) ilustracija rada MPC-a [mpc]

U radu [inicijalna] autor razmatra primenu optimizacionih metoda nad pojednostavljenim sistemom  $\ddot{\alpha}(t) = \omega_0^2 \sin \alpha(t) + u(t)$ . Vršiti se direktna optimizacija Hamiltonijana oblika  $H(u) = \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), u(t))$  dt, gde je  $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), u(t))$  lagranžijan sistema. Lagranžijan sistema tipično reprezentuje energiju sistema i ima sledeći oblik:  $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t), u(t)) = \frac{1}{q} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{Q}}^q + \frac{1}{p} \|u(t)\|_W^p$ . Prilikom analize ovog sistema autor ne specificira  $\mathbf{Q}$ , ali se navodi primena  $q = 2$  norme nad stanjima i primena  $p = 1$  i  $p = 2$  norme nad upravljanjem. Primena  $p = 1$  norme rezultuje upravljanjem koje je često u zacićenju i naglo menja polaritet dok  $p = 2$  norma favorizuje glatko upravljanje.

U opštem slučaju određivanje optimalnog upravljanja za nelinearni sistem  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  podrazumeva minimizaciju funkcije troška  $J(\mathbf{u}(t)) = \Psi(\mathbf{x}(t)) + \int_{t_0}^T \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$ , pod ograničenjem da je zadovoljena dinamika sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , upravljanje je u dozvoljenim granicama  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ , kao i stanja  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}$ . Ovaj optimizacioni problem se rešava primenom Pontrjaginovog principa maksimuma, odnosno optimalno upravljanje  $\mathbf{u}^*(t)$  je moguće odrediti minimizacijom Hamiltonijana  $H(\mathbf{u}(t)) = \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ . Sprovođenje ovog postupka minimizacije podrazumeva rešavanje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina:

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla_{\lambda} H \quad (28)$$

Sistem jednačina (27) je poznat kao i Hamiltonov sistem jednačina. Druga jednačina je ispunjena zbog dinamike sistema, pa se problem svodi na rešavanje:

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda^T(t) \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), u(t)) - \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)), \quad (29)$$

uz početni uslov  $\lambda^T(t) = \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(T))$ .

U ovom radu za potrebe pronalaženje optimalne trajektorije primenjujemo MPC implementiran pomoću biblioteke za optimalno upravljanje [CASADI]. Ovaj softverski paket omogućuje korisniku

da formuliše optimizacione probleme, dok se rešavanje prosleđuje namenskim bibliotekama za rešavanje optimizacionih problema napisanih u C programskom jeziku.

Formulacija MPC za potrebe nalaženja optimalne trajektorije, odnosno optimalnog upravljanja, se razlikuje u zavisnosti od metode koja se koristi za rešavanje optimizacionog problema. U ovom radu se primenjuje *multiple shooting* metoda. Ova metoda pripada familiji direktnih za rešavanje problema optimalnog upravljanja. *Multiple shooting* podrazumeva diskretizaciju stanja sistema kao i upravljanja, a zatim rešavanje optimizacionog minimizacijom cene  $J(\mathbf{u}(t))$  pod uslovom da su parcijalne trajektorije na granicama kontinualne. Odnosno na intervalu  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  se rešava diferencijalna jednačina:

$$\dot{x}_i(t; s_i; u_i) = f(x_i(t; s_i; u_i)) \quad (30)$$

$$x_i(t; s_i; u_i) = s_i, \quad (31)$$

pri čemu je  $s_i$  veštačka promenljiva koja se uključuje u proces optimizacije. Rešavanjem diferencijalnih jednačina (30) se izdvaja deo trajektorije  $x_i(t; s_i; u_i)$  na intervalu  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Na osnovu dobijene trajektorije se može izračunati parcijalna cena  $j_i(x_i(t; s_i; u_i), u_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{L}(x_i(t; s_i; u_i), u_i) dt$ . Konačno može se formirati optimizacioni problem kao:

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{u}} \sum_{i=0}^{N-1} j_i(x_i(t; s_i; u_i), u_i) + E(s_N), \quad (32)$$

pod uslovom:

$$s_0 - x_0 = 0 \quad (33)$$

$$s_{i+1} - x_i(t_{i+1}; s_i; u_i) = 0 \quad (34)$$

$$h(s_i, u_i) \geq 0 \quad (35)$$

$$r(s_N) \geq 0, \quad (36)$$

gde  $h(s_i, u_i)$  i  $r(s_N)$  predstavljaju ograničenja nad trajektorijom i krajem trajektorije. **[multiple\_shooting]**

Prilikom implementacije MPC primenom **[CASADI]** paketa definisani su sledeći parametri:

- Funkcija cene:  $J = \gamma_1 \|\mathbf{x}(T)\|_{\mathbf{Q}_T}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_2 \|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \gamma_3 \|u(t_i)\|_R^2$ .
- Horizont predikcije  $N = 1500$ .
- Matrice  $\mathbf{Q}_T$ ,  $\mathbf{Q}$  i skalar  $R$  su izabrani tako da normalizuju stanja, odnosno upravljanje.
- Koficijenti skaliranja:  $\gamma_1 = 0.1N$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = 1$ .

, Prilikom primene *multiple shooting* metode neophodno je izračunavanje  $x(t_{i+1}; s_i; u_i)$  na osnovu početne tačke trajektorije  $s_i$ , za te potrebe se primenjuje RK4 numerička integracija sa korakom 1ms.

Zbog problema sa konvergencijom u ovom radu su uvedene tri modifikacije:

- Ispituje se se samo  $p = 2$  norma.
- Matrica  $\mathbf{Q}_T$  je svuda nula osim za stanja  $\alpha$  i  $\beta$ .
- U funkciji cene se ne koristi član  $\gamma_2 \|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathbf{Q}}^2$ , pokazalo se da loše utiče na konvergenciju. Razlog za može biti to što u određenim delovima trajektorije treba da povećamo amplitudu svih stanja kako bi uspešno uspravili klatno.

## 2.2 Projektovanje kontrolera

Nakon generisanja referentnih trajektorije potrebno je projekтовati kontroler čiji je zadatak da u što većoj meri isprati željenu trajektoriju i kontroler koji će održavati sistem u željenom, gornjem položaju.

Linearni kontroleri su validni samo u onom regionu gde je izvršena linearizacija sistema, a kako je zadatak upravljanje nelinearnim sistemom potrebno je napraviti ansambl kontrolera.

U radu [inicijalna] su se bavili projektovanjem LQG kontrolera. Kalman filter je optimalan za procenu stanja u linearnim sistemima, ali kada se primeni na nelinearne sisteme, može doći do netačnih procena stanja zbog odstupanja između stvarne nelinearnosti sistema i linearnog modela koji se koristi u Kalman filtru. Iz ovog razloga, u ovom radu smo se zadržali na korišćenju LQR kontrolera.

LQR (Linear Quadratic Regulator) je metoda optimalne kontrole koja se koristi za pronalaženje kontrolnih ulaza koji minimizuju određenu kvadratnu funkciju troška. LQR nudi nekoliko prednosti, uključujući jednostavnu implementaciju i robustnost, dok osigurava stabilnost sistema pod određenim uslovima. LQR kontroler ima nekoliko poželjnih svojstava, na primer, održava red sistema, ima faznu marginu od najmanje 60 stepeni i beskonačnu marginu pojačanja.

Da bi se primenio LQR na sistem, dve osobine koje mora da zadovolji sistem je da bude kontrolabilan i opservabilan u okolini tačke gde je izvršena linearizacija sistema. Na osnovu analize prikazane u tabeli 2 zaključuje se da jedino u slučaju kada je klatno u horizontalnom položaju ( $\beta = \pi/2$ ) nije moguće primeniti LQR kontroler.

Cilj algoritma LQR je pronaći vektor pojačanja  $\mathbf{K}$  za zakon povratne sprege u prostoru stanja

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (37)$$

koji se primenjuje na kontinualni linearni sistem, definisan u (1.3),

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}, \quad (38)$$

a minimizuje funkciju troška

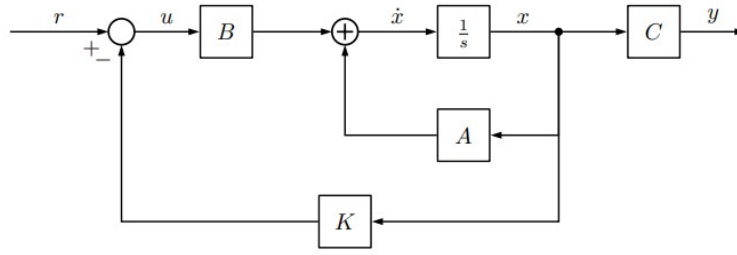
$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_r \mathbf{u} dt. \quad (39)$$

Matrice  $\mathbf{Q}_r$  i  $\mathbf{R}_r$  određuju relativni značaj koji se pridaje regulaciji stanja i trošku ulaza, i treba ih odabrati uzimajući u obzir ciljeve dizajna sistema. Matrica  $\mathbf{P}$  se dobija rešavanjem Rikatijske jednačine:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}_r = \mathbf{0}, \quad (40)$$

nakon čega se računa pojačanje  $\mathbf{K}$  kao:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (41)$$



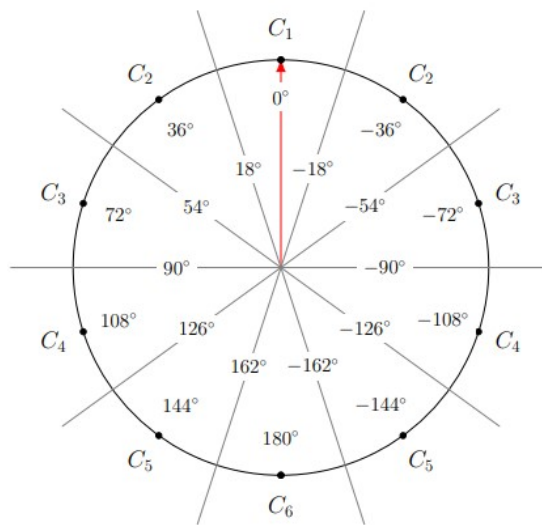
Slika 5: Blok dijagram feedback kontrolera [inicijalna]

Prelazak između kontrolera vrši se u dva različita režima rada:

1. Kontrola za podizanje sistema primenjuje se direktno na uređaj. Samo linearni kontroler oko krajnje tačke je aktivan (globalni LQR kontroler). Tranziciji između režima uspravljanja sistema i režima ravnoteže oko uspravnog položaja se dešava kada se ugao penduluma dovoljno približi nultom položaju ( $\beta < 18^\circ$ ). Ovaj pristup se koristi kada nema referentne putanje, i podizanje sistema se izvodi u zatvorenoj petlji, na primer sa Ad hoc strategijama opisanim u 2.1.1.

2. Referentna kontrola se primenjuje na uređaj, koji zauzvrat ima zatvoreni skup linearnih kontrolera koji stabilizuju razliku između izvedene putanje i referentne putanje. Ovo se naziva Gain Scheduling controller.

Gain Scheduling kontroler implementiran u upravljanju FP bira jedan od šest kontrolera koji se koristi u skladu sa trenutnim uglom  $\beta$ . Važno je napomenuti da su oni raspoređeni simetrično: prvi član Tejlorovog reda je identičan za  $\beta = \pm\theta$ , pa je i inkrementalni model isti. Na slici (Sl. 6) su prikazani regioni rada *gain scheduling* kontrolera, u funkciji ugla  $\beta$  ( $x_3$ ). Tačke označavaju mesta gde je izvedena Jakovijeva linearizacija, a  $C_1$  do  $C_6$  označavaju kontrolere koji rade u tom konkretnom regionu. Na primer  $C_1$  radi za  $\beta \in [-18^\circ, 18^\circ]$ , i odgovoran je za održavanje klatna u uravnoteženom položaju na gore.



Slika 6: Gain Scheduling kontroler [inicijalna]

Svaki LQR kontroler, koji je dizajniran nezavisno, koriguje vrednost ulazne promenljive kako bi aproksimirao ponašanje stvarnog sistema prema onom predviđenom u referentnoj putanji.



### 2.2.1 Feedforward LQR

LQR u bazičnoj formulaciji dovodi sistem u koordinatni početak i nema mogućnost praćenja reference. Međutim, u ovom radu je neophodno pratiti referencu. Ovaj problem se rešava uvođenjem modifikacije u algoritam koja efektivno predstavlja *feedforward* dejstvo.

Neka su  $\mathbf{x}_r$  i  $\mathbf{u}_r$  referentno stanje, odnosno referentno upravljanje. Referentno stanje i upravljanje prate dinamiku originalnog sistema odnosno važi:

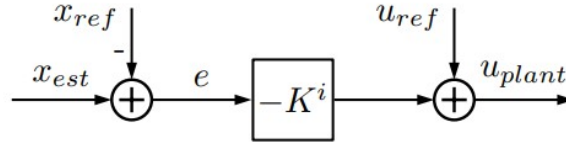
$$\mathbf{C}\mathbf{x}_r + \mathbf{D}\mathbf{u}_r = \mathbf{r} \quad (42)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_r + \mathbf{B}\mathbf{u}_r = \dot{\mathbf{x}}_r \quad (43)$$

Referenca je tipično konstatna, pa se može usvojiti  $\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{0}$ . Jednačina (42) se može zapisati u matričnom obliku kao:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ako se na LQR dovede signal greške u skladu sa slikom (Slika 7) implicitno se vrši transformacija koordinata  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ ,  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r$ , gde su  $\hat{\mathbf{x}}$  i  $\hat{\mathbf{u}}$  stanje i upravljanje transformisanog sistema.



Slika 7: Arhitektura Gain Scheduling kontrolera. Vektor  $K_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  se bira u skladu sa trenutnim uglom klatna [inicijalna]

Primenom zakona upravljanja oblika  $\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$  transformisani sistem dovodimo u koordinatni početak, u tom slučaju važi  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_r$ . Zakon upravljanja iz transformisanog sistema možemo zapisati kao  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \mathbf{u}_r$ . Ako primenimo izvedenu relaciju iz jednačine (44) možemo zapisati:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (45)$$

odnosno:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{r} \quad (46)$$

Zaključak je da primenom zakona upravljanja u skladu sa slikom (Slika 7) implicitno primenjujemo *feedforward* dejstvo. Još važnije, u slučaju da nam je na raspolaganju samo referenca  $\mathbf{r}$  moguće je koristiti LQR bez direktnog generisanja  $\mathbf{x}_r$  i  $\mathbf{u}_r$ .

## 3 Komparativna analiza algoritama za uspravljanje klatna

### 3.1 Diskusija

U ovoj sekciji su predstavljeni rezultati simulacija pomoću kojih su verifikovani isprojektovani algoritmi. Implementiran je globalni LQR kao i *gain scheduling*. Primena različitih kontrolera za stabilizaciju nije rezultovala velikim razlikama u trajektorijama, zbog toga u sekciji (3.2) su prikazani samo grafici sa *gain scheduling* kontrolerom za stabilizaciju.

Sve trajektorije su generisane *offline* primenom egzaktnog modela. Prilikom dovođenja klatna u uspravan generisanje upravljanje i trajektorija u prostoru stanja se koriste kao referenca. Robustnost na greške u modeliranju je ispitana naknadnim uvođenjem  $5\sigma$  grešaka u odnosu na vrednosti iz tabele 1.

Svi razmatrani algoritmi su uspešno doveli klatno u uspravan položaj. U slučaju primene globalnog LQR kontroler se uključuje ako je ugao  $|\beta| \leq 16^\circ$ , dok je *gain scheduling* uvek uključen. Nakon što ugao  $|\beta|$  dostigne granicu od  $16^\circ$  referentna trajektorija se postavlja na nulu i stabilizacija klatna se u potpunosti prepušta kontroleru.

Prilikom simulacije prisutan je merni šum. Analiza uticaja mernog šuma je izostavljena zbog prirode LQR kontroler. U pitanju je kontroler sa čistim proporcionalnim dejstvom i kao takav nema osobine potiskivanja šuma (za razliku od kontrolera sa integralnim dejstvom). Moguću je delimično smanjiti osetljivost na šum prilikom projektovanja uvođenjem veće cene upravljanja.

Kako bi uporedili algoritme za uspravljanje klatna uvedene su sledeće metrike:

- $t_{16^\circ}$  - trenutak kad ugao  $|\beta|$  pređe granicu od  $16^\circ$ .
- $t_s$  - vreme smirenja ugla  $\beta$ .
- $E_u$  - energija upravljačkog signala, koristi se L2 norma.

Rezultati simulacija su tabelarno prikazani u sekciji (3.2.2).

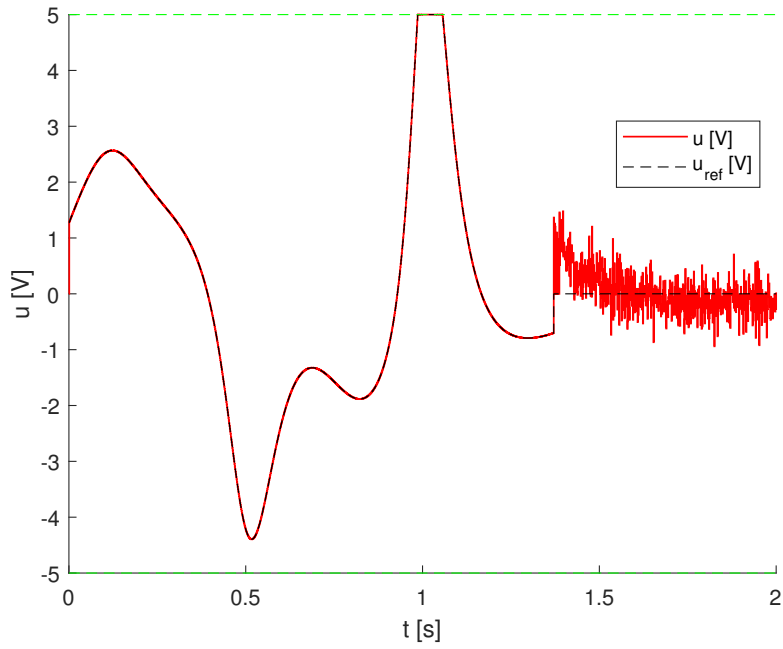
Radi testiranja rada kontrolera u prisustvu poremećaja simulirana je step promena ugla  $\beta$  u iznosu  $\pm 10^\circ$ . Poremećaj se uvodi tek nakon što klatno uspešno dostigne gornji položaj. Zbog toga se u sekciji (3.2.1) prikazuje samo jedan grafik. Algoritam za uspravljanje nema uticaja na poremećaje nakon što se dosegne gornji položaj, kao što ne postoji razlika među LQR i *gain scheduling* kontrolerima u gornjem položaju.

Prilikom generisanja trajektorija korišćen je RK4 algoritam opisan u sekciji (1.2.1) bez dodatnog umanjenja koraka integracije. Međutim, prilikom dinamike klatna korak integracije je smanjen 4 puta. Cilj ovog povećanja preciznosti je da se eliminišu greške usled neadekvatnog koraka odabiranja.

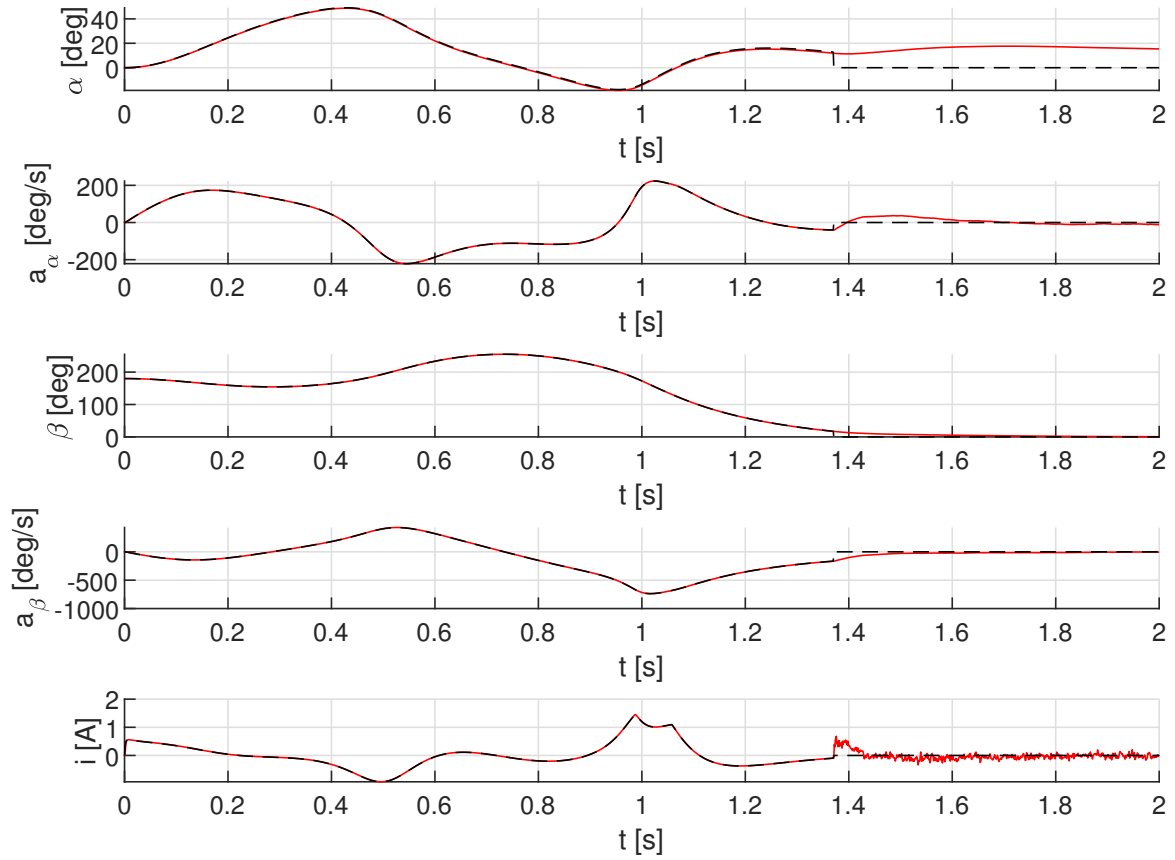
Analizom grafika iz sekcije (3.2) mogu se uočiti sledeće sličnosti među generisanim upravljanjima:

- Upravljanje generisano primenom MPC kvalitativno ima oblik kao upravljanje generisano primenom *energy shaping*
- Upravljanje generisano primenom *energy control* kvalitativno ima oblik kao upravljanje generisano primenom *exponentiation of the pendulum position*

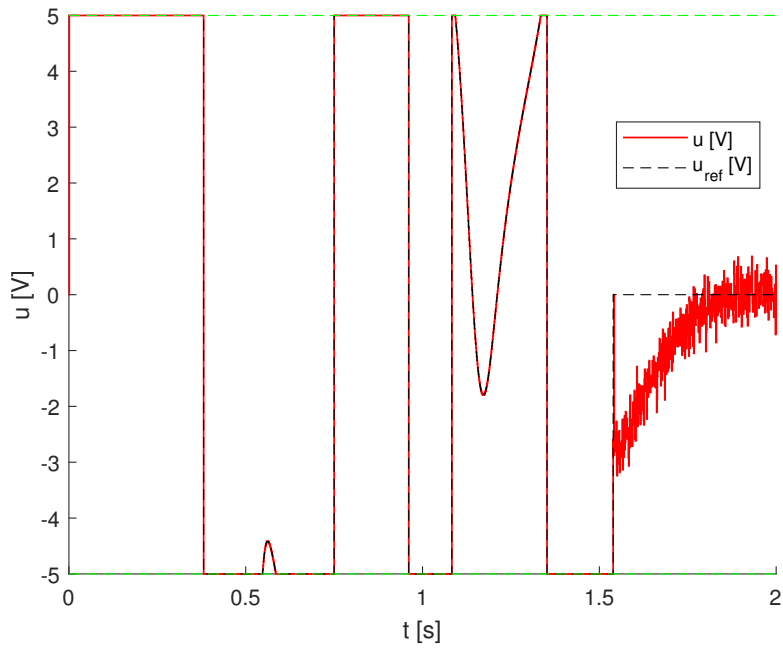
### 3.2 Rezultati simulacije



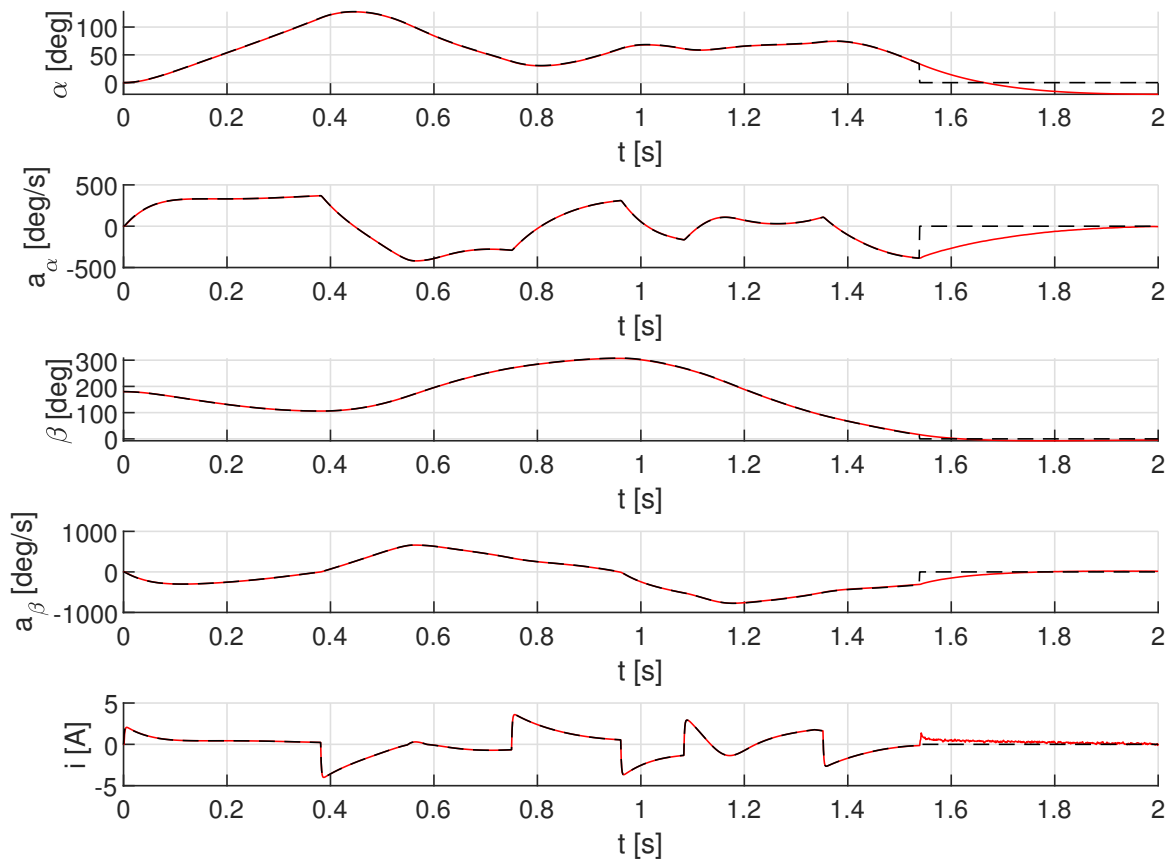
Slika 8: Upravljački signal generisan primenom MPC



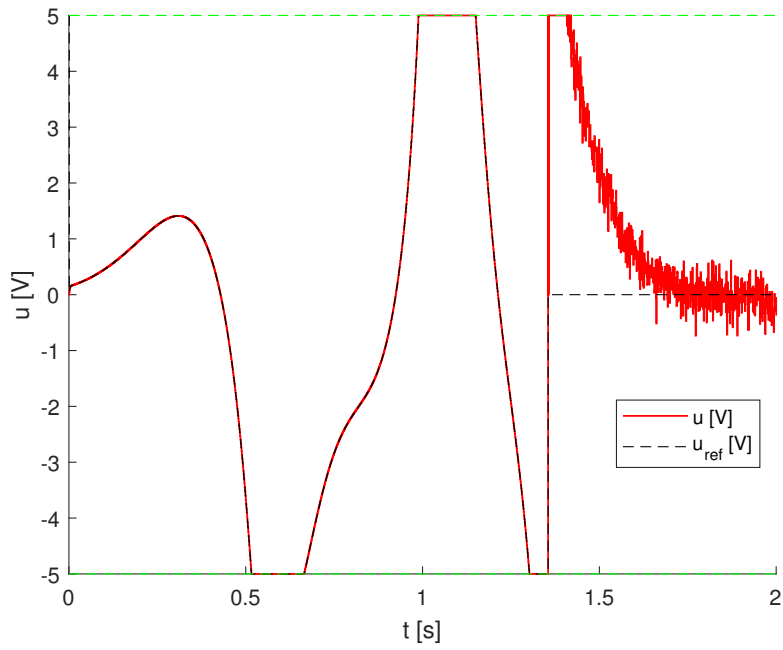
Slika 9: Stanja sistema nakon primene upravljanja generisanog primenom MPC



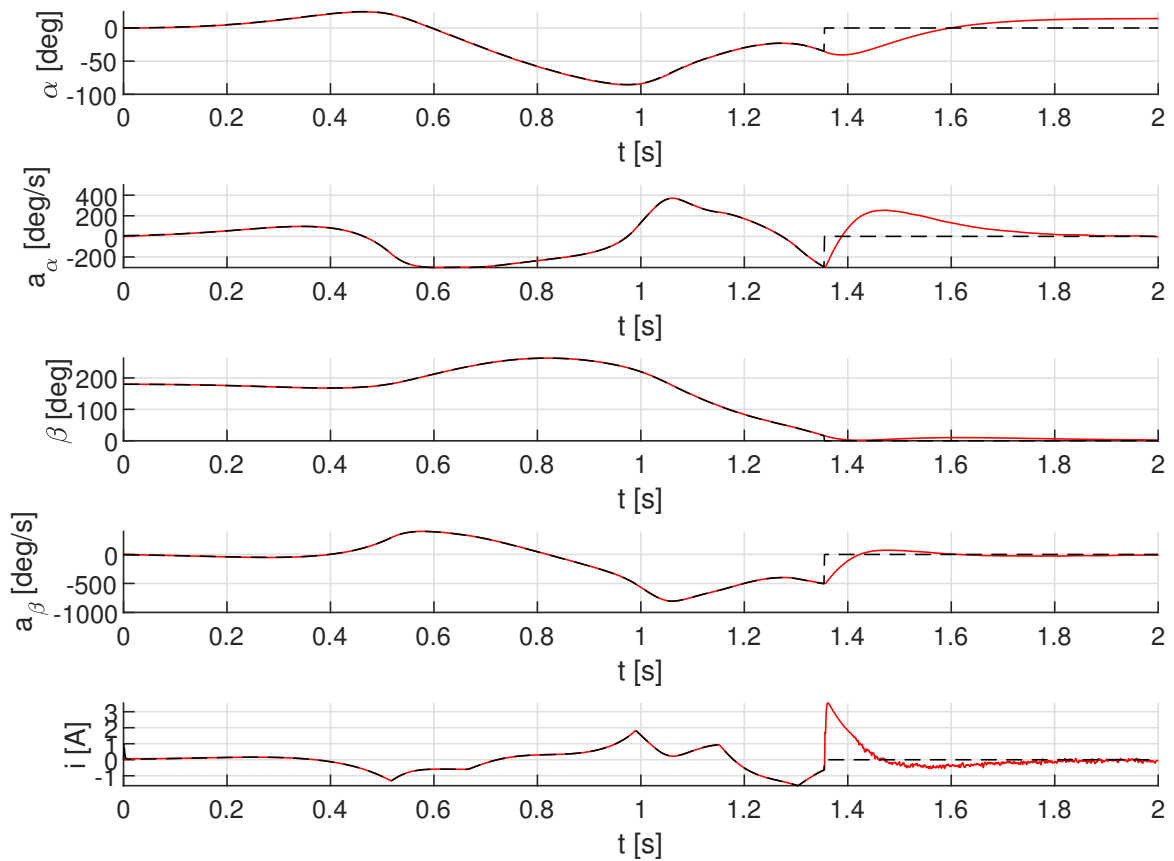
Slika 10: Upravljački signal generisan primenom *energy control*



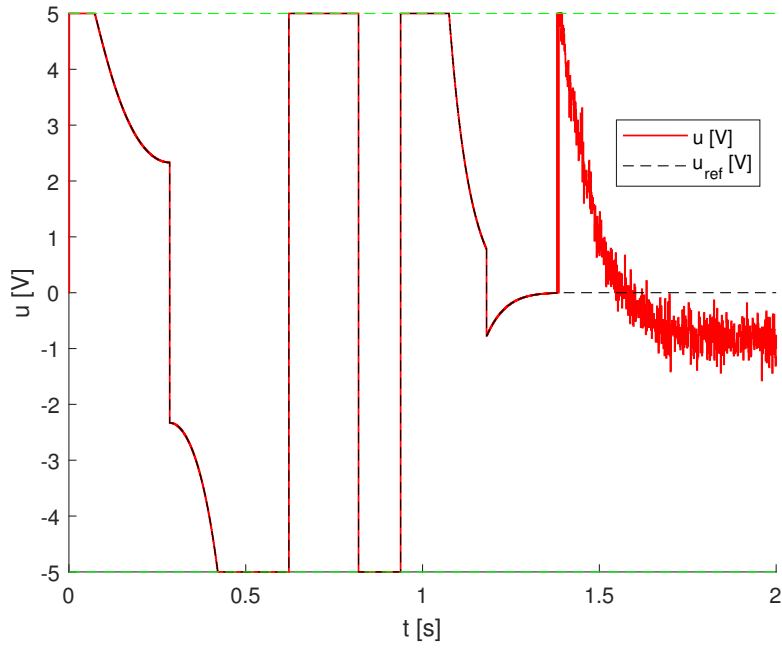
Slika 11: Stanja sistema nakon primene upravljanja generisanog primenom *energy control*



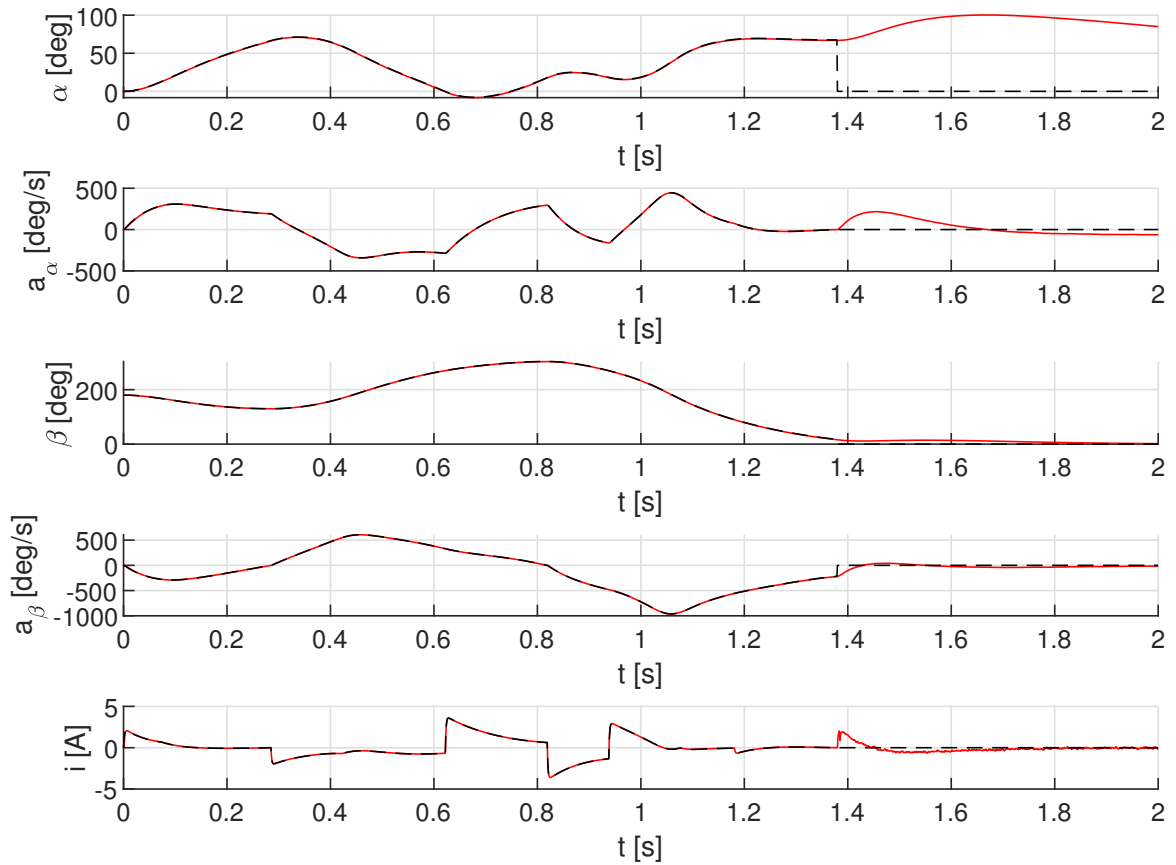
Slika 12: Upravljački signal generisan primenom *energy shaping*



Slika 13: Stanja sistema nakon primene upravljanja generisanog primenom *energy shaping*



Slika 14: Upravljački signal generisan primenom *exponentiation of the pendulum position*



Slika 15: Stanja sistema nakon primene upravljanja generisanog primenom *exponentiation of the pendulum position*

### 3.2.1 Stabilizacija u gornjem položaju

### 3.2.2 Tabelarni prikaz rezultata simulacije

	<i>gain scheduling</i>			globalni LQR		
	$t_{16^\circ}[s]$	$t_s[s]$	$E_u[a.u.]$	$t_{16^\circ}[s]$	$t_s[s]$	$E_u[a.u.]$
MPC	1.378	1.722	85.674	1.373	1.742	<b>85.413</b>
<i>energy control</i>	1.539	1.600	185.306	1.593	1.599	186.580
<i>exponentiation of the pendulum position</i>	1.375	1.876	153.729	1.381	1.928	156.399
<i>energy shaping</i>	1.354	1.404	126.975	<b>1.355</b>	<b>1.402</b>	127.173

Tabela 3: Prikaz rezultata simulacije bez greške modelovanja

Na osnovu rezultata iz tabele 3 možemo zaključiti sledeće:

- Primena upravljanja na bazi MPC rezultuje najmanjim utroškom energije.
- *Energy control* je ujedno i najsporije i najskuplje upravljanje.
- *Energy shaping* najbrže dostiže uspravni položaj.
- Ako su greške modelovanja zanemarljive globalni LQR i *gain scheduling* su uporedivi.

	<i>gain scheduling</i>			globalni LQR		
	$t_{16^\circ}[s]$	$t_s[s]$	$E_u[a.u.]$	$t_{16^\circ}[s]$	$t_s[s]$	$E_u[a.u.]$
MPC	1.373	1.708	85.341	1.376	1.736	<b>84.989</b>
<i>energy control</i>	1.542	1.602	185.669	1.54	1.598	186.333
<i>exponentiation of the pendulum position</i>	1.374	1.868	153.365	1.380	1.932	155.301
<i>energy shaping</i>	<b>1.356</b>	<b>1.397</b>	127.626	1.358	1.398	127.91

Tabela 4: Prikaz rezultata simulacije sa greškom modelovanja

Na osnovu rezultata iz tabele 4 možemo zaključiti sledeće:

- Primena upravljanja na bazi MPC rezultuje najmanjim utroškom energije.
- *Energy control* je ujedno i najsporije i najskuplje upravljanje.
- *Energy shaping* najbrže dostiže uspravni položaj.
- Ako su greške modelovanja nisu zanemarljive bolje je primeniti *gain scheduling*, u proseku je brži i troši manje energije.



## 4 Zaključak

## Literatura

- [1] *Nonlinear control of an inverted pendulum*, António Samuel Ávila Balula, Thesis to obtain the Master of Science Degree in Engineering Physics 2016.
- [2] *Swinging up the furuta pendulum and its stabilization via model predictive control.*, P. Seman, B. Rohal'-Ilkiv, M. Juhas, and M. Salaj. Journal of Electrical Engineering, 64(3):152–158, 2013. ISSN 13353632. doi: 10.2478/jee-2013-0022.
- [3] *A normal form for energy shaping: application to the furuta pendulum* S. Nair and N. E. Leonard. In Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on, volume 1, pages 516–521. IEEE, 2002
- [4] *Identification of Dynamic System*, R. Isermann and M. Munchhof, Springer, 2011.
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Model\\_predictive\\_control](https://en.wikipedia.org/wiki/Model_predictive_control)
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta\\_methods](https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods)
- [7] <https://web.casadi.org/>
- [8] *Nonlinear Model Predictive Control Using Multiple Shooting Combined with Collocation on Finite Elements*, Jasem Tamimi and Pu Li.