Álgebra

25 de agosto de 2015

0.1. Vectores en R^2 y en R^3

Esta seccion habla sobre vectores.

Definición 0.1.1 (Vectores equivalentes)**.** *Dos vectores AB y CD son* equivalente *sii*

$$B - A = D - C$$

Definición 0.1.2 (Vectores paralelos)**.** *Dos vectores AB y CD son paralelos sii*

$$\exists k / \quad B - A = k(D - C)$$

Definición 0.1.3 (Punto Medio de A y B)**.** *El punto medio de A y B se define:*

$$\frac{A+B}{2}$$

Definición 0.1.4 (Norma de un vector)**.** *Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$. Se llama* norma *o* longitud *o* módulo *del vector A a $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ y se escribe $||A||$. Es decir:*

$$||A|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Se cumple:

Teorema 0.1.1.

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||A - B||$$

Teorema 0.1.2.

$$||k \cdot A|| = |k| \cdot ||A||$$

Teorema 0.1.3 (Desigualdad trangular)**.**

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$$

Definición 0.1.5 (Distancia entre dos puntos)**.** *Sean A y B vectores. Se llama* distancia entre dos puntos *al número $d(A, B)$ definido como $||B - A||$. Es decir:*

$$d(A, B) = ||B - A||$$

Definición 0.1.6 (Versor (o vector unitario))**.** *Un vector V es unitario (o versor) si $||V|| = 1$.*

Dado un vector A, el vector de igual dirección y sentido, pero de norma 1 que A se escribe $\breve{A}$.

Teorema 0.1.4.

$$\breve{A} = \frac{1}{||A||} A$$

Definición 0.1.7 (Producto escalar entre vectores (Producto interno))**.**

$$A \cdot B = ||A|| \; ||B|| \; \cos\theta(A, B)$$

Teorema 0.1.5 (Propiedades)**.**

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(||A||^2 + ||B||^2 - ||B - A||)$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$$
$$A \cdot A = ||A||^2$$

Definición 0.1.8 (Vectores ortogonales)**.** *Dos vectores A y B son ortogonales si $A \cdot B = 0$. Esto ocurre cuando:*

1. *alguno (A o B) es nulo.*
2. $\cos\theta = 0$ *(i.e. $\theta = \pi/2$).*

Definición 0.1.9 (Forma paramétrica de una recta)**.** *Sea L la recta tal que:*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = \lambda \mathbf{v} + P\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Donde $\mathbf{v}$ es el vector director *y P es un* punto de paso*. Lo mismo que antes los escribimos:*

$$L = \lambda \mathbf{v} + P$$

Teorema 0.1.6. *Sean V_k el vector director de L_k y P_k punto de paso de L_k.*

$$L_1 || L_2 \equiv V_1 || V_2$$

$$L_1 \cap L_2 \equiv kV_1 + P_1 = lV_2 + P_2$$