1. Logaritmos

Veamos la siguiente *regla del cambio de base*:

Para todo x se cumple $x^{\log_x(M)} = M$. De esto se sigue $a^{\log_a(b)} = b$ y $b^{\log_b(M)} = M$. Sustituyendo obtenemos: $M = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b M}$ que es lo mismo que $M = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$. Con lo cual, tenemos:

$$a^{\log_a M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

De los cual se sigue $\log_a M = (\log_a b)(\log_b M)$ y finalmente:

$$\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)} \tag{1}$$

2. Límites

2.1. Primero, consideremos las definiciones siguientes.

$$\begin{array}{lcll}
\lim_{x\to a} f(x) = l & \equiv & (\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x) & 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon \\
\lim_{x\to\infty} f(x) = l & \equiv & (\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall x) & x > |N| \to |f(x) - l| < \epsilon \\
\lim_{x\to a} f(x) = \infty & \equiv & (\forall M > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \neq a) & 0 < |x-a| < \delta \to |f(x)| > M \\
\lim_{x\to a} f(x) = 0 & \equiv & (\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x) & 0 < |x-a| < \delta \to |f(x)| < \epsilon \\
\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 & \equiv & (\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall x) & x > N \to |f(x)| < \epsilon
\end{array}$$

2.2. Algunos teoremas.

$$\begin{array}{lcl}
\lim_{x\to a} k + f(x) & = & k + \lim f(x) \\
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} & = & \infty \\
\lim_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) & = & \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)
\end{array}$$

Teorema 2.1. *Si* $f(x) = c + g(x)$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *luego*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

.

Teorema 2.2.

$$\textit{Si} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq \infty$$

$$\textit{Luego:} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2.3. Más definiciones.

Definición 2.1 (Infinitesimales del mismo orden). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene un límite finito y distinto de cero, los infinitesimales $f(x)$ y $g(x)$ son llamados del mismo orden.

Definición 2.2 (Infinitesimales el orden superior e inferior). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

entonces, la infinitesimal $f(x)$ se llama infinitesimal de orden superior a $g(x)$ *y ésta última se denomina* infinitesimal de orden inferior a $f(x)$

Definición 2.3 (Infinitesimal de orden k respecto de otra). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)^k} = l \neq 0 \neq \infty$$

entonces, la infinitesimal $f(x)$ se llama infinitesimal de orden k respecto de $g(x)$

Definición 2.4 (Infinitesimales equialentes). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

entonces, las infinitesimales $f(x)$ y $g(x)$ se llaman equivalentes.

3. Continuidad

Definición 3.1 (Continuidad de una función). *Una función $f(x)$ es* contínua *en el punto x_0 si está definida en la vecindad de dicho punto y*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

O, lo que es igual:

$$\lim_{\Delta x\to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Y como $\lim(a+b) = \lim a + \lim b$*, también podemos escribir:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Lo que es igual a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4. Derivadas

Definición 4.1 (Derivable en a)**.** *La función* f *es* derivable en a *si existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{d}$$

Teorema 4.1. *Si f es derivable en a, entonces es contínua en a .*
Teorema 4.2.

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

Demostración.

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) =$$

$$= \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$$

Y como $\lim_{h \to 0}(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = e$ se deduce entones que

$$\Big(\log_a(x)\Big)' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

□

Corolario: $\Big(ln(x)\Big)' = \frac{1}{x}$.

Demostración. $\ln(e) = 1$ □

4.1. Reglas de derivación

Regla de la cadena:

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

En la siguiente tabla x reprsenta un variable, a y k constantes y u y v funciones de x .

f	f'
k	0
kx	k
ku	ku'
vu	$v'u + vu'$
x^k	ku^{k-1}
u^k	$ku^{k-1}u'$
a^x	$a^x \ln(a)$
a^u	$a^u(\ln a)u'$
u^v	$vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
$log_a(x)$	$(\frac{1}{x}) \log_a(e)$
$log_a(u)$	$(\frac{1}{u}) \log_a(e)u'$
$\frac{k}{x}$	$-\frac{k}{x^2}$
$\frac{k}{u}$	$-\frac{ku'}{u^2}$
$\frac{v}{u}$	$\frac{v'u - vu'}{u^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$

4.2. Teoremas sobre derivadas

Teorema 4.3 (Teorema de Rolle)**.** *Si f es contínua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = x$.*

Demostración. Como, según suponemos, $f(x)$ es contínua en $[a, b]$, debe tener un máximo M y un mínimo m en $[a, b]$. Si $M = m$, entonces $f(x)$ es constante y cualquier $x \in (a, b)$ sirve. Supongamos que $M > 0 \geq m$ ($m > M$ no podría ser) y que $f(c) = M$. Observemos que, según lo supuesto, debe ser $c \neq a$ y $c \neq b$. Tenemos entonces que, para todo Δx , $f(c+\Delta x)-f(c) \leq 0$ ya sea $\Delta x > 0$ como $\Delta x < 0$. Se sigue:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x > 0$$
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x < 0$$

Como, según la hipótesis la derivada $f'(c)$ existe, obtenemos, pasando al límite las fórmulas anteriores que $f'(c) \leq 0$ o $f'(c) \geq 0$ según sea Δx positiva o negativa respectivamente. De esto se sigue que

$$f'(c) = 0$$

$\square$

Teorema 4.4 (Teorema del valor medio). *Si f es contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un número x en (a, b) tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Definamos:

$$h(x) \quad = \quad f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)$$

Fácillmente se obtiene $h(a) = f(a)$ y también

$$h(b) = f(b) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(b - a) = f(a)$$

Así, dado que $f(a) = f(b)$ podemos aplicar el teorema de Rolle según el cual existe algún c tal que $h'(x) = 0$. Derivamos $h(x)$ y obtenemos

$$\left(f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)\right)' = f'(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)$$

De manera que $0 = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. $\square$

5. Sucesiones

Definición 5.1. *Sucesión infinita*

Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$.

Definición 5.2. *Convergencia*

Una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia *l si $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n) : n > N \quad \rightarrow \quad |a_n - l| < \epsilon$ y se escribe*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

Teorema 5.1. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c, excepto quizá en c mismo, con:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Y supóngase además que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:

1. *cada a_n pertenece al dominio de f,*
2. *cada $a_n \neq c$,*
3. *$\lim_{n \to \infty} a_n = c$*

Entonces, la sucesión $\{f(a_n)\}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ que datisface las condiciones anteriores, entonces se cumple que

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

Demostración. Para la primer parte de la prueba designemos las hipótesis así:

$$\begin{array}{ll} \textbf{A1.} & \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (0 < |x - c| < \delta) \quad \to \quad (|f(x) - l| < \epsilon) \\ \textbf{A2.} & \forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (a_n - l| < \epsilon) \end{array}$$

Según como se elija ϵ en la segunda fórmula, tenemos que $|f(a_n) - l| < \epsilon$ (es decir, usamos $\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (|a_n - l| < \epsilon)$ que afirma el antecedente de **A1**).

Con esto hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, designemos ahora ls hipótesis así:

$$\begin{array}{ll} \textbf{B1.} & \forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (|f(a_n) - l| < \epsilon) \\ \textbf{B2.} & \forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (|a_n - c| < \epsilon) \end{array}$$

Ahora supongamos -a los fines de una reducciónn al absurdo- que no se cumple $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Esto sería decir que:

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (0 < |x - c| < \delta) \quad \wedge \quad (|f(x) - l| > \epsilon)$$

Así, para algún ϵ se cumpliría que para todo n (que es como decir, para todo $1/n$ existe un número x_n tal que

$$\exists\epsilon > 0\ \forall n \exists x_n \quad (0 < |x_n - c| < 1/n) \quad \wedge \quad (|f(x_n) - l| > \epsilon)$$

(es decir, hemos sustituído δ por $1/n$ y x por x_n).

Con esto, la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia c (usamos acá $\epsilon = 1/n$ y $N = n$, y aplicamos la defiición). Pero $f(\{a_n\}$ no convergería a l, contradiciendo la hipótesis. $\square$

En los ejemplos siguientes N se refiere al N de la definición de límite.
Ejemplo 5.1. *La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es convergente a cero.*

M: cualquier natural que verifique la condición $\frac{1}{N} < \epsilon$ o sea $m > \frac{1}{\epsilon}$. (propiedd arquimediana.

Ejemplo 5.2. *La sucesión $\{x^n\}$, con $|x| < 1$ converge a cero*

Escribimos $|x| = \frac{1}{(1+p)}$ (para p conveniente).

Y para N tomamos cualquiera que cumpla con $\frac{1}{pN} < \epsilon$.

Ejemplo 5.3. *La sucesión $\sum_{k=0}^{n} x^n$ llamada* serie geométrica *converge a $\frac{1}{1-x}$*

Ejemplo 5.4 (La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.)**.**

Ejemplo 5.5 ($\lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a}\} = 1$)**.** *Demostración.* Tenemos que encontrar un n que cumpla con

$$|a^{(\frac{1}{n})}| - 1 < \epsilon$$

.

Se dan dos casos.

Caso 1 $\quad 0 < a < 1$

En este caso $a^{\frac{1}{n}} < 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, tenemos que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = 1 - a^{\frac{1}{n}}$. De este modo, si $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$ tenemos $a^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$, y por esto:

$$n > \frac{1}{\log_a(1-\epsilon)}$$

Caso 2 $\quad a > 1$

Aquí tenemos que $|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1$. Tenemos que hallar un n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, es decir que $a^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 1$.

Lo cual se sigue de $\log_a(\epsilon + 1) = 1/x$, ya que: $n > x \to 1/n < 1/x$ y $1/n < 1/x \to a^{1/n} < a^{1/x}$.

Como, por definición de logaritmo $a^{1/n} = \epsilon + 1 \quad \equiv \quad \log_a(\epsilon + 1) = \frac{1}{n}$ y hemos supuesto la parte derecha, tenemos:

$$a^{1/n} < \epsilon + 1$$

□

5.1. Algunos límites

Sucesión	Límite	
$\lim_{n\to\infty} a^n$	$0,$	$(\|a\| < 1)$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$	1	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	1	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$	1	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$	$\text{máx}(a,b)$	
$\sum_{k=0}^{n} x^n$	$\frac{1}{1-x}$	*(Serie geometrica)*

6. Asíntotas

6.1. Asíntota Vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina *asíntota vertical.*

Ejemplos: logaritmo neperiano, tangente

6.2. Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a,$$

siendo a un valor finito, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

Ejemplos: función exponencial, tangente hiperbólica

6.3. Asíntota oblicua

La recta de ecuación $y = mx + b, (m \neq 0)$ será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Los valores de m y de b se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$$