6 de abril de 2015

1. Logaritmos

Veamos la siguiente *regla del cambio de base*:

Para todo x se cumple $x^{\log_x(M)} = M$. De esto se sigue $a^{\log_a(b)} = b$ y $b^{\log_b(M)} = M$. Sustituyendo obtenemos: $M = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b M}$ que es lo mismo que $M = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$. Con lo cual, tenemos:

$$a^{\log_a M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

De los cual se sigue $\log_a M = (\log_a b)(\log_b M)$ y finalmente:

$$\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)} \tag{1}$$

Cuadro 1: Propiedades de los logaritmos

$\log_a a$	$=$	1
$\log_a 1$	$=$	0
$\log_a pq$	$=$	$\log_a p + \log_a q$
$\log_a \frac{p}{q}$	$=$	$\log_a p - \log_a q$
$\log_a p^q$	$=$	$q \log_a p$
$\log_a p$	$=$	$\frac{\log_b p}{\log_b a}$
$a^{\log_a x}$	$=$	x

Además, $p \neq q \quad \rightarrow \log_a(p) \neq \log_a(q)$

2. Límites

2.1. Primero, consideremos las definiciones siguientes.

Definición 2.1 (Límite)**.**

$$\text{La fórmula} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = l \qquad \text{significa:}$$

$$(\forall\epsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ \forall x \quad : \quad (0 < |x-a| < \delta) \qquad \to \qquad (|f(x) - l| < \epsilon) \tag{2}$$

Cuadro 2: definiciones de limites

$\lim_{x\to a} f(x) = l$	$\equiv$	$(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x)$	$0 < \lvert x-a\rvert < \delta \to \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$	$\equiv$	$(\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall x)$	$x > \lvert N\rvert \to \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	$\equiv$	$(\forall M > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \neq a)$	$0 < \lvert x-a\rvert < \delta \to \lvert f(x)\rvert > M$
$\lim_{x\to a} f(x) = 0$	$\equiv$	$(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x)$	$0 < \lvert x-a\rvert < \delta \to \lvert f(x)\rvert < \epsilon$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$	$\equiv$	$(\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall x)$	$x > N \to \lvert f(x)\rvert < \epsilon$

2.2. Algunos teoremas.

2.3. Más definiciones.

Definición 2.2 (Infinitesimales del mismo orden)**.** *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene un límite finito y distinto de cero, los infinitesimales $f(x)$ y $g(x)$ son llamados del mismo orden*.*

Definición 2.3 (Infinitesimales el orden superior e inferior)**.** *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

entonces, la infinitesimal $f(x)$ se llama infinitesimal de orden superior a *$g(x)$ y ésta última se denomina* infinitesimal de orden inferior a *$f(x)$*

Cuadro 3: Reglas sobre límites

$$\lim_{x\to a} k = k$$

$$\lim_{x\to a} x = a$$

$$\lim_{x\to a} \Big(k + f(x)\Big) = k + \lim f(x)$$

$$\lim_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \Big(f(x)g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \log\left(f(x)\right) = \log\big(\lim_{x\to a} f(x)\big)$$

$$\lim_{x\to a} \Big(f(x)\Big)^n = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^n$$

$$\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad *$$

* f y g son contínuas, están definias en $[a, b]$ con $a \in (a, b)$ y $f(a) = f(a) = 0$ o $\pm\infty$

Cuadro 4: Algunos ejemplos de límites

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$	$=$	∞
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)$	$=$	1
$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$	$=$	n
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$	$=$	∞
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$	$=$	e^{-1}
$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$	$=$	0
$\lim_{x\to 0} \cos x$	$=$	1
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$=$	1
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$	$=$	4
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax}$	$=$	$1,\ a \neq 0$
$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - a}{x - a}$	$=$	1

Cuadro 5: ALgunas funciones que no tienden a ningún límite

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$
$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Definición 2.4 (Infinitesimal de orden k respecto de otra). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)^k} = l \neq 0 \neq \infty$$

entonces, la infinitesimal $f(x)$ se llama infinitesimal de orden k respecto de $g(x)$

Definición 2.5 (Infinitesimales equialentes). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitesimales, cuando $x \to a$. Luego, si la función:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

entonces, las infinitesimales $f(x)$ y $g(x)$ se llaman equivalentes.

3. Continuidad

Definición 3.1 (Continuidad de una función). *Una función $f(x)$ es* contínua *en el punto x_0 si está definida en la vecindad de dicho punto y*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

O, lo que es igual:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Y como $\lim(a+b) = \lim a + \lim b$, *también podemos escribir:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Lo que es igual a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4. Derivadas

Definición 4.1 (Derivable en a). *La función f es* derivable en a *si existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{d}$$

Teorema 4.1. *Si f es derivable en a, entonces es contínua en a .*

Teorema 4.2.

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

Demostración.

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) =$$

$$= \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$$

Y como $\lim_{h \to 0}(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = e$ se deduce entones que

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

□

Corolario: $\Big(ln(x)\Big)' = \frac{1}{x}$.

Demostración. $\ln(e) = 1$ □

4.1. Reglas de derivación

Teorema 4.3 (Regla de la cadena)**.**

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x) \tag{3}$$

4.2. Algunos teoremas sobre el comportamiento de las funciones

Definición 4.2 (Punto máximo)**.** *Sea f una función y A un conjunto contenido en su dominio. Un punto mi x de A se dice que es **punto máximo** de f sobre A si*

$$(\forall y \in A) \quad f(x) \geq f(y) \tag{4}$$

Definición 4.3 (Valor máximo)**.** *El número $f(x)$ recibe el nombre de **valor máximo** de f sobre A si x es su punto máximo.*

Teorema 4.4. *Sea f una función definida sobre (a, b). Luego, si x es un máximo (para f) sobre (a, b), y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.*

Es importante notar aquí que el recíroco de este teorema no es cierto. Es posible que se dé $f'(x) = 0$ sin que por ello x sea un punto máximo. Este es el caso de $f'(0)$ cuando $f(x) = x^3$.

Definición 4.4 (Punto máximo (mínimo) local)**.** *Un punto x es un máximo local de la función f sobre A si existe algún δ tal que x es punto máximo sobre el conjunto $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.*

Teorema 4.5. *Si f está definida sobre (a, b), tiene un máximo local en x y es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.*

Definición 4.5 (Punto singular y valor singular)**.** *Se llama **punto singular** de una función f a todo número x tal que*

$$f'(x) = 0$$

*El número $f(x)$ recibe entonces el nombre de **valor singular**.*

Teorema 4.6 (Teorema de Rolle)**.** *Si f es contínua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.*

Demostración. Como, según suponemos, $f(x)$ es contínua en $[a, b]$, debe tener un máximo M y un mínimo m en $[a, b]$. Si $M = m$, entonces $f(x)$ es constante y cualquier $x \in (a, b)$ sirve. Supongamos que $M > 0 \geq m$ ($m > M$ no podría ser) y que $f(c) = M$. Observemos que, según lo supuesto, debe ser $c \neq a$ y $c \neq b$. Tenemos entonces que, para todo Δx , $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ ya sea $\Delta x > 0$ como $\Delta x < 0$. Se sigue:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x > 0$$
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \textit{cuando} \quad \Delta x < 0$$

Como, según la hipótesis la derivada $f'(c)$ existe, obtenemos, pasando al límite las fórmulas anteriores que $f'(c) \leq 0$ o $f'(c) \geq 0$ según sea Δx positiva o negativa respectivamente. De esto se sigue que

$$f'(c) = 0$$

□

Cuadro 6: reglas de derivación. x reprsenta un variable, a y k constantes y u y v funciones de x .

f	f'
k	0
kx	k
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
vu	$v'u+vu'$
x^k	ku^{k-1}
u^k	$ku^{k-1}u'$
a^x	$a^x\ln(a)$
a^u	$a^u(\ln a)u'$
u^v	$vu^{v-1}u'+u^v(\ln u)v'$
$log_a(x)$	$\left(\frac{1}{x}\right)\log_a(e)$
$log_a(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right)\log_a(e)u'$
$\frac{k}{x}$	$-\frac{k}{x^2}$
$\frac{k}{u}$	$-\frac{ku'}{u^2}$
$\frac{v}{u}$	$\frac{v'u-vu'}{u^2}$
$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\mathrm{sen}(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}$

Teorema 4.7 (Teorema del valor medio)**.** *Si f es contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un número x en (a, b) tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Definamos:

$$h(x) \quad = \quad f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)$$

Fácilmente se obtiene $h(a) = f(a)$ y también

$$h(b) = f(b) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(b - a) = f(a)$$

Así, dado que $f(a) = f(b)$ podemos aplicar el teorema de Rolle según el cual existe algún x tal que $h'(x) = 0$. Derivamos $h(x)$ y obtenemos

$$\Bigg(f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)(x - a)\Bigg)' = f'(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big)$$

De manera que $0 = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. □

Corolario 4.7.1. *Si se define f sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del itnervalo, entonces f es constante en el intervalo.*

Demostración. Sean a y b dos puntos distintos del inervalo. Luego debe haber algún x tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero como $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo:

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Luego $f(b) = f(a)$.

□

Corolario 4.7.2. *Si f y g estaán definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún c tal que $f + g = c$.*

Corolario 4.7.3. *Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.*

Teorema 4.8 (Teorema de Cauchy)**.** *Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones contínuas y derivables dentrode $[a, b]$. Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego:*

$$\exists c \in (a, b) \quad . \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

4.3. Máximos y mínimos

Para localizar el máximo y el mínimo de f en $[a, b]$ deben considerarse tres clases de puntos:

1. Los puntos singulares de f en $[a, b]$.
2. Los extremos a y b .
3. Los puntos de x de $[a, b]$ tales que f no es derivable en x .

Si x es un punto máximo, entonces evidentemente debe ser alguno de estos tres casos.

Si existen sólo unos pocos puntos singulares, y sólo unos pocos en los cuales no es derivable, el procedimiento para hallar los puntos máximos es: se halla $f(x)$ para cada x que satisface $f'(x) = 0$, y $f(x)$ para cada x en que f no es derivable y, finalmente, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de estos valores será el máximo y el menor será el mínimo.

Ejemplo 4.1. *Hallar máximo y ínimo de $f(x) = x^3 - x$ (falta el ejemplo)*

Teorema 4.9 (Criterio de la segunda derivada)**.** *Sea $f'(a) = 0$ y que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a a. Luego,*

Si $f''(x) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(x, f(x))$.
Si $f''(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(x, f(x))$.
Si $f''(x) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizás tenga un máximo relativo en x , un mínimo relativo en $(x, f(x))$ o ninguno de los dos. Tomar como ejemplo la función $f(x) = x^3$. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada o el criterio de la tercera derivada.

Nota: la derivada segunda es la derivada de la derivada, o sea:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Cuadro 7: Mínimos y máximos

$f(c)$ es valor mínimo o máximo	$f'(x) = 0$
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es creciente en $\mathbf{I}$
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es decreciente en $\mathbf{I}$
f es cóncava en $\mathbf{I}$	f' es creciente $\mathbf{I}$
f es convexa en $\mathbf{I}$	f' es decreciente $\mathbf{I}$
$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es cóncava en $\mathbf{I}$
$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es convexa en $\mathbf{I}$

Criterio de la primera derivada:

Si $f'(x) > 0 \forall\ x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0 \forall\ x \in (c, b)$ entonces $f(c)$ es valor máximo relativo

Si $f'(x) < 0 \forall\ x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0 \forall\ x \in (c, b)$ entonces $f(c)$ es valor mínimo relativo

Si $f'(x)$ tiene el mismo valor a ambos lados de c entocnes c no es valor extremo

Criterio de la segunda derivada:

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a,b) que contiene a c y
supóngase que $f'(c) = 0$.

$f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es máximo relativo

$f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es mínimo relativo

5. Sucesiones

Definición 5.1. *Sucesión infinita*
Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$.

Definición 5.2. *Convergencia*
Una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia l *si* $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n) : n > N \quad \rightarrow \quad |a_n - l| < \epsilon$ *y se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Teorema 5.1. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c, excepto quizá en c mismo, con:*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

Y supóngase además que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:

1. *cada a_n pertenece al dominio de f,*
2. *cada $a_n \neq c$,*
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

Entonces, la sucesión $\{f(a_n)\}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ que datisface las condiciones anteriores, entonces se cumple que

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

Demostración. Para la primer parte de la prueba designemos las hipótesis así:

$$\begin{array}{ll} \textbf{A1.} & \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (0 < |x - c| < \delta) \quad \rightarrow \quad (|f(x) - l| < \epsilon) \\ \textbf{A2.} & \forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \rightarrow \quad (a_n - l| < \epsilon) \end{array}$$

Según como se elija ϵ en la segunda fórmula, tenemos que $|f(a_n) - l| < \epsilon$ (es decir, usamos $\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (|a_n - l| < \epsilon)$ que afirma el antecedente de **A1**).

Con esto hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, designemos ahora ls hipótesis así:

$$\begin{array}{ll} \textbf{B1.} & \forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (|f(a_n) - l| < \epsilon) \\ \textbf{B2.} & \forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \quad (n > N) \quad \to \quad (|a_n - c| < \epsilon) \end{array}$$

Ahora supongamos -a los fines de una reduccciónn al absurdo- que no se cumple $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Esto sería decir que:

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (0 < |x - c| < \delta) \quad \wedge \quad (|f(x) - l| > \epsilon)$$

Así, para algún ϵ se cumpliría que para todo n (que es como decir, para todo $1/n$ existe un número x_n tal que

$$\exists\epsilon > 0\ \forall n \exists x_n \quad (0 < |x_n - c| < 1/n) \quad \wedge \quad (|f(x_n) - l| > \epsilon)$$

(es decir, hemos sustituído δ por $1/n$ y x por x_n).

Con esto, la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia c (usamos acá $\epsilon = 1/n$ y $N = n$, y aplicamos la defiición). Pero $f(\{a_n\}$ no convergería a l, contradiciendo la hipótesis. □

En los ejemplos siguientes N se refiere al N de la definición de límite.

Ejemplo 5.1. *La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es convergente a cero.*
M: cualquier natural que verifique la condición $\frac{1}{N} < \epsilon$ o sea $m > \frac{1}{\epsilon}$. (propiedd arquimediana.

Ejemplo 5.2. *La sucesión $\{x^n\}$, con $|x| < 1$ converge a cero*
Escribimos $|x| = \frac{1}{(1+p)}$ (para p conveniente).
Y para N tomamos cualquiera que cumpla con $\frac{1}{pN} < \epsilon$.

Ejemplo 5.3. *La sucesión $\sum_{k=0}^{n} x^n$ llamada* serie geométrica *converge a $\frac{1}{1-x}$*

Ejemplo 5.4 (La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.)**.**

Ejemplo 5.5 ($\lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a}\} = 1$)**.** *Demostración.* Tenemos que encontrar un n que cumpla con $|a^{(\frac{1}{n})}| - 1 < \epsilon$. Se dan dos casos.

Caso 1 $\quad 0 < a < 1$

En este caso $a^{\frac{1}{n}} < 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, tenemos que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = 1 - a^{\frac{1}{n}}$. De este modo, si $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$ tenemos $a^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$, y por esto:

$$n > \frac{1}{\log_a(1 - \epsilon)}$$

Caso 2 $\quad a > 1$

Aquí tenemos que $|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1$. Tenemos que hallar un n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, es decir que $a^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 1$.

Lo cual se sigue de $\log_a(\epsilon + 1) = 1/x$, ya que: $n > x \to 1/n < 1/x$ y $1/n < 1/x \to a^{1/n} < a^{1/x}$.

Como, por definición de logaritmo $a^{1/n} = \epsilon + 1 \quad \equiv \quad \log_a(\epsilon + 1) = \frac{1}{n}$ y hemos supuesto la parte derecha, tenemos:

$$a^{1/n} < \epsilon + 1$$

□

5.1. Algunos límites

6. Asíntotas

6.1. Asíntota Vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina *asíntota vertical.*

Ejemplos: logaritmo neperiano, tangente

6.2. Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a,$$

siendo a un valor finito, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

Ejemplos: función exponencial, tangente hiperbólica

6.3. Asíntota oblicua

La recta de ecuación $y = mx + b, (m \neq 0)$ será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Los valores de m y de b se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$$

Cuadro 8: Ejemplos de límites de sucesiones

Sucesión	**Límite**	
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$	0	
$\lim_{n\to\infty} a^n$	$0,$	$(\|a\| < 1)$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$	1	
$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$	0	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$	$1, a > 1$	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	1	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$	1	
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$	$\max(a,b)$	
$\sum_{k=0}^{n} x^n$	$\frac{1}{1-x}$	(*Serie geometrica*)
$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e	
$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$	e^z	
$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{zn}\right)^n$	$e^{\frac{1}{z}}$	
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right)^n$	e^{-z}	

7. Integrales

Definición 7.1 (Partición)**.** *Sea $a < b$. Recibe el nombre de* partición *del itnervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos $[a, b]$, de los cuales uno es a y el otro es b .*

Definición 7.2 (Suma Inferior (Superior))**.** *Sea f acotada sobre $[a, b]$ y $P = t_0, \dots, t_n$ una partición de $[a, b]$. Sea además*

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Luego, se llama suma inferior *de f para P a :*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Y se llama suma superio *de f para P a :*

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Teorema 7.1. *Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$. Entonces:*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

Definición 7.3 (Integrable)**.** *Una función f acotada sobre $[a, b]$ es* integrable *sobre $[a, b]$ si*

$$\sup\{L(f, P) : P \textit{ es partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \textit{ es partición de } [a, b]\}$$

Teorema 7.2. *Si f está acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Teorema 7.3. *Si f es contínua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Teorema 7.4. *Sea f integrable sobre $[a, b]$ y*

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(X) \leq M$$

Luego

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

Teorema 7.5. *Se f es integrable sobre $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

entonces F es contínua sobre $[a, b]$

Cuadro 9: Reglas de integrales

$\int_b^a f(x)\ dx$	$=$	$-\int_a^b f(x)\ dx$
$\int_a^a f(x)\ dx$	$=$	0
$\int_a^b kf(x)\ dx$	$=$	$k\int_a^b f(x)\ dx$
$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx$	$=$	$\int_a^b f(x)\ dx+\int_a^b g(x)\ dx$
$\int_a^b f(x)\ dx+\int_b^c f(x)\ dx$	$=$	$\int_a^c f(x)\ dx$

Cuadro 10: Tabla de integrales inmediatas

$\int a\ dx$		ax	
$\int x^n\ dx$		$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$,n\neq 1$
$\int a^x\ dx$		$\frac{a^x}{\ln(a)}$	
$\int \frac{1}{x}\ dx$	$= \int \frac{dx}{x}$	$\ln(x)$	
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$		$\sqrt{x}$	
$\int e^x\ dx$		e^x	
$\int \operatorname{sen}(x)\ dx$		$-\cos(x)$	
$\int \cos(x)\ dx$		$\operatorname{sen}(x)$	