



# Interpolação da curva de juros brasileira: métodos e medidas de desempenho

André d'Almeida Monteiro  
Felipe Monteiro de Salles

Este artigo investiga as possibilidades de modelagem para a interpolação da curva de juros brasileira construída a partir dos contratos futuros de juros e *swaps*. Após descrição dos métodos selecionados – três variações do *spline* cúbico; *pro rata* do fator diário; e interpolação linear parte-a-parte do preço unitário (PU) –, chama-se atenção especial para os *splines* cúbicos devido ao fato de eles se adaptarem às características da curva brasileira. Para testá-los empiricamente, estabeleceu-se um critério de seleção que combina estratégias de reamostragem do tipo *leave-k-out cross-validation*.

## 1. Introdução

A curva de juros influencia profundamente a decisão de investimento e consumo de empresas, famílias e governo. Por isso, sua estimação é um tópico que tem recebido muita atenção da pesquisa econômico-financeira.

Desde o primeiro trabalho de David Durant para estimar a curva norte-americana em 1942, este tópico de pesquisa evoluiu bastante. Duas linhas de pesquisa de naturezas distintas têm sido desenvolvidas. A primeira baseia-se em modelos de equilíbrio geral e de não arbitragem. A segunda busca estimar a curva a partir de preços observados de ativos negociados em função de suas respectivas maturidades e de informações *a priori* sobre o formato da curva. Este artigo enquadra-se na segunda linha de pesquisa. Mais especificamente, ele concentra-se na abordagem não paramétrica para o problema de interpolação de taxas de juro.

Na seção 2, serão discutidos alguns dos métodos oferecidos pela literatura especializada para estimação da curva de juros: suas motivações, características, variações, vantagens e desvantagens. Em seguida, define-se o problema da interpolação da curva de juros. Dadas as especificidades da curva brasileira, os *splines* cúbicos foram selecionados para discussão detalhada. Estes serão confrontados teoricamente com outros dois métodos de interpolação bastante populares no mercado de renda fixa brasileiro.

Como era necessário estabelecer um critério para comparar o desempenho dos modelos de interpolação, utilizaram-se os conceitos de

seleção de modelos oferecidos pela literatura. A partir deles, julgou-se a reamostragem como o mais adequado, propondo-se, assim, a estratégia de *leave-k-out cross-validation*. O comum na literatura é  $k = 1$  (*leave-one-out*). Neste trabalho, foram empregados valores superiores para  $k$ . Nota-se que o desempenho é aferido fora da amostra utilizada na estimação dos parâmetros. O maior obstáculo desse processo é o esforço computacional. Contudo, essa estratégia apresenta particularidades que o reduzem consideravelmente, viabilizando, assim, sua utilização. Essa discussão encontra-se na seção 3.

Na seção 4, descrevem-se os dados utilizados – amostras com frequência diária, de janeiro de 1997 a fevereiro de 2001 – e na seção 5, a comparação do desempenho empírico, geral e detalhado, dos métodos.

Destaca-se que este trabalho trata somente da curva de juros construída com contratos futuros negociados da BM&F. Não foram investigados os títulos emitidos pelo governo federal.

## 2. Interpolação, métodos disponíveis e *splines* cúbicos

A literatura apresenta algumas classes de funções aproximadoras para a estrutura a termo de taxas de juro. Duas linhas de pesquisa de naturezas distintas têm sido desenvolvidas. A primeira baseia-se em modelos de equilíbrio geral – por exemplo, Cox, Ingersoll e Ross (1984) – ou não arbitragem (Vasicek, 1977). Apesar de teoricamente robustos, estes modelos não possuem um bom ajuste aos dados. A segunda busca estimar a curva a partir de preços observados de ativos negociados em função de suas respectivas maturidades e de informações *a priori* sobre a natureza da curva de juros. Estas últimas vêm de fatos estilizados sobre curvas de juros disponíveis na literatura financeira e do conhecimento do mercado local, em particular<sup>1</sup>. O interesse deste trabalho recai na segunda linha.

Diversos autores buscaram estimar a curva de juros empregando modelos paramétricos, tais como: Fisher (1966), Echols e Elliott (1976), Dobson (1978), Heller e Khan (1979), Chambers, Carleton, Waldman (1984), Cohen, Kramer e Waugh (1986) e Nelson e Siegel (1987). Dado o sucesso parcial dos modelos paramétricos, modelos não-paramétricos têm recebido grande atenção. Em particular, destacam-se os *splines*.

O *spline* é um conjunto de polinômios de baixo grau, conectados em certos pontos chamados de nós (*knots*) de modo que formem uma função contínua em um intervalo. Como será visto, impõem-se limites sobre os nós para que o problema tenha solução. Tais restrições buscam também garantir a suavidade da estimação total<sup>2</sup>.

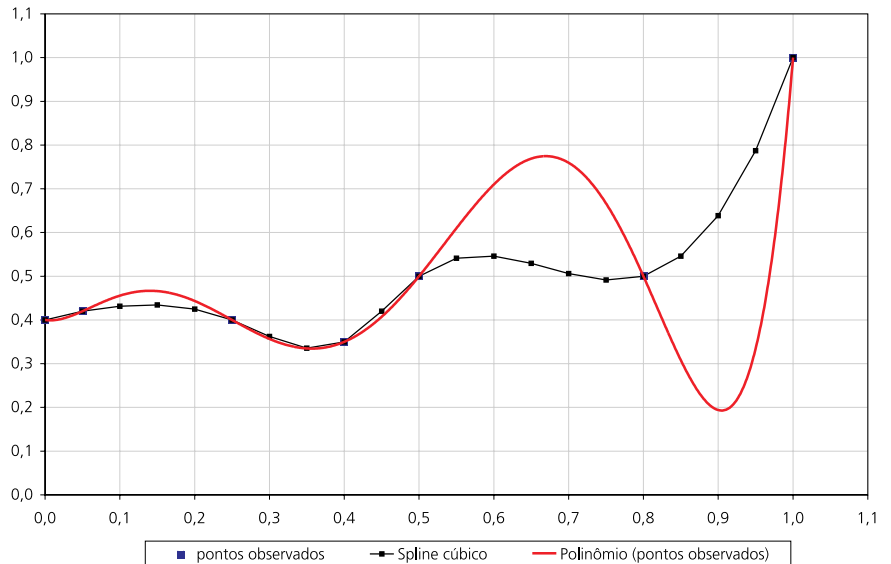
O *spline* foi inicialmente desenvolvido para resolver a interpolação de funções suaves, já que reduz substancialmente as instabilidades inerentes aos polinômios de alta ordem. A Figura 1 ilustra bem essa característica: 7 pontos são ajustados por um *spline* cúbico e um polinômio de grau 6.

McCulloth (1971 e 1975) deu início a pesquisas que visam estimar a estrutura a termo das taxas de juro dos títulos *zero-coupon* tendo como referência amostra de títulos que pagam cupom utilizando *splines*. O autor estima a função de desconto a partir de um *spline* com regressão. O problema dessa metodologia é que a função de desconto é aproximadamente exponencial – e os *splines*, sendo funções geradas a partir de polinômios, possuem curvatura diferente da função a ser estimada. Por isso, não são recomendáveis para a estimação da função de desconto, em particular em

<sup>1</sup> Campbell (2000) faz uma revisão sobre fatos estilizados em curvas de juros composta por títulos do Tesouro norte-americano.

<sup>2</sup> Os *splines* foram motivados para desenhar curvas suaves. Nesse procedimento, os pontos eram postos em um gráfico e uma fina vareta elástica (de borracha ou madeira), chamada *spline*, era colocada sob pressão por pesos para que ela passasse por todos os pontos. A vareta fornecia, então, interpolação suave dos dados.

Figura 1 – Aproximação de 7 pontos



grandes maturidades. Além disso, o *spline* cúbico gera uma taxa que diverge quando a maturidade vai a infinito. Para evitar isso, Vasicek e Fong (1982) sugerem o uso de um *spline* aplicado à transformação exponencial dos dados. Dessa forma, a taxa de juro limite converge. No entanto, a taxa e a velocidade de convergência são determinadas pelas restrições do *spline*, e não por teoria econômica ou por dados.

Apesar do claro avanço sobre a interpolação polinomial, os *splines* exponenciais ainda apresentam problemas de instabilidade. Shea (1985) mostra que, na prática, não existem evidências de que tais *splines* tenham melhor desempenho que os *splines* padrão, pois a estrutura a termo estimada pelos exponenciais não é mais estável do que a gerada pelos *splines* polinomiais. Tanto mais punitiva será essa característica, quanto maiores os ruídos existentes nos dados.

Um passo a frente para diminuir esse problema foi a proposição de *splines* com suavização. Fisher, Nychka e Zervos (1995) estimam um *spline* cúbico que minimiza a soma dos erros quadráticos médios de funções da estrutura a termo das taxas de juro, buscando ajustar o *trade off* entre suavização da curva e ajuste aos pontos. Esse método gera taxas a termo estáveis e, ao contrário dos *splines* com regressão, não determina de maneira *ad-hoc* o número e a localização dos nós: quanto maior o peso dado à suavização, menor será o número de parâmetros do *spline*. Waggoner (1997) estima modelo semelhante, embora mais flexível para fazer com que o ajuste seja melhor em taxas de menor maturidade.

A curva de juros brasileira apresenta duas características que a distinguem da norte-americana. A primeira é que, enquanto nos Estados Unidos os títulos pagam cupom, no Brasil as negociações são baseadas em contratos que não o pagam. Isso significa que aqui, ao contrário dos Estados Unidos, observam-se as taxas a vista (de títulos *zero-coupon*). Essa simplificação elimina vários problemas abordados em diversos modelos. Por outro lado, a curva brasileira é composta de poucas observações (cinco a 12 contratos líquidos) quando comparada à norte-americana (mais de 150 títulos). Sob a luz desses dois comentários, o conjunto dos modelos adequados à realidade brasileira reduz-se aos *splines* cúbicos.

Este artigo irá concentra-se na interpolação da curva de juros. Considere os pontos  $y_1 = g(x_1), \dots, y_n = g(x_n)$ , onde  $a = x_1 < \dots < x_n = b$ . O problema de interpolação consiste em construir uma função contínua  $f$  que permita o cálculo de  $g(z)$ , sendo  $z$  um ponto interior do intervalo definido por  $a$  e  $b$ .

Caso  $z$  esteja fora do intervalo definido por  $a$  e  $b$ , o problema é dito extrapolação – bem mais difícil que a interpolação e que não será investigado neste trabalho.

Neste trabalho,  $g(x_j)$  é a taxa de juro a vista para a maturidade  $x_j$ . São comuns na literatura, estimações a partir da taxa a termo e da função desconto<sup>3</sup>. Nosso problema é estimar uma curva contínua utilizando os pontos observados e informações *a priori* sobre a estrutura a termo da taxa de juro. Esta curva irá fornecer, então, previsões para taxas para as quais não exista um ponto na curva de juros. Aqui, entende-se previsão como o valor da função  $f(v)$ , dado que o par ordenado  $(v, yv)$  não tenha participado da estimação dos parâmetros de  $f$ . Neste contexto, a palavra previsão é desprovida do sentido usual em séries de tempo.

O *spline* mais comum na literatura financeira é o cúbico. Veja-se o porquê. Para que as curvas a termo sejam contínuas, é preciso que a curva a vista tenha pelo menos uma derivada contínua – e o *spline* quadrático é o de menor ordem para estimar uma curva com essas propriedades. Além disso, se o objetivo for que a curva de juros a termo seja continuamente diferenciável, o *spline* de menor grau a ser utilizado deverá ser o cúbico.

Quando o problema apresenta grande número de pontos, a decisão de quais deles serão nós pode ser uma questão importante (McCulloch, 1975; Fisher, Nychka e Zervos, 1995). Quando o número de pontos é limitado, como no caso da curva brasileira, não há muita escolha senão selecionar todos os pontos disponíveis como nós. Nesse caso, o *spline* gera uma curva que se ajusta perfeitamente a todos os pontos observados. A seguir, analisa-se detalhadamente o *spline* cúbico.

Sendo  $f$  um *spline* cúbico, a construção de  $f$  ocorre da seguinte maneira: para cada intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $f$  deve ser igual a um polinômio cúbico  $P_j$ , ou seja:

$$P_j(x) = a_{0j} + a_{1j}x + a_{2j}x^2 + a_{3j}x^3 \quad (1)$$

$$f(x) = P_j(x) \text{ para cada } x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 1, \dots, n-1$$

Quer-se que  $f$  seja contínua e com derivadas, primeira e segunda, contínuas no intervalo  $[a, b]$ . Além disso,  $f$  deve ser igual a  $g$  nos pontos  $x_1, \dots, x_n$ . Para que  $f$  satisfaça as condições acima, impõem-se as seguintes condições:

$$\begin{aligned} P_j(x_j) &= g(x_j), & j &= 1, \dots, n-1 \\ P_j(x_{j+1}) &= g(x_{j+1}), & j &= 1, \dots, n-1 \\ P'_j(x_j) &= s_j, & j &= 1, \dots, n-1 \\ P'_j(x_{j+1}) &= s_{j+1}, & j &= 1, \dots, n-1 \\ P''_{j-1}(x_j) &= P''_j(x_j), & j &= 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Onde  $s_1, \dots, s_n$  são parâmetros a serem delimitados pelo modelo. Uma vez fixados os valores desses parâmetros, cada polinômio  $P_j$  estará bem determinado e, portanto, a construção de  $f$  terá chegado ao fim. O problema agora é mostrar como os parâmetros  $s_1, \dots, s_n$  podem ser identificados.

De Boor (1978) mostra que as restrições acima impostas garantem que se pode montar um sistema com  $n-2$  equações lineares cujas incógnitas são  $s_1, \dots, s_n$ . Se for suposto que de alguma forma podem-se identificar os parâmetros  $s_1$  e  $s_n$ , o sistema acima terá  $n-2$  equações e  $n-2$  incógnitas, podendo ser resolvido para cada  $s_j$  de forma única e fechada.

A identificação desse sistema possibilita variações do *spline* cúbico. Seguem três delas.

<sup>3</sup> A função desconto é uma função da maturidade que mede o valor presente de uma unidade monetária naquela data. Em outras palavras, a função desconto traz a valor presente o valor de um título zero cupom de preço unitário.

**a) Spline cúbico completo**

Se as derivadas da função a ser interpolada são conhecidas em  $x_1$  e  $x_n$ , então devem-se, obviamente, escolher  $s_1 = g'(x_1)$  e  $s_n = g'(x_n)$ .

**b) Spline cúbico natural**

Se for imposta a condição de que  $f''(x_1) = f''(x_n) = 0$ , geram-se mais duas equações que podem ser incorporadas no sistema original, ficando assim com  $n$  equações (as  $n - 2$  anteriores mais as duas advindas da suposição acima) e  $n$  incógnitas. No entanto, segundo de Boor, "a despeito de seu nome sugestivo, o *spline* natural não tem muito o que recomendar do ponto de vista de teoria de aproximação. A hipótese arbitrária reduz dramaticamente a taxa de convergência geral do método de interpolação". No entanto, conforme o próprio autor afirma, a advertência acima não faz sentido se, de fato, for verdade que  $g''(x_1) = g''(x_n) = 0$ .

**c) Spline cúbico Not-a-knot**

Caso não se tenha nenhuma informação a respeito das derivadas nos pontos  $x_1$  e  $x_n$ , de Boor aconselha a escolher a *not-a-knot condition*. Esse método consiste em escolher  $s_1$  e  $s_n$  de modo que  $P_1 = P_2$  e que  $P_{n-2} = P_{n-1}$ ; ou seja, os dois primeiros e os dois últimos polinômios sejam iguais. Assim, de forma análoga ao *spline* natural, geram-se mais duas equações que podem ser incorporadas ao sistema original.

As variações do *spline* cúbico não se limitam às três citadas. Os fatos estilizados na curva de juros podem ser utilizados para impor restrições ao sistema que gerem um *spline* mais consistente com tais características. Segundo Campbell (2000), em média, a curva de juros gerada por títulos do Tesouro norte-americano é positivamente inclinada e altamente côncava (isto é, sua inclinação declina rapidamente com a maturidade). Daqui em diante, denota-se por curva de juros típica aquela que apresenta essas qualidades.

As três variações do *spline* cúbicos serão confrontadas com os seguintes métodos de interpolação do mercado de renda fixa brasileiro: *pro rata* do fator diário e interpolação linear parte-a-parte do preço unitário (PU) de DI futuro.

**– Pro rata do fator diário**

A idéia básica desse método é que as taxas a termo são constantes entre dois contratos adjacentes. Dessa forma, dada a maturidade  $x$  qualquer,  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ , tem-se que o fator diário (ou seja, a taxa a termo entre o dia  $x$  e o dia  $x + 1$ ) do dia  $x$ , denotado por  $f(x)$ , é igual a:

$$f(x) = \left( \frac{[1 + r(x_{j+1})]^{x_{j+1}}}{[1 + r(x_j)]^{x_j}} \right)^{\frac{252}{x_{j+1} - x_j}} \quad (2)$$

A taxa de juro a vista com maturidade igual a  $x$  é igual a:

$$r(x) = \left[ \left( \prod_{i=0}^x (1 + f(i)) \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right] \times 100 \quad (3)$$

**– Interpolação linear parte-a-parte do preço unitário**

Seja  $x$  um ponto qualquer da curva de juros tal que  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ . Sendo  $r(x)$  a taxa de juro a vista para um contrato de maturidade  $x$ , o preço unitário (PU) do contrato é dado por:

$$PU(x) = \frac{100.000}{[1 + r(x)]^{\frac{x}{252}}} \quad (4)$$

Para calcular  $PU(x)$ , basta interpolar de modo linear o PU dos contratos adjacentes pela equação (5):

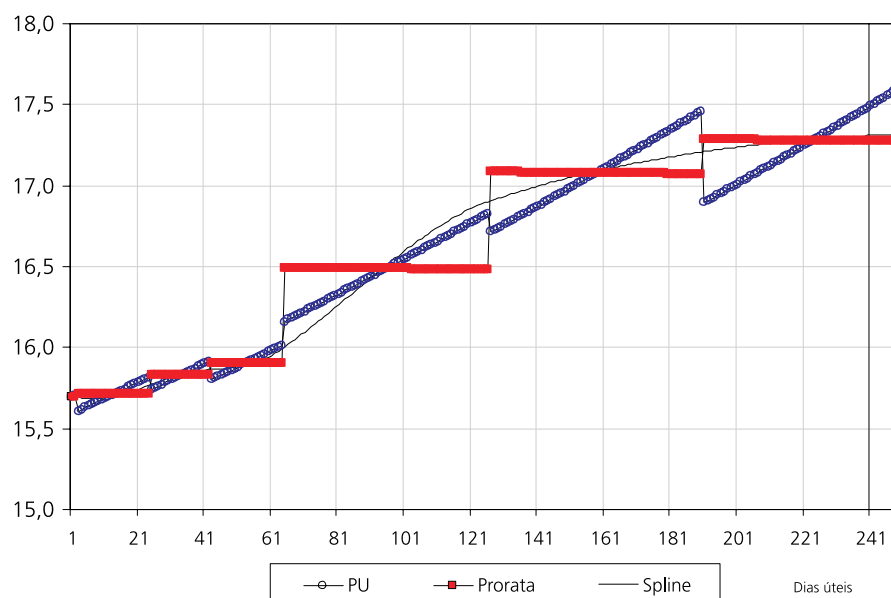
$$PU(x) = PU(x_j) + \frac{PU(x_{j+1}) - PU(x_j)}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j) \quad (5)$$

O principal ponto de avaliação teórica de um modelo de interpolação diz respeito ao formato da curva a termo assumido pelo método de interpolação. A Figura 2 mostra a curva a termo estimada pelos métodos PU linear, *pro rata* e *spline* cúbico em um dia no qual se registrou uma típica curva de juros a vista.

Por construção, tanto a curva estimada pelo PU linear como pelo *pro rata* apresentam descontinuidades nos pontos em que existem contratos negociados. Já o *spline* cúbico produz uma curva a termo contínua. Não existe razão alguma para supor que a curva a termo possua tais descontinuidades. Desse modo, acredita-se que o *spline* cúbico, dentre os métodos avaliados, é o que gera a curva a termo que mais se aproxima da realidade.

Duas conclusões decorrem desse fato. A primeira é que, em dias nos quais a curva de juros tem comportamento típico, o método *pro rata* tende a superestimar as taxas a vista. Esse viés ocorre uma vez que a taxa a vista é igual à média das taxas a termo da data presente até a maturidade daquela taxa. A Figura 2 revela que a área embaixo da curva de juros a termo gerada pelo método *pro rata*, em dias de curva de juros típica, é sempre maior ou igual à área embaixo da curva gerada pelo *spline* (a igualdade se dá em maturidades nas quais há contratos negociados). Portanto, a curva a vista estimada pelo método *pro rata* estará acima da prevista pelo *spline*. A segunda conclusão é que o PU linear funciona bem para pequenas maturidades (de acordo com o gráfico, até uma maturidade de 127 dias úteis, as taxas a termo geradas pelo PU linear aproximam-se da gerada pelo *spline*), pois suas descontinuidades são pequenas nessa faixa.

**Figura 2 – Curva a termo gerada por interpolação na curva a vista (% ao ano)**





### 3. Seleção do método

O objetivo dessa seção é propor um critério para selecionar o método de melhor desempenho na tarefa de interpolar a curva de juros durante o período definido por  $T$  dias. Para tanto, serão utilizados os conceitos de seleção de modelos discutidos na primeira subseção. A segunda especifica o critério adotado para escolha do melhor método.

Como será visto, os critérios de seleção de modelos oferecem regras de decisão para aferir o melhor desempenho em determinada curva de juros. Na verdade, a intenção é ir um pouco além e estender essas regras a um conjunto de curvas. Por entender-se modelo como uma função aproximadora com seus parâmetros estimados para cada uma das curvas da amostra de trabalho, e por clareza de nomenclatura, define-se o melhor método como aquele cujos desempenhos contabilizados em todas as curvas do período analisado sejam extremos, conforme o funcional definido a seguir. Por exemplo, os *splines* cúbicos natural e completo são diferentes métodos. Portanto, as estimações desses *splines* formam outros dois modelos.

#### 3.1. Seleção de modelo

O melhor modelo pode não ser aquele que otimiza uma medida de ajuste dos dados da amostra disponível na estimação dos parâmetros. De fato, a modelagem deve buscar a minimização de erros para dados ainda não vistos quando da estimação. Em termos formais, ela deve buscar a minimização dos erros da população. Isso porque a amostra pode conter ruídos que não são pertinentes à população e, portanto, podem gerar desvios para observações não utilizadas. Uma medida de ajuste muito popular é o erro quadrático médio (EQM).

Para evitar que o modelo capture ruídos (amostrais), é preciso otimizar sua complexidade, cuja primeira definição é a capacidade de explicar os dados observados sem erro. No caso específico de métodos lineares, complexidade pode ser parametrizada pelo número de graus de liberdade.

Como, então, escolher a melhor metodologia disponível sob a luz desses argumentos? Estatisticamente, esse problema é conhecido como seleção de modelo: tarefa de escolher um modelo de complexidade ótima a partir de uma amostra finita de dados. A literatura estatística aponta dois caminhos para isso: o analítico e reamostragem. Em ambos, o controle da complexidade é posterior à estimação<sup>4</sup>.

Os critérios analíticos para seleção de modelos buscam penalizar a medida de ajuste dos dados na estimação com o aumento da complexidade. Hardle (1988) nota que todos os critérios conhecidos para avaliar estimadores lineares de regressão podem ser escritos como uma função do erro quadrático médio na estimação dos parâmetros  $w$  da função aproximadora ( $EQM_{emp}$ ):

$$EQM(w) = r(h/n) EQM_{emp}$$

onde  $r$  é uma função monotonicamente crescente da razão entre  $h$  graus de liberdade e o tamanho da amostra,  $n$ . Os critérios diferem na função  $r$ , ou seja, na forma de penalização. Alguns exemplos de critérios analíticos: Akaike (1970), Schwartz (1978) e Shibata (1981).

Dois problemas envolvem esses critérios. O primeiro é que todos eles são motivados por argumentos assintóticos para estimadores lineares. São válidos, portanto, para amostras grandes – certamente, o número de contratos líquidos negociados diariamente no Brasil não pode ser caracterizado como tal. O segundo é que, como os *splines* são funções que se ajustam perfeitamente aos

<sup>4</sup> Aqui, furta-se de comentar o problema de buscar a condição ótima da complexidade do modelo já no momento da estimação dos parâmetros. Cherkassky e Muller (1998) apresentam as propostas atuais para o assunto.

dados, o  $EQM$  é zero. Em suma, esses estimadores não são úteis aqui. Passa-se, agora, à reamostragem.

As técnicas de reamostragem partem de um princípio simples: dividir a amostra em duas partes disjuntas, uma para estimação dos parâmetros e outra para testar o modelo.

Testar o modelo significa avaliar a medida de desempenho ( $EQM$ , por exemplo) sobre dados não-observados na estimação (teste dito fora da amostra). Ou seja, avaliam-se os erros de previsão. Chame-se a parte da amostra destinada à estimação de conjunto de treinamento; e aquela para teste, de conjunto de validação. Tendo a amostra  $n$  elementos,  $n_t$  será a cardinalidade do conjunto de teste e  $k$  a cardinalidade do conjunto de validação ( $n = n_t + k$ ). O modo de dividir a amostra gera diferentes estratégias de reamostragem. Nota-se que, dado um  $n_t$ , existem  $\binom{n}{n_t}$  maneiras de particionar a amostra.

A estratégia mais simples de reamostragem divide aleatoriamente os dados em duas partes: em geral, 70% para treinamento e 30% para validação. A hipótese motivadora é que ambas vêm da mesma distribuição de probabilidade  $P(x, y)$  – desconhecida. Isso pode ser razoável para grandes amostras; para pequenas, não. Para as pequenas, a estratégia de divisão da amostra passa a ser relevante na acurácia da estimação – o valor de  $n_t$  e a subamostra ganham papéis importantes.

Para diminuir o impacto dessa dependência, pode-se empregar outra estratégia de reamostragem conhecida como *cross-validation*. Esta consiste em estimar o modelo em todas as combinações possíveis de partições e avaliar o desempenho do modelo na média.

Uma abordagem prática da *cross-validation* é a *k-fold-cross-validation*, que divide aleatoriamente a amostra em  $k$  subamostras  $S_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) disjuntas de iguais tamanhos. O procedimento é o seguinte:

- estimar os parâmetros em toda a amostra, exceto na subamostra  $S_i$ ;
- testar o modelo sobre  $S_i$  e calcular o erro quadrado das previsões  $EQ_i$ ;
- repetir os dois passos acima para as  $k - 1$  subamostras restantes;

- calcular o erro quadrático médio:  $EQM = \sum_{i=1}^k EQ_i$ .

Valores típicos para  $k$  estão entre 5 e 10. Outra abordagem muito conhecida, que é caso especial da anterior, é a *leave-k-out cross-validation*, que fixa um valor de  $k$  e realiza todas as combinações possíveis. O tipo mais popular é o *leave-one-out*,  $k = 1$  (Stone, 1974). Nota-se que, o *leave-k-out cross-validation* colapsa cada uma das  $k$  subamostras do *k-fold-cross-validation* em um elemento apenas. Breiman e Spector (1992) apresentam evidência empírica que o *k-fold-cross-validation* obtém melhores resultados que o *leave-one-out*.

A principal vantagem da reamostragem sobre os critérios analíticos é que ela não depende de hipóteses acerca das estatísticas dos dados nem de propriedades específicas das funções aproximadoras. A desvantagem é o potencial custo computacional. Os argumentos de Rivals e Personnaz (1999) em prol dos critérios analíticos contra o *leave-one-out* não encontram boa aceitação no problema em questão.

## 3.2. Critério adotado

Pelos motivos listados, a avaliação e a seleção do melhor método serão feitas com base em reamostragem do tipo *leave-k-out cross-validation*. Não se limitará a usar o *leave-one-out*: chega-se a valores superiores a 1, com limitações para o valor máximo de  $k$ .

É preciso um pouco de cuidado nesse tópico. Como o próprio nome diz, os critérios de seleção de modelo definem regras para selecionar um dentre um conjunto de modelos estimados para a curva de determinado dia. Como a



curva de juros do Brasil envolve pequena amostra, a partir de um valor de  $k$ , podem-se estar alterando os parâmetros do *spline* a ponto de não mais se tratar do mesmo modelo. Aqui, isso não é um problema, já que o objetivo é identificar o método mais robusto para um caso específico.

Dispondo de um conjunto de  $n$  pontos, a expressão (6) totaliza o número de combinações obtidas com a estratégia de *leave-k-out*, onde  $k$  vai de 1 a  $n - 1$ .

$$C_0(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{n-k} \quad (6)$$

Tendo uma curva composta de dez pontos (aplicação de *leave-k-out*),  $k = 1, 2 \dots 9$ , seriam obtidas 1.022 combinações possíveis para avaliar. O problema de interpolação da curva de juros com *splines* cúbicos, contudo, é que eles oferecem peculiaridades que diminuem consideravelmente o número de combinações.

A primeira delas é que a definição de interpolação exige a presença de pelo menos dois pontos observados na estimação. Decidiu-se deixar sempre como pontos observados os contratos de maior e de menor maturidade. Assim, o número de combinações para avaliação reduz-se:

$$C_1(n, k) = \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{n-2-k} \quad (7)$$

Para a curva com dez pontos, o número de combinações cai para 255, redução de 75%. A segunda particularidade é inerente ao *spline* cúbico. Ele requer um mínimo de três pontos para realizar uma interpolação. Logo, o valor mínimo de  $n$ , será de três. Portanto, com dez contratos observados, pode-se deixar fora da estimação, para validação posterior, 7 ( $k$  máximo é reduzido para  $n - 3$ ). Dispondo de apenas três pontos, todas as variações do *spline* cúbico geraram os mesmos resultados, por construção. Para que haja diferentes efeitos entre os *splines* cúbicos, o valor máximo de  $k$  tem de ser mais uma vez reduzido: vai para  $n - 4$ . Obtém-se, então, o número de combinações dado por:

$$C_2(n, k) = \sum_{k=1}^{n-4} \binom{n-2}{n-2-k} \quad (8)$$

Essas novas restrições reduzem para 246 o número de possíveis combinações de uma curva de juros com dez pontos. O número de previsões para as taxas de juro de todos os contratos em um dia é:

$$D = \sum_{k=1}^{n-4} D(n, k) = \sum_{k=1}^{n-4} k \cdot \binom{n-2}{n-2-k} \quad (9)$$

Dado  $k$ , geram-se  $D(n, k)$  previsões referentes ao  $i$ -ésimo contrato a ser interpolado, onde:

$$D_i(n, k) = D(n, k)/(n - 2) \quad (10)$$

Define-se como o melhor método de interpolação para o dia  $t$  aquele que consegue o menor valor para o erro quadrático médio sobre todas as  $D$  previsões geradas pela metodologia acima proposta, definido a seguir:

$$EQM = \frac{1}{D} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-4} \sum_{j=1}^{D_i(n,k)} (y_i - \hat{y}_i^{k,j})^2 \quad (11)$$

Para  $T$  dias, o número de previsões é dado por  $D_T$  em (12). Nota-se que tanto o valor de  $n$  quanto o de  $k$  podem variar dentro da amostra.

$$D_T = \sum_{t=1}^T \sum_{k_t=1}^{n_t-4} D(n_t, k_t) \quad (12)$$

Pode-se estabelecer o critério de seleção. Define-se o melhor método de interpolação para o período  $T$  como aquele que obtém o menor valor para o funcional:

$$EQM_T = \frac{1}{D_T} \sum_{t=1}^T D_t EQM_t \quad (13)$$

A expressão (13) computa o erro quadrático médio de todas as previsões em todos os dias analisados. Nota-se que o critério de seleção adotado avalia conjuntamente os erros de previsão gerados pelas estratégias *leave-1-out*, *leave-2-out*, ..., *leave-(n-4)-out*.

#### 4. Dados

O período para análise abrange de 1º de janeiro de 1997 a 28 de fevereiro de 2001. A curva de juros a vista observada é composta das taxas de juro a vista anualizadas, embutidas nos contratos de DI futuro do primeiro ao décimo mês e nos *swaps* DI x pré de um e dois anos. O regime de capitalização é exponencial e baseia-se em dias úteis. Apenas os contratos mais negociados foram selecionados.

A escolha de trabalhar com dias úteis, e não com dias corridos, não é arbitrária. Testes preliminares com dias corridos geraram resultados insatisfatórios. Por fim, tentou-se também utilizar o CDI de um dia para agregar mais informação para os métodos de interpolação, mas os resultados também não foram animadores.

A interpolação linear parte-a-parte requer o preço unitário que fornece a taxa de juro a vista. Como o *swap* DI x pré é negociado diretamente em taxas, é preciso calcular seu PU equivalente. A fórmula seguinte realiza essa tarefa:

$$PU(x) = 100.000 / [1 + r(x)]^{x/252} \quad (14)$$

#### 5. Desempenho empírico dos métodos

Os resultados apresentados comparam o desempenho na interpolação dos três tipos de *splines* cúbicos, do *pro rata* e do PU linear parte-a-parte. Seguem as abreviações:

- *splc*: é o *spline* completo com derivadas primeiras igual a zero nas extremidades;
- *splk*: é o *spline* calculado com a *not-a-knot condition*;
- *spln*: é o *spline* natural;
- *pro rata*: *pro rata*;
- *pulin*: PU linear parte-a-parte.

##### 5.1. Qual dos métodos apresenta melhor desempenho?

A Tabela 1 mostra, para cada método, o  $EQM_T$ . O melhor, segundo o critério de seleção de método adotado, foi o *spline* cúbico natural. Isso ocorre porque este obtém o melhor ajuste do *trade off* média-variância de previsão:

não apresenta viés e tem o menor desvio-padrão dentre os demais. O *pro rata* também obteve ótimo desempenho, sendo ligeiramente inferior ao *spline* cúbico natural.

**Tabela 1 – Erro quadrático médio em todo período (%)**

Método	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>	$D_t$
$EQM_t$	0,50	0,82	0,27	0,38	0,28	902.451

Como a amostra toda engloba regimes e ambientes de negócios diferentes, decidiu-se dividi-la em três subperíodos:

- **subperíodo A** (janeiro de 1997 a junho de 1999): vigora o sistema de bandas cambiais e fase imediatamente posterior à desvalorização cambial;
- **subperíodo B** (julho de 1999 a outubro de 2000): a política monetária é guiada pelo regime de metas de inflação;
- **subperíodo C** (novembro de 2000 a fevereiro de 2001): o motivo para separá-lo do período anterior foi um normativo da BM&F, de agosto de 2000, que resultou na diminuição dos contratos observados. A Bolsa impôs a negociação apenas de contratos em meses de cabeça de trimestre a partir do quarto vencimento. Mas apenas em novembro esse regime vigorou, quando os contratos remanescentes fecharam.

A Tabela 2 apresenta o erro quadrático médio das previsões para os três subperíodos. No primeiro, o método que obteve o melhor desempenho foi o *pro rata*. Nos segundo e terceiro, os *splines* natural e completo foram superiores.

**Tabela 2 – EQM das previsões (%)**

Subperíodos	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>	$D_{\text{subperíodos}}$
<b>A</b>	1,57	2,56	0,86	1,04	0,67	282.063
<b>B</b>	0,01	0,03	0,01	0,08	0,11	609.468
<b>C</b>	0,01	0,15	0,01	0,11	0,04	10.920

Para detalhar mais a análise, desdobra-se o erro quadrático médio em viés e variância. As Tabelas 3 e 4 expõem, respectivamente, a média e o desvio-padrão dos erros por método.

**Tabela 3 – Média dos erros de previsão (%)**

Subperíodos	Métodos					$D_{\text{período}}$
	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>	
<b>A</b>	-0,05	0,02	0,00	0,37	0,04	282.063
<b>B</b>	0,01	-0,01	0,00	0,02	-0,17	609.468
<b>C</b>	0,00	-0,05	0,00	0,18	-0,15	10.920
<b>Total</b>	-0,01	0,00	0,00	0,13	-0,10	902.451

Com relação ao erro médio, os *splines* têm desempenhos excelentes e muito parecidos. Em particular, o *spline* cúbico natural não apresenta viés em nenhum subperíodo. O PU linear parte-a-parte se afasta dos *splines*, com viés positivo, no subperíodo mais recente. Já o *pro rata* apresenta claro viés negativo, o que, por construção, é esperado em dias típicos.

Analisa-se o valor médio dos erros de interpolação do *spline* cúbico natural de duas óticas: do negócio e da estatística. Em todos os subperíodos, o

valor médio dos erros é inferior a 0,01%. Isso significa que a média dos erros de interpolação está dentro do *bid-ask spread* dos contratos, ou seja, do ponto de vista do negócio, ela é igual a zero. Como a frequência dos erros não passou no teste de normalidade, não se pôde utilizar o teste paramétrico para média. Decidiu-se, então, testar a hipótese nula de que a mediana é igual a zero a partir do teste não-paramétrico do sinal. Conclui-se que a mediana é zero aos níveis de significância usuais. Portanto, tanto em termos do negócio, quanto estatístico, a interpolação pelo *spline* cúbico natural não é viesada na referida amostra.

**Tabela 4 – Desvio-padrão dos erros de previsão (%)**

Subperíodos	Métodos					$D_{\text{período}}$
	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>	
<b>A</b>	1,25	1,60	0,93	0,95	0,82	282.063
<b>B</b>	0,10	0,18	0,08	0,29	0,29	609.468
<b>C</b>	0,09	0,39	0,10	0,27	0,12	10.920
<b>Total</b>	0,70	0,91	0,52	0,60	0,52	902.451

Para o período total, o desvio-padrão dos erros de previsão do *spline* cúbico natural e o do *pro rata* foram os mais baixos dentre todos os métodos testados, o que em grande parte explica a superioridade destes sobre os outros. Além disso, como ambos possuem o mesmo desvio-padrão, a superioridade do *spline* cúbico natural deve-se ao fato de ele não ser viesado, enquanto o *pro rata* apresenta forte viés negativo (isto é, tende a superestimar as taxas). Mais uma vez, a superioridade do método *pro rata* limitou-se ao primeiro subperíodo, tendo o *spline* cúbico natural o melhor desempenho nos demais.

A Tabela 5 exibe o “índice de acerto” dos modelos: fração dos erros de previsão cujos módulos são inferiores a 0,01%. Esse valor é a estimativa para a metade da média dos *bid-ask spreads* dos contratos negociados (estimação subjetiva elaborada pela mesa de juros do Icatu para a amostra em questão).

**Tabela 5 – Índice de acerto dos modelos por período**

Subperíodos	Métodos					$D_{\text{período}}$
	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>	
<b>A</b>	4%	4%	5%	4%	3%	282.063
<b>B</b>	20%	22%	24%	11%	9%	609.468
<b>C</b>	16%	15%	16%	8%	3%	10.920
<b>Amostra</b>	15%	16%	18%	9%	7%	902.451

O *spline* cúbico natural é o método com maior índice de acertos para qualquer um dos subperíodos estudados. Para o período total, seu índice de acerto próximo de 20% é bastante expressivo: um quinto das interpolações caem dentro do *spreads* de negociação, ou seja, considerando que existem imperfeições nos preços, o erro da interpolação é zero.

As Tabelas 2, 3 e 4 deixam nítida a diferença entre os padrões dos resultados no tempo. O subperíodo C é de particular relevância, já que, atualmente, os contratos de juros futuros seguem o regime de cabeça de trimestre imposto pela BM&F em agosto de 2000. Por esses dois motivos, a análise seguinte será restrita: de novembro de 2000 a fevereiro de 2001.

## 5.2. Os desempenhos dos métodos são invariantes ao $k$ ?

A Figura 3 mostra como o erro quadrático médio varia de acordo com o  $k$ . Para todos os métodos, o  $EQM_T$  sempre aumenta com o  $k$ . Os *splines* completo e natural possuem desempenho semelhante: o  $EQM_T$  é baixo e sua sensibilidade ao valor de  $k$  é pequena. Já o *pro rata* possui maior sensibilidade com relação a  $k$ , ainda que para o *leave-one-out* seu comportamento tenha sido parecido com o dos *splines*. O método PU linear e o *spline not-a-knot* apresentam desempenho sofrível, independente do valor de  $k$ .

A Tabela 6 apresenta os erros médios por método de acordo com a estratégia *leave-k-out*. Chamam a atenção os excelentes desempenhos dos *splines* completo e natural: a ausência de viés independe de  $k$ . Já o *pro rata*, quanto maior o  $k$ , mais viesada torna-se a estimativa das taxas interpoladas.

**Tabela 6 – Média dos erros de previsão por método e  $k$  (%)**

$k$	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>
1	0,00	0,02	0,00	0,09	-0,07
2	0,00	0,00	0,00	0,12	-0,09
3	0,00	-0,02	0,00	0,16	-0,13
4	0,01	-0,13	0,00	0,23	-0,20

A Tabela 7 mostra que, em relação ao desvio-padrão dos erros, os *splines* completo e natural e o *pro rata* possuem comportamento parecido. Os valores do desvio-padrão dos erros tendem a aumentar para esses métodos – e são aproximadamente os mesmos para todos os valores de  $k$ . Mais uma vez, o PU linear e o *spline not-a-knot* tiveram péssimo desempenho.

**Tabela 7 – Desvio-padrão dos erros de previsão por método e  $k$  (%)**

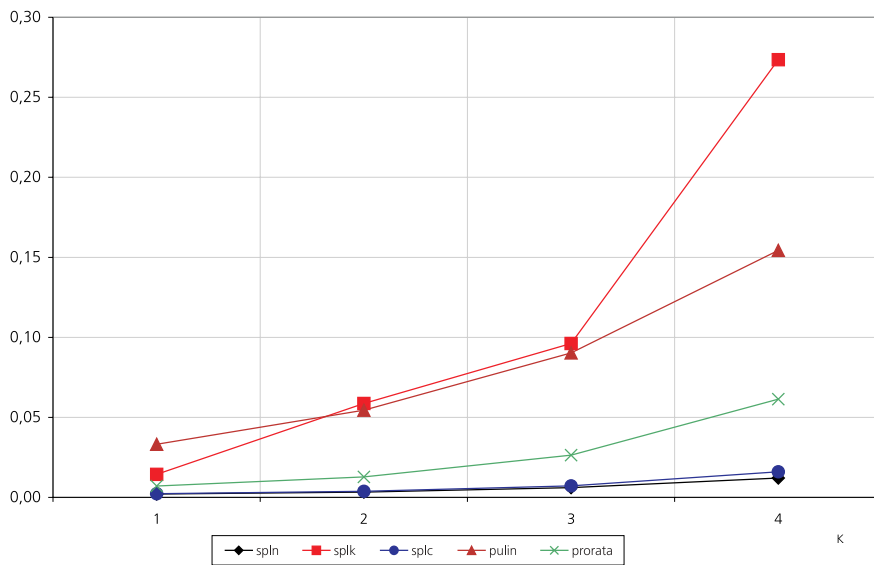
$k$	<i>Splc</i>	<i>Splk</i>	<i>Spln</i>	<i>Pulin</i>	<i>Pro rata</i>
1	0,046	0,119	0,048	0,160	0,051
2	0,057	0,242	0,062	0,202	0,068
3	0,078	0,310	0,085	0,255	0,097
4	0,110	0,507	0,127	0,317	0,144

## 6. Conclusão

Neste artigo, apresentou-se um sumário sobre os métodos de interpolação da curva de juros. Observou-se que vários deles não são adequados à realidade brasileira. Isso decorre do fato de que aqui as negociações são baseadas em contratos que não pagam cupom; e do pequeno número de contratos negociados com liquidez aceitável. Foram selecionados alguns métodos que mais se adaptam às especificidades da curva de juros brasileira: três variações dos *splines* cúbicos, o *pro rata* da taxa a termo e a interpolação linear do PU. Foi feita avaliação teórica dos cinco métodos selecionados a partir do formato da curva a termo por eles geradas. Os métodos *pro rata* e PU linear geram curvas a termo que apresentam descontinuidades, o que pode causar viés nas taxas interpoladas. Já os *splines* geram, por construção, curvas a termo contínuas.

Para poder comparar empiricamente os desempenhos dos métodos, foi preciso estabelecer um critério de seleção. Partindo da revisão da literatura estatística, concluiu-se que os critérios analíticos não foram úteis para esse trabalho. Propôs-se, então, a reamostragem, em que o melhor método de

**Figura 3 – EQM de previsão na subamostra C, segundo *leave-k-out***



interpolação é aquele que obtiver o menor erro quadrático médio das previsões geradas por  $k$  estratégias do tipo *leave-k-out cross-validation*, onde  $k = 1, 2, \dots, n - 4$ . O limite superior imposto a  $k$  decorre de especificidades dos métodos e da amostra. Isso diminuiu consideravelmente o esforço computacional requerido.

Segundo esse critério, o melhor método na amostra inteira foi o *spline* cúbico natural, com erro quadrático médio de 0,27. O erro médio foi muito baixo e dentro do *bid-ask spread* para todos os subperíodos. Pouco menos de 20% das previsões desse método caem dentro do *spread* de negociação. Os demais *splines* também não apresentam viés. O *spline* cúbico natural é o método que gera, junto com o *pro rata*, os erros com menor desvio-padrão. Dessa forma, concluiu-se que a superioridade do *spline* cúbico natural frente ao *pro rata* advém do fato de que este último tende a superestimar as taxas interpoladas em dias de curva de juros típica (ver Tabela 3).

A partir de estudo mais detalhado do comportamento dos erros de previsão dos métodos, verificou-se que o desempenho destes varia de acordo com o número de contratos deixados de fora da interpolação. À medida que cresceu o número de contratos deixados fora da estimação ( $k$ ), o desempenho do *pro rata* e do PU linear pioram muito, o que não ocorreu com alguns dos *splines*. Nota-se que estratégia de *leave-one-out* traria conclusões diferentes: os resultados do *spline* cúbico natural e do *pro rata* seriam muito parecidos.

## 7. Bibliografia

- ADAMS, Kenneth J., VAN DEVENDER, Donald R. Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves With Maximum Smoothness, *Journal of Fixed Income*, p. 52–62, June 1994.
- AKAIKE, H. Statistical Predictor Identification, *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 22, p. 203–217, 1970.
- BREIMAN, L., SPECTOR, P. Submodel selection and evaluation in regression the X-randon case, *Int. Rev. Stat.*, 3, p. 291–319, 1992.
- CAMPBELL, J., Lo, A., MACKINLAY, A. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1997.
- CHAMBERS, D.R., CARLETON, W.T. e WALDMAN, D.W. A New Approuch to the Estimation of the Term Strucutre of Interest Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, p. 233-252, September 1984.



- CHERKASSKI, V., MULIER, F. *Learning From Data*. Wiley-Interscience Publications, 1998.
- COHEN, K. J., KRAMER, R. L. e HOWARD, W.W. Regression Yield Curves for US Government Securities, *Management Science*, vol. 13, p. B168–B175, December 1966.
- COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, p. 385–408, 1985.
- DE BOOR, Carl. *A practical guide to splines*. Springer Publications, 1978.
- DOBSON, S. W. Estimating Term Structure Equations with Individual Bond Data, *Journal of Finance*, vol. 33, p. 75–92, March 1978.
- DURAND, D. Basic Yields of Corporate Bonds, *Technical Paper*, n. 3, Cambridge, Mass. NBER, 1942.
- ECHOLS, M. E. e ELLIOTT, J. W. A Quantitative Yield Curve Model for Estimating the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 11, p. 87–114, March 1976.
- FISCHER, D. Expectation, the Term Structure of Interest Rates and Recent British Experience, *Economics*, vol. 33, p. 319–329, August 1966.
- FISHER, M., NYCHKA, D., ZERVOS. Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing *Splines*, *Finance and Economics Discussion Series*, Working Paper 95-1. Federal Reserve Board, January 1995.
- GAUTSCHI, W. *Numerical analysis: an introduction*. Birkhäuser, 1997.
- HARDLE, W., HALL, P., MARRON, J. How Far are Automatically Chosen Regression Smoothing Parameters From Their Optimum?, *Journal of the American Statistical Association*, 83, p. 86–95, 1998.
- HELLER, H. R. e KHAN, M. S. The Demand for Money and the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Political Economy*, vol. 87, p. 109-129, February 1979.
- MCCULLOCH, J.H. The Tax-Adjusted Yield Curve, *Journal of Finance* 30, p. 811–830, June 1975.
- NELSON, C.R. e SIEGEL, A.F. Parsimonious Modeling of Yield Curves, *Journal of Business*, vol. 60, n. 4, p. 473–489, 1987.
- RIVALS, I., PERSONNAZ, L. On Cross-Validation for Model Selection, in *Neural Computation*, vol. 11, p. 871–901, 1999.
- SHEA, G. Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential *Splines*: A Note, *The Journal of Finance*, vol. 40, 1985.
- SHIBATA, R. An Optimal Selection of Regression Variables, *Biometrika*, vol. 68, p. 45–54, 1981.
- SHWARTZ, G. Estimating the Dimension of a Model, in *Ann. Stat.*, vol. 6, p. 461–464, 1978.
- STONE, M. Cross-Validatory Choice and Assessment of Statistical Predictions, *Royal Statistical Society*, 1973.
- VAPNIK, V. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer Publications, 2000.
- VASICEK, O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, p. 177–188, 1977.
- \_\_\_\_\_, FONG, H.G. Term Structure Modeling Using Exponential *Splines*, *Journal of Finance*, 37, p. 339–356, 1977.
- WAGGONER, D.F. *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*, *Working Paper 97-10*, Federal Reserve Bank of Atlanta, November 1997.

---

**André d'Almeida Monteiro** é gerente do Núcleo de Pesquisas do Grupo Icatu e pertence ao Departamento de Engenharia Elétrica da PUC/Rio. E-mail: andremonteiro@icatu.com.br.

**Felipe Monteiro de Salles** é analista do Núcleo de Pesquisas do Grupo Icatu, atualmente está no Departamento de Economia do London School of Economics. E-mail: f.m.salles@lse.ac.uk.