

1 abstract

Задача о назначениях в различных постановках часто встречаются в повседневной жизни. В учебных заведениях возникает потребность составить грамотное расписание, для каждого работника на предприятии необходимо найти задание, которое он выполнит наиболее эффективно, а транспортная компания заинтересована в оптимальном распределении маршрутов между автомобилями.

Актуальность задачи привела к тому, что для простой, двухиндексной постановки, то есть к задаче, в которой участвуют N работников и N работ, были получены эффективные алгоритмы решения, получающие точные решения за полиномиальное время. Последующие прикладные задачи, а также и внутренние потребности математики привели к обобщению данной задачи, в частности был рассмотрен трехиндексная постановка.

К сожалению, Карпом было установлено, что подобная задача не решается за время $O(n^P)$, так как относится к классу \mathcal{NP} -полных, следовательно, для таких задач необходимо строить новые схемы решения. Очевидным решением является применение методов ветвей и границ, однако данная схема ввиду вычислительной сложности не подходит для решения прикладных задач, которые требуют быстрого ответа и допускают некоторую неточность решения. Тогда находят применение так называемые эвристические алгоритмы, то есть алгоритм решения задачи, включающий практический метод, не являющийся гарантированно точным или оптимальным, но достаточный для решения поставленной задачи.

Так как подобные класс схем очень разнообразен, и очень трудно изучить все алгоритмы этого класса одновременно, актуальность работы состоит в изучении одного из приближенных методов, состоящем в уменьшении индексности, другими словами в уменьшении размерности задачи.

Целью работы является анализ одной из эвристических схем, предложенных Гимади, с тем, чтобы установить, на сколько этот алгоритм может быть применен на практике, при том, что автор гарантирует, что этот алгоритм сходится при $n \rightarrow \infty$, что несколько больше n в реальных задачах. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- изучить математическую модель трехиндексной аксиальной задачи
- провести анализ известных методов
- изучить метод Гимади решения 3-АЗОН путём уменьшения индексности задачи
- программно реализовать этот метод
- провести анализ полученных результатов

2 Трехиндексная аксиальная задача о назначениях

Введем понятие назначения. Мы можем представлять назначение как некое биективное отображение ϕ , которое ставит элементы конечного множества U в соответствие элементам конечного множества V . В тоже время назначение является перестановкой, которая записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Каждой перестановке множества $\{1, 2, \dots, n\}$ соответствует единственная матрица перестановок $X_\varphi \in \text{Matrix}_{n \times n}$, элементы которой определяются как

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } j = \varphi(i) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначим множество S_n как множество всех возможных перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Мощность этого множества $n!$.

2.1 Линейная задача о назначениях

Пусть дана матрица $n \times n$ весовых коэффициентов $C = (c_{ij})$. Требуется минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$$

то есть линейная задача о назначениях может быть поставлена в виде

$$\min_{\varphi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$$

При этом, если перестановки задаются матрицей перестановок $X = (x_{ij})$, линейная задача о назначениях может быть записана как задача линейной оптимизации

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{ограничения: } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (4)$$

Ограничения (2) – (4) задают допустимое множество

В дальнейшем будем называть X матрицей назначений.

Наиболее частая постановка задачи

Пусть требуется назначить n работников на n работ наиболее эффективным образом. Предположим, что j работнику требуется c_{ij} времени, чтобы выполнить работу i . Тогда нужно оптимизировать функцию $\sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$

Пример

Рассмотрим матрицу назначений $C = c_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 16 \\ 2 & 8 & 8 & 6 & 17 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 18 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Строки, в терминах наиболее частой постановки задачи, соответствуют работникам, а столбцы – работам.

Перестановка, обеспечивающая минимизацию линейной формы $\sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)}$ имеет

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

или другими словами следует

- назначить 1 работника на 1 работу
- назначить 2 работника на 5 работу
- назначить 3 работника на 2 работу
- назначить 4 работника на 4 работу
- назначить 5 работника на 3 работу

3 Трехиндексная задача о назначениях

Рассмотрим следующую задачу. Составим расписание занятий, то есть нужно распределить n занятий среди n свободных временных промежутков и среди n свободных аудиторий. Пусть c_{ijk} соответствует "стоимости" назначения курса i на время j в аудиторию k . Мы хотим найти такую перестановку φ , которая ставит в соответствие курс k временному промежутку и такую перестановку ψ , которая ставит в соответствие курс k свободной аудитории, что "стоимость" назначения будет минимальна. Эта задача – пример трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

$$\min_{\varphi, \psi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)\psi(i)}$$

Также можно переписать эту задачу в виде

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} x_{ijk} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\
& \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\
& \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad (k = 1, \dots, n) \\
& \quad x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (i, j, k = 1, \dots, n)
\end{aligned}$$

Р. М. Карп показал, что эта задача является \mathcal{NP} полной. В то время, как линейная задача назначений может быть решена быстрыми алгоритмами за полиномиальное время, точное решение для 3-АЗН может быть получено только алгоритмами полного перебора, которые работают очень медленно (3-АЗН имеет $(n!)^2$ возможных решений), поэтому применяют различные эвристические алгоритмы, которые дают за допустимое время ответ, близкий к оптимальному.

4 Обзор алгоритмов

4.1 О сложности

Так же, Крама и Шпиксма исследовали теоретические основы 3 АЗОН в постановке на графах. Положим, что полный $3n$ дольный граф, вершины которого соответствуют индексам i, j, k . При этом, каждому ребру $[i, j]$ (или $[j, k], [i, k]$ соответственно) ставится в соответствие длина ребра $d(i, j)$ ($d(j, k)$, $d(i, k)$ соответственно), так же предположим, что ребра удовлетворяют неравенству треугольника. Имеем две модели определения весовых коэффициентов.

В первой определим весовой коэффициент c_{ijk} как

$$c_{ijk} = d(i, j) + d(j, k) + d(i, k)$$

Для второй модели положим c_{ijk} как сумму двух кратчайших длин ребер в треугольнике, образованном вершинами i, j, k . Авторы показали, что для каждой постановки соответствующая 3-АЗОН является НП полной, но при этом сконструировали приближенные алгоритмы, которые получают ответы не хуже чем *fractal32* от оптимального решения в первом случае и не хуже чем *fractal43* для второй постановки задачи.

Схожая модель была исследована Шпиксмой и Воиджинджером: была рассмотрена плоскость с $3n$ точками на ней, при этом $c_{ijk} = d(i, j) + d(i, k) + d(j, k)$, где $d(i, j)$ - расстояние между точками i, j . Подобная задача так же является НП полной.

Буркард, Рудольф, Воиджинджер исследовали 3-АЗОН с разделяющимися коэффициентами вида $c_{ijk} = a_i b_j d_j$, где a_i, b_j, d_j - действительные

неотрицательные числа. Было показано, что в такой постановке задача минимизации является НП полной, а задача максимизации может быть решена за полиномиальное время.

Хансен и Кауфман построили алгоритм, схожий с венгерским для классической ЗОН, сводящийся к поиску максимума в гиперграфе.

4.2 Эвристики

Первым предложил применять эвристические алгоритмы Пирскала. Наиболее часто применяются вариации точных алгоритмов (так называемые метаэвристики). Мы можем отметить жадный случайный адаптирующийся поиск, разработанный Аизксом, Резенде и др., который показывает лучшие результаты, чем более ранние эвристики, а так же гибридный генетический алгоритм Хуанга и Лима.

Двумя группами ученых – Крама, Банделт, Шпикма и Буркард, Рудольф, Воиджинджер – разработали эвристические алгоритмы для 3-АЗОН с разделяющимися коэффициентами вида $c_{ijk} = a_i b_j d_j$ и рассмотрели работу алгоритма в худшем случае.

4.3 Асимптотическое поведение

Вероятностное асимптотическое поведение аксиально 3-ЗОН отличается от поведения классической задачи о назначениях. В ряде работ, Грундель, Крокмал, Оливьера и др. изучили поведение ожидаемого значения от наблюдаемой целевой функции. Они показали, что это значение сходится к левой границе распределения весовых коэффициентов. В частности, пусть весовые коэффициенты, c_{ijk} независимы и распределены нормально в $[0, 1]$. Положим

$$z_n = \min \sum_{i=1}^n c_{i\varphi(i)} \xi(i),$$

тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{M}(z_n) = 0$$

5 Алгоритм