1 Komplexe Zahlen Skript S. 1

1.1 Grundlagen Skript S. 1ff

Kartesische Form
Normalform: $z = z_1 + jz_2$
$z_1 = \mathrm{Re}(z), \quad z_2 = \mathrm{Im}(z)$
Umrechnung in Polar:
$r = |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & z_1 \geq 0 \\ \arctan(\frac{z_2}{z_1}) + \pi & z_1 < 0 \end{cases}$

Polarsystem
Polarform: $z = r\,\mathrm{cjs}(\varphi) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi}$
$\varphi = \arg(z)$
Umrechnung in Kartesisch:
$z_1 = |z|\cos\varphi, \quad z_2 = |z|\sin\varphi$

Imaginäre Einheit: $j^2 = -1 \qquad e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1 \qquad e^{j2\pi} = 1 \qquad \frac{1}{j} = -j \qquad e^{j\frac{\pi}{2}} = j \qquad j^j = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

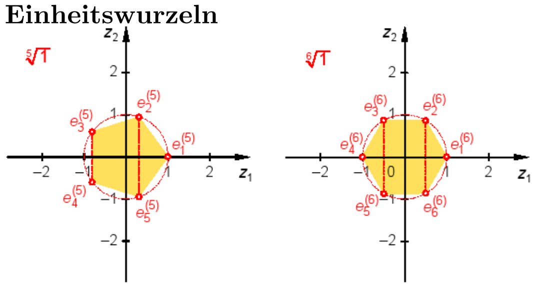
1.2 Rechenregeln Skript S. 10ff

$+,-$	Selbige Regeln wie für $\mathbb{R}$
Multiplikation	$a \cdot b = \lvert a\rvert \lvert b\rvert\,\mathrm{cjs}(\alpha+\beta) = \lvert a\rvert \lvert b\rvert e^{j(\alpha+\beta)}$ (kartesisch: $a_1 \cdot b_1 = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$)
Division	$\frac{a}{b} = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\,\mathrm{cjs}(\alpha-\beta) = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert} e^{j(\alpha-\beta)}$ (kartesisch: Mit konj. komplex des Nenners erweitern)
Konjugiert komplex	$\overline{z} = \overline{z_1 + jz_2} = z_1 - jz_2; \qquad z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2$
Wurzeln	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\,\mathrm{cjs}(\frac{arg(a)}{n} + k\frac{2\pi}{n}) = \sqrt[n]{\lvert a\rvert} e^{j(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1 \Rightarrow$ n Lösungen in $\mathbb{C}$!)
Potenzen	$a^n = \lvert a\rvert^n\,\mathrm{cjs}(n\alpha) = \lvert a\rvert^n e^{jn\alpha}$
e^z	$e^{z_1+jz_2} = e^{z_1}\,\mathrm{cjs}(z_2) = e^{z_1}(\cos z_2 + j\sin z_2)$; $\lvert e^z\rvert = e^{z_1}$; $arg(e^z) = z_2$
Moivre'sche Formel	$\mathrm{cjs}^n(\varphi) = (\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N})$
Logarithmus	$Ln(z) = \ln\lvert z\rvert + j(\arg(z) + 2k\pi) = \ln\lvert a\rvert + j\arg(a) \qquad a^b = e^{b \cdot Ln(a)} \rightarrow$ (keine Potenzgesetze)
	$\frac{1}{\mathrm{cjs}\,\varphi} = \mathrm{cjs}\,-\varphi$

Bemerkungen

- $p_n(z)$ $(n \geq 1, z \in \mathbb{C})$ hat n Lösungen und Nullstellen (in $\mathbb{C}$)
- Allgemeine Potenzen a^b, $a, b \in \mathbb{C}$ können mit $e^{b \cdot Ln(a)}$ und den bekannten für $\mathbb{R}$ gültigen Potenzregeln gelöst werden.
- $\mathrm{Re}(\frac{a}{b}) = 0$: Die beiden kompl. Zahlen a, b stehen senkrecht zueinander.

Einheitswurzeln



1.3 12. Einheitswurzeln $((k-1) \cdot 30°)$

$e_1^{(12)} = 1,\ e_2^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j,\ e_3^{(12)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_4^{(12)} = j,\ e_5^{(12)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_6^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j,$
$e_7^{(12)} = -1,\ e_8^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j,\ e_9^{(12)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_{10}^{(12)} = -j,\ e_{11}^{(12)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j,\ e_{12}^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$

1.4 Nullstellen von Polynomen

Ein komplexes Polynom p(z) von Grad n hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen.
Alle diese Nullstellen liegen in einer Kreisscheibe um den Ursprung mit dem Radius $r = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| = \left|\frac{a_0}{a_n}\right| + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_n}{a_n}\right|$

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten nicht-reelle Nullstellen immer als konj.-kompl. Paare (z_0 und $\bar{z}_0$) auf.
Bei Polynomdivision immer mit reellen Zahlen arbeiten; konj.-kompl. Paare zusammenfassen.

Berechnung:

quadr. Polynome	Polynome mit $a_n = 1, a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = 0, a_0 = a$
$p(z) = az^2 + bz + c = 0$	$p(z) = z^n + a = 0$
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$z_k = \sqrt[n]{\lvert a\rvert} \cdot cjs(\frac{\varphi_a + \pi}{n} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n})$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$

1.5 Euler Skript S. 30f

$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$	$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -j\frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}$	$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$	$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$	$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$

1.6 Überlagerung von harmonischen Schwingungen Skript S. 32f

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Im[A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}] = Im[\underbrace{A \cdot e^{j\varphi}}_{\text{Complexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitfunktion}}]$$

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \quad \Rightarrow \quad Im[A_1 \cdot e^{j(\omega t+\varphi_1)} + A_2 \cdot e^{j(\omega t+\varphi_2+\frac{\pi}{2})}] \quad \Rightarrow \quad Im[e^{j\omega t} \cdot (A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j(\varphi_2+\frac{\pi}{2})}]$$

Komplexe Amplituden in kartesische Form umwandeln, zusammenzählen und wieder zurück in Polarform wandeln.

$$Im[e^{j\omega t} \cdot (A_{total} \cdot e^{j\varphi_{total}})] \quad \Rightarrow \quad Im[A_{total} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_{total})}] \quad \Rightarrow \quad A_{total} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{total})$$

$$A = |A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j\varphi_2}| \qquad \varphi = arg(A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j\varphi_2})$$

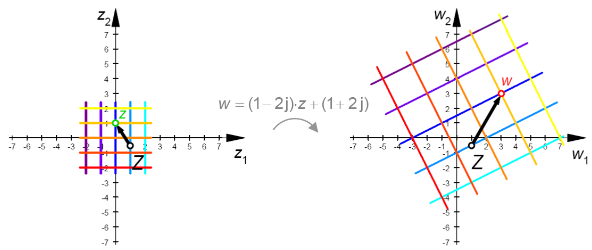
2 Komplexe Funktionen (Abbildungen) Skript S. 37ff

Eine komplexe Funktion hat einen 2-Dimensionalen Input (z_1, z_2) und einen 2-Dimensionalen Output (w_1, w_2).
Diese Abbildungen sind bis jeweils auf wenige Punkte (bei der Sinus-Funktion ±1, etc) winkeltreu.
$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ $\quad z \mapsto w = f(z)$ $\quad w_1 = \mathrm{Re}(f(r + jc)); w_2 = \mathrm{Im}(f(r + jc))$
$f'(z) = 0$ nicht winkeltreu! $\quad f'(z) \neq 0$ winkeltreu! → Drehwinkel: $arg[f'(z)]$ und Streckfaktor: $|f'(z)|$

2.1 Lineare Funktion Skript S. 41ff

$$f : z \mapsto w = az + b \qquad (a, b \in \mathbb{C} \text{ und } a \neq 0)$$

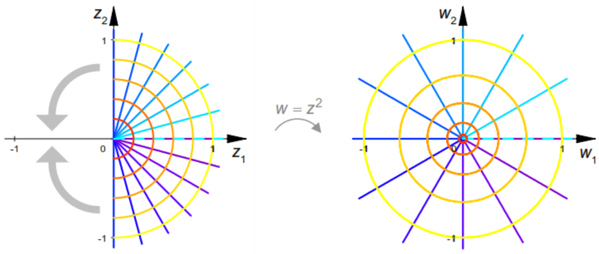
- für $a = 1$ eine Translation um den Ortsvektor b
- für $a \neq 1$ eine Drehstreckung mit dem Zentrum $\frac{b}{1-a}$, dem Drehwinkel $\arg(a)$ und dem Streckfaktor $|a|$.



2.2 Quadratfunktion und Quadratwurzelfunktion Skript S. 45ff

$$f : z \mapsto w = z^2 \qquad f : z \mapsto w = \sqrt{z}$$

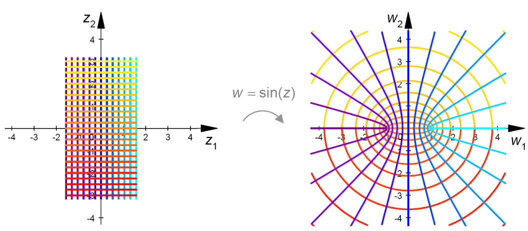
Bei der Quadratfunktion wird schon die rechte Hälfte der z-Ebene auf die ganze w-Ebene abgebildet (die Argumente werden verdoppelt). Mit der linken Hälfte zusammen ergeben sich zwei bzw. mehr Ebenen (Riemannsche Ebene).
Sie ist überall Winkeltreu, ausser im Koordinatenursprung!



2.3 Sinus-Funktion Skript S. 67f

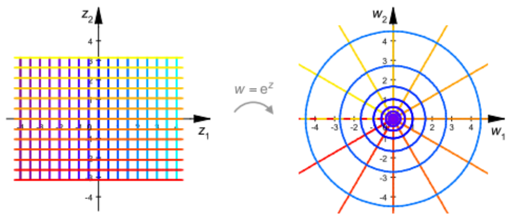
$$f : z \mapsto w = \sin(z)$$

Die Sinusfunktion ist ausser bei den Punkten $z = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}))$ winkeltreu



2.4 Exponentialfunktion Skript S. 64ff

$$f : z \mapsto w = e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} * \mathrm{cjs}(\mathrm{Im}(z))$$



Waagrechte Gitternetzlinen gehen gemäss der obigen Gleichung in Strahlen über, die im Koordinatenursprung beginnen, senkrechte Gitternetzlinien in Kreise um den Koordinatenursprung. Die e^z-Funktion ist periodisch, deshalb braucht es eine Riemannsche Fläche.

Mit dieser Funktion kann man das Feld an den Rändern des Plattenkondensators berechnen.

2.5 Kehrwertfunktion und Kreisspiegelung Skript S. 51ff

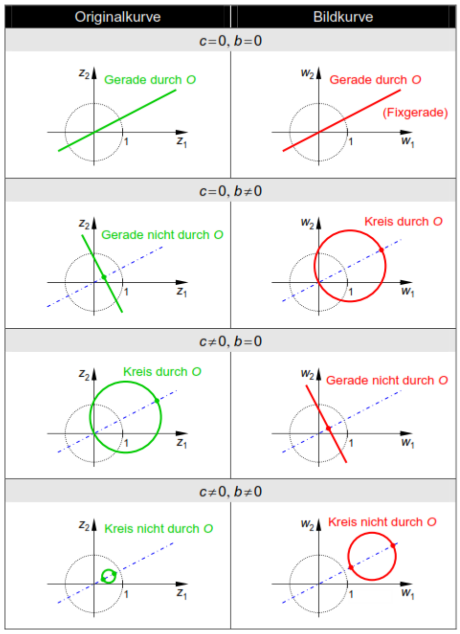
$$\underbrace{f : z \mapsto w = \frac{1}{z};}_{\text{Spiegelung an x-Achse (Kehrwert)}} \qquad (\arg(w) = -\arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

überall ausser im Ursprung winkeltreu

$$\underbrace{\overline{f} : z \mapsto w = \frac{1}{\overline{z}};}_{\text{Kreisspiegelung}} \quad (\arg(w) = \arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

überall winkeltreu

Kreisspiegelung: Alle Punkte auf der z-Ebene werden am Einheitskreis gespiegelt. Geraden auf Kreise abgebildet und umgekehrt. Der Ursprungspunkt (0;0) wird auf ∞ abgebildet (auf allen Winkeln zwischen $0^o - 360^o$). Die Abbildungen sind im verallgemeinerten Sinn (Geraden sind Kreise mit unendlichem Radius) kreistreu. Ausserdem sind sie, auch im Koordinatenursprung, winkeltreu.



- Gerade durch 0 $\Longrightarrow$ Fixgerade (gleiche Gerade, aber die Punkte darauf sind anders verteilt)

- Gerade nicht durch 0 $\Longrightarrow$ Kreis durch 0

- Kreis nicht durch 0 $\Longrightarrow$ Spiegelung des Kreises am Einheitskreis

- Kreis durch 0 $\Longrightarrow$ Gerade nicht durch 0

2.6 Kreisgleichung

Die Lösungen von z bilden einen Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt $M = (m_x, m_y) \Rightarrow m = m_x + jm_y$.

$$|z - m| = r; \qquad (z - m)(\overline{z} - \overline{m}) = r^2; \qquad z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + m\overline{m} = r^2$$

$$\text{Parameterform: } f(t) = m + r \cdot e^{jt}, \quad \text{mit } (0 \le t \le 2\pi)$$

3 Fourierreihen Skript S. 70ff

3.1 Orthogonalitätsbeziehungen der Basisfunktionen Skript S. 75

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} T \text{ für } n = m = 0 \\ \frac{T}{2}, \text{ für } n = m > 0 \\ 0, \text{ für } n \neq m \end{cases}$$

$(m, n \in \mathbf{N_0})$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, \text{ für } n = m \\ 0, \text{ für } n \neq m \end{cases}$$

$(m, n \in \mathbf{N})$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = 0$$

$(m \in \mathbf{N_0}; n \in \mathbf{N})$

3.2 Allgemeine Form Skript S. 79

Eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, lässt sich durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ sind:

$$FR[f(t)] = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ sind:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n = 0,1,2,3,\dots) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

Der erste Summand der Reihe $a_0/2$ ist der Gleichstromanteil (Mittelwert) von $f(t)$ im Intervall $(0,T)$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t \quad (n = 0)$$

3.3 Komplexwertige Darstellung der Fourierreihen Skript S. 95ff

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-jn\omega t}dt \qquad (n \in \mathbf{N_0})$$

3.3.1 Umrechnungsformeln

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2} (n = 0,1,2,3,\dots \text{ wobei } b_0 = 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 2Re(c_n) = c_n + c_{-n} \\ b_n = -2Im(c_n) = j(c_n - c_{-n}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}(n \in \mathbf{N_0}) \\ (n \in \mathbf{N})\end{array}$$

$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$

3.4 Sätze zur Berechnung der Koeffizienten Skript S. 80ff

3.4.1 Symmetrie Skript S. 78

Allgemein: gerade · ungerade = ungerade; ungerade · ungerade = gerade · gerade = gerade

Falls $f(t)$ **gerade** ($f(-t) = f(t)$) ist $\Longrightarrow$ $b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad Im[c_n] = 0$
(achsensymmetrisch: Spiegelung an Y-Achse)
wenn $f(t)$ gerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow a_{2m+1} = 0$
wenn $f(t)$ ungerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow a_{2m} = 0$

Falls $f(t)$ **ungerade** ($f(-t) = -f(t)$) ist $\Longrightarrow$ $a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \quad Re[c_n] = 0$
(punktsymmetrisch: Punktspiegelung im Ursprung)
wenn $f(t)$ gerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow b_{2m} = 0$
wenn $f(t)$ ungerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow b_{2m+1} = 0$

3.4.2 Linearität Skript S. 81

$h(t) = r\cdot f(t) + s\cdot g(t) \implies a_n^{(h)} = r\cdot a_n^{(f)} + s\cdot a_n^{(g)}, \quad b_n^{(h)} = r\cdot b_n^{(f)} + s\cdot b_n^{(g)}$ $\quad f$, g und h sind T-periodische Funktionen

3.4.3 Zeitstreckung/-stauchung (Ähnlichkeit) Skript S. 82

$g(t) = f(r\cdot t)$ (mit $0 < r \in \mathbb{R}$) $\implies a_n^{(g)} = a_n^{(f)}, \quad b_n^{(g)} = b_n^{(f)} \quad T^{(g)} = \frac{T^{(f)}}{r} \quad \omega_g = \frac{2\pi}{T_g}$ $\quad r$<1 :Streckung; r>1 :Stauchung

3.4.4 Zeitverschiebung Skript S. 84

$g(t) = f(t + t_0)$

$$\begin{array}{lll} a_n^{(g)} = \cos(n\omega t_0)\cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega t_0)\cdot b_n^{(f)} & (n = 0,1,2,\dots) & \text{mit } b_0 = 0 \\ b_n^{(g)} = -\sin(n\omega t_0)\cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega t_0)\cdot b_n^{(f)} & (n = 1,2,3,\dots) & \\ c_k^{(g)} = e^{jk\omega t_o}\cdot c_k^{(f)} & (k \in \mathbb{Z}) & \end{array}$$

$+t_0$: links
$-t_0$: rechts

3.5 Satz von Dirichlet Skript S. 89

Die Funktion $f(t)$ sei T-periodisch und stückweise stetig mit Limes, dann konvergiert ihre Fourierreihe gegen

$$FR[f(t_0)] = f(t_0) = \frac{f(t_{0-}) + f(t_{0+})}{2}$$

somit in die Mitte einer Sprungstelle oder den Funktionswert selber.

3.6 Abstand f - g Skript S. 84

Abstand zweier T-periodischen, mit Limes stückweise stetigen Funktionen f und g.

$$||f - g|| = \sqrt{\frac{2}{T} \int\limits_0^2 [f(t) - g(t)]^2 \mathrm{d}t}$$

3.7 Parsevalsche Gleichung Skript S. 97

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = ||f||^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int\limits_0^T [f(t)]^2 \mathrm{d}t$$

3.8 Integral und Differential Skript S. 88

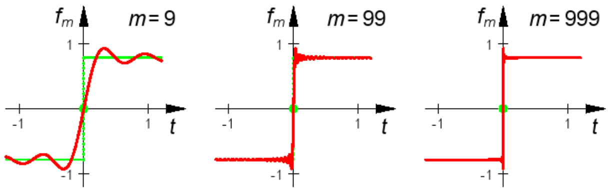
Falls die T-periodische Funktion f (auf ganz $\mathbb{R}$) zweimal stetig differenzierbar ist und die Fourierkoeffizienten a_n und b_n besitzt, so gilt:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n n\omega \cdot \cos(n\omega t) - a_n n\omega \cdot \sin(n\omega t)]$$

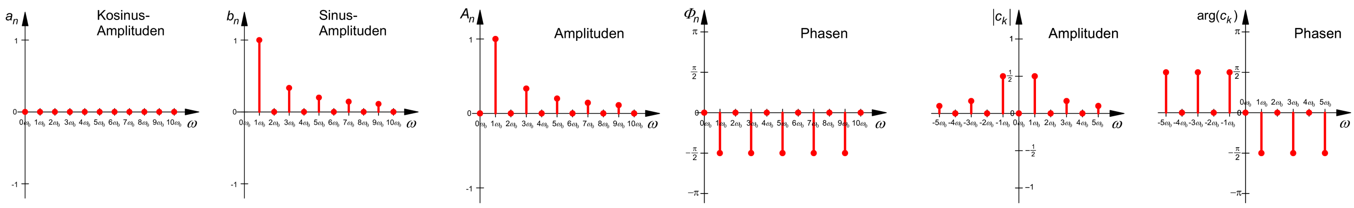
$$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{b_n}{n\omega}] + \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{a_n}{n\omega} \cdot \sin(n\omega t) - \frac{b_n}{n\omega} \cdot \cos(n\omega t)]$$

3.9 Gibbs'sches Phänomen Skript S. 92f

Die Fourierreihen schwingen bei Unstetigkeitsstellen über. Die Höhe der grössten überschwingenden Welle beträgt 8.94% der gesamten Sprunghöhe.



4 Spektren Skript S. 103



Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm 1-seitiges Amplituden-/Phasendiagramm 2-seitiges Amplituden-/Phasendiagramm

4.0.1 (1) Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Reelle Fourierkoeffizienten (a_n, b_n) können direkt abgelesen werden. Bei einer Phasenverschiebung ändern sich jedoch die Koeffizienten grafisch nicht nachvollziehbar.
Diese Darstellung hat gegenüber den anderen mehr Nachteile und wird daher eher selten genutzt.

$$a_n = A_n \cdot \cos(\varphi_n) \qquad b_n = -A_n \cdot \sin(\varphi_n) = A_n \sin(-\varphi_n)$$

4.0.2 (2) Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

$A_n = |a_n - j \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ oder $A_n = 2 \cdot |c_n|$
$\varphi_n = \arg(a_n - j \cdot b_n) = \arctan(-\frac{b_n}{a_n})$ oder $\varphi_n = \arg(c_n)$
Spezialfall $n = 0 \Rightarrow A_0 = |\frac{a_0}{2}|$ und $\varphi_0 = \begin{cases} 0, & a_0 \geq 0 \\ \pi, & a_0 < 0 \end{cases}$

4.0.3 (3) Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm (komplexes Spektrum)

Amplitudendiagramm ist achsensymmetrisch weil $c_n = \overline{c_{-n}}$.
Phasendiagramm ist punktsymmetrisch.
Ähnlichkeit mit Einseitigem: $|c_n| = \frac{1}{2} A_n$ und φ_n gleich wie bei (2) für alle $n \geq 0$.
$A_0 = |\frac{a_0}{2}| = |c_0|$

$$arg(c_{-n}) = -arg(c_n) \qquad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad \varphi_n = arg(a_n - jb_n)$$

4.1 Spezialfälle Skript S. 106

Funktion f gerade	(1) Sinusphasendiagramm überall 0
	(2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte 0 und π
Funktion f ungerade	(1) Kosinusphasendiagramm überall 0
	(2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ (oder 0 falls Amplitudenwert = 0)
Ähnlichkeit $g(t) = f(r \cdot t)$	(1,2,3) Das Spektrum von g ist das horizontal mit den Faktor r gestreckte Spektrum vom f.
Zeitverschiebung $g(t) = f(t + t_0)$	(1) (siehe auch 3.4.4, Zeitverschiebung (S. 4))
	(2,3) Amplitudendiagramme sind identisch.
	(2,3) Phasendiagramme: Die Sälule der Frequenz $k\omega_0$ wächst um $k\omega_0 t_0$.
Weisses Rauschen	Überlagerung von Schwingungen aller möglichen Frequenzen mit gleichen Amplituden und zufälligen Phasen.

5 Wichtige Formeln

5.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180°	π	0	-1
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan^{-1}$: wenn x>1 dann gilt: $\tan^{-1}(x) = \frac{\Pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{1}{x})$

5.2 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

5.3 Doppel- und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2}$ $\quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$

5.4 Produkte

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - cos(a + b))$
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + cos(a + b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))$

5.5 Quadrantenbeziehungen

$\sin(-a) = -\sin(a)$ $\quad \cos(-a) = \cos(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$ $\quad \cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ $\quad \cos(\pi + a) = -\cos(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

5.6 Summe und Differenz

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

6 Diverses

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ $\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3 b + 6a^2 b^2 \pm 4ab^3 + b^4$