

Álgebra

20 de agosto de 2015

0.1. Matrices

Teorema 0.1.1. Sean A , B y C matrices de $m \times n$ y sea α un escalar. Entonces:

1. $A + \mathbf{0} = A$
2. $0A = \mathbf{0}$
3. $A + B = B + A$
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $1A = A$

Teorema 0.1.2. Sean \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} n -vectores y sea α un escalar.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Teorema 0.1.3 (Ley asociativa para multiplicación de matrices). Sea $A_{n \times m}$, $B_{m \times p}$ y $C_{p \times q}$ matrices. Entonces:

$$A(BC) = (AB)C$$

Teorema 0.1.4 (Leyes distributivas para la multiplicación de matrices). Si todas las sumas y productos están definidos, entonces:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Operaciones elementales entre filas.

1. Multiplicar (o dividir) una fila por un número distinto de cero.
2. Sumar un múltiplo de una fila a otra.
3. Intercambiar dos filas.

Notación:

1. $M_i(c)$ indica: multiplicar la i -ésima fila de una matriz por el número c .
2. $A_{i,j}(C)$ indica: multiplicar la i -ésima fila por c y sumársela a la j .
3. $P_{i,j}$ indica: permutar las filas i y j .

Definición 0.1.1 (Forma escalonada reducida). Una matriz está en forma escalonada reducida si se cumplen:

1. Todas las filas que consisten en únicamente ceros (si existen) aparecen en la parte de abajo de la matriz.
2. El primer número distinto de cero (empezando por la izquierda) en cualquier fila que no consista únicamente en ceros, es 1.
3. Si dos filas sucesivas no consisten únicamente en ceros, entonces el primer 1 en la fila inferior está más a la derecha que el primer 1 de la fila superior.
4. Cualquier columna que contenga el primer 1 de una fila tendrá cero en los demás lugares.

Definición 0.1.2 (Forma escalonada). Una matriz está en forma escalonada si se cumplen los ítems (1), (2) y (3) de la Definición 0.1.1.

Métodos para resolver sistemas de ecuaciones:

1. Eliminación de Gauss-Jordan:
Reducir la matriz a la forma escalonada reducida.
2. Eliminación Gaussiana: Reducir la matriz a la forma escalonada, despejar la última incógnita y luego usarsustitución hacia atrás para despejar las otras incógnitas.

Definición 0.1.3 (Sistema homogéneo de ecuaciones). Un sistema de ecuaciones se llama homogéneo si todas las constates b_1, b_2, \dots, b_m son cero, es decir:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Lo cual puede expresarse también:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

donde A es la matriz de coeficientes \mathbf{x} el vector (x_1, \dots, x_n) y $\mathbf{0}$ el vector de m ceros.

Definición 0.1.4 (Sistema homogéneo asociado). Dado el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se llama sistema homogéneo asociado a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al sistema:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Teorema 0.1.5. Si $n > m$, el sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas tiene un número infinito de soluciones.

Teorema 0.1.6. Sean \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 soluciones al sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Entonces su diferencia $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración. Por la ley distributiva (teorema 0.1.4), tenemos:

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2$$

Pero como \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son soluciones al sistema, tenemos:

$$A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

□

Corolario: Sean \mathbf{b}_x y \mathbf{b}_y dos soluciones del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Entoces existe un vector \mathbf{h} que es solución del sistema homogéneo tal que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$$

La prueba se obtiene facilmente para $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

De este modo, para encontrar todas las soluciones del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es necesario encontrar sólo una solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y todas las soluciones asociadas a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Definición 0.1.5 (Matriz identidad). La matriz identidad de $n \times n$ es la matriz $M_{n \times n}$ en la que las componentes de la diagonal principal son todos 1 y 0 los restantes.

Teorema 0.1.7. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces:

$$AI_n = I_n A = A$$

Demostración. Sea c_{ij} el i -jésimo elemento de AI_n , de modo que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

donde a_{ij} son los elementos de A y b_{ij} son los de I_n . Es evidente por la definición 0.1.5 que

$$c_{ij} = a_{ij}$$

Lo mismo puede observarse respecto de $I_n A$. □

Definición 0.1.6 (Inversa de una matriz). Sean A y B matrices de $n \times n$. Si

$$AB = BA = I$$

Entonces B es la inversa de A y se escribe A^{-1} . De este modo:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa, entonces decimos que es invertible.

Teorema 0.1.8. Si una matriz cuadrada es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración. Debemos mostrar que si B y C son dos inversas de A , entonces $B = C$.

Por hipótesis tenemos:

$$(i) \quad AB = BA = I$$

y

$$(ii) \quad AC = CA = I$$

Sustituyendo, usando (ii), tenemos:

$$B(AC) = BI = B$$

Usando (i):

$$(BA)C = IC = C$$

Por la ley asociativa (teorema 0.1.3), tenemos:

$$B(AC) = (BA)C$$

Sustituyendo, tenemos pues:

$$B = C$$

□

Teorema 0.1.9. Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$. Entonces, AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Demostración. Por la definición 0.1.6, tenemos que AB es la inversa de $B^{-1}A^{-1}$ (es decir $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$) si y sólo si $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$, que es lo que probaremos.

Por la ley asociativa (teorema 0.1.3) podemos probar:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I$$

así como:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$$

□

Considérese ahora el sistema de $n \times n$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Supoóngase que A es invertible, luego:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

De este modo, si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Procedimiento para calcular la inversa de una matriz cuadrada A

1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$.
2. Utilizar reducción por renglones para reducir la matriz A a su forma escalonada.
3. Decidir si la matriz A es invertible.
 - a)* Si A puede ser reducida a la matriz identidad I , entonces A es la matriz a la derecha de la barra vertical.
 - b)* Si la reducción por renglones conduce a algún renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, la matriz A no es invertible.

Observación: podemos expresar (a) y (b) diciendo que una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si su forma escalonada, reducida por renglones, es la matriz identidad.