Estructuras Algebraicas

Grupos y Anillos

Sea $A \neq \emptyset$.

Llamamos **operación binaria** en A o también **ley de composición binaria** en A al dar, a cada par $(a, b) \in A$ un elemento $a \circ b \in A$

Definición (Operación Asociativa)

Sean $(A, \circ)$ un conjunto detado de una operación binaria. Diremos que $\circ$ es asociativa si:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Un conjunto A dotado de una operación se denomina un *monoide*. Se suele decir sobre A que está definida una estructura de monoide.

Definición (Semigrupo)

Un monoide asociativo (o sea donde la operación es asociativa) se denomina *semigrupo*.

Definición (Operación conmutativa)

Sea $(A, \circ)$ un conjunto dotado de una operación binaria. Diremos que $\circ$ es *conmutativa* si:

$$a \circ b = b \circ a$$

Para todo $a, b \in A$.

Definición (Elemento Neutro)

Sea $(A, \circ)$ un conjunto dotado de una operación binaria. Se denomina *elemento neutro de* $\circ$ (o también elemento **identidad**) de $(A, \circ)$ a todo elemento $e \in A$ tal que

$$a \circ e = e \circ a = a$$

para cualquier $a \in A$.

Definición (Inversible)

Diremos que a es inversible a izquierda (en A), o que tiene un opuesto (o un inverso) a izquierda en A si existe $c \in A$ tal que

$$c \circ a = e$$

. Análogamente para inversible a derecha.

Asimismo, decimos que es *inversible* si

$$\exists t \in A : a \circ t = t \circ a = e$$

Proposición

Sea $(A, \circ)$ un semigrupo con elemento neutro e. Entonces $a \in A$ es inversible si y sólo si es inversible a izquierda y a derecha.

Corolario

Si a es inversible, su inverso en único.

Notación

a' es el opuesto de a

Proposición

(i) si $a, c \in A$ son inversibles también lo es su producto y vale la igualdad:

$$(a \circ b)' = c' \circ a'$$

(ii) si a es inversible, entonces:

$$(a')' = a$$

.

Definición (Grupo)