26 de noviembre de 2015

analisis-mat.tex

# 1. Logaritmos

Cuadro 1: Propiedades de los logaritmos

| | | |
|---|---|---|
| $\log_a a$ | $=$ | $1$ |
| $\log_a 1$ | $=$ | $0$ |
| $\log_a pq$ | $=$ | $\log_a p + \log_a q$ |
| $\log_a \frac{p}{q}$ | $=$ | $\log_a p - \log_a q$ |
| $\log_a p^q$ | $=$ | $q \log_a p$ |
| $\log_a p$ | $=$ | $\frac{\log_b p}{\log_b a}$ |
| $a^{\log_a x}$ | $=$ | $x$ |
| $log_a a^x$ | $=$ | $x$ |

Además, $p \neq q \quad \rightarrow \log_a(p) \neq \log_a(q)$

Veamos la siguiente *regla del cambio de base*:
Para todo $x$ se cumple $x^{\log_x(M)} = M$. De esto se sigue $a^{\log_a(b)} = b$ y $b^{\log_b(M)} = M$. Sustituyendo obtenemos: $M = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b M}$ que es lo mismo que $M = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$. Con lo cual, tenemos:

$$a^{\log_a M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

De los cual se sigue $\log_a M = (\log_a b)(\log_b M)$ y finalmente:

$$\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)} \tag{1}$$

# 2. Funciones cuadráticas

El eje de simetría de una funcione cuadrática está dado por:

$$-\frac{b}{2a} = x_v$$

El valor extremo está dado por $f(-\frac{b}{2a})$, es decir:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = y_v$$

El vértice de la parábola está dado por el punto $(x_v, y_v)$
Los ceros de la función se obtienen con la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se cumple la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + \frac{4ac - b2}{4a}$$

# 3. Límites

## 3.1. Definiciones

**Definición de límite:**

---

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \textit{significa:}$$

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \forall x \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \to \qquad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \textit{significa:}$$

$$(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq a) \qquad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \ \textit{significa:}$$

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall x) \qquad x > |N| \to |f(x) - l| < \epsilon$$

---

Cuadro 2: Reglas sobre límites

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} k$ | $=$ | $k$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} x$ | $=$ | $a$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} \Big(k + f(x)\Big)$ | $=$ | $k + \lim f(x)$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big)$ | $=$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x)g(x)\Big)$ | $=$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ | $=$ | $\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ | $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ | $=$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} \log\left(f(x)\right)$ | $=$ | $\log\big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\big)$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x)\Big)^n$ | $=$ | $\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)^n$ | |
| $\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ | $=$ | $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$ | |
| $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $=$ | $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ | $f$ y $g$ contínuas, definidas en $[a, b]$.<br>$c \in (a, b), f(a) = f(a) = 0$ o bien $\pm\infty$<br>(L'Hopital) |
| Si $b_n, c_n \to L$<br>y $b_n \leq a_n \leq c_n$ | luego $a_n \to L$ | | (Sandwich) |

Cuadro 3: Algunos ejemplos de límites

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ | $=$ | $\infty$ | |
| $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)$ | $=$ | $1$ | |
| $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$ | $=$ | $n$ | por L'Hopital |
| $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$ | $=$ | $\infty$ | por L'Hopital |
| $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ | $=$ | $e^{-1}$ | |
| $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$ | $=$ | $0$ | |
| $\lim_{x\to 0} \cos x$ | $=$ | $1$ | |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ | $=$ | $1$ | por L'Hopital |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$ | $=$ | $4$ | por L'Hopital |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax}$ | $=$ | $1,\ a \neq 0$ | por L'Hopital |
| $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - a}{x-a}$ | $=$ | $1$ | |
| $\lim_{x\to 0} \ln(x)$ | $=$ | $-\infty$ | |
| $\lim_{x\to \infty} \ln(x)$ | $=$ | $\infty$ | |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$ | $=$ | $0$ | por L'Hopital |

Cuadro 4: ALgunas funciones que no tienden a ningún límite

| |
|---|
| $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ |
| $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ |

## 3.2. Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que son

- funciones contínuas en un entorno de $a$,
- con derivadas en dicho entorno,
- siendo $g(x) \neq 0$ cerca de $a$,
- con
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$
- y existe el
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

# 4. Continuidad

**Definición 4.1** (Continuidad de una función)**.** *Una función $f(x)$ es* contínua *en el punto $x_0$ si está definida en la vecindad de dicho punto y*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

*O, lo que es igual:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

*Y como* $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$*, también podemos escribir:*

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

*Lo que es igual a:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

# 5. Derivadas

**Definición 5.1** (Derivable en $a$ ). *La función $f$ es* derivable en $a$ *si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{d}$$

**Teorema 5.1.** *Si $f$ es derivable en $a$, entonces es contínua en $a$ .*

**Teorema 5.2.**

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x}\log_a(e)$$

*Demostración.*

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} = \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) =$$

$$= \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$$

Y como $\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = e$ se deduce entones que

$$\Big(\log_a(x)\Big)' = \frac{1}{x}\log_a(e)$$

□

Corolario: $\Big(ln(x)\Big)' = \frac{1}{x}$.

*Demostración.* $\ln(e) = 1$ □

## 5.1. Reglas de derivación

**Teorema 5.3** (Regla de la cadena).

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

**Teorema 5.4.**

$$(y^u)' = y^u\Big(u'\ln y + \frac{uy'}{y}\Big)$$

**Teorema 5.5** (Teorema de la funcón inversa).

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 5.2. Algunos teoremas sobre el comportamiento de las funciones

**Definición 5.2** (Punto máximo). *Sea $f$ una función y $A$ un conjunto contenido en su dominio. Un punto $x$ de $A$ se dice que es* ***punto máximo*** *de $f$ sobre $A$ si*

$$(\forall y \in A) \quad f(x) \geq f(y) \tag{3}$$

**Definición 5.3** (Valor máximo). *El número $f(x)$ recibe el nombre de* ***valor máximo*** *de $f$ sobre $A$ si $x$ es su punto máximo.*

Cuadro 5: reglas de derivación. $x$ reprsenta un variable, $a$ y $k$ constantes y $u$ y $v$ funciones de $x$ .

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $kx$ | $k$ |
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $ku$ | $ku'$ |
| $vu$ | $v'u+vu'$ |
| $x^k$ | $ku^{k-1}$ |
| $u^k$ | $ku^{k-1}u'$ |
| $a^x$ | $a^x \ln(a)$ |
| $a^u$ | $a^u(\ln a)u'$ |
| $u^v$ | $vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$ |
| $y^v$ | $y^v(v' \ln y + \frac{vy'}{y})$ |
| $log_a(x)$ | $\left(\frac{1}{x}\right) \log_a(e)$ |
| $log_a(u)$ | $\left(\frac{1}{u}\right) \log_a(e)u'$ |
| $\frac{k}{x}$ | $-\frac{k}{x^2}$ |
| $\frac{k}{u}$ | $-\frac{ku'}{u^2}$ |
| $\frac{v}{u}$ | $\frac{v'u-vu'}{u^2}$ |
| $\operatorname{sen}(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\operatorname{sen}(x)$ |
| $\operatorname{tg}(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $\operatorname{cotg}(x)$ | $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$ |
| $(f^{-1})'(x)$ | $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ |

**Teorema 5.6.** *Sea $f$ una función definida sobre $(a, b)$. Luego, si $x$ es un máximo (para $f$) sobre $(a, b)$, y $f$ es derivable en $x$ , entonces $f'(x) = 0$ .*

Es importante notar aquí que el recíroco de este teorema no es cierto. Es posible que se dé $f'(x) = 0$ sin que por ello $x$ sea un punto máximo. Este es el caso de $f'(0)$ cuando $f(x) = x^3$ .

**Definición 5.4** (Punto máximo (mínimo) local)**.** *Un punto $x$ es un máximo local de la función $f$ sobre $A$ si existe algún $\delta$ tal que $x$ es punto máximo sobre el conjunto $A \cap (x - \delta, x + \delta)$ .*

**Teorema 5.7.** *Si $f$ está definida sobre $(a, b)$, tiene un máximo local en $x$ y es derivable en $x$ , entonces $f'(x) = 0$ .*

**Definición 5.5** (Punto singular y valor singular)**.** *Se llama* ***punto singular*** *de una función $f$ a todo número $x$ tal que*

$$f'(x) = 0$$

*El número $f(x)$ recibe entonces el nombre de* ***valor singular****.*

**Teorema 5.8** (Teorema de Rolle)**.** *Si $f$ es contínua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $(a, b)$ , y $f(a) = f(b)$ , entonces existe un número $x$ en $(a, b)$ tal que $f'(x) = 0$ .*

*Demostración.* Como, según suponemos, $f(x)$ es contínua en $[a, b]$, debe tener un máximo $M$ y un mínimo $m$ en $[a, b]$ . Si $M = m$, entonces $f(x)$ es constante y cualquier $x \in (a, b)$ sirve. Supongamos que $M > 0 \geq m$ ($m > M$ no podría ser) y que $f(c) = M$. Observemos que, según lo supuesto, debe ser $c \neq a$ y $c \neq b$ . Tenemos entonces que, para todo $\Delta x$ , $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ ya sea $\Delta x > 0$ como $\Delta x < 0$ . Se sigue:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x > 0$$
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x < 0$$

Como, según la hipótesis la derivada $f'(c)$ existe, obtenemos, pasando al límite las fórmulas anteriores que $f'(c) \leq 0$ o $f'(c) \geq 0$ según sea $\Delta x$ positiva o negativa respectivamente. De esto se sigue que

$$f'(c) = 0$$

□

**Teorema 5.9** (Teorema del valor medio)**.** *Si $f$ es contínua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ , entonces existe un número $x$ en $(a, b)$ tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*Demostración.* Definamos:

$$h(x) \quad = \quad f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)$$

Fácilmente se obtiene $h(a) = f(a)$ y también

$$h(b) = f(b) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(b - a) = f(a)$$

Así, dado que $f(a) = f(b)$ podemos aplicar el teorema de Rolle según el cual existe algún $x$ tal que $h'(x) = 0$. Derivamos $h(x)$ y obtenemos

$$\left(f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)\right)' = f'(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)$$

De manera que $0 = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ . □

**Corolario 5.9.1.** *Si se define $f$ sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo $x$ del itnervalo, entonces $f$ es constante en el intervalo.*

*Demostración.* Sean $a$ y $b$ dos puntos distintos del inervalo. Luego debe haber algún $x$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero como $f'(x) = 0$ para todo $x$ del intervalo:

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Luego $f(b) = f(a)$.

□

**Corolario 5.9.2.** *Si $f$ y $g$ estaán definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x$ del intervalo, entonces existe algún $c$ tal que $f + g = c$.*

**Corolario 5.9.3.** *Si $f'(x) > 0$ para todo $x$ de un intervalo, entonces $f$ es creciente en el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo $x$ de un intervalo, entonces $f$ es decreciente en el intervalo.*

**Teorema 5.10** (Teorema de Cauchy)**.** *Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones contínuas y derivables dentrode $[a, b]$. Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego:*

$$\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

| | |
|---|---|
| Fermat | Sea $f$ definida en $(a, b)$ con extremo local en $x_0 \in (a, b)$<br>Si $f$ es derivable en $x_0$ entonces $f'(x_0) = 0$ |
| Rolle | Si $f$ es contínua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $(a, b)$ , y $f(a) = f(b)$, entonces<br>$\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$ . |
| Valor medio<br>(Lagrange) | Si $f$ es contínua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ , entonces<br>$\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ |
| Cauchy | Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones contínuas y derivables dentro de $[a, b]$.<br>Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego:<br>$\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ |

## 5.3. Máximos y mínimos

Para localizar el máximo y el mínimo de $f$ en $[a, b]$ deben considerarse tres clases de puntos:

1. Los puntos singulares de $f$ en $[a, b]$ .
2. Los extremos $a$ y $b$ .
3. Los puntos de $x$ de $[a, b]$ tales que $f$ no es derivable en $x$ .

Si $x$ es un punto máximo, entonces evidentemente debe ser alguno de estos tres casos.

Si existen sólo unos pocos puntos singulares, y sólo unos pocos en los cuales no es derivable, el procedimiento para hallar los puntos máximos es: se halla $f(x)$ para cada $x$ que satisface $f'(x) = 0$ , y $f(x)$ para cada $x$ en que $f$ no es derivable y, finalmente, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de estos valores será el máximo y el menor será el mínimo.

**Ejemplo 5.1.** *Hallar máximo y ínimo de $f(x) = x^3 - x$ (falta el ejemplo)*

**Teorema 5.11** (Criterio de la segunda derivada)**.** *Sea $f'(a) = 0$ y que la segunda derivada de $f$ existe en un intervalo abierto que contiene a $a$. Luego,*

*Si $f''(x) < 0$ , entonces $f$ tiene un máximo relativo en $(x, f(x))$ .*
*Si $f''(x) > 0$ , entonces $f$ tiene un mínimo relativo en $(x, f(x))$ .*
*Si $f''(x) = 0$ , entonces el criterio falla. Esto es, f quizás tenga un máximo relativo en $x$ , un mínimo relativo en $(x, f(x))$ o ninguno de los dos. Tomar como ejemplo la función $f(x) = x^3$ . En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada o el criterio de la tercera derivada.*

*Nota: la derivada segunda es la derivada de la derivada, o sea:*

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Cuadro 6: Mínimos y máximos

| | |
|---|---|
| $f(c)$ es valor mínimo o máximo | $f'(x) = 0$ |
| $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$ | $f$ es creciente en $\mathbf{I}$ |
| $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$ | $f$ es decreciente en $\mathbf{I}$ |
| $f$ es cóncava en $\mathbf{I}$ | $f'$ es creciente $\mathbf{I}$ |
| $f$ es convexa en $\mathbf{I}$ | $f'$ es decreciente $\mathbf{I}$ |
| $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$ | $f$ es cóncava en $\mathbf{I}$ |
| $f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$ | $f$ es convexa en $\mathbf{I}$ |

*Criterio de la primera derivada:*

Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (c, b)$ **entonces** $f(c)$ es valor máximo relativo

Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (c, b)$ **entonces** $f(c)$ es valor mínimo relativo

Si $f'(x)$ tiene el mismo valor a ambos lados de $c$ entocnes $c$ no es valor extremo

Supóngase que $f'$ y $f''$ existen en todo punto de un intervalo abierto (a,b) que contiene a $c$ y supóngase que $f'(c) = 0$.

$f''(c) < 0$ **entonces** $f(c)$ es máximo relativo.

$f''(c) > 0$ **entonces** $f(c)$ es mínimo relativo .

**Teorema 5.12** (Teorema de Bolzano)**.** *Sea $f$ contínua en $[a, b]$, con $f(a) < 0$ (o $f(a) > 0$) y $f(a) > 0$ (o $f(a) < 0$). Luego*

$$\exists x \in (a, b) : f(x) = 0$$

**Teorema 5.13** (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea $f$ contínua en $[a, b]$ Luego:*

$$\forall u : f(a) < u < f(b) \quad \rightarrow \quad \exists x f(x) = u$$

Como corolario tenemos que:

$$\nexists x f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \neg(f(a) < 0 < f(b))$$

Con lo cual, si tenemos que en un intervalo una función no se anula y toma algún valor positivo, entonces es positiva en ese intervalo.

## 5.4. Construcción de curvas

Para la construcción de un gráfico de una función nos valdremos esencialmente de la siguiente información:

- Dominio $f$.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos locales.
- Intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión.
- Existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblícuas.

# 6. Sucesiones

**Definición 6.1.** *Sucesión infinita*
*Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$.*

**Definición 6.2.** *Convergencia*
*Una sucesión $\{a_n\}$* converge hacia $l$ *si* $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n) : n > N \quad \rightarrow \quad |a_n - l| < \epsilon$ *y se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

**Teorema 6.1.** *Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene $c$, excepto quizá en $c$ mismo, con:*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

*Y supóngase además que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:*

1. *cada $a_n$ pertenece al dominio de $f$,*

*2. cada* $a_n \neq c$*,*

*3.* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

*Entonces, la sucesión* $\{f(a_n)\}$ *satisface*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

*Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión* $\{a_n\}$ *que datisface las condiciones anteriores, entonces se cumple que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

En los ejemplos siguientes $N$ se refiere al $N$ de la definición de límite.

**Ejemplo 6.1.** *La sucesión* $\{x^n\}$*, con* $|x| < 1$ *converge a cero*
*Escribimos* $|x| = \frac{1}{(1+p)}$ *(para* $p$ *conveniente).*
*Y para* $N$ *tomamos cualquiera que cumpla con* $\frac{1}{pN} < \epsilon$*.*

**Ejemplo 6.2.** *La sucesión* $\sum_{k=0}^{n} x^n$ *llamada* serie geométrica *converge a* $\frac{1}{1-x}$

**Ejemplo 6.3** (La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.)**.**

**Ejemplo 6.4** ($\lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a}\} = 1$)**.** *Demostración.* Tenemos que encontrar un $n$ que cumpla con $|a^{(\frac{1}{n})}| - 1 < \epsilon$. Se dan dos casos.

**Caso 1** $\quad 0 < a < 1$

En este caso $a^{\frac{1}{n}} < 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, tenemos que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = 1 - a^{\frac{1}{n}}$. De este modo, si $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$ tenemos $a^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$, y por esto:

$$n > \frac{1}{\log_a(1-\epsilon)}$$

**Caso 2** $\quad a > 1$

Aquí tenemos que $|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1$. Tenemos que hallar un $n$ tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, es decir que $a^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 1$.

Lo cual se sigue de $\log_a(\epsilon+1) = 1/x$ , ya que: $n > x \to 1/n < 1/x$ y $1/n < 1/x \to a^{1/n} < a^{1/x}$.

Como, por definición de logaritmo $a^{1/n} = \epsilon + 1 \quad \equiv \quad \log_a(\epsilon+1) = \frac{1}{n}$ y hemos supuesto la parte derecha, tenemos:

$$a^{1/n} < \epsilon + 1$$

$\square$

## 6.1. Criterio de Cauchy o de la raíz enésima

Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L \leq 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \to \quad \text{Indeterminado}$$

## 6.2. Criterio de D'Alembert o del cociente

Si

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L \leq 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \to \quad \text{Indeterminado}$$

## 6.3. Algunos límites

# 7. Series

**Teorema 7.1.** *Si una serie $s_n$ converge y $u_n$ se obtiene en base a ella suprimiendo un número finito de términos en ella, luego $u_n$ converge.*

**Teorema 7.2.** *Si $s_n$ converge y suma $s$ y $u_n$ se obtiene multimplicando cada término de $s$ por $c$, luego $u_n$ converge en y suma $cs$.*

**Teorema 7.3.** *Si las series $s_n$ y $u_n$ convergen y suman $s$ y $u$ respectivamente, también lo hace la serie que resulta de sumar cada enésimo término de una con el de la otra y su suma es $s + u$.*

**Teorema 7.4** (Condición necesaria para la convergencia)**.** *Si una serie converge, entonce si en'esimo término tiende a cero cuando $n \to 0$.*

**Corolario 7.4.1.** *Si el enésimo término de una serie $s_n$ no tiende a cero, entonces $s_n$ no converge.*

**Teorema 7.5.** *Si $u_n \leq v_n, \forall n$ y $v_n$ converge, luego $u_n$ converge.*

**Teorema 7.6.** *Si $u_n \geq v_n, \forall n$ y $v_n$ diverge, luego $u_n$ diverge.*

Cuadro 7: Ejemplos de límites de sucesiones

| **Sucesión** | **Límite** |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ | $0, \quad (\lvert a\rvert < 1)$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ | $1$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4}$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ | $1, a > 1$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ | $1$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$ | $1$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ | $\max(a,b)$ |
| $\sum\limits_{k=0}^{n} x^n$ | $\frac{1}{1-x} \quad (\textit{Serie geometrica})$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | $e$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ | $e^z$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{zn}\right)^n$ | $e^{\frac{1}{z}}$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right)^n$ | $e^{-z}$ |

**Teorema 7.7** (Criterio de D'Alembert). *Sea $s_1$ una serie con términos positivos. Y sea*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

*entonces:*
*1) La serie converge cuando $l < 1$*
*2) La serie diverge cuando $l > 1$*
*(Cuando $l = 1$ pueden darse los dos casos).*

**Teorema 7.8** (Criterio de Cauchy). *Sea $s_1$ una serie con términos positivos. Y sea*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

*entonces:*
*1) La serie converge cuando $l < 1$*
*2) La serie diverge cuando $l > 1$*
*(Cuando $l = 1$ pueden darse los dos casos).*

**Teorema 7.9** (Criterio Integral). *Sea $s_n$ una serie tal que*

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 ...$$

*Y sea $f$ una función contínua tal que $f(i) = s_i$. Entonces se cumple:*
*1) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, también converge $s_n$*

# 8. Asíntotas

## 8.1. Asíntota Vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$ , a la recta paralela al eje $y$ que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina *asíntota vertical.*
Ejemplos: logaritmo neperiano, tangente

## 8.2. Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje $x$ que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a,$$

siendo $a$ un valor finito, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.
Ejemplos: función exponencial, tangente hiperbólica

## 8.3. Asíntota oblicua

La recta de ecuación $y = mx + b, (m \neq 0)$ será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Los valores de $m$ y de $b$ se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$$

# 9. Integrales

**Definición 9.1** (Partición). *Sea $a < b$ . Recibe el nombre de* partición *del itnervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos $[a, b]$, de los cuales uno es $a$ y el otro es $b$ .*

**Definición 9.2** (Suma Inferior (Superior)). *Sea $f$ acotada sobre $[a, b]$ y $P = t_0, \ldots, t_n$ una partición de $[a, b]$ . Sea además*

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

*Luego, se llama* suma inferior *de $f$ para $P$ a :*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

*Y se llama* suma superio *de $f$ para $P$ a :*

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

**Teorema 9.1.** *Sean $P_1$ y $P_2$ particiones de $[a, b]$. Entonces:*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

**Definición 9.3** (Integrable). *Una función $f$ acotada sobre $[a, b]$ es* integrable *sobre $[a, b]$ si*

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}$$

**Teorema 9.2.** *Si $f$ está acotada sobre $[a, b]$ , entonces $f$ es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P$ de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

**Teorema 9.3.** *Si $f$ es contínua en $[a, b]$, entonces $f$ es integrable en $[a, b]$.*

**Teorema 9.4.** *Sea $f$ integrable sobre $[a, b]$ y*

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(X) \leq M$$

*Luego*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

**Teorema 9.5.** *Se $f$ es integrable sobre $[a, b]$ y $F$ está definida sobre $[a, b]$ por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

*entonces $F$ es contínua sobre $[a, b]$*

Cuadro 8: Reglas de integrales

| | | |
|---|---|---|
| $\int_b^a f(x)\ dx$ | $=$ | $-\int_a^b f(x)\ dx$ |
| $\int_a^a f(x)\ dx$ | $=$ | $0$ |
| $\int_a^b kf(x)\ dx$ | $=$ | $k\int_a^b f(x)\ dx$ |
| $\int_a^b f(x)+g(x)\ dx$ | $=$ | $\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$ |
| $\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$ | $=$ | $\int_a^c f(x)\ dx$ |

Cuadro 9: Tabla de integrales inmediatas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\int a\ dx$ | | | $ax$ | |
| $\int x^n\ dx$ | | | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $, n \neq 1$ |
| $\int a^x\ dx$ | | | $\frac{a^x}{\ln(a)}$ | |
| $\int \frac{1}{x}\ dx$ | $=$ | $\int \frac{dx}{x}$ | $\ln(x)$ | |
| $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ | | | $\sqrt{x}$ | |
| $\int e^x\ dx$ | | | $e^x$ | |
| $\int \operatorname{sen}(x)\ dx$ | | | $-\cos(x)$ | |
| $\int \cos(x)\ dx$ | | | $\operatorname{sen}(x)$ | |

# 10. Agregar:

## 10.1. Fórmula de Taylor

Teorema: si $a_k$ son los coeficientes de un polinomio,

$$P_n, a, f = \sum_{k=0}^{n} (0)^k$$

(buscar Spivak)

$$P_n, a, f = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k$$

Donde:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$