

3 de febrero de 2016

primer-p.tex

## 1. Logaritmos

Cuadro 1: Propiedades de los logaritmos

---

$\log_a a$	$=$	$1$
$\log_a 1$	$=$	$0$
$\log_a pq$	$=$	$\log_a p + \log_a q$
$\log_a \frac{p}{q}$	$=$	$\log_a p - \log_a q$
$\log_a p^q$	$=$	$q \log_a p$
$\log_a p$	$=$	$\frac{\log_b p}{\log_b a}$
$a^{\log_a x}$	$=$	$x$
$\log_a a^x$	$=$	$x$

---

Además,  $p \neq q \rightarrow \log_a(p) \neq \log_a(q)$

Veamos la siguiente *regla del cambio de base*:

Para todo  $x$  se cumple  $x^{\log_x(M)} = M$ . De esto se sigue  $a^{\log_a(b)} = b$  y  $b^{\log_b(M)} = M$ . Sustituyendo obtenemos:  $M = (a^{\log_a b})^{\log_b M}$  que es lo mismo que  $M = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$ . Con lo cual, tenemos:

$$a^{\log_a M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

De lo cual se sigue  $\log_a M = (\log_a b)(\log_b M)$  y finalmente:

$$\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)} \quad (1)$$

## 2. Funciones cuadráticas

El eje de simetría de una función cuadrática está dado por:

$$-\frac{b}{2a} = x_v$$

El valor extremo está dado por  $f(-\frac{b}{2a})$ , es decir:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = y_v$$

El vértice de la parábola está dado por el punto  $(x_v, y_v)$

Los ceros de la función se obtienen con la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se cumple la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

## 3. Límites

### 3.1. Definiciones

Definición de límite:

---

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{significa:}$$
$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) \forall x : 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{significa:}$$
$$(\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq a) \quad 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad \text{significa:}$$
$$(\forall \epsilon > 0 \exists N \forall x) \quad x > |N| \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

---

Cuadro 2: Reglas sobre límites

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (k + f(x)) = k + \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \log(f(x)) = \log\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^n$$

$$\sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ continuas, definidas en } [a, b]. \\ c \in (a, b), f(a) = f'(a) = 0 \text{ o bien } \pm\infty \\ \text{(L'Hopital)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } b_n, c_n \rightarrow L \\ \text{y } b_n \leq a_n \leq c_n \end{array} \quad \text{luego } a_n \rightarrow L \quad \text{(Sandwich)}$$

Cuadro 3: Algunos ejemplos de límites

---

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$	=	$\infty$	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)$	=	1	
$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^n - 1}{x - 1} \right)$	=	$n$	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^n - 1}{x - 1} \right)$	=	$\infty$	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$	=	$e^{-1}$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x$	=	0	
$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$	=	1	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$	=	1	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{x}$	=	4	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{ax}$	=	1, $a \neq 0$	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - a}{x - a}$	=	1	
$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$	=	$-\infty$	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)$	=	$\infty$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x}$	=	0	por L'Hopital

---

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

### 3.2. Regla de L'Hopital

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  tales que son

- funciones continuas en un entorno de  $a$ ,
- con derivadas en dicho entorno,
- siendo  $g(x) \neq 0$  cerca de  $a$ ,
- con

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

- y existe el

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 4. Continuidad

**Definición 4.1** (Continuidad de una función). *Una función  $f(x)$  es continua en el punto  $x_0$  si está definida en la vecindad de dicho punto y*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

*O, lo que es igual:*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

*Y como  $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$ , también podemos escribir:*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

*Lo que es igual a:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

## 5. Derivadas

**Definición 5.1** (Derivable en  $a$ ). *La función  $f$  es derivable en  $a$  si existe*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Teorema 5.1.** *Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces es continua en  $a$ .*

**Teorema 5.2.**

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} &= \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \\ &= \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)} \end{aligned}$$

Y como  $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$  se deduce entonces que

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

□

Corolario:  $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$ .

*Demostración.*  $\ln(e) = 1$

□

### 5.1. Reglas de derivación

**Teorema 5.3** (Regla de la cadena).

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x) \quad (2)$$

**Teorema 5.4.**

$$(y^u)' = y^u \left( u' \ln y + \frac{uy'}{y} \right)$$

**Teorema 5.5** (Teorema de la función inversa).

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### 5.2. Algunos teoremas sobre el comportamiento de las funciones

**Definición 5.2** (Punto máximo). *Sea  $f$  una función y  $A$  un conjunto contenido en su dominio. Un punto  $x$  de  $A$  se dice que es **punto máximo** de  $f$  sobre  $A$  si*

$$(\forall y \in A) \quad f(x) \geq f(y) \quad (3)$$

**Definición 5.3** (Valor máximo). *El número  $f(x)$  recibe el nombre de **valor máximo** de  $f$  sobre  $A$  si  $x$  es su punto máximo.*

**Teorema 5.6.** *Sea  $f$  una función definida sobre  $(a, b)$ . Luego, si  $x$  es un máximo (para  $f$ ) sobre  $(a, b)$ , y  $f$  es derivable en  $x$ , entonces  $f'(x) = 0$ .*

Cuadro 5: reglas de derivación.  $x$  representa un variable,  $a$  y  $k$  constantes y  $u$  y  $v$  funciones de  $x$  .

$f$	$f'$
$k$	$0$
$kx$	$k$
$u + v$	$u' + v'$
$ku$	$ku'$
$vu$	$v'u + vu'$
$x^k$	$ku^{k-1}$
$u^k$	$ku^{k-1}u'$
$a^x$	$a^x \ln(a)$
$a^u$	$a^u (\ln a)u'$
$u^v$	$vu^{v-1}u' + u^v (\ln u)v'$
$y^v$	$y^v (v' \ln y + \frac{vy'}{y})$
$\log_a(x)$	$\left(\frac{1}{x}\right) \log_a(e)$
$\log_a(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right) \log_a(e)u'$
$\frac{k}{x}$	$-\frac{k}{x^2}$
$\frac{k}{u}$	$-\frac{ku'}{u^2}$
$\frac{v}{u}$	$\frac{v'u - vu'}{u^2}$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$\text{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\text{cotg}(x)$	$\frac{1}{\text{sen}^2(x)}$
$(f^{-1})'(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Es importante notar aquí que el recíproco de este teorema no es cierto. Es posible que se dé  $f'(x) = 0$  sin que por ello  $x$  sea un punto máximo. Este es el caso de  $f'(0)$  cuando  $f(x) = x^3$ .

**Definición 5.4** (Punto máximo (mínimo) local). *Un punto  $x$  es un máximo local de la función  $f$  sobre  $A$  si existe algún  $\delta$  tal que  $x$  es punto máximo sobre el conjunto  $A \cap (x - \delta, x + \delta)$ .*

**Teorema 5.7.** *Si  $f$  está definida sobre  $(a, b)$ , tiene un máximo local en  $x$  y es derivable en  $x$ , entonces  $f'(x) = 0$ .*

**Definición 5.5** (Punto singular y valor singular). *Se llama **punto singular** de una función  $f$  a todo número  $x$  tal que*

$$f'(x) = 0$$

*El número  $f(x)$  recibe entonces el nombre de **valor singular**.*

**Teorema 5.8** (Teorema de Rolle). *Si  $f$  es continua sobre  $[a, b]$  y derivable sobre  $(a, b)$ , y  $f(a) = f(b)$ , entonces existe un número  $x$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(x) = 0$ .*

*Demostración.* Como, según suponemos,  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$ , debe tener un máximo  $M$  y un mínimo  $m$  en  $[a, b]$ . Si  $M = m$ , entonces  $f(x)$  es constante y cualquier  $x \in (a, b)$  sirve. Supongamos que  $M > 0 \geq m$  ( $m > M$  no podría ser) y que  $f(c) = M$ . Observemos que, según lo supuesto, debe ser  $c \neq a$  y  $c \neq b$ . Tenemos entonces que, para todo  $\Delta x$ ,  $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$  ya sea  $\Delta x > 0$  como  $\Delta x < 0$ . Se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &\leq 0 && \text{cuando } \Delta x > 0 \\ \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &\geq 0 && \text{cuando } \Delta x < 0 \end{aligned}$$

Como, según la hipótesis la derivada  $f'(c)$  existe, obtenemos, pasando al límite las fórmulas anteriores que  $f'(c) \leq 0$  o  $f'(c) \geq 0$  según sea  $\Delta x$  positiva o negativa respectivamente. De esto se sigue que

$$f'(c) = 0$$

□

**Teorema 5.9** (Teorema del valor medio). *Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe un número  $x$  en  $(a, b)$  tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Demostración.* Definamos:

$$h(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$$

Fácilmente se obtiene  $h(a) = f(a)$  y también

$$h(b) = f(b) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (b - a) = f(a)$$

Así, dado que  $f(a) = f(b)$  podemos aplicar el teorema de Rolle según el cual existe algún  $x$  tal que  $h'(x) = 0$ . Derivamos  $h(x)$  y obtenemos

$$\left( f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) \right)' = f'(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

$$\text{De manera que } 0 = f'(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

□

**Corolario 5.9.1.** *Si se define  $f$  sobre un intervalo y  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  del intervalo, entonces  $f$  es constante en el intervalo.*



*Demostración.* Sean  $a$  y  $b$  dos puntos distintos del intervalo. Luego debe haber algún  $x$  tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero como  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  del intervalo:

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Luego  $f(b) = f(a)$ . □

**Corolario 5.9.2.** Si  $f$  y  $g$  están definidas en el mismo intervalo y  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  del intervalo, entonces existe algún  $c$  tal que  $f + g = c$ .

**Corolario 5.9.3.** Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  de un intervalo, entonces  $f$  es creciente en el intervalo; si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  de un intervalo, entonces  $f$  es decreciente en el intervalo.

**Teorema 5.10** (Teorema de Cauchy). Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas y derivables dentro de  $[a, b]$ . Si  $g'(x)$  no adquiere el valor cero en  $[a, b]$ , luego:

$$\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Fermat	Sea $f$ definida en $(a, b)$ con extremo local en $x_0 \in (a, b)$ Si $f$ es derivable en $x_0$ entonces $f'(x_0) = 0$
Rolle	Si $f$ es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $(a, b)$ , y $f(a) = f(b)$ , entonces $\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$ .
Valor medio (Lagrange)	Si $f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ , entonces $\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Cauchy	Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y derivables dentro de $[a, b]$ . Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$ , luego: $\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

### 5.3. Máximos y mínimos

Para localizar el máximo y el mínimo de  $f$  en  $[a, b]$  deben considerarse tres clases de puntos:

1. Los puntos singulares de  $f$  en  $[a, b]$ .
2. Los extremos  $a$  y  $b$ .
3. Los puntos de  $x$  de  $[a, b]$  tales que  $f$  no es derivable en  $x$ .

Si  $x$  es un punto máximo, entonces evidentemente debe ser alguno de estos tres casos.

Si existen sólo unos pocos puntos singulares, y sólo unos pocos en los cuales no es derivable, el procedimiento para hallar los puntos máximos es: se halla  $f(x)$  para cada  $x$  que satisface  $f'(x) = 0$ , y  $f(x)$  para cada  $x$  en que  $f$  no es derivable y, finalmente,  $f(a)$  y  $f(b)$ . El mayor de estos valores será el máximo y el menor será el mínimo.

**Ejemplo 5.1.** Hallar máximo y mínimo de  $f(x) = x^3 - x$  (falta el ejemplo)

**Teorema 5.11** (Criterio de la segunda derivada). Sea  $f'(a) = 0$  y que la segunda derivada de  $f$  existe en un intervalo abierto que contiene a  $a$ . Luego,

Si  $f''(x) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(x, f(x))$ .

Si  $f''(x) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(x, f(x))$ .

Si  $f''(x) = 0$ , entonces el criterio falla. Esto es,  $f$  quizás tenga un máximo relativo en  $x$ , un mínimo relativo en  $(x, f(x))$  o ninguno de los dos. Tomar como ejemplo la función  $f(x) = x^3$ . En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada o el criterio de la tercera derivada.

*Nota:* la derivada segunda es la derivada de la derivada, o sea:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Cuadro 6: Mínimos y máximos

---

$f(c)$ es valor mínimo o máximo	$f'(x) = 0$
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	$f$ es creciente en $\mathbf{I}$
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	$f$ es decreciente en $\mathbf{I}$
$f$ es cóncava en $\mathbf{I}$	$f'$ es creciente $\mathbf{I}$
$f$ es convexa en $\mathbf{I}$	$f'$ es decreciente $\mathbf{I}$
$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	$f$ es cóncava en $\mathbf{I}$
$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	$f$ es convexa en $\mathbf{I}$

---

*Criterio de la primera derivada:*

---

Si  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, c)$  y  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, b)$  **entonces**  $f(c)$  es valor máximo relativo

Si  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, c)$  y  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, b)$  **entonces**  $f(c)$  es valor mínimo relativo

Si  $f'(x)$  tiene el mismo valor a ambos lados de  $c$  entonces  $c$  no es valor extremo

*Criterio de la segunda derivada:*

---

Supóngase que  $f'$  y  $f''$  existen en todo punto de un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$  y supóngase que  $f'(c) = 0$ .

$f''(c) < 0$  **entonces**  $f(c)$  es máximo relativo.

$f''(c) > 0$  **entonces**  $f(c)$  es mínimo relativo.

**Teorema 5.12** (Teorema de Bolzano). Sea  $f$  continua en  $[a, b]$ , con  $f(a) < 0$  (o  $f(a) > 0$ ) y  $f(b) > 0$  (o  $f(b) < 0$ ). Luego

$$\exists x \in (a, b) : f(x) = 0$$

**Teorema 5.13** (Teorema de los valores intermedios). Sea  $f$  continua en  $[a, b]$  Luego:

$$\forall u : f(a) < u < f(b) \rightarrow \exists x f(x) = u$$

Como corolario tenemos que:

$$\nexists x f(x) = 0 \rightarrow \neg(f(a) < 0 < f(b))$$

Con lo cual, si tenemos que en un intervalo una función no se anula y toma algún valor positivo, entonces es positiva en ese intervalo.

## 5.4. Construcción de curvas

Para la construcción de un gráfico de una función nos valdremos esencialmente de la siguiente información:

- Dominio  $f$ .
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos locales.
- Intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión.
- Existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

## 6. Sucesiones

**Definición 6.1.** Sucesión infinita

Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es  $\mathbb{N}$ .

**Definición 6.2.** Convergencia

Una sucesión  $\{a_n\}$  converge hacia  $l$  si  $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n) : n > N \rightarrow |a_n - l| < \epsilon$  y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

**Teorema 6.1.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene  $c$ , excepto quizá en  $c$  mismo, con:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Y supóngase además que  $\{a_n\}$  es una sucesión tal que:

1. cada  $a_n$  pertenece al dominio de  $f$ ,
2. cada  $a_n \neq c$ ,
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

Entonces, la sucesión  $\{f(a_n)\}$  satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión  $\{a_n\}$  que satisface las condiciones anteriores, entonces se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

En los ejemplos siguientes  $N$  se refiere al  $N$  de la definición de límite.

**Ejemplo 6.1.** La sucesión  $\{x^n\}$ , con  $|x| < 1$  converge a cero

Escribimos  $|x| = \frac{1}{(1+p)}$  (para  $p$  conveniente).

Y para  $N$  tomamos cualquiera que cumpla con  $\frac{1}{pN} < \epsilon$ .

**Ejemplo 6.2.** La sucesión  $\sum_{k=0}^n x^k$  llamada serie geométrica converge a  $\frac{1}{1-x}$

**Ejemplo 6.3** (La sucesión  $\{(-1)^n\}$  no es convergente.).

**Ejemplo 6.4** ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \{^n\sqrt{a}\} = 1$ ). *Demostración.* Tenemos que encontrar un  $n$  que cumpla con  $|a^{(\frac{1}{n})}| - 1 < \epsilon$ . Se dan dos casos.

**Caso 1**  $0 < a < 1$

En este caso  $a^{\frac{1}{n}} < 1$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ . Por lo tanto, tenemos que  $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = 1 - a^{\frac{1}{n}}$ . De este modo, si  $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$  tenemos  $a^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$ , y por esto:

$$n > \frac{1}{\log_a(1 - \epsilon)}$$

**Caso 2**  $a > 1$

Aquí tenemos que  $|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1$ . Tenemos que hallar un  $n$  tal que  $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$ , es decir que  $a^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 1$ .

Lo cual se sigue de  $\log_a(\epsilon + 1) = 1/x$ , ya que:  $n > x \rightarrow 1/n < 1/x$  y  $1/n < 1/x \rightarrow a^{1/n} < a^{1/x}$ .

Como, por definición de logaritmo  $a^{1/n} = \epsilon + 1 \iff \log_a(\epsilon + 1) = \frac{1}{n}$  y hemos supuesto la parte derecha, tenemos:

$$a^{1/n} < \epsilon + 1$$

□

## 6.1. Criterio de Cauchy o de la raíz enésima

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L \leq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminado}$$

## 6.2. Criterio de D'Alembert o del cociente

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$L > 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminado}$$

## 6.3. Algunos límites

## 7. Asíntotas

### 7.1. Asíntota Vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva  $y = f(x)$ , a la recta paralela al eje  $y$  que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

a la recta  $x = a$  se la denomina *asíntota vertical*.

Ejemplos: logaritmo neperiano, tangente

### 7.2. Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva  $y = f(x)$  a la recta paralela al eje  $x$  que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = a,$$

siendo  $a$  un valor finito, la recta  $y = a$  es una asíntota horizontal.

Ejemplos: función exponencial, tangente hiperbólica

### 7.3. Asíntota oblicua

La recta de ecuación  $y = mx + b$ , ( $m \neq 0$ ) será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Los valores de  $m$  y de  $b$  se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx$$

Cuadro 7: Ejemplos de límites de sucesiones

Sucesión	Límite
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$	0, ( $ a  < 1$ )
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$	1
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3+4}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$	$1, a > 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$	1
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2+n}$	1
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$	$\max(a, b)$
$\sum_{k=0}^n x^k$	$\frac{1}{1-x}$ ( <i>Serie geometrica</i> )
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$e$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$	$e^z$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{zn}\right)^n$	$e^{\frac{1}{z}}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n$	$e^{-z}$