Álgebra

20 de agosto de 2015

0.1. Matrices

Teorema 0.1.1. *Sean A, B y C matrices de $m \times n$ y sea α un escalar. Entonces:*

1. $A + \mathbf{0} = A$
2. $0A = \mathbf{0}$
3. $A + B = B + A$
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $1A = A$

Teorema 0.1.2. *Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ n-vectores y sea α un escalar.*

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Teorema 0.1.3 (Ley asociativa para multiplicación de matrices)**.** *Sea $A_{n\times m}, B_{m\times p}$ y $C_{p\times q}$ matrices. Entonces:*

$$A(BC) = (AB)C$$

Teorema 0.1.4 (Leyes distibutivas para la multiplicación de matrices)**.** *Si todas las sumas y productos están definidos, entonces:*

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Operaciones elementales entre filas.

1. Multiplicar (o dividir) una fila por un número distinto de cero.
2. Sumar un múltiplo de una fila a otra.
3. Intercambiar dos filas.

Notación:

1. $M_i(c)$ indica: multiplicar la i-ésima fila de una matriz por el número c.
2. $A_{i,j}(C)$ indica: multiplicar la i-ésima fila opr c y sumársela a la j.
3. $P_{i,j}$ indoca: permutar las filas i y j.

Definición 0.1.1 (Forma escalonada reducida)**.** *Una matriz está en* forma escalonada reducida *si se cumplen:*

1. *Todas las filas que consisten en únicamente ceros (si existen) aparecen en la parte de abajo de la matriz.*
2. *El primer número distino de cero (empezando por la izquierda) en cualquier fila que no consista únicamente en ceros, es 1.*
3. *Si dos filas sucesivas no consisten únicamente en ceros, entonces el primer 1 en la fila inferior está más a la derecha que el primer 1 de la fila superior.*
4. *Cualquier columnna que contenga el primer 1 de una fila tendrá cero en los demás lugares.*

Definición 0.1.2 (Forma escalonada)**.** *Una matriz está en* forma escalonada *si se cumplen los ítems (1), (2) y (3) de la Definición 0.1.1.*

Métodos para resolver sistemas de ecuaciones:

1. Eliminación de Gauss-Jordan:
   Reducir la matriz a la forma escalonada reducida.
2. Eliminación Gaussiana: Reducir la matriz a la forma escalonada, despejar la última incógnita y luego usarsustitución hacia atrás para despejar las otras incógnitas.

Definición 0.1.3 (Sistema homogéneo de ecuaciones)**.** *Un sistema de ecuaciones se llama* homogéneo *si todas las constates $b_1, b_2, ..., b_m$ son cero, es decir:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_x & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_x & = & 0 \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_x & = & 0 \end{array}$$

Lo cual puede expresarse también:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

donde A es la matriz de coeficientes $\mathbf{x}$ el vector $(x_1, ..., x_n)$ y $\mathbf{0}$ el vector de m ceros.

Definición 0.1.4 (Sistema homgéneo asociado)**.** *Dado el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se llama* sistema homogéneo asociado *a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al sistema:*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Teorema 0.1.5. *Si $n > m$, el sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas tiene un número infinito de soluciones.*

Teorema 0.1.6. *Sean $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_1}$ soluciones al sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Entonces su diferencia $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_1}$ es una solución del sistema homo géneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Demostración. Por la ley distributiva (teorema 0.1.4), tenemos:

$$A(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) = A\mathbf{x_1} - A\mathbf{x_2}$$

Pero como $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_1}$ son soluciones al sistema, tenemos:

$$A\mathbf{x_1} - A\mathbf{x_2} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

□

Corolario: Sean bx e by dos soluciones del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Entoces existe un vector $\mathbf{h}$ que es solución del sistema homogéneo tal que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$$

La prueba se obtiene facilmente para $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

De este modo, para encontrar todas las soluciones del sistma no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es necesario encontrar sólo *una* solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y todas las coluciones asociadas a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Definición 0.1.5 (Matriz identidad)**.** *La* matriz identidad *de $n \times n$ es ma matriz $M_{n \times n}$ en la que las componentes de la* diagonal principal *son todos 1 y 0 los restantes.*

Teorema 0.1.7. *Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces:*

$$AI_n = I_nA = A$$

Demostración. Sea c_{ij} el i-jésimo elemento de AI_n, de modo que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

donde a_{ij} son los elementos de A y b_{ij} son los de I_n. Es evidente por la definición 0.1.5 que

$$c_{ij} = a_{ij}$$

Lo mismo puede oservarse respecto de $I_n A$. $\square$

Definición 0.1.6 (Inversa de una matriz)**.** *Sean A y B matrices de $n \times n$. Si*

$$AB = BA = I$$

Entonces B es la inversa de *A y se escribe A^{-1}. De este modo:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa, entonce decimos que es invertible*.*

Teorema 0.1.8. *Si una matriz cuadrada es invertible, entonces su inversa es única.*

Demostración. Debemos mostrar que si B y C son dos inversas de A, entonces $B = C$.
Por hipótesis tenemos:

$$(i)\ AB = BA = I$$

y

$$(ii)\ AC = CA = I$$

Sustituyendo, usando (ii), tenemos:

$$B(AC) = BI = B$$

Usando (i):

$$(BA)C = IC = C$$

Por la ley asociativa (teorema 0.1.3), tenemos:

$$B(AC) = (BA)C$$

Sustituyendo, tenemos pues:

$$B = C$$

$\square$

Teorema 0.1.9. *Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$. Entonces, AB es invertible y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Demostración. Por la definición 0.1.6, tenemos que AB es la inversa de $B^{-1}A^{-1}$ (es decir $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$) si y sólo si $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$, que es lo que probaremos.

Por la ley asociativa (teorema 0.1.3) podemos probar:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I$$

así como:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1})AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$\square$

Considérese ahora el sistema de $n \times n$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Supoóngase que A es invertible, luego:

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

De este modo, si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Procedimiento para calcular la inversa de una matriz cuadrada A

1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$.
2. Utilizar redicción por renglones para reducir la matriz A a su forma escalonada.
3. Decidir si la matriz A es invertible.
   - *a*) Si A puede ser reducida a la matriz identidad I, entonces A es la matriz a la derecha de la barra vertical.
   - *b*) Si la reducción por renglones conduce a algún renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, la matriz A no es invertible.

Observación: podemos expresar (a) y (b) diciendo que una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si su forma escalonada, reducida por renglones, es la matriz identidad.