Исследование и модификация некоторых эвристических алгоритмов решения трехиндекскной аксиальной задачи

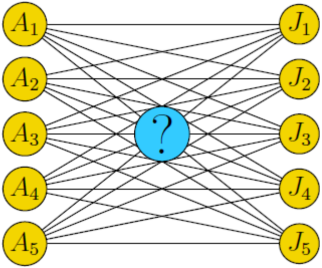
выполнил Н.С. Козловский.

научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Медведев.

ВГУ, факультет ПММ
кафедра Вычислительной Математики и Прикладных Информационных Технологий

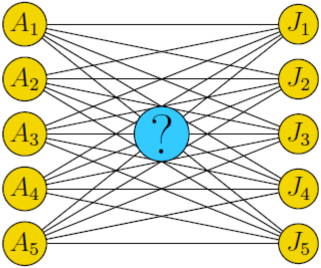
июль, 2018

Задача о назначениях часто встречается в реальном мире



В качестве A и J могут выступать

- Работники и работы
- Транспорт и маршруты
- многое другое



расширение задачи о назначениях

Естественное расширение задачи о наздачениях – переход к трехиндексной постановке.

Сложность

Рис.: Ричард Мэннинг Карп(03.01.1935)

В 1971 Карп установил, что данная задача относится к классу $\mathcal{NP}$ полных.
Задача не может быть решена за полиномиальное время

Приближенные алоритмы

Зачастую, достаточно получить решение с определенной точностью. Тогда возможно построение полиномиальных алгоритмов.
Они не идеальны.

Цель работы

- Исследовать
- Модифицировать

эвристический (приближенный) алгоритм решения 3-ЗОН, основанного на сведении задачи к двухиндексной с использованием перестановок.

Задачи

- Изучить математическую модель 3-АЗОН
- Изучить и проанализировать метод метод, сводящий задачу к двухиндексной
- Разработать модификации данного алгоритма
- Программно реализовать данный алгоритм и провести вычислительный эксперимент

Постановка 3-АЗОН

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_{ijk}$$

ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

$c_{ijk} \in C$, где C – матрица весовых коэфициентов,
$x_{ijk} \in X$, где X – матрица назначений

Постановка 3-АЗОН

3-АЗОН состоит в том, чтобы выбрать среди элементов трехмерной матрицы $C = c_{ijk}$ такие n элементов, что сумма в каждом выбраном сечении (для каждой фиксированной переменной i, или j,или k) минимальной.

Назначение

Введем понятие назначения. Мы можем представлять назначение как некое биективное отображение φ, которое ставит элементы конечного множества U в соотвествие элементам конечного множества V. В тоже время назначение является перестановкой, которая записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mathsf{n} \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Назначение

Каждой перестановке множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ соответсвует единственная матрица перестановок $\mathrm{X}_\varphi \in \mathrm{Matrix}_{n \times n}$

Исходный алгоритм

Достоинства

Пусть весовые коэфициенты $c_{ijk} \in C$ лежат в отрезке $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$, M_n – множество всех возможных C. Тогда

Теорема

При $b_n/a_n = o(n/\ln n)$ алгоритм является ассимптотически оптимальным для 3-АЗН на классе матриц M_n и его временная сложность $O(n^2)$.

Теорема

При $b_n/a_n = o(\ln n)$ алгоритм является ассимптотически оптимальным для 3-АЗН на классе матриц M_n и его временная сложность $O(n \ln n)$.

Недостатки

- Зависит от начальной перестановки.
- Асимптотическая сходимость при $n \to \infty$ не имеет практического смысла.

Модификации

Алгоритм A запускается итеративно.
После выполнения выбирается лучший прогон

Модификации

1. Запускаем алгоритм итеративно
2. Запоминаем перестановку после первого цикла
3. Выбираем случайным образом 2 элемента перестановки и меняем их местами 4. Если решение улучшилось, идем на 2, иначе на 1.

Вычислительный эксперимент