1 abstract

Задачи о назначениях часто встречаются в повседневной жизни: составление расписаний, распределение обязаностей между работниками и многие другие. Актуальность задачи привела к тому, что для простой, двухиндексной постановки были получены эффективные алгоритмы решения. Однако при расширении задачи до трехиндексной было установлено, что такая задача отностится к классу $\mathcal{NP}$ полных, поэтому для неё существует множество алгоритмов. В этой работе мы рассмотрим некоторые из них и подробно исследуем алгоритм, предложенный Э. Х. Гимади, который состоит в уменьшении размерности решаемой задачи.

2 Основные понятия

Для начала дадим классическое определение задачи о назначениях. Введем понятие назначения. Мы можем представлять назначение как некое биективное отображение ϕ, которое ставит элементы конечного множества U в соотвествие элементам конечного множества V. В тоже время назначение является перестановкой, которая записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mathrm{n} \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Каждой перестановке множества $\{1, 2, \dots, n\}$ соответсвует единственная матрица перестановок $\mathrm{X}_\varphi \in \mathrm{Matrix}_{n\times n}$, элементы котороый определяются как

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } j = \varphi(i) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначим множество S_n как множество всех возможных перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Мощность этого множества $n!$.

2.1 Линейная задача о назначениях

Пусть дана матрица $n \times n$ весовых коэфициентов $C = (c_{ij})$. Требуется минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)}$$

то есть линейная задача о назначениях может быть поставлена в виде

$$\min_{\varphi \in S_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)}$$

.

При этом, если перестановки задаются матрицей перестановок $\mathrm{X} = (x_{ij})$, линейная задача о назначениях может быть записана как задача линейной оптимизации

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

Пример

Пусть требуется назначить n работников на n работ наиболее эфективным образом. Предположим, что j работнику требуется $c_i j$ времени, чтобы выполнить работу i. Тогда нужно оптимизировать функцию $\sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)}$

3 Трехиндексная задача о назначениях

Рассмотрим следующую задачу. Составим расписание занятий, то есть нужно распределим n занятий среди n свободных временных промежутков и среди n свободных аудиторий. Пусть c_{ijk} соответсвует "стоимости"назначения курса i на время j в аудиторию k. Мы хотим найти такую перестановку φ, которая ставит в соответствие курс к временному промежутку и такую перестановку ψ, которая ставит в соответствие курс к свободной аудитории, что "стоимость"назначения будет минимальна. Эта задача – пример трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

$$\min_{\varphi, \psi \in S_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)\psi(i)}$$

Также можно переписать эту задачу в виде

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_{ijk} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \\
& \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \\
& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (k = 1, \ldots, n) \\
& x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

Р. М. Карп показал, что эта задача является $\mathcal{NP}$ полной.