Álgebra

27 de agosto de 2015

1. Vectores en R^2 y en R^3

Esta seccion habla sobre vectores.

Definición 1.1 (Vectores equivalentes). *Dos vectores AB y CD son* equivalente *sii*

$$B - A = D - C$$

Definición 1.2 (Vectores paralelos). *Dos vectores AB y CD son paralelos sii*

$$\exists k / \quad B - A = k(D - C)$$

Definición 1.3 (Punto Medio de A y B). *El punto medio de A y B se define:*

$$\frac{A + B}{2}$$

Definición 1.4 (Norma de un vector). *Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$. Se llama* norma *o* longitud *o* módulo *del vector A a $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ y se escribe $||A||$. Es decir:*

$$||A|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Se cumple:

Teorema 1.1.

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||A - B||$$

Teorema 1.2.

$$||k \cdot A|| = |k| \cdot ||A||$$

Teorema 1.3 (Desigualdad trangular).

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$$

Definición 1.5 (Distancia entre dos puntos). *Sean A y B vectores. Se llama* distancia entre dos puntos *al número $d(A, B)$ definido como $||B - A||$. Es decir:*

$$d(A, B) = ||B - A||$$

Definición 1.6 (Versor (o vector unitario)). *Un vector V es unitario (o versor) si $||V|| = 1$.*

Dado un vector A, el vector de igual dirección y sentido, pero de norma 1 que A se escribe $\breve{A}$.

Teorema 1.4.

$$\breve{A} = \frac{1}{||A||} A$$

Definición 1.7 (Producto escalar entre vectores (Producto interno)).

$$A \cdot B = ||A||\ ||B||\ \cos\theta(A, B)$$

Teorema 1.5 (Propiedades).

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{1}{2}(||A||^2 + ||B||^2 - ||B - A||) && (1)\\ A \cdot B &= B \cdot A && (2)\\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C && (3)\\ k(A \cdot B) &= (kA) \cdot B \quad = \quad A \cdot (kB) && (4)\\ A \cdot A &= ||A||^2 && (5) \end{aligned}$$

Definición 1.8 (Vectores ortogonales). *Dos vectores A y B son ortogonales si $A \cdot B = 0$. Esto ocurre cuando:*

1. *alguno (A o B) es nulo.*
2. $\cos\theta = 0$ *(i.e. $\theta = \pi/2$).*

Definición 1.9 (Forma paramétrica de una recta). *Sea L la recta tal que:*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = \lambda\mathbf{v} + P\}, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Donde $\mathbf{v}$ *es el* vector director *y P es un* punto de paso. *Lo mismo que antes los escribimos:*

$$L = \lambda\mathbf{v} + P$$

Teorema 1.6. *Sean $\mathbf{v}_k$ el vector director de L_k y P_k punto de paso de L_k.*

$$\begin{aligned} L_1 // L_2 &\equiv \mathbf{v}_1 // \mathbf{v}_2 && (6)\\ L_1 \perp L_2 &\equiv \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 && (7)\\ L_1 \subset_2 &\equiv \mathbf{v}_1 // \mathbf{v}_2 \wedge P_1 \in L_2 && (8)\\ L_1 \cap L_2 &\equiv k\mathbf{v}_1 + P_1 = l\mathbf{v}_2 + P_2 && (9) \end{aligned}$$

Definición 1.10 (Producto Vectorial). *Sean $A = (x_a, y_a, z_a)$ y $B = (x_b, y_b, z_b)$. Luego:*

$$A \times B = (y_a z_b - z_a y_b, z_a x_b - x_a y_b, x_a y_b - y_a y_b)$$

Teorema 1.7 (Propiedades).

$$\begin{aligned} A \times B &\neq B \times A && (10)\\ A \times B &= -(B \times A) &&\\ A \times (B + C) &= A \times B + A \times C && (11)\\ (A + B) \times C &= A \times B + B \times C &&\\ A \times B + C \times B &= A \times C - B \times C \quad = \quad (A - B)C && (12)\\ k \in \mathbb{R} : \quad k(A \times B) &= (kA) \times B(kB) && (13)\\ A \times A &= \mathbf{0} &&\\ ||A \times B||^2 &= ||A||^2 ||B||^2 - (AB)^2 && (14)\\ (A \times B) \cdot A &= 0 && (15)\\ (B \times A) \cdot B &= 0 && \end{aligned}$$

Teorema 1.8. *De la propiedad 16 (teorema 1.7) se sigue:*

$$||A \times B|| = ||A|| \; ||B|| \; \sin\theta$$

Obs: $||A \times B||$ *da el* área del paralelogramo *de vértices* $\mathbf{0}, A, (A+B), B$.

Definición 1.11 (Ecuación del plano)**.**

$$\Pi : ax + by + cz = k$$

Es la ecuación de un plano, donde: $N = (a, b, c)$ *es la* normal *del plano y* P *es un punto de paso.*

Se cumple por lo tanto:

$$N \cdot (x, y, z) = N \cdot P$$

y $k = N \cdot P$

Definición 1.12 (Distancia de un punto a un plano)**.** *Sean* P *un punto,* Π *un plano,* N *un vector y* k *un número real. Luego se cumple:*

$$d(P, \Pi) \;=\; \frac{|P \cdot N - k|}{||N||} \;=\; \frac{|ax + by + cz - k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

donde $d(P, \Pi$ *es la distancia entre el punto* P *y el plano* Π*.*