5 de junio de 2015

primer-p.tex

1. Logaritmos

Cuadro 1: Propiedades de los logaritmos

$\log_a a$	$=$	1
$\log_a 1$	$=$	0
$\log_a pq$	$=$	$\log_a p + \log_a q$
$\log_a \dfrac{p}{q}$	$=$	$\log_a p - \log_a q$
$\log_a p^q$	$=$	$q \log_a p$
$\log_a p$	$=$	$\dfrac{\log_b p}{\log_b a}$
$a^{\log_a x}$	$=$	x
$log_a a^x$	$=$	x

Además, $p \neq q \quad \rightarrow \log_a(p) \neq \log_a(q)$

Veamos la siguiente *regla del cambio de base*:

Para todo x se cumple $x^{\log_x(M)} = M$. De esto se sigue $a^{\log_a(b)} = b$ y $b^{\log_b(M)} = M$. Sustituyendo obtenemos: $M = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b M}$ que es lo mismo que $M = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$. Con lo cual, tenemos:

$$a^{\log_a M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

De los cual se sigue $\log_a M = (\log_a b)(\log_b M)$ y finalmente:

$$\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)} \tag{1}$$

2. Funciones cuadráticas

El eje de simetría de una funcione cuadrática está dado por:

$$-\frac{b}{2a} = x_v$$

El valor extremo está dado por $f(-\frac{b}{2a})$, es decir:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = y_v$$

El vértice de la parábola está dado por el punto (x_v, y_v)
Los ceros de la función se obtienen con la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se cumple la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + \frac{4ac - b2}{4a}$$

3. Límites

3.1. Definiciones

Definición de límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \textit{significa:}$$

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \forall x \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \to \qquad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \textit{significa:}$$

$$(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq a) \qquad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \ \textit{significa:}$$

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall x) \qquad x > |N| \to |f(x) - l| < \epsilon$$

Cuadro 2: Reglas sobre límites

$\lim\limits_{x\to a} k$	$=$	k	
$\lim\limits_{x\to a} x$	$=$	a	
$\lim\limits_{x\to a} \Big(k+f(x)\Big)$	$=$	$k+\lim f(x)$	
$\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x)+g(x)\Big)$	$=$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$	
$\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x)g(x)\Big)$	$=$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$	
$\lim\limits_{x\to a} \Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big)$	$=$	$\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$	$=$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$	
$\lim\limits_{x\to a} \log\left(f(x)\right)$	$=$	$\log\big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\big)$	
$\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x)\Big)^n$	$=$	$\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)^n$	
$\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$	$=$	$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$	
$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$=$	$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$	f y g contínuas, definidas en $[a,b]$. $c\in(a,b), f(a)=f(a)=0$ o bien $\pm\infty$ (L'Hopital)
Si $b_n, c_n \to L$ y $b_n \leq a_n \leq c_n$	luego $a_n \to L$		(Sandwich)

Cuadro 3: Algunos ejemplos de límites

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$	$=$	∞	
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)$	$=$	1	
$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$	$=$	n	por L'Hopital
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$	$=$	∞	por L'Hopital
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$	$=$	e^{-1}	
$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$	$=$	0	
$\lim_{x\to 0} \cos x$	$=$	1	
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$=$	1	por L'Hopital
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$	$=$	4	por L'Hopital
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax}$	$=$	$1,\ a \neq 0$	por L'Hopital
$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - a}{x-a}$	$=$	1	
$\lim_{x\to 0} \ln(x)$	$=$	$-\infty$	
$\lim_{x\to \infty} \ln(x)$	$=$	∞	
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$	$=$	0	por L'Hopital

Cuadro 4: ALgunas funciones que no tienden a ningún límite

$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$
$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

3.2. Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que son

- funciones contínuas en un entorno de a,
- con derivadas en dicho entorno,
- siendo $g(x) \neq 0$ cerca de a,
- con
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$
- y existe el
$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4. Continuidad

Definición 4.1 (Continuidad de una función)**.** *Una función $f(x)$ es* contínua *en el punto x_0 si está definida en la vecindad de dicho punto y*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

O, lo que es igual:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Y como $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$, *también podemos escribir:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Lo que es igual a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

5. Derivadas

Definición 5.1 (Derivable en a). *La función f es* derivable en a *si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{d}$$

Teorema 5.1. *Si f es derivable en a, entonces es contínua en a .*

Teorema 5.2.

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x}\log_a(e)$$

Demostración.

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} = \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) =$$

$$= \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$$

Y como $\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = e$ se deduce entones que

$$\Big(\log_a(x)\Big)' = \frac{1}{x}\log_a(e)$$

□

Corolario: $\Big(ln(x)\Big)' = \frac{1}{x}$.

Demostración. $\ln(e) = 1$ □

5.1. Reglas de derivación

Teorema 5.3 (Regla de la cadena).

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

Teorema 5.4.

$$(y^u)' = y^u\Big(u'\ln y + \frac{uy'}{y}\Big)$$

Teorema 5.5 (Teorema de la funcón inversa).

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5.2. Algunos teoremas sobre el comportamiento de las funciones

Definición 5.2 (Punto máximo). *Sea f una función y A un conjunto contenido en su dominio. Un punto x de A se dice que es* ***punto máximo*** *de f sobre A si*

$$(\forall y \in A) \quad f(x) \geq f(y) \tag{3}$$

Definición 5.3 (Valor máximo). *El número $f(x)$ recibe el nombre de* ***valor máximo*** *de f sobre A si x es su punto máximo.*

Teorema 5.6. *Sea f una función definida sobre (a,b). Luego, si x es un máximo (para f) sobre (a,b), y f es derivable en x , entonces $f'(x)=0$.*

Cuadro 5: reglas de derivación. x reprsenta un variable, a y k constantes y u y v funciones de x .

f	f'
k	0
kx	k
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
vu	$v'u+vu'$
x^k	ku^{k-1}
u^k	$ku^{k-1}u'$
a^x	$a^x \ln(a)$
a^u	$a^u(\ln a)u'$
u^v	$vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
y^v	$y^v(v' \ln y + \frac{vy'}{y})$
$log_a(x)$	$\left(\frac{1}{x}\right) \log_a(e)$
$log_a(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right) \log_a(e)u'$
$\frac{k}{x}$	$-\frac{k}{x^2}$
$\frac{k}{u}$	$-\frac{ku'}{u^2}$
$\frac{v}{u}$	$\frac{v'u-vu'}{u^2}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$
$(f^{-1})'(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Es importante notar aquí que el recíroco de este teorema no es cierto. Es posible que se dé $f'(x) = 0$ sin que por ello x sea un punto máximo. Este es el caso de $f'(0)$ cuando $f(x) = x^3$.

Definición 5.4 (Punto máximo (mínimo) local)**.** *Un punto x es un máximo local de la función f sobre A si existe algún δ tal que x es punto máximo sobre el conjunto $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.*

Teorema 5.7. *Si f está definida sobre (a, b), tiene un máximo local en x y es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.*

Definición 5.5 (Punto singular y valor singular)**.** *Se llama **punto singular** de una función f a todo número x tal que*

$$f'(x) = 0$$

*El número $f(x)$ recibe entonces el nombre de **valor singular**.*

Teorema 5.8 (Teorema de Rolle)**.** *Si f es contínua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.*

Demostración. Como, según suponemos, $f(x)$ es contínua en $[a, b]$, debe tener un máximo M y un mínimo m en $[a, b]$. Si $M = m$, entonces $f(x)$ es constante y cualquier $x \in (a, b)$ sirve. Supongamos que $M > 0 \geq m$ ($m > M$ no podría ser) y que $f(c) = M$. Observemos que, según lo supuesto, debe ser $c \neq a$ y $c \neq b$. Tenemos entonces que, para todo Δx , $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ ya sea $\Delta x > 0$ como $\Delta x < 0$. Se sigue:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x > 0$$
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x < 0$$

Como, según la hipótesis la derivada $f'(c)$ existe, obtenemos, pasando al límite las fórmulas anteriores que $f'(c) \leq 0$ o $f'(c) \geq 0$ según sea Δx positiva o negativa respectivamente. De esto se sigue que

$$f'(c) = 0$$

□

Teorema 5.9 (Teorema del valor medio)**.** *Si f es contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un número x en (a, b) tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Definamos:

$$h(x) \quad = \quad f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)$$

Fácilmente se obtiene $h(a) = f(a)$ y también

$$h(b) = f(b) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(b - a) = f(a)$$

Así, dado que $f(a) = f(b)$ podemos aplicar el teorema de Rolle según el cual existe algún x tal que $h'(x) = 0$. Derivamos $h(x)$ y obtenemos

$$\left(f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)\right)' = f'(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)$$

De manera que $0 = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. □

Corolario 5.9.1. *Si se define f sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del itnervalo, entonces f es constante en el intervalo.*

Demostración. Sean a y b dos puntos distintos del inervalo. Luego debe haber algún x tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero como $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo:

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Luego $f(b) = f(a)$.

□

Corolario 5.9.2. *Si f y g estaán definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún c tal que $f + g = c$.*

Corolario 5.9.3. *Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.*

Teorema 5.10 (Teorema de Cauchy)**.** *Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones contínuas y derivables dentrode $[a, b]$. Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego:*

$$\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Fermat	Sea f definida en (a, b) con extremo local en $x_0 \in (a, b)$ Si f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$
Rolle	Si f es contínua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces $\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$.
Valor medio (Lagrange)	Si f es contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces $\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Cauchy	Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones contínuas y derivables dentro de $[a, b]$. Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego: $\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

5.3. Máximos y mínimos

Para localizar el máximo y el mínimo de f en $[a, b]$ deben considerarse tres clases de puntos:

1. Los puntos singulares de f en $[a, b]$.
2. Los extremos a y b .
3. Los puntos de x de $[a, b]$ tales que f no es derivable en x .

Si x es un punto máximo, entonces evidentemente debe ser alguno de estos tres casos.

Si existen sólo unos pocos puntos singulares, y sólo unos pocos en los cuales no es derivable, el procedimiento para hallar los puntos máximos es: se halla $f(x)$ para cada x que satisface $f'(x) = 0$, y $f(x)$ para cada x en que f no es derivable y, finalmente, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de estos valores será el máximo y el menor será el mínimo.

Ejemplo 5.1. *Hallar máximo y ínimo de $f(x) = x^3 - x$ (falta el ejemplo)*

Teorema 5.11 (Criterio de la segunda derivada)**.** *Sea $f'(a) = 0$ y que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a a. Luego,*

Si $f''(x) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(x, f(x))$.
Si $f''(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(x, f(x))$.
Si $f''(x) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizás tenga un máximo relativo en x , un mínimo relativo en $(x, f(x))$ o ninguno de los dos. Tomar como ejemplo la función $f(x) = x^3$. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada o el criterio de la tercera derivada.

Nota: la derivada segunda es la derivada de la derivada, o sea:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Cuadro 6: Mínimos y máximos

$f(c)$ es valor mínimo o máximo	$f'(x) = 0$
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es creciente en $\mathbf{I}$
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es decreciente en $\mathbf{I}$
f es cóncava en $\mathbf{I}$	f' es creciente $\mathbf{I}$
f es convexa en $\mathbf{I}$	f' es decreciente $\mathbf{I}$
$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es cóncava en $\mathbf{I}$
$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es convexa en $\mathbf{I}$

Criterio de la primera derivada:

Si $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in (c, b)$ **entonces** $f(c)$ es valor máximo relativo

Si $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in (c, b)$ **entonces** $f(c)$ es valor mínimo relativo

Si $f'(x)$ tiene el mismo valor a ambos lados de c entocnes c no es valor extremo

Criterio de la segunda derivada:

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a,b) que contiene a c y supóngase que $f'(c) = 0$.

$f''(c) < 0$ **entonces** $f(c)$ es máximo relativo.

$f''(c) > 0$ **entonces** $f(c)$ es mínimo relativo .

Teorema 5.12 (Teorema de Bolzano)**.** *Sea f contínua en $[a, b]$, con $f(a) < 0$ (o $f(a) > 0$) y $f(a) > 0$ (o $f(a) < 0$). Luego*

$$\exists x \in (a, b) : f(x) = 0$$

Teorema 5.13 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea f contínua en $[a, b]$ Luego:*

$$\forall u : f(a) < u < f(b) \quad \rightarrow \quad \exists x f(x) = u$$

Como corolario tenemos que:

$$\nexists x f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \neg(f(a) < 0 < f(b))$$

Con lo cual, si tenemos que en un intervalo una función no se anula y toma algún valor positivo, entonces es positiva en ese intervalo.

5.4. Construcción de curvas

Para la construcción de un gráfico de una función nos valdremos esencialmente de la siguiente información:

- Dominio f.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos locales.
- Intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión.
- Existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblícuas.

6. Sucesiones

Definición 6.1. *Sucesión infinita*
Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$.

Definición 6.2. *Convergencia*
Una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia *l si $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n) : n > N \quad \rightarrow \quad |a_n - l| < \epsilon$ y se escribe*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

Teorema 6.1. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c, excepto quizá en c mismo, con:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Y supóngase además que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:

1. *cada a_n pertenece al dominio de f,*
2. *cada $a_n \neq c$,*

3. $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

Entonces, la sucesión $\{f(a_n)\}$ *satisface*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ *que datisface las condiciones anteriores, entonces se cumple que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

En los ejemplos siguientes N se refiere al N de la definición de límite.

Ejemplo 6.1. *La sucesión* $\{x^n\}$*, con* $|x| < 1$ *converge a cero*

Escribimos $|x| = \frac{1}{(1+p)}$ *(para* p *conveniente).*

Y para N *tomamos cualquiera que cumpla con* $\frac{1}{pN} < \epsilon$*.*

Ejemplo 6.2. *La sucesión* $\sum_{k=0}^{n} x^n$ *llamada* serie geométrica *converge a* $\frac{1}{1-x}$

Ejemplo 6.3 (La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.)**.**

Ejemplo 6.4 ($\lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a}\} = 1$)**.** *Demostración.* Tenemos que encontrar un n que cumpla con $|a^{(\frac{1}{n})}| - 1 < \epsilon$. Se dan dos casos.

Caso 1 $\quad 0 < a < 1$

En este caso $a^{\frac{1}{n}} < 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, tenemos que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = 1 - a^{\frac{1}{n}}$. De este modo, si $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$ tenemos $a^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$, y por esto:

$$n > \frac{1}{\log_a(1-\epsilon)}$$

Caso 2 $\quad a > 1$

Aquí tenemos que $|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1$. Tenemos que hallar un n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, es decir que $a^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 1$.

Lo cual se sigue de $\log_a(\epsilon + 1) = 1/x$, ya que: $n > x \to 1/n < 1/x$ y $1/n < 1/x \to a^{1/n} < a^{1/x}$.

Como, por definición de logaritmo $a^{1/n} = \epsilon + 1 \quad \equiv \quad \log_a(\epsilon + 1) = \frac{1}{n}$ y hemos supuesto la parte derecha, tenemos:

$$a^{1/n} < \epsilon + 1$$

□

6.1. Criterio de Cauchy o de la raíz enésima

Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L \leq 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \to \quad \text{Indeterminado}$$

6.2. Criterio de D'Alembert o del cociente

Si

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L \leq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminado}$$

6.3. Algunos límites

7. Asíntotas

7.1. Asíntota Vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina *asíntota vertical*.

Ejemplos: logaritmo neperiano, tangente

7.2. Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a,$$

siendo a un valor finito, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

Ejemplos: función exponencial, tangente hiperbólica

7.3. Asíntota oblicua

La recta de ecuación $y = mx + b, (m \neq 0)$ será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Los valores de m y de b se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$

Cuadro 7: Ejemplos de límites de sucesiones

Sucesión	**Límite**	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$	0	
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n$	$0, \quad (\lvert a\rvert < 1)$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$	1	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4}$	0	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$	0	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	0	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$	0	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$	$1, a > 1$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	1	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$	1	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$	$\max(a,b)$	
$\sum\limits_{k=0}^{n} x^n$	$\frac{1}{1-x}$	$(Serie\ geometrica)$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e	
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$	e^z	
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{zn}\right)^n$	$e^{\frac{1}{z}}$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right)^n$	e^{-z}	