2. Пусть A, B, C и D - четыре произвольные точки плоскости. Тогда

$$(\sin^2\frac{\measuredangle ADB}{2}+\sin^2\frac{\measuredangle AD}{2}-$$
$$-sin^2\frac{\measuredangle BDC}{2})^2=4\sin^2\frac{\measuredangle ADB}{2}\times$$
$$\times\sin^2\frac{\measuredangle AD}{2}\times\cos 2\frac{\measuredangle BD}{2}$$

Доказательство. Возможны четыре случая взаимного расположения точек A, B, C и D. В каждом из них выберем U, V и W в соответствии с таблицей, помещенной ниже. В любом случае $U \geq 0$, $V \geq 0$, $W \geq 0$ и $U+V+W=\pi$, так что, согласно пункту 1,

$$(sin^2V+sin^2W-sin^2U)^2$$
$$=-4sin^2V\cdot sin^2W\cdot cos^2U$$

Остается воспользоваться тем, что в любом случае

$$sinU=sin^2\frac{\measuredangle BDC}{2},$$
$$sinV=sin^2\frac{\measuredangle ADC}{2},$$
$$sinW=sin^2\frac{\measuredangle ADV}{2},$$
$$cosU=cos^2\frac{\measuredangle BDC}{2}.$$

3. Пусть один из углов равен θ, противоположная сто-

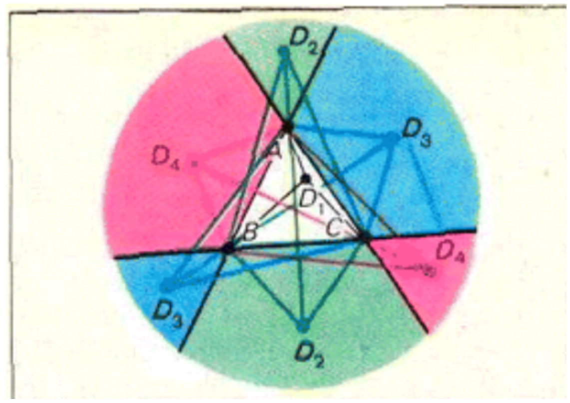

Рис. 8

рона - u, прилежащие - v и w, полупериметр треугольника - q. Тогда

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},\sin^2\frac{\theta}{2}=$$
$$=\frac{(q-v)(q-w)}{v\cdot w}$$

Доказательство. По теореме косинусов

$$u^2=v^2+w^2-2vw\cos\theta,\cos\theta=$$
$$=(v^2+w^2-u^2)/2vw.$$

.

Значит,

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{(v^2+w^2)-u^2}{4v\cdot w}=$$
$$=\frac{(v+w+u)(v+w-u)}{4v\cdot w}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},$$

№	Если	То
1	$\measuredangle BDC+\measuredangle ADC+\measuredangle ADB=2\Pi$	$U=\frac{\measuredangle BDC}{2}, V=\frac{\measuredangle ADC}{2}, W=\frac{\measuredangle ADB}{2}$
2	$\measuredangle BDC=\measuredangle ADC+\measuredangle ADB$	$U=\Pi-\frac{\measuredangle BDC}{2}, V=\frac{\measuredangle ADC}{2}, W=\frac{\measuredangle ADB}{2}$
3	$\measuredangle ADC=\measuredangle ADB+\measuredangle BDC$	$U=\frac{\measuredangle BDC}{2}, V=\Pi-\frac{\measuredangle ADC}{2}, W=\frac{\measuredangle ADB}{2}$
4	$\measuredangle ADB=\measuredangle BDC+\measuredangle ADC$	$U=\frac{\measuredangle BDC}{2}, V=\frac{\measuredangle ADC}{2}, W=\Pi-\frac{\measuredangle ADB}{2}$