Gradiente, Diferencial y Plano tangente

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^n$ abierto.

Gradiente

El gradiente de f en el punto p, ∇f_p es el vector con todas las *derivadas parciales*, o sea:

$$\nabla f_p = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Diferencial

Las diferencial de f en p, $Df_p(x)$ es una ***transformación lineal*** de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
En concreto, la diferencial de f en p es el producto entre el gradiente de f y $\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} \in A$. Es decir:

$$\langle \nabla f_p, \mathbf{x} \rangle$$

O, de otra forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n$$

(Hiper) plano tangente (si existe, claro)

Si existe el plano (o hiperplano) tangente a la función f en el punto $\mathbf{p}$, su ecuación es:

$$x_{n+1} = f(\mathbf{p}) + \langle \nabla f, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle$$

O, lo que es lo mismo,

$$x_{n+1} = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})(x_i - p_i)$$

Y más desarrollado:

$$x_{n+1} = f(\mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})(x_1 - p_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})(x_n - p_n)$$

Diferenciabilidad

f es diferenciable en $\mathbf{p}$ si y sólo si:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{|f(x) - f(p) - \langle \nabla f_p, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle|}{||\mathbf{x} - \mathbf{p}||}$$

Lo cual también puede expresarse:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{|f(x) - f(p) - Df_p(\mathbf{x} - \mathbf{p})|}{||\mathbf{x} - \mathbf{p}||}$$

Criterio de diferenciabilidad:

Teorema Si:

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto
2. todas las derivadas de $f : A \to \mathbb{R}$ existen en A
3. todas estas derivadas son contínuas en A,

entonces f es diferenciable en A.