1 Komplexe Zahlen Skript S. 1

1.1 Grundlagen Skript S. 1ff

Kartesische Form
Normalform: $z = z_1 + jz_2$
$z_1 = \mathrm{Re}(z), \quad z_2 = \mathrm{Im}(z)$
Umrechnung in Polar:

$$r = |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & z_1 \geq 0 \\ \arctan(\frac{z_2}{z_1}) + \pi & z_1 < 0 \end{cases}$$

Polarsystem
Polarform: $z = r\,\mathrm{cjs}(\varphi) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi}$
$\varphi = \arg(z)$
Umrechnung in Kartesisch:
$z_1 = |z|\cos\varphi, \quad z_2 = |z|\sin\varphi$

Imaginäre Einheit: $j^2 = -1 \qquad e^{j\pi} = -1 \qquad \frac{1}{j} = -j \qquad e^{j\frac{\pi}{2}} = j \qquad j^j = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

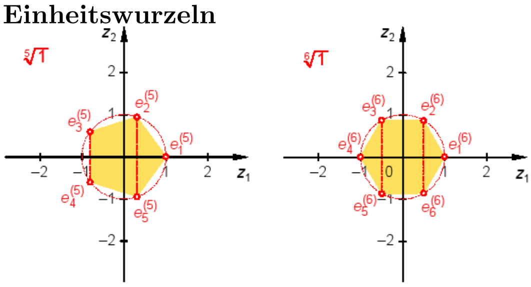
1.2 Rechenregeln Skript S. 10ff

$+, -$	Selbige Regeln wie für $\mathbb{R}$
Multiplikation	$a \cdot b = \lvert a\rvert\lvert b\rvert\,\mathrm{cjs}(\alpha+\beta) = \lvert a\rvert\lvert b\rvert e^{j(\alpha+\beta)}$ (kartesisch: $a_1 \cdot b_1 = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$)
Division	$\frac{a}{b} = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\mathrm{cjs}(\alpha-\beta) = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}e^{j(\alpha-\beta)}$ (kartesisch: Mit konj. komplex des Nenners erweitern)
Konjugiert komplex	$\overline{z} = \overline{z_1 + jz_2} = z_1 - jz_2; \qquad z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2$
Wurzeln	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\,\mathrm{cjs}(\frac{arg(a)}{n} + k\frac{2\pi}{n}) = \sqrt[n]{\lvert a\rvert}e^{j(\frac{\alpha}{n}+k\frac{2\pi}{n})}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1 \Rightarrow$ n Lösungen in $\mathbb{C}$!)
Potenzen	$a^n = \lvert a\rvert^n\,\mathrm{cjs}(n\alpha) = \lvert a\rvert^n e^{jn\alpha}$
e^z	$e^{z_1+jz_2} = e^{z_1}\,\mathrm{cjs}(z_2) = e^{z_1}(\cos z_2 + j\sin z_2)$; $\lvert e^z\rvert = e^{z_1}$; $arg(e^z) = z_2$
Moivre'sche Formel	$\mathrm{cjs}^n(\varphi) = (\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N})$
Logarithmus	$Ln(z) = \ln\lvert z\rvert + j(\arg(z) + 2k\pi) = \ln\lvert a\rvert + j\arg(a) \qquad a^b = e^{b \cdot Ln(a)} \rightarrow$ (keine Potenzgesetze)
	$\frac{1}{\mathrm{cjs}\,\varphi} = \mathrm{cjs}\,-\varphi$

Bemerkungen

- $p_n(z)$ $(n \geq 1, z \in \mathbb{C})$ hat n Lösungen und Nullstellen (in $\mathbb{C}$)
- Allgemeine Potenzen a^b, $a, b \in \mathbb{C}$ können mit $e^{b \cdot Ln(a)}$ und den bekannten für $\mathbb{R}$ gültigen Potenzregeln gelöst werden.
- $\mathrm{Re}(\frac{a}{b}) = 0$: Die beiden kompl. Zahlen a, b stehen senkrecht zueinander.

Einheitswurzeln



1.3 12. Einheitswurzeln $((k-1)\cdot 30°)$

$e_1^{(12)} = 1,\ e_2^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j,\ e_3^{(12)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_4^{(12)} = j,\ e_5^{(12)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_6^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j,$
$e_7^{(12)} = -1,\ e_8^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j,\ e_9^{(12)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_{10}^{(12)} = -j,\ e_{11}^{(12)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_{12}^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$

1.4 Nullstellen von Polynomen

Ein komplexes Polynom p(z) von Grad n hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen.
Alle diese Nullstellen liegen in einer Kreisscheibe um den Ursprung mit dem Radius $r = \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{a_k}{a_n}\right| = \left|\frac{a_0}{a_n}\right| + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| + ... + \left|\frac{a_n}{a_n}\right|$

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten nicht-reelle Nullstellen immer als konj.-kompl. Paare (z_0 und $\bar{z}_0$) auf.
Bei Polynomdivision immer mit reellen Zahlen arbeiten; konj.-kompl. Paare zusammenfassen.
Berechnung:

quadr. Polynome	Polynome mit $a_n = 1, a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_1 = 0, a_0 = a$
$p(z) = az^2 + bz + c = 0$	$p(z) = z^n + a = 0$
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$z_k = \sqrt[n]{\lvert a\rvert} \cdot cjs(\frac{\varphi_a + \pi}{n} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n})$ mit $k = 1, 2, ..., n$

1.5 Euler Skript S. 30f

$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$	$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -j\frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}$	$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$	$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$	$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$

1.6 Überlagerung von harmonischen Schwingungen Skript S. 32f

$$A\cdot\sin(\omega t+\varphi) = Im[A\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}] = Im[\underbrace{A\cdot e^{j\varphi}}_{\text{Complexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitfunktion}}]$$

$$A_1\cdot\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\cdot\cos(\omega t+\varphi_2) \quad\Rightarrow\quad Im[A_1\cdot e^{j(\omega t+\varphi_1)} + A_2\cdot e^{j(\omega t+\varphi_2+\frac{\pi}{2})}] \quad\Rightarrow\quad Im[e^{j\omega t}\cdot(A_1\cdot e^{j\varphi_1} + A_2\cdot e^{j(\varphi_2+\frac{\pi}{2})}]$$

Komplexe Amplituden in kartesische Form umwandeln, zusammenzählen und wieder zurück in Polarform wandeln.

$$Im[e^{j\omega t}\cdot(A_{total}\cdot e^{j\varphi_{total}})] \quad\Rightarrow\quad Im[A_{total}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_{total})}] \quad\Rightarrow\quad A_{total}\cdot\sin(\omega t+\varphi_{total})$$

$$A = |A_1\cdot e^{j\varphi_1} + A_2\cdot e^{j\varphi_2}| \qquad \varphi = arg(A_1\cdot e^{j\varphi_1} + A_2\cdot e^{j\varphi_2})$$

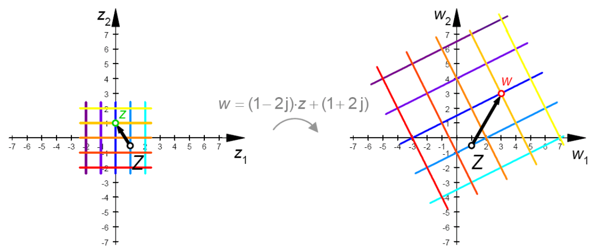
2 Komplexe Funktionen (Abbildungen) Skript S. 37ff

Eine komplexe Funktion hat einen 2-Dimensionalen Input (z_1, z_2) und einen 2-Dimensionalen Output (w_1, w_2).
Diese Abbildungen sind bis jeweils auf wenige Punkte (bei der Sinus-Funktion ± 1, etc) winkeltreu.
$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \qquad z \mapsto w = f(z)$
$w_1 = \text{Re}(f(r+jc)); w_2 = \text{Im}(f(r+jc))$ $\qquad f'(z) = 0$ nicht winkeltreu! $\qquad f'(z) \neq 0$ winkeltreu!

2.1 Lineare Funktion Skript S. 41ff

$$f : z \mapsto w = az + b \qquad (a, b \in \mathbb{C} \text{ und } a \neq 0)$$

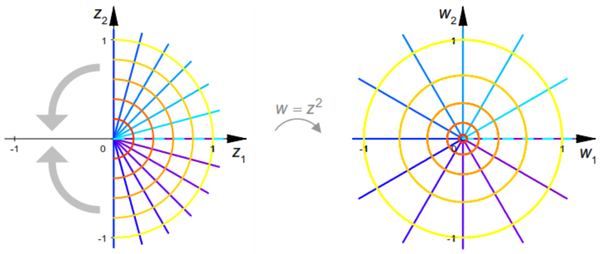
- für $a = 1$ eine Translation um den Ortsvektor b
- für $a \neq 1$ eine Drehstreckung mit dem Zentrum $\frac{b}{1-a}$, dem Drehwinkel $\arg(a)$ und dem Streckfaktor $|a|$.



2.2 Quadratfunktion und Quadratwurzelfunktion Skript S. 45ff

$$f : z \mapsto w = z^2 \qquad\qquad f : z \mapsto w = \sqrt{z}$$

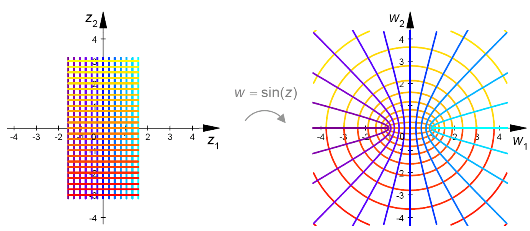
Bei der Quadratfunktion wird schon die rechte Hälfte der z-Ebene auf die ganze w-Ebene abgebildet (die Argumente werden verdoppelt). Mit der linken Hälfte zusammen ergeben sich zwei bzw. mehr Ebenen (Riemannsche Ebene). Sie ist überall Winkeltreu, ausser im Koordinatenursprung!



2.3 Sinus-Funktion Skript S. 67f

$$f : z \mapsto w = \sin(z)$$

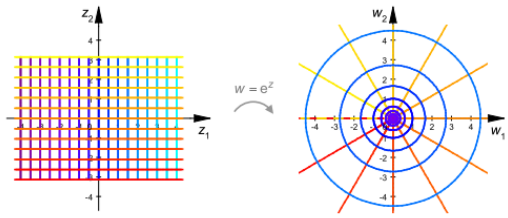
Die Sinusfunktion ist ausser bei den Punkten $z = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}))$ winkeltreu



2.4 Exponentialfunktion Skript S. 64ff

$$f : z \mapsto w = e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} * \mathrm{cjs}(\mathrm{Im}(z))$$

Waagrechte Gitternetzlinen gehen gemäss der obigen Gleichung in Strahlen über, die im Koordinatenursprung beginnen, senkrechte Gitternetzlinien in Kreise um den Koordinatenursprung. Die e^z-Funktion ist periodisch, deshalb braucht es eine Riemannsche Fläche.



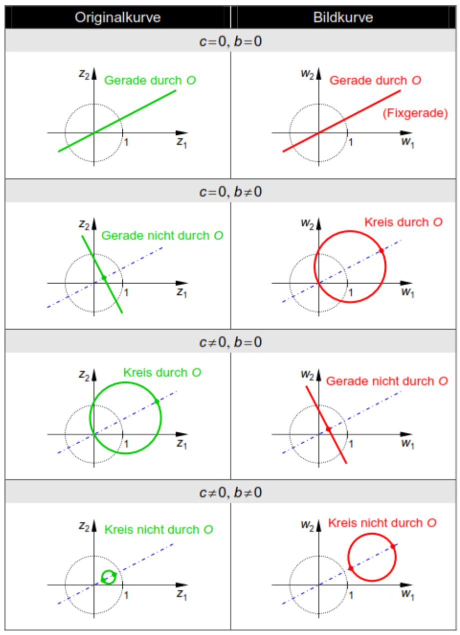
Mit dieser Funktion kann man das Feld an den Rändern des Plattenkondensators berechnen.

2.5 Kehrwertfunktion und Kreisspiegelung Skript S. 51ff

$$\underbrace{f : z \mapsto w = \frac{1}{z};}_{\text{Spiegelung an x-Achse (Kehrwert)}} \qquad (\arg(w) = -\arg(z), |w| = \frac{1}{|z|}) \qquad \underbrace{\overline{f} : z \mapsto w = \frac{1}{\overline{z}};}_{\text{Kreisspiegelung}} \quad (\arg(w) = \arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

Kreisspiegelung: Alle Punkte auf der z-Ebene werden am Einheitskreis gespiegelt. Geraden auf Kreise abgebildet und umgekehrt. Der Ursprungspunkt (0;0) wird auf ∞ abgebildet (auf allen Winkeln zwischen $0^o - 360^o$). Die Abbildungen sind im verallgemeinerten Sinn (Geraden sind Kreise mit unendlichem Radius) kreistreu. Ausserdem sind sie, bis auf den Koordinatenursprung, winkeltreu.

- Gerade durch 0 $\Longrightarrow$ Fixgerade (gleiche Gerade, aber die Punkte darauf sind anders verteilt)
- Gerade nicht durch 0 $\Longrightarrow$ Kreis durch 0
- Kreis nicht durch 0 $\Longrightarrow$ Spiegelung des Kreises am Einheitskreis
- Kreis durch 0 $\Longrightarrow$ Gerade nicht durch 0



2.6 Kreisgleichung

Die Lösungen von z bilden einen Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt $M = (m_x, m_y) \Rightarrow m = m_x + jm_y$.

$$|z - m| = r; \qquad (z-m)(\overline{z} - \overline{m}) = r^2; \qquad z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + m\overline{m} = r^2$$

$$\text{Parameterform: } f(t) = m + r \cdot e^{jt}, \quad \text{mit } (0 \leq t \leq 2\pi)$$

3 Fourierreihen Skript S. 70ff

3.1 Orthogonalitätsbeziehungen der Basisfunktionen Skript S. 75

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} T \text{ für } n = m = 0 \\ \frac{T}{2}, \text{ für } n = m > 0 \\ 0, \text{ für } n \neq m \end{cases}$$
$(m, n \in \mathbf{N_0})$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, \text{ für } n = m \\ 0, \text{ für } n \neq m \end{cases}$$
$(m, n \in \mathbf{N})$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = 0$$
$(m \in \mathbf{N_0}; n \in \mathbf{N})$

3.2 Allgemeine Form Skript S. 79

Eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, lässt sich durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ sind:

$$FR[f(t)] = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ sind:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Der erste Summand der Reihe $a_0/2$ ist der Gleichstromanteil (Mittelwert) von $f(t)$ im Intervall $(0, T)$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t \quad (n = 0)$$

3.3 Komplexwertige Darstellung der Fourierreihen Skript S. 95ff

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t}dt \qquad (n \in \mathbf{N_0})$$

3.3.1 Umrechnungsformeln

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2}(n = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ wobei } b_0 = 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 2Re(c_n) = c_n + c_{-n} \\ b_n = -2Im(c_n) = j(c_n - c_{-n}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}(n \in \mathbf{N_0}) \\ (n \in \mathbf{N})\end{array}$$

$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$

3.4 Sätze zur Berechnung der Koeffizienten Skript S. 80ff

3.4.1 Symmetrie Skript S. 78

Allgemein: gerade · ungerade = ungerade; ungerade · ungerade = gerade · gerade = gerade

Falls $f(t)$ **gerade** $(f(-t) = f(t))$ ist $\Longrightarrow$ $b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad Im[c_n] = 0$
(achsensymmetrisch: Spiegelung an Y-Achse)
wenn $f(t)$ gerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow a_{2m+1} = 0$
wenn $f(t)$ ungerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow a_{2m} = 0$

Falls $f(t)$ **ungerade** $(f(-t) = -f(t))$ ist $\Longrightarrow$ $a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t)\mathrm{d}t \quad Re[c_n] = 0$
(punktsymmetrisch: Punktspiegelung im Ursprung)
wenn $f(t)$ gerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow b_{2m} = 0$
wenn $f(t)$ ungerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow b_{2m+1} = 0$

3.4.2 Linearität Skript S. 81

$h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t) \quad \Longrightarrow \quad a_n^{(h)} = r \cdot a_n^{(f)} + s \cdot a_n^{(g)}, \quad b_n^{(h)} = r \cdot b_n^{(f)} + s \cdot b_n^{(g)}$ f, g und h sind T-periodische Funktionen

3.4.3 Zeitstreckung/-stauchung (Ähnlichkeit) Skript S. 82

$g(t) = f(r{\cdot}t)$ (mit $0 < r \in \mathbb{R}$) $\Longrightarrow$ $a_n^{(g)} = a_n^{(f)}, \quad b_n^{(g)} = b_n^{(f)} \quad T^{(g)} = \frac{T^{(f)}}{r} \quad \omega_g = \frac{2\pi}{T_g}$ r<1 :Streckung; r>1 :Stauchung

3.4.4 Zeitverschiebung Skript S. 84

$$g(t) = f(t + t_0) \qquad \begin{array}{ll} a_n^{(g)} = \cos(n\omega t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega t_0) \cdot b_n^{(f)} & (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{mit } b_0 = 0 \\ b_n^{(g)} = -\sin(n\omega t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega t_0) \cdot b_n^{(f)} & (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ c_k^{(g)} = e^{jk\omega t_o} \cdot c_k^{(f)} & (k \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

$+t_0$: links
$-t_0$: rechts

3.5 Satz von Dirichlet Skript S. 89

Die Funktion $f(t)$ sei T-periodisch und stückweise stetig mit Limes, dann konvergiert ihre Fourierreihe gegen

$$FR[f(t_0)] = f(t_0) = \frac{f(t_{0-}) + f(t_{0+})}{2}$$

somit in die Mitte einer Sprungstelle oder dem Funktionswert selber.

3.6 Abstand f - g Skript S. 84

Abstand zweier T-periodischen, mit Limes stückweise stetigen Funktionen f und g.

$$||f-g|| = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^2 [f(t)-g(t)]^2 \mathrm{d}t}$$

3.7 Praval'sche Gleichung Skript S. 97

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0 T[f(t)]^2 \mathrm{d}t$$

3.8 Integral und Differential Skript S. 88

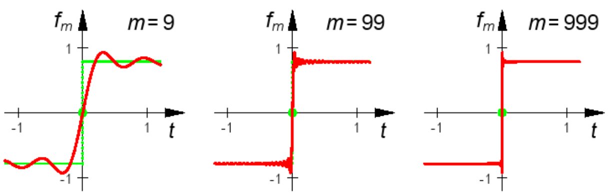
Falls die T-periodische Funktion f (auf ganz $\mathbb{R}$) zweimal stetig differenzierbar ist und die Fourierkoeffizienten a_n und b_n besitzt, so gilt:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[b_n n\omega \cdot \cos{(n\omega t)} - a_n n\omega \cdot \sin{(n\omega t)}]$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{b_n}{n\omega}] + \frac{a_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n}{n\omega} \cdot \sin{(n\omega t)} - \frac{b_n}{n\omega} \cdot \cos{(n\omega t)}]$$

3.9 Gibbs'sches Phänomen Skript S. 92f

Die Fourier-Reihen schwingen bei Unstetigkeitsstellen über. Die Höhe der grössten überschwingenden Welle beträgt 8.94% der gesamten Sprunghöhe.



4 Spektren Skript S. 103

4.1 Spektraldarstellungen Skript S. 103ff

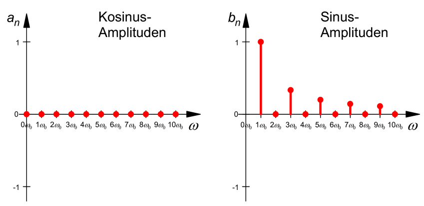


Abbildung 1: Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

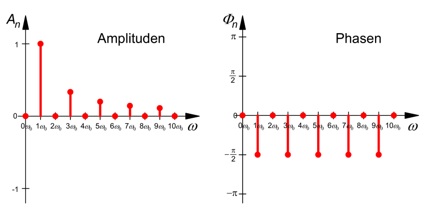


Abbildung 2: Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

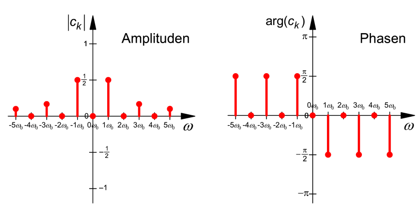


Abbildung 3: Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

4.1.1 (1) Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Reelle Fourierkoeffizienten (a_n, b_n) können direkt abgelesen werden. Bei einer Phasenverschiebung ändern sich jedoch die Koeffizienten grafisch nicht nachvollziehbar.
Diese Darstellung hat gegenüber den anderen mehr Nachteile und wird daher eher selten genutzt.

$$a_n = A_n \cdot \cos(\varphi_n) \qquad b_n = -A_n \cdot \sin(\varphi_n) = A_n \sin(-\varphi_n)$$

4.1.2 (2) Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

$A_n = |a_n - j \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ oder $A_n = 2 \cdot |c_n|$ $\qquad \varphi_n = \arg(a_n - j \cdot b_n)$ oder $\varphi_n = \arg(c_n)$
Spezialfall $n = 0 \Rightarrow A_0 = |\frac{a_0}{2}|$ und $\varphi_0 = \begin{cases} 0, & a_0 \geq 0 \\ \pi, & a_0 < 0 \end{cases}$

4.1.3 (3) Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm (komplexes Spektrum)

Amplitudendiagramm ist achsensymmetrisch wegen $c_n = \overline{c_{-n}}$. Phasendiagramm ist punktsymmetrisch.
Ähnlichkeit mit Einseitigem: $|c_n| = \frac{1}{2}A_k$ und $\arg(c_n) = \varphi_k$ für alle $n \geq 0$.

$$arg(c_{-n}) = -arg(c_n) \qquad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad \varphi_n = arg(a_n - jb_n) \qquad c_n = \frac{A_n}{2} \cdot e^{j\varphi_n}$$

4.2 Spezialfälle Skript S. 106

Funktion f gerade	(1) Sinusamplitudendiagramm überall 0
	(2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte 0 und π
Funktion f ungerade	(1) Kosinusamplitudendiagramm überall 0
	(2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ (oder 0 falls Amplitudenwert = 0)
Ähnlichkeit $g(t) = f(r \cdot t)$	(1,2,3) Das Spektrum von g ist das horizontal mit den Faktor r gestreckte Spektrum vom f.
Zeitverschiebung $g(t) = f(t + t_0)$	(1) (siehe auch 3.4.4, Zeitverschiebung (S. 4))
	(2,3) Amplitudendiagramme sind identisch.
	(2,3) Phasendiagramme: Die Sälule der Frequenz $k\omega_0$ wächst um $k\omega_0 t_0$.
Weisses Rauschen	Überlagerung von Schwingungen aller möglichen Frequenzen
	mit gleichen Amplituden und zufälligen Phasen.

5 Wichtige Formeln

$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \qquad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$

5.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180°	π	0	-1
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan^{-1}$: wenn x>1 dann gilt: $\tan^{-1}(x) = \frac{\Pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{1}{x})$

5.2 Periodizität

$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \qquad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

5.3 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$ $\qquad \cos(-a) = \cos(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$ $\qquad \cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ $\qquad \cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

5.4 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

5.5 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2}$ $\quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

5.6 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - cos(a+b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

5.7 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

5.8 Skalarprodukt

	Reelle Fourierreihe	Komplexe Fourierreihe
Skalarprodukt	$\langle f; g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot g(t) \cdot dt$ $(I)\ \langle f; f\rangle > 0\ für\ f \neq 0$ $(II)\ \langle f; g\rangle = \langle g; f\rangle$ $(III)\langle r \cdot f; g\rangle = r \cdot \langle f; g\rangle,\ r\epsilon\mathbb{R}$	$\langle f; g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot \overline{g(t)} \cdot dt$ $(I)\ \langle f; f\rangle > 0\ für\ f \neq 0$ $(II)\ \langle f; g\rangle = \overline{\langle g; f\rangle}$ $(III)\langle c \cdot f; g\rangle = c \cdot \langle f; g\rangle,\ c\epsilon\mathbb{R}$
Länge (Norm):	$\parallel f \parallel = \sqrt{\langle f; f\rangle} \Rightarrow y = 3x^2 + 4 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = 5$ $(I)\ \parallel f \parallel > 0 für f \neq 0$ $(II)\ \parallel f + g \parallel \leq \parallel f \parallel + \parallel g \parallel\ (Dreiecksgleichung)$ $(III)\ \parallel r \cdot f \parallel = \lvert r\rvert \cdot \parallel f \parallel,\ r\epsilon\mathbb{R} bzw. \parallel c \cdot f \parallel = \lvert c\rvert \cdot \parallel f \parallel, c\epsilon\mathbb{C}$	
Abstand:	$\parallel f - g \parallel = \lvert\sqrt{\langle f - g; f - g\rangle}\rvert \Rightarrow \lvert p - q\rvert = (3x^2 + 4) - (x^2 + 7) = 2x^2 + 11 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 2 + 11 \cdot 11} = 5 \cdot \sqrt{5}$	
Winkel, Orthogonalität	$\sphericalangle(f; g) = \arccos\left(\frac{\langle f; g\rangle}{\parallel f \parallel \cdot \parallel g \parallel}\right) = \arccos\left(\frac{\langle f; g\rangle}{\sqrt{\langle f; f\rangle \cdot \langle g; g\rangle}}\right)$ $f \perp g \Leftrightarrow \langle f; g\rangle = 0$	

6 Diverses

$f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ $\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

6.1 Integrale

Partielle Integration: $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

1. $\int \mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$
4. $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
5. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
6. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
7. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
10. $\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$
11. $\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, \quad x \neq 0$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, \quad a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad x \neq \frac{b}{a}, \quad x \neq -\frac{b}{a}$
17. $\int \sqrt{a^2x^2+b^2}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
18. $\int \sqrt{a^2x^2-b^2}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a} \ln|ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}| + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
19. $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a} \arcsin \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2x^2 \leqq b^2$
20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2x^2+b^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln|ax + \sqrt{a^2x^2-b^2}| + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0 \quad a^2x^2 > b^2$
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2x^2 < b^2$
23. Die Integrale $\int \frac{\mathrm{d}x}{X}$, $\int \sqrt{X}\, \mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c$, $a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die Integrale 15. bis 22. transformiert.
24. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{X} = \frac{1}{2a} \ln|X| - \frac{b}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{X}, \quad a \neq 0, \quad X = ax^2 + 2bx + c$
25. $\int \sin^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C, \quad a \neq 0$
26. $\int \cos^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax + C, \quad a \neq 0$
27. $\int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
28. $\int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln\left|\tan \frac{ax}{2}\right| + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
31. $\int \tan ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
32. $\int \cot ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln|\sin ax| + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq k\frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
33. $\int x^n \sin ax \, \mathrm{d}x = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
34. $\int x^n \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
35. $\int x^n \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n \mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
36. $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
37. $\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C, \quad a \neq 0, b \neq 0$
38. $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}^+$
39. $\int x^\alpha \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} [(\alpha+1) \ln x - 1] + C, \quad x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$