

1 abstract

Задачи о назначениях часто встречаются в повседневной жизни: составление расписаний, распределение обязанностей между работниками и многие другие. Актуальность задачи привела к тому, что для простой, двухиндексной постановки были получены эффективные алгоритмы решения. Однако при расширении задачи до трехиндексной было установлено, что такая задача относится к классу \mathcal{NP} полных, поэтому для неё существует множество алгоритмов. В этой работе мы рассмотрим некоторые из них и подробно исследуем алгоритм, предложенный Э. Х. Гимади, который состоит в уменьшении размерности решаемой задачи.

2 Основные понятия

Для начала дадим классическое определение задачи о назначениях. Введем понятие назначения. Мы можем представлять назначение как некое биективное отображение ϕ , которое ставит элементы конечного множества U в соответствие элементам конечного множества V . В тоже время назначение является перестановкой, которая записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Каждой перестановке множества $\{1, 2, \dots, n\}$ соответствует единственная матрица перестановок $X_\varphi \in \text{Matrix}_{n \times n}$, элементы которой определяются как

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } j = \varphi(i) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначим множество S_n как множество всех возможных перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Мощность этого множества $n!$.

2.1 Линейная задача о назначениях

Пусть дана матрица $n \times n$ весовых коэффициентов $C = (c_{ij})$. Требуется минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$$

то есть линейная задача о назначениях может быть поставлена в виде

$$\min_{\varphi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$$

При этом, если перестановки задаются матрицей перестановок $X = (x_{ij})$, линейная задача о назначениях может быть записана как задача линейной

ОПТИМИЗАЦИИ

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{array}$$

Пример

Пусть требуется назначить n работников на n работ наиболее эффективным образом. Предположим, что j работнику требуется c_{ij} времени, чтобы выполнить работу i . Тогда нужно оптимизировать функцию $\sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$