

1 Komplexe Zahlen Skript S. 1

1.1 Grundlagen Skript S. 1ff

Kartesische Form

Normalform: $z = z_1 + jz_2$

$z_1 = \operatorname{Re}(z)$, $z_2 = \operatorname{Im}(z)$

Umrechnung in Polar:

$$r = |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & z_1 \geq 0 \\ \pi + \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & z_1 < 0 \end{cases}$$

Imaginäre Einheit: $j^2 = -1$ $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$ $e^{j2\pi} = 1$ $\frac{1}{j} = -j$ $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ $j^j = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

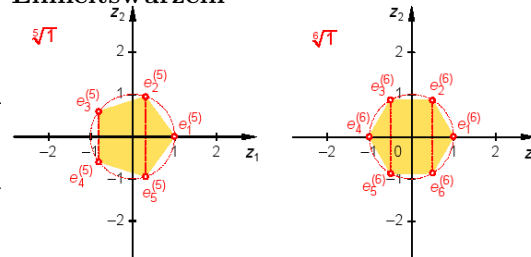
1.2 Rechenregeln Skript S. 10ff

$+, -$	Selbige Regeln wie für \mathbb{R}
Multiplikation	$a \cdot b = a b \operatorname{cjs}(\alpha + \beta) = a b e^{j(\alpha + \beta)}$ (kartesisch: $a_1 \cdot b_1 = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) + j \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$)
Division	$\frac{a}{b} = \frac{ a }{ b } \operatorname{cjs}(\alpha - \beta) = \frac{ a }{ b } e^{j(\alpha - \beta)}$ (kartesisch: Mit konj. komplex des Nenners erweitern)
Konjugiert komplex	$\bar{z} = \overline{z_1 + jz_2} = z_1 - jz_2$; $z \cdot \bar{z} = z ^2$
Wurzeln	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ a } \operatorname{cjs}(\frac{\arg(a)}{n} + k\frac{2\pi}{n}) = \sqrt[n]{ a } e^{j(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1 \Rightarrow n$ Lösungen in \mathbb{C} !)
Potenzen	$a^n = a ^n \operatorname{cjs}(n\alpha) = a ^n e^{jn\alpha}$
e^z	$e^{z_1 + jz_2} = e^{z_1} \operatorname{cjs}(z_2) = e^{z_1} (\cos z_2 + j \sin z_2)$; $ e^z = e^{z_1}$; $\arg(e^z) = z_2$
Moivre'sche Formel	$\operatorname{cjs}^n(\varphi) = (\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi)$ ($n \in \mathbb{N}$)
Logarithmus	$\operatorname{Ln}(z) = \ln z + j(\arg(z) + 2k\pi) = \ln a + j \arg(a)$ $a^b = e^{b \cdot \operatorname{Ln}(a)} \rightarrow$ (keine Potenzgesetze)
	$\frac{1}{\operatorname{cjs} \varphi} = \operatorname{cjs} -\varphi$ $\operatorname{cjs}(\varphi)^n = \operatorname{cjs}(n\varphi)$

Bemerkungen

- $p_n(z)$ ($n \geq 1, z \in \mathbb{C}$) hat n Lösungen und Nullstellen (in \mathbb{C})
- Allgemeine Potenzen a^b , $a, b \in \mathbb{C}$ können mit $e^{b \cdot \operatorname{Ln}(a)}$ und den bekannten für \mathbb{R} gültigen Potenzregeln gelöst werden.
- $\operatorname{Re}(\frac{a}{b}) = 0$: Die beiden kompl. Zahlen a, b stehen senkrecht zueinander.

Einheitswurzeln



1.3 12. Einheitswurzeln $((k-1) \cdot 30^\circ)$

$$e_1^{(12)} = 1, e_2^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, e_3^{(12)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, e_4^{(12)} = j, e_5^{(12)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, e_6^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, \\ e_7^{(12)} = -1, e_8^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j, e_9^{(12)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, e_{10}^{(12)} = -j, e_{11}^{(12)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, e_{12}^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$

1.4 Nullstellen von Polynomen

Ein komplexes Polynom $p(z)$ von Grad n hat in \mathbb{C} genau n Nullstellen.

Alle diese Nullstellen liegen in einer Kreisscheibe um den Ursprung mit dem Radius $r = \sum_{k=0}^n \left| \frac{a_k}{a_n} \right| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{a_n} \right|$

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten nicht-reelle Nullstellen immer als konj.-kompl. Paare (z_0 und \bar{z}_0) auf.

Ein Polynom mit reellen Koeffizienten von *ungeradem* Grad hat mind. eine *reelle* Nullstelle.

Bei Polynomdivision immer mit reellen Zahlen arbeiten; konj.-kompl. Paare zusammenfassen.

Berechnung:

quadr. Polynome

$$p(z) = az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Polynome mit $a_n = 1, a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = 0, a_0 = a$

$$p(z) = z^n + a = 0$$

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \operatorname{cjs}(\frac{\varphi_a + \pi}{n} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n}) \text{ mit } k = 1, 2, \dots, n$$

1.5 Euler Skript S. 30f

$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$	$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -j \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}$	$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$	$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$	$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}$
---	--	--	---	---	--

1.6 Überlagerung von harmonischen Schwingungen Skript S. 32f

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Im}\left[\underbrace{A \cdot e^{j\varphi}}_{\text{Complexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitfunktion}}\right]$$

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \operatorname{Im}[A_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2})}] \Rightarrow \operatorname{Im}[e^{j\omega t} \cdot (A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})})]$$

Komplexe Amplituden in kartesische Form umwandeln, zusammenzählen und wieder zurück in Polarform wandeln.

$$\operatorname{Im}[e^{j\omega t} \cdot (A_{\text{total}} \cdot e^{j\varphi_{\text{total}}})] \Rightarrow \operatorname{Im}[A_{\text{total}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{\text{total}})}] \Rightarrow A_{\text{total}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\text{total}})$$

$$A = |A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j\varphi_2}| \quad \varphi = \arg(A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j\varphi_2})$$

2 Komplexe Funktionen (Abbildungen) Skript S. 37ff

Eine komplexe Funktion hat einen 2-Dimensionalen Input (z_1, z_2) und einen 2-Dimensionalen Output (w_1, w_2).

Diese Abbildungen sind bis jeweils auf wenige Punkte (bei der Sinus-Funktion ± 1 , etc) winkeltreu.

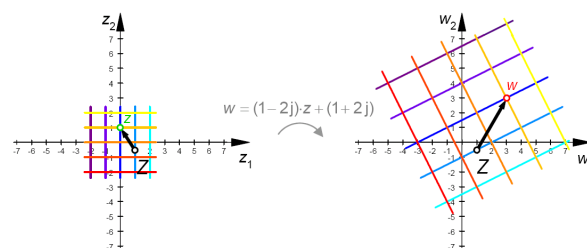
$$f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \quad z \mapsto w = f(z) \quad w_1 = \operatorname{Re}(f(r + jc)); w_2 = \operatorname{Im}(f(r + jc))$$

$$f'(z) = 0 \text{ nicht winkeltreu!} \quad f'(z) \neq 0 \text{ winkeltreu!} \rightarrow \text{Drehwinkel: } \arg[f'(z)] \text{ und Streckfaktor: } |f'(z)|$$

2.1 Lineare Funktion Skript S. 41ff

$$f: z \mapsto w = az + b \quad (a, b \in \mathbb{C} \text{ und } a \neq 0)$$

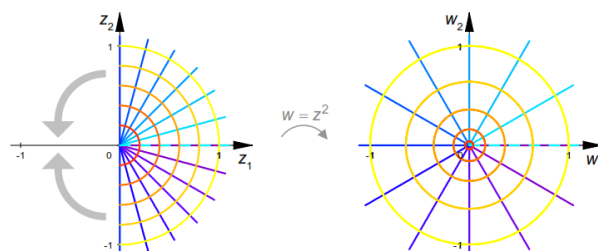
- für $a = 1$ eine Translation um den Ortsvektor b
- für $a \neq 1$ eine Drehstreckung mit dem Zentrum $\frac{b}{1-a}$, dem Drehwinkel $\arg(a)$ und dem Streckfaktor $|a|$.



2.2 Quadratfunktion und Quadratwurzelfunktion Skript S. 45ff

$$f: z \mapsto w = z^2 \quad f: z \mapsto w = \sqrt{z}$$

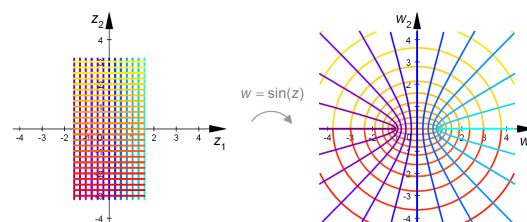
Bei der Quadratfunktion wird schon die rechte Hälfte der z -Ebene auf die ganze w -Ebene abgebildet (die Argumente werden verdoppelt). Mit der linken Hälfte zusammen ergeben sich zwei bzw. mehr Ebenen (Riemannsche Ebene). Sie ist überall Winkeltreu, ausser im Koordinatenursprung!



2.3 Sinus-Funktion Skript S. 67f

$$f: z \mapsto w = \sin(z)$$

Die Sinusfunktion ist ausser bei den Punkten $z = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ winkeltreu

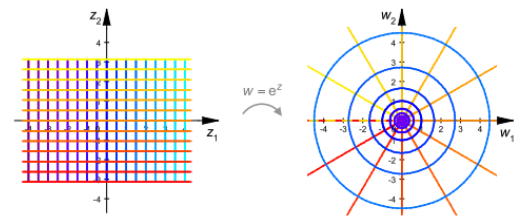


2.4 Exponentialfunktion Skript S. 64ff

$$f : z \mapsto w = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \cdot \operatorname{cjs}(\operatorname{Im}(z))$$

Waagrechte Gitternetzlinien gehen gemäss der obigen Gleichung in Strahlen über, die im Koordinatenursprung beginnen, senkrechte Gitternetzlinien in Kreise um den Koordinatenursprung. Die e^z -Funktion ist periodisch, deshalb braucht es eine Riemannsche Fläche.

Mit dieser Funktion kann man das Feld an den Rändern des Plattenkondensators berechnen.



2.5 Kehrwertfunktion und Kreisspiegelung Skript S. 51ff

$$\underbrace{f : z \mapsto w = \frac{1}{z}}_{\text{Spiegelung an x-Achse (Kehrwert)}} \quad (\arg(w) = -\arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

Spiegelung an x-Achse (Kehrwert)

überall ausser im Ursprung winkeltreu

$$\underbrace{\bar{f} : z \mapsto w = \frac{1}{\bar{z}}}_{\text{Kreisspiegelung}} \quad (\arg(w) = \arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

Kreisspiegelung

überall winkeltreu

Kreisspiegelung: Alle Punkte auf der z-Ebene werden am Einheitskreis gespiegelt. Geraden auf Kreise abgebildet und umgekehrt. Der Ursprungspunkt (0;0) wird auf ∞ abgebildet (auf allen Winkeln zwischen $0^\circ - 360^\circ$). Die Abbildungen sind im verallgemeinerten Sinn (Geraden sind Kreise mit unendlichem Radius) kreistreu. Ausserdem sind sie, auch im Koordinatenursprung, winkeltreu.

- Gerade durch 0 \implies Fixgerade (gleiche Gerade, aber die Punkte darauf sind anders verteilt)
- Gerade nicht durch 0 \implies Kreis durch 0
- Kreis nicht durch 0 \implies Spiegelung des Kreises am Einheitskreis
- Kreis durch 0 \implies Gerade nicht durch 0

Originalkurve	Bildkurve
$c=0, b=0$	
$c=0, b \neq 0$	
$c \neq 0, b=0$	
$c \neq 0, b \neq 0$	

2.6 Kreisgleichung

Die Lösungen von z bilden einen Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt $M = (m_x, m_y) \Rightarrow m = m_x + jm_y$.

$$|z - m| = r; \quad (z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2; \quad z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + m\bar{m} = r^2$$

$$\text{Parameterform: } f(t) = m + r \cdot e^{jt}, \quad \text{mit } (0 \leq t \leq 2\pi)$$

3 Fourierreihen Skript S. 70ff

3.1 Orthogonalitätsbeziehungen der Basisfunktionen Skript S. 75

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} T & \text{für } n = m = 0 \\ \frac{T}{2}, & \text{für } n = m > 0 \\ 0, & \text{für } n \neq m \end{cases} \quad \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{für } n = m \\ 0, & \text{für } n \neq m \end{cases} \quad \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = 0$$

$$(m, n \in \mathbf{N}_0) \quad (m, n \in \mathbf{N}) \quad (m \in \mathbf{N}_0; n \in \mathbf{N})$$

3.2 Allgemeine Form Skript S. 79

Eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, lässt sich durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ sind:

$$FR[f(t)] = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ sind:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Der erste Summand der Reihe $a_0/2$ ist der Gleichstromanteil (Mittelwert) von $f(t)$ im Intervall $(0, T)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (n = 0)$$

3.3 Komplexwertige Darstellung der Fourierreihen Skript S. 95ff

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t} \quad \text{mit} \quad c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

3.3.1 Umrechnungsformeln

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ wobei } b_0 = 0) \quad \left. \begin{array}{l} a_n = 2\operatorname{Re}(c_n) = c_n + c_{-n} \\ b_n = -2\operatorname{Im}(c_n) = j(c_n - c_{-n}) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (n \in \mathbf{N}_0) \\ (n \in \mathbf{N}) \end{array}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

3.4 Sätze zur Berechnung der Koeffizienten Skript S. 80ff

3.4.1 Symmetrie Skript S. 78

Allgemein: gerade · ungerade = ungerade; ungerade · ungerade = gerade · gerade = gerade

Falls $f(t)$ **gerade** ($f(-t) = f(t)$) ist $\implies b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad \operatorname{Im}[c_n] = 0$
(achsensymmetrisch: Spiegelung an Y-Achse)
wenn $f(t)$ gerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow a_{2m+1} = 0$
wenn $f(t)$ ungerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow a_{2m} = 0$

Falls $f(t)$ **ungerade** ($f(-t) = -f(t)$) ist $\implies a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad \operatorname{Re}[c_n] = 0$
(punktsymmetrisch: Punktspiegelung im Ursprung)
wenn $f(t)$ gerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow b_{2m} = 0$
wenn $f(t)$ ungerade ist bezgl. $\frac{T}{4} \Rightarrow b_{2m+1} = 0$

3.4.2 Linearität Skript S. 81

$$h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t) \implies a_n^{(h)} = r \cdot a_n^{(f)} + s \cdot a_n^{(g)}, \quad b_n^{(h)} = r \cdot b_n^{(f)} + s \cdot b_n^{(g)} \quad f, g \text{ und } h \text{ sind } T\text{-periodische Funktionen}$$

3.4.3 Zeitstreckung/-stauchung (Ähnlichkeit) Skript S. 82

$$g(t) = f(r \cdot t) \text{ (mit } 0 < r \in \mathbb{R}) \implies a_n^{(g)} = a_n^{(f)}, \quad b_n^{(g)} = b_n^{(f)} \quad T^{(g)} = \frac{T^{(f)}}{r} \quad \omega_g = \frac{2\pi}{T_g} \quad r < 1 : \text{Streckung}; r > 1 : \text{Stauchung}$$

$$\text{Zeitspiegelung: } g(t) = f(-1 \cdot t) \implies a_n^{(g)} = a_n^{(f)}, \quad b_n^{(g)} = \operatorname{sgn}(-1) \cdot b_n^{(f)}$$

3.4.4 Zeitverschiebung Skript S. 84

$$g(t) = f(t + t_0) \quad \begin{array}{l} a_n^{(g)} = \cos(n\omega t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega t_0) \cdot b_n^{(f)} \\ b_n^{(g)} = -\sin(n\omega t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega t_0) \cdot b_n^{(f)} \\ c_k^{(g)} = e^{jk\omega t_0} \cdot c_k^{(f)} \end{array} \quad \begin{array}{l} (n = 0, 1, 2, \dots) \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit } b_0 = 0 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} +t_0: \text{links} \\ -t_0: \text{rechts} \end{array}$$

3.5 Satz von Dirichlet Skript S. 89

Die Funktion $f(t)$ sei T -periodisch und stückweise stetig mit Limes, dann konvergiert ihre Fourierreihe gegen

$$FR[f(t_0)] = f(t_0) = \frac{f(t_{0-}) + f(t_{0+})}{2}$$

somit in die Mitte einer Sprungstelle oder den Funktionswert selber.

3.7 Parsevalsche Gleichung Skript S. 97

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \|f\|^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt$$

3.6 Abstand f - g Skript S. 84

Abstand zweier T -periodischen, mit Limes stückweise stetigen Funktionen f und g .

$$\|f - g\| = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T [f(t) - g(t)]^2 dt}$$

3.8 Integral und Differential Skript S. 88

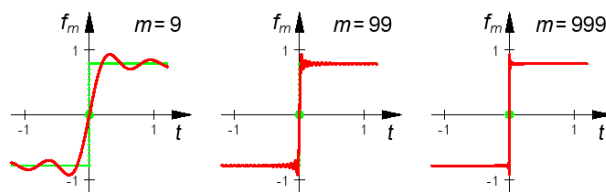
Falls die T -periodische Funktion f (auf ganz \mathbb{R}) zweimal stetig differenzierbar ist und die Fourierkoeffizienten a_n und b_n besitzt, so gilt:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n n\omega \cdot \cos(n\omega t) - a_n n\omega \cdot \sin(n\omega t)]$$

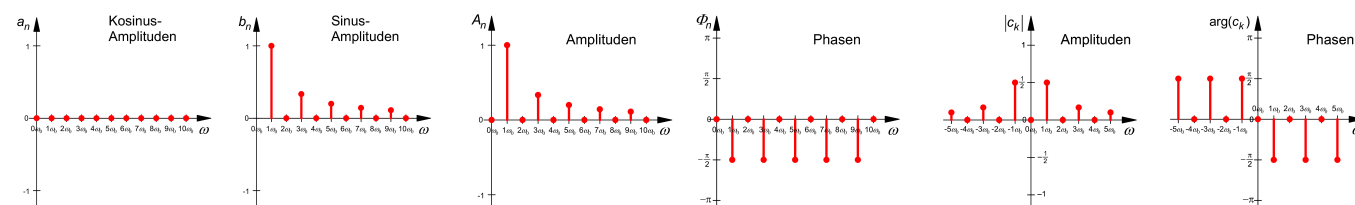
$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b_n}{n\omega} \right] + \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n\omega} \cdot \sin(n\omega t) - \frac{b_n}{n\omega} \cdot \cos(n\omega t) \right]$$

3.9 Gibbs'sches Phänomen Skript S. 92f

Die Fourierreihen schwingen bei Unstetigkeitsstellen über. Die Höhe der grössten überschwingenden Welle beträgt 8.94% der gesamten Sprunghöhe.



4 Spektren Skript S. 103



Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm 1-seitiges Amplituden-/Phasendiagramm 2-seitiges Amplituden-/Phasendiagramm

4.0.1 (1) Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Reelle Fourierkoeffizienten (a_n, b_n) können direkt abgelesen werden. Bei einer Phasenverschiebung ändern sich jedoch die Koeffizienten grafisch nicht nachvollziehbar.

Diese Darstellung hat gegenüber den anderen mehr Nachteile und wird daher eher selten genutzt.

$$a_n = A_n \cdot \cos(\varphi_n) = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n) \quad b_n = -A_n \cdot \sin(\varphi_n) = A_n \sin(-\varphi_n) = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n)$$

4.0.2 (2) Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

$$A_n = |a_n - j \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ oder } A_n = 2 \cdot |c_n|$$

$$\varphi_n = \arg(a_n - j \cdot b_n) = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ oder } \varphi_n = \arg(c_n)$$

$$\text{Spezialfall } n = 0 \Rightarrow A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right| \text{ und } \varphi_0 = \begin{cases} 0, & a_0 \geq 0 \\ \pi, & a_0 < 0 \end{cases}$$

4.0.3 (3) Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

(komplexes Spektrum)

Amplitudendiagramm ist achsensymmetrisch weil $c_n = \overline{c_{-n}}$.

Phasendiagramm ist punktsymmetrisch.

Ähnlichkeit mit Einseitigem: $|c_n| = \frac{1}{2} A_n$ und φ_n gleich wie bei (2) für alle $n \geq 0$.

$$A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right| = |c_0|$$

$$\arg(c_{-n}) = -\arg(c_n) \quad c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad \varphi_n = \arg(a_n - j b_n)$$

4.1 Spezialfälle Skript S. 106

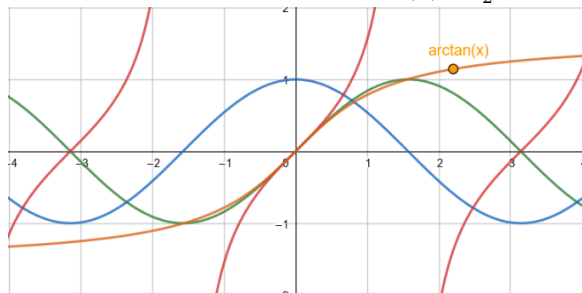
Funktion f gerade	(1) Sinusphasendiagramm überall 0 (2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte 0 und π
Funktion f ungerade	(1) Kosinusphasendiagramm überall 0 (2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte $\pm \frac{\pi}{2}$ (oder 0 falls Amplitudenwert = 0)
Ähnlichkeit $g(t) = f(r \cdot t)$	(1,2,3) Das Spektrum von g ist das horizontal mit den Faktor r gestreckte Spektrum vom f .
Zeitverschiebung $g(t) = f(t + t_0)$	(1) (siehe auch 3.4.4, Zeitverschiebung (S. 4)) (2,3) Amplitudendiagramme sind identisch. (2,3) Phasendiagramme: Die Säule der Frequenz $k\omega_0$ wächst um $k\omega_0 t_0$.
Weisses Rauschen	Überlagerung von Schwingungen aller möglichen Frequenzen mit gleichen Amplituden und zufälligen Phasen.

5 Wichtige Formeln

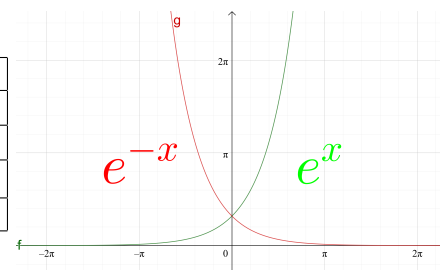
5.1 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0°	0	0	1	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180°	π	0	-1	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

\tan^{-1} : wenn $x > 1$ dann gilt: $\tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{1}{x})$



arctan(x)	deg	rad
$2-\sqrt{3}$	0°	0
$\sqrt{2}-1$	22.5°	$\frac{\pi}{8}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	30°	$\frac{\pi}{6}$
1	45°	$\frac{\pi}{4}$



5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}\end{aligned}$$

5.3 Doppel- und Halbwinkel

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(a)}{2} \quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos(a)}{2}\end{aligned}$$

5.4 Produkte

$$\begin{aligned}\sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))\end{aligned}$$

6 Diverses

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

5.5 Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned}\sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)\end{aligned}$$

5.6 Summe und Differenz

$$\begin{aligned}\sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)}\end{aligned}$$

7 Notizen

7.1 Gleichungen

$$\arg\left(\frac{27}{(1+j)^8}\right) = \arg(27) - \arg((1+j)^8) = 2k\pi - 8 \cdot \arg(1+j) = 2k\pi - 8\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) = 2k\pi - 2\pi - 16l\pi = 2\pi \overbrace{(k-8l-1)}^m = 2m\pi$$

$$|e^{-j\frac{\pi}{6}}| = 1 (\text{Betrag!})$$

$$\frac{[\cos(5)+j \cdot \sin(5)]^6}{e^{j(30+40\pi)}} = \frac{[cjs(5)]^6}{e^{30j+40\pi j}} = \frac{(e^{5j})^6}{e^{30j} \cdot (e^{2\pi j})^{20}} = \frac{e^{30j}}{e^{30j}} = 1$$

$$z^5 + z^3 + 8z^2 + 8 = 0 \rightarrow 0 = z^3(z^2 + 1) + 8(z^2 + 1) = (z^3 + 8)(z^2 + 1) \rightarrow z^3 + 8 = 0 \text{ oder } z^2 + 1 = 0$$

$$z^3 + 8 = 0 : z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{|-8|} \cdot cjs\left(\frac{\arg(-8)}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) = 2[\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)] \rightarrow k = 0...; k = 1...; k = 2...$$

$$z^2 + 1 = 0 : z^2 = -1 \rightarrow z = \sqrt{-1} \rightarrow z_4 = j; z_5 = -j$$

$$1 = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \leftrightarrow 2 = e^z + e^{-z} \rightarrow \cdot e^z \rightarrow (e^z)^2 - 2e^z + 1 = 0 \rightarrow (e^z - 1)^2 = 0 \rightarrow e^z = 1 \rightarrow z = \ln(1) + j \cdot (\arg(1) + 2k\pi) = j \cdot 2k\pi$$

$$\frac{e^{j\frac{a+b}{2}}}{2j} = \frac{e^{ja} + e^{jb}}{4j}$$

7.2 Fourierreihen

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(1.5t) \cdot e^{-jnt} dt \rightarrow \text{Euler} \rightarrow \frac{1}{4\pi j} \int_0^{2\pi} e^{(1.5-n)jt} - e^{(-1.5-n)jt} dt = \frac{1}{4\pi j} \left[\frac{e^{(1.5-n)jt}}{(1.5-n)j} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi j} \left[\frac{e^{(-1.5-n)jt}}{(-1.5-n)j} \right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{e^{3\pi j} \cdot e^{-2\pi nj} - 1}{-2(3-2n)\pi} + \frac{e^{-3\pi j} \cdot e^{-2\pi nj} - 1}{-2(3+2n)\pi} = \frac{1}{(3-2n)\pi} + \frac{1}{(3+2n)\pi} = \frac{(3+2n) + (3-2n)}{(3-2n)(3+2n)\pi} = \frac{6}{(9-4n^2)\pi}$$