# Исследование и модификация некоторых эвристических алгоритмов решения трехиндекскной аксиальной задачи


выполнил Н.С. Козловский.

научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Медведев.

ВГУ, факультет ПММ
кафедра ВМиПИТ


июль, 2018

# Цель работы

- Исследовать
- Модифицировать

эвристический (приближенный) алгоритм решения 3-ЗОН, основанного на сведении задачи к двухиндексной с использованием перестановок.

# Задачи

- Изучить математическую модель 3-АЗОН
- Изучить и проанализировать метод метод, сводящий задачу к двухиндексной
- Разработать модификации данного алгоритма
- Программно реализовать данный алгоритм и провести вычислительный эксперимент

# Постановка двухиндексной ЗОН

есть некоторое количество *работ* и некоторе количество *исполнителей*. Любой исполнитель может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

# Мат модель 2-ЗОН

Пусть даны множества $\mathrm{A}$, $\mathrm{T}$ и функционал стоимости $C : A \times T \to \mathbb{R}$. Необходимо найти биекцию $f : A \to T$, такую что $\sum_{a \in A} C(a, f(a))$ минимальна.

# Постановка в виде ЗЛП

Пусть $\mathrm{dimA} = \mathrm{dimT} = n$, $C$ – матрица $n \times n$. Тогда ЗОН можнопредставить в виде задачи линейного програмирования

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

и ограничениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

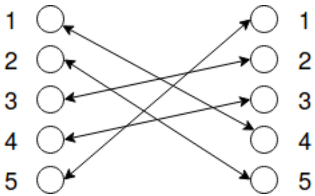
$$x_{ij} \in 0, 1 \text{ для } i, j \in A, T$$

# Понятие перестановки

Будем понимать под перестановкой упорядоченный набор без повторений чисел $1, 2, \dots n$, то есть биекцию на множестве $1, 2, \dots n$

Пусть $n = 5$, тогда одной из возможных перестановок является

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



# Понятие назначения

Мы можем представлять назначение как некое биективное отображение $\phi$, которое ставит элементы конечного множества $\mathrm{U}$ в соотвествие элементам конечного множества $\mathrm{V}$.

# Связь перестановок и назначение

назначение является перестановкой, которая записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mathrm{n} \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

# Матрица назначений

Каждой перестановке множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ соответсвует единственная матрица перестановок $\mathrm{X}_\varphi \in \mathrm{Matrix}_{n\times n}$, элементы котороый определяются как

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } j = \varphi(i) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Матрицу X будем называть матрицей назначений

# Естественное обобщение ЗОН

Рассмотрим обобщение ЗОН – трехиндексную аксиальную задачу о назначениях

Она может быть определена следующим образом. Пусть даны $n^3$ весовых коэфициентов $c_{ijk}, (i, j, k = 1 \dots n)$. Необходимо найти такие перестановки $\varphi$ и $\xi$, что

$$\min_{\varphi, \xi \in S_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)\xi(i)}$$

где $S_n$ множество всех перестановок целых чисел от $1 \dots n$.

# 3-АЗОН как ЗЛП

Так же задача может быть переписана как задача целочисленного линейного программирования.

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_{ijk}$$

ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

# Алгоритм, сводящий 3-АЗОН к двухмерному виду

Пусть $\phi = X \to \mathbb{N}$ – любая целочислено значащая функция, при этом $1 < \phi_n < n$

1. Берем произвольную подстановку $\pi \in S_n$. Пусть $(d_{jk})$ - $n \times n$ матрица, содержащая элементы исходной матрицы $(c_{ijk})$, где индекс $j = \pi(i)$ такой, что $d_{ij} = c_{\pi^{-1}(j)jk}$ для любых $1 \leq j, n \leq n$ Положим $f = 0; j = 1; \mathrm{K} = 1, 2, \ldots, \phi_n$.
2. Выберем номер $\sigma(j)$ минимального элемента из множества $\operatorname{argmin} d_{jk} | k \in K$.
3. Полагаем $f = f + d_{j\sigma(j)}; \mathrm{K} = \mathrm{K} \setminus \sigma(j); k = j + \phi_n$
4. Если $k \leq n$, то $K = K \bigcap k$.
5. $j = j + 1$
6. Повторяем п.2, пока j<n. В противном случае идем к п.7
7. Результатом работы алгоритма $\mathrm{A}(\phi_n)$ является значение функции $f$ целевой функции $f_{\mathrm{A}(\phi_n)}$.

# Теоретическое обоснование

Пусть весовые коэфициенты $c_{ijk} \in C$ лежат в отрезке $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$, $M_n$ – множество всех возможных $C$. Тогда

**Теорема**

При $b_n/a_n = o(n/\ln n)$ алгоритм является ассимптотически оптимальным для 3-АЗН на классе матриц $M_n$ и его временная сложность $O(n^2)$.

**Теорема**

При $b_n/a_n = o(\ln n)$ алгоритм является ассимптотически оптимальным для 3-АЗН на классе матриц $M_n$ и его временная сложность $O(n \ln n)$.

# Выявленные недостатки. Предлагаемые модификации

- Алгоритм чувствителен к выбору начальной перестановки
- Показна сходимость алгоритма при $n \to \infty$, что неприменимо в практических задачах

Для исправления этих недостатков предлагаются следующие модификации к алгоритму

# Наивный итеративный алгоритм

1. положим счетчик $i = 1$, зафикируем $p$ – число итераций
2. Берем произвольную подстановку $\pi \in S_n$. Пусть $(d_{jk})$ - $n \times n$ матрица, содержащая элементы исходной матрицы $(c_{ijk})$, где индекс $j = \pi(i)$ такой, что $d_{ij} = c_{\pi^{-1}(j)jk}$ для любых $1 \leq j, n \leq n$ Положим $f = 0; j = 1; \mathrm{K} = 1, 2, \ldots, \phi_n$.
3. Выберем номер $\sigma(j)$ минимального элемента из множества $\mathrm{argmin}\, d_{jk} | k \in K$.
4. Полагаем $f = f + d_{j\sigma(j)}; \mathrm{K} = \mathrm{K} \setminus \sigma(j); k = j + \phi_n$
5. Если $k \leq n$, то $K = K \bigcap k$.
6. $j = j + 1$
7. Повторяем п.3, пока j<n. В противном случае идем к п.7
8. Результатом работы итерации $\mathrm{A_i}(\phi_n)$ на шаге $i$ является значение функции $f_i$ целевой функции $f_{\mathrm{A}(\phi_n)}$.
9. i=i+1, если i<p, идем на п3
10. Результатом работы алгоритма $\mathrm{A}(\phi_n)$ является значение функции $f = \min_i f_i, \quad i = 1 \ldots p$

# Наивный итеративный алгоритм

альтернативный вариант слайда

Итеративно запустим исходный алгоритм. Получим множество решений $f = f_i$, $i = 1 \dots p$, где $p$ – количество итераций. Результатом работы алгоритма $\mathrm{A}_2(\phi_n)$ является

$f = \min_i f_i, \quad i = 1 \dots p$

# Итеративный алгоритм с улучшением исходной перестановки

1. положим счетчик $i = 1$, зафикируем $p$ – число итераций
2. Возьмем и запомним произвольную подстановку $\pi \in S_n$.
3. Пусть $(d_{jk})$ - $n \times n$ матрица, содержащая элементы исходной матрицы $(c_{ijk})$, где индекс $j = \pi(i)$ такой, что $d_{ij} = c_{\pi^{-1}(j)jk}$ для любых $1 \leq j,n \leq n$ Положим $f = 0; j = 1; \mathrm{K} = 1, 2, \ldots, \phi_n$.
4. Выберем номер $\sigma(j)$ минимального элемента из множества $\operatorname{argmin} d_{jk}|k \in K$.
5. Полагаем $f = f + d_{j\sigma(j)}; \mathrm{K} = \mathrm{K} \setminus \sigma(j); k = j + \phi_n$
6. Если $k \leq n$, то $K = K \bigcap k$.
7. $j = j + 1$
8. Повторяем п.3, пока j<n. В противном случае идем к п.7
9. Результатом работы итерации $\mathrm{A_i}(\phi_n)$ является значение функции $f_i$ целевой функции $f_{\mathrm{A}(\phi_n)}$.
10. Если $f_i < f_{i-1}$, случайным образом изменим 2 элемента $\pi$, иначе возьмем новую случайную перестановку $pi$.
11. i=i+1, если i<p, идем на п3
12. Результатом работы алгоритма $\mathrm{A}(\phi_n)$ является значение функции $f$ целевой функции $f_{\mathrm{A}(\phi_n)}$.

# Наивный итеративный алгоритм

альтернативный вариант слайда
Исходный алгоритм запускается итеративно. Вместо выбора новой случайной перестановки, введем перестановку $\pi'$, которая или получается из перестановки $\pi$ перестановкой двух случайных ее элементов, если текущий результат $f_i < f_{i-1}$, или является новой случайной перестановкой. Результатом работы алгоритма $\mathrm{A}_3(\phi_n)$ является значение функции $f$ целевой функции $f_{\mathrm{A}_3(\phi_n)}$.

# Блок-схема алгоритма