

22 de mayo de 2015

calculo-qref.tex

1. Logaritmos

Cuadro 1: Propiedades de los logaritmos

$\log_a a$	$=$	1
$\log_a 1$	$=$	0
$\log_a pq$	$=$	$\log_a p + \log_a q$
$\log_a \frac{p}{q}$	$=$	$\log_a p - \log_a q$
$\log_a p^q$	$=$	$q \log_a p$
$\log_a p$	$=$	$\frac{\log_b p}{\log_b a}$
$a^{\log_a x}$	$=$	x
$\log_a a^x$	$=$	x

Además, $p \neq q \rightarrow \log_a(p) \neq \log_a(q)$

Veamos la siguiente *regla del cambio de base*:

Para todo x se cumple $x^{\log_x(M)} = M$. De esto se sigue $a^{\log_a(b)} = b$ y $b^{\log_b(M)} = M$. Sustituyendo obtenemos: $M = (a^{\log_a b})^{\log_b M}$ que es lo mismo que $M = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$. Con lo cual, tenemos:

$$a^{\log_a M} = a^{(\log_a b)(\log_b M)}$$

De lo cual se sigue $\log_a M = (\log_a b)(\log_b M)$ y finalmente:

$$\log_b(M) = \frac{\log_a(M)}{\log_a(b)} \quad (1)$$

2. Funciones cuadráticas

El eje de simetría de una función cuadrática está dado por:

$$-\frac{b}{2a} = x_v$$

El valor extremo está dado por $f(-\frac{b}{2a})$, es decir:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = y_v$$

El vértice de la parábola está dado por el punto (x_v, y_v)

Los ceros de la función se obtienen con la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se cumple la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

3. Límites

3.1. Definiciones

Definición de límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{significa:}$$

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) \forall x \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{significa:}$$

$$(\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq a) \quad 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad \text{significa:}$$

$$(\forall \epsilon > 0 \exists N \forall x) \quad x > |N| \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Cuadro 2: Reglas sobre límites

$\lim_{x \rightarrow a} k$	$=$	k	
$\lim_{x \rightarrow a} x$	$=$	a	
$\lim_{x \rightarrow a} (k + f(x))$	$=$	$k + \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$=$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$	$=$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$=$	$\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$	$=$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$	
$\lim_{x \rightarrow a} \log(f(x))$	$=$	$\log(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$	
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n$	$=$	$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$	
$\sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$	$=$	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)}$	
$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$	$=$	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	f y g continuas, definidas en $[a, b]$. $c \in (a, b)$, $f(a) = f'(a) = 0$ o bien $\pm\infty$ (L'Hopital)
Si $b_n, c_n \rightarrow L$ y $b_n \leq a_n \leq c_n$		luego $a_n \rightarrow L$	(Sandwich)

Cuadro 3: Algunos ejemplos de límites

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$	=	∞	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)$	=	1	
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right)$	=	n	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right)$	=	∞	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$	=	e^{-1}	
$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x$	=	0	
$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$	=	1	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	=	1	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$	=	4	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax}$	=	1, $a \neq 0$	por L'Hopital
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - a}{x - a}$	=	1	
$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$	=	$-\infty$	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)$	=	∞	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x}$	=	0	por L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

3.2. Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que son

- funciones continuas en un entorno de a ,
- con derivadas en dicho entorno,
- siendo $g(x) \neq 0$ cerca de a ,
- con

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

- y existe el

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4. Continuidad

Definición 4.1 (Continuidad de una función). *Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si está definida en la vecindad de dicho punto y*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

O, lo que es igual:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Y como $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$, también podemos escribir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Lo que es igual a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

5. Derivadas

Definición 5.1 (Derivable en a). La función f es derivable en a si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Teorema 5.1. Si f es derivable en a , entonces es continua en a .

Teorema 5.2.

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} &= \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = \\ &= \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)} \end{aligned}$$

Y como $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$ se deduce entonces que

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$

□

Corolario: $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$.

Demostración. $\ln(e) = 1$

□

5.1. Reglas de derivación

Teorema 5.3 (Regla de la cadena).

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x) \quad (2)$$

Teorema 5.4.

$$(y^u)' = y^u \left(u' \ln y + \frac{uy'}{y} \right)$$

Teorema 5.5 (Teorema de la función inversa).

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5.2. Algunos teoremas sobre el comportamiento de las funciones

Definición 5.2 (Punto máximo). Sea f una función y A un conjunto contenido en su dominio. Un punto x de A se dice que es **punto máximo** de f sobre A si

$$(\forall y \in A) \quad f(x) \geq f(y) \quad (3)$$

Definición 5.3 (Valor máximo). El número $f(x)$ recibe el nombre de **valor máximo** de f sobre A si x es su punto máximo.

Cuadro 5: reglas de derivación. x representa un variable, a y k constantes y u y v funciones de x .

f	f'
k	0
kx	k
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
vu	$v'u + vu'$
x^k	ku^{k-1}
u^k	$ku^{k-1}u'$
a^x	$a^x \ln(a)$
a^u	$a^u (\ln a)u'$
u^v	$vu^{v-1}u' + u^v (\ln u)v'$
y^v	$y^v (v' \ln y + \frac{vy'}{y})$
$\log_a(x)$	$\left(\frac{1}{x}\right) \log_a(e)$
$\log_a(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right) \log_a(e)u'$
$\frac{k}{x}$	$-\frac{k}{x^2}$
$\frac{k}{u}$	$-\frac{ku'}{u^2}$
$\frac{v}{u}$	$\frac{v'u - vu'}{u^2}$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$\text{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\text{cotg}(x)$	$\frac{1}{\text{sen}^2(x)}$
$(f^{-1})'(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Teorema 5.6. Sea f una función definida sobre (a, b) . Luego, si x es un máximo (para f) sobre (a, b) , y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

Es importante notar aquí que el recíproco de este teorema no es cierto. Es posible que se dé $f'(x) = 0$ sin que por ello x sea un punto máximo. Este es el caso de $f'(0)$ cuando $f(x) = x^3$.

Definición 5.4 (Punto máximo (mínimo) local). Un punto x es un máximo local de la función f sobre A si existe algún δ tal que x es punto máximo sobre el conjunto $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.

Teorema 5.7. Si f está definida sobre (a, b) , tiene un máximo local en x y es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

Definición 5.5 (Punto singular y valor singular). Se llama **punto singular** de una función f a todo número x tal que

$$f'(x) = 0$$

El número $f(x)$ recibe entonces el nombre de **valor singular**.

Teorema 5.8 (Teorema de Rolle). Si f es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

Demostración. Como, según suponemos, $f(x)$ es continua en $[a, b]$, debe tener un máximo M y un mínimo m en $[a, b]$. Si $M = m$, entonces $f(x)$ es constante y cualquier $x \in (a, b)$ sirve. Supongamos que $M > 0 \geq m$ ($m > M$ no podría ser) y que $f(c) = M$. Observemos que, según lo supuesto, debe ser $c \neq a$ y $c \neq b$. Tenemos entonces que, para todo Δx , $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ ya sea $\Delta x > 0$ como $\Delta x < 0$. Se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &\leq 0 && \text{cuando } \Delta x > 0 \\ \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &\geq 0 && \text{cuando } \Delta x < 0 \end{aligned}$$

Como, según la hipótesis la derivada $f'(c)$ existe, obtenemos, pasando al límite las fórmulas anteriores que $f'(c) \leq 0$ o $f'(c) \geq 0$ según sea Δx positiva o negativa respectivamente. De esto se sigue que

$$f'(c) = 0$$

□

Teorema 5.9 (Teorema del valor medio). Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un número x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Definamos:

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$$

Fácilmente se obtiene $h(a) = f(a)$ y también

$$h(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (b - a) = f(a)$$

Así, dado que $f(a) = f(b)$ podemos aplicar el teorema de Rolle según el cual existe algún x tal que $h'(x) = 0$. Derivamos $h(x)$ y obtenemos

$$\left(f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) \right)' = f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

De manera que $0 = f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$.

□

Corolario 5.9.1. Si se define f sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, entonces f es constante en el intervalo.

Demostración. Sean a y b dos puntos distintos del intervalo. Luego debe haber algún x tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero como $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo:

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Luego $f(b) = f(a)$.

□

Corolario 5.9.2. Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún c tal que $f + g = c$.

Corolario 5.9.3. Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

Teorema 5.10 (Teorema de Cauchy). Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y derivables dentro de $[a, b]$. Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego:

$$\exists c \in (a, b) \quad \cdot \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Fermat	Sea f definida en (a, b) con extremo local en $x_0 \in (a, b)$ Si f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$
Rolle	Si f es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces $\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$.
Valor medio (Lagrange)	Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces $\exists x \in (a, b) \quad f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Cauchy	Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y derivables dentro de $[a, b]$. Si $g'(x)$ no adquiere el valor cero en $[a, b]$, luego: $\exists c \in (a, b) \quad \cdot \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

5.3. Máximos y mínimos

Para localizar el máximo y el mínimo de f en $[a, b]$ deben considerarse tres clases de puntos:

1. Los puntos singulares de f en $[a, b]$.
2. Los extremos a y b .
3. Los puntos de x de $[a, b]$ tales que f no es derivable en x .

Si x es un punto máximo, entonces evidentemente debe ser alguno de estos tres casos.

Si existen sólo unos pocos puntos singulares, y sólo unos pocos en los cuales no es derivable, el procedimiento para hallar los puntos máximos es: se halla $f(x)$ para cada x que satisface $f'(x) = 0$, y $f(x)$ para cada x en que f no es derivable y, finalmente, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de estos valores será el máximo y el menor será el mínimo.

Ejemplo 5.1. Hallar máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - x$ (falta el ejemplo)

Teorema 5.11 (Criterio de la segunda derivada). Sea $f'(a) = 0$ y que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a a . Luego,

Si $f''(x) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(x, f(x))$.

Si $f''(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(x, f(x))$.

Si $f''(x) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizás tenga un máximo relativo en x , un mínimo relativo en $(x, f(x))$ o ninguno de los dos. Tomar como ejemplo la función $f(x) = x^3$. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada o el criterio de la tercera derivada.

Nota: la derivada segunda es la derivada de la derivada, o sea:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Cuadro 6: Mínimos y máximos

$f(c)$ es valor mínimo o máximo	$f'(x) = 0$
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es creciente en \mathbf{I}
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es decreciente en \mathbf{I}
f es cóncava en \mathbf{I}	f' es creciente \mathbf{I}
f es convexa en \mathbf{I}	f' es decreciente \mathbf{I}
$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es cóncava en \mathbf{I}
$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{I}$	f es convexa en \mathbf{I}

Criterio de la primera derivada:

Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, b)$ **entonces** $f(c)$ es valor máximo relativo

Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c, b)$ **entonces** $f(c)$ es valor mínimo relativo

Si $f'(x)$ tiene el mismo valor a ambos lados de c entonces c no es valor extremo

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a,b) que contiene a c y supóngase que $f'(c) = 0$.

$f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es máximo relativo.

$f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es mínimo relativo .

Teorema 5.12 (Teorema de Bolzano). *Sea f continua en $[a, b]$, con $f(a) < 0$ (o $f(a) > 0$) y $f(b) > 0$ (o $f(b) < 0$). Luego*

$$\exists x \in (a, b) : f(x) = 0$$

Teorema 5.13 (Teorema de los valores intermedios). *Sea f continua en $[a, b]$ Luego:*

$$\forall u : f(a) < u < f(b) \rightarrow \exists x f(x) = u$$

Como corolario tenemos que:

$$\nexists x f(x) = 0 \rightarrow \neg(f(a) < 0 < f(b))$$

Con lo cual, si tenemos que en un intervalo una función no se anula y toma algún valor positivo, entonces es positiva en ese intervalo.

5.4. Construcción de curvas

Para la construcción de un gráfico de una función nos valdremos esencialmente de la siguiente información:

- Dominio f .
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos locales.
- Intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión.
- Existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

6. Sucesiones

Definición 6.1. *Sucesión infinita*

Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es \mathbb{N} .

Definición 6.2. *Convergencia*

Una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia l si $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n) : n > N \rightarrow |a_n - l| < \epsilon$ y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

Teorema 6.1. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c , excepto quizá en c mismo, con:*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Y supóngase además que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:

1. cada a_n pertenece al dominio de f ,

2. cada $a_n \neq c$,

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

Entonces, la sucesión $\{f(a_n)\}$ satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ que satisface las condiciones anteriores, entonces se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

En los ejemplos siguientes N se refiere al N de la definición de límite.

Ejemplo 6.1. La sucesión $\{x^n\}$, con $|x| < 1$ converge a cero

Escribimos $|x| = \frac{1}{(1+p)}$ (para p conveniente).

Y para N tomamos cualquiera que cumpla con $\frac{1}{pN} < \epsilon$.

Ejemplo 6.2. La sucesión $\sum_{k=0}^n x^k$ llamada serie geométrica converge a $\frac{1}{1-x}$

Ejemplo 6.3 (La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.).

Ejemplo 6.4 ($\lim_{n \rightarrow \infty} \{^n\sqrt{a}\} = 1$). *Demostración.* Tenemos que encontrar un n que cumpla con $|a^{(\frac{1}{n})} - 1| < \epsilon$. Se dan dos casos.

Caso 1 $0 < a < 1$

En este caso $a^{\frac{1}{n}} < 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, tenemos que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = 1 - a^{\frac{1}{n}}$. De este modo, si $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$ tenemos $a^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$, y por esto:

$$n > \frac{1}{\log_a(1 - \epsilon)}$$

Caso 2 $a > 1$

Aquí tenemos que $|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1$. Tenemos que hallar un n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, es decir que $a^{\frac{1}{n}} < \epsilon + 1$.

Lo cual se sigue de $\log_a(\epsilon + 1) = 1/x$, ya que: $n > x \rightarrow 1/n < 1/x$ y $1/n < 1/x \rightarrow a^{1/n} < a^{1/x}$.

Como, por definición de logaritmo $a^{1/n} = \epsilon + 1 \iff \log_a(\epsilon + 1) = \frac{1}{n}$ y hemos supuesto la parte derecha, tenemos:

$$a^{1/n} < \epsilon + 1$$

□

6.1. Criterio de Cauchy o de la raíz enésima

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L \leq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminado}$$

6.2. Criterio de D'Alembert o del cociente

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

entonces vale que:

$$0 \leq L < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$L \geq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$L = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminado}$$

6.3. Algunos límites

7. Series

Teorema 7.1. Si una serie s_n converge y u_n se obtiene en base a ella suprimiendo un número finito de términos en ella, luego u_n converge.

Teorema 7.2. Si s_n converge y suma s y u_n se obtiene multiplicando cada término de s por c , luego u_n converge en cs .

Teorema 7.3. Si las series s_n y u_n convergen y suman s y u respectivamente, también lo hace la serie que resulta de sumar cada enésimo término de una con el de la otra y su suma es $s + u$.

Teorema 7.4 (Condición necesaria para la convergencia). Si una serie converge, entonces si enésimo término tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Corolario 7.4.1. Si el enésimo término de una serie s_n no tiende a cero, entonces s_n no converge.

Teorema 7.5. Si $u_n \leq v_n, \forall n$ y v_n converge, luego u_n converge.

Teorema 7.6. Si $u_n \geq v_n, \forall n$ y v_n diverge, luego u_n diverge.

Cuadro 7: Ejemplos de límites de sucesiones

Sucesión	Límite
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$	0, ($ a < 1$)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$	1
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3+4}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$	1, $a > 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$	1
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2+n}$	1
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$	$\max(a, b)$
$\sum_{k=0}^n x^k$	$\frac{1}{1-x}$ (<i>Serie geometrica</i>)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$	e^z
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{zn}\right)^n$	$e^{\frac{1}{z}}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n$	e^{-z}

Teorema 7.7 (Criterio de D'Alembert). Sea s_1 una serie con términos positivos. Y sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

entonces:

- 1) La serie converge cuando $l < 1$
 - 2) La serie diverge cuando $l > 1$
- (Cuando $l = 1$ pueden darse los dos casos).

Teorema 7.8 (Criterio de Cauchy). Sea s_1 una serie con términos positivos. Y sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

entonces:

- 1) La serie converge cuando $l < 1$
 - 2) La serie diverge cuando $l > 1$
- (Cuando $l = 1$ pueden darse los dos casos).

Teorema 7.9 (Criterio Integral). Sea s_n una serie tal que

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \dots$$

Y sea f una función continua tal que $f(i) = s_i$. Entonces se cumple:

- 1) Si $\int_1^\infty f(x) dx$ converge, también converge s_n

8. Asíntotas

8.1. Asíntota Vertical

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina *asíntota vertical*.

Ejemplos: logaritmo neperiano, tangente

8.2. Asíntota horizontal

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a,$$

siendo a un valor finito, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

Ejemplos: función exponencial, tangente hiperbólica

8.3. Asíntota oblicua

La recta de ecuación $y = mx + b$, ($m \neq 0$) será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Los valores de m y de b se calculan con las fórmulas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx$$

9. Integrales

Definición 9.1 (Partición). Sea $a < b$. Recibe el nombre de partición del intervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos $[a, b]$, de los cuales uno es a y el otro es b .

Definición 9.2 (Suma Inferior (Superior)). Sea f acotada sobre $[a, b]$ y $P = t_0, \dots, t_n$ una partición de $[a, b]$. Sea además

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Luego, se llama suma inferior de f para P a :

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

Y se llama suma superior de f para P a :

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

Teorema 9.1. Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$. Entonces:

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

Definición 9.3 (Integrable). Una función f acotada sobre $[a, b]$ es integrable sobre $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}$$

Teorema 9.2. Si f está acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Teorema 9.3. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema 9.4. Sea f integrable sobre $[a, b]$ y

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$$

Luego

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Teorema 9.5. Se f es integrable sobre $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$

Cuadro 8: Reglas de integrales

$\int_b^a f(x) \, dx$	=	$-\int_a^b f(x) \, dx$
$\int_a^a f(x) \, dx$	=	0
$\int_a^b k f(x) \, dx$	=	$k \int_a^b f(x) \, dx$
$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx$	=	$\int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$	=	$\int_a^c f(x) \, dx$

Cuadro 9: Tabla de integrales inmediatas

$\int a \, dx$	ax
$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \int \frac{dx}{x}$	$\ln(x)$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
$\int e^x \, dx$	e^x
$\int \text{sen}(x) \, dx$	$-\cos(x)$
$\int \cos(x) \, dx$	$\text{sen}(x)$

10. Agregar:

10.1. Fórmula de Taylor

Teorema: si a_k son los coeficientes de un polinomio,

$$P_{n,a,f} = \sum_{k=0}^n (0)^k$$

(buscar Spivak)

$$P_{n,a,f} = \sum_{k=0}^n (x-a)^k$$

Donde:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$