第六节 极限存在准则及两个重要极限

第一章

内容

一、两个准则

二、 两个重要极限

准则I (两边夹准则)

如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件

(1) $y_n \le x_n \le z_n$

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n$ (其中a为有限或为$\pm\infty$)

那么数列$\{x_n\}$极限存在，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

例 $\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

解 $(3^n)^{\frac{1}{n}} \le (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} \le (3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$

由于两边极限为3，$\therefore \lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$

常用极限公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0),\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

准则I (两边夹准则)

如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件

(1) $y_n \le x_n \le z_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ (其中a为有限或为$\pm\infty$)

那么数列$\{x_n\}$极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

证 $y_n \to a$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n - a| < \varepsilon$

$z_n \to a$, 上述ε, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|z_n - a| < \varepsilon$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当$n>N$时, 有

$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ 又因为 $y_n \le x_n \le z_n$

当$n>N$时 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

准则I′ (两边夹准则)

(1)当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时，$g(x) \le f(x) \le h(x)$

$(|x| > X > 0)$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$(其中**A**为有限或为$\pm\infty$)

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A$

例 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

解 $\dfrac{1}{x} - 1 \le \left[\dfrac{1}{x}\right] \le \dfrac{1}{x}$，$1 - x \le x\left[\dfrac{1}{x}\right] \le 1$

两边取极限，极限为1，$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$

说明 对于无穷多项和的极限，常考虑用两边夹准则求极限，而利用两边夹准则求极限，关键在于放大和缩小所给的和式

例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

解 利用两边夹准则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$$

重要极限	$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

说明　利用重要极限求极限必须要化成和重要极限一样的形式，分子分母中$f(x)$必须统一包括系数和正负号

$$\lim_{\boxed{}\to 0}\frac{\sin\boxed{}}{\boxed{}}=1$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

例 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\cdot k=k$$

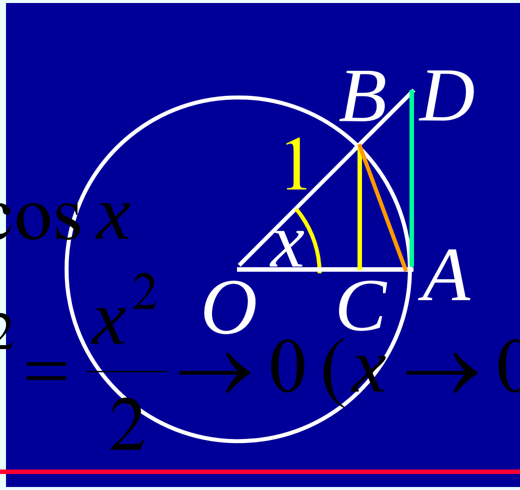
重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时

$$0<|1-\cos x|=1-\cos x$$

$$=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}\to 0\ (x\to 0)$$



证：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

△AOB 的面积＜圆扇形AOB的面积＜△AOD的面积

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

故有 $$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\qquad (0<x<\tfrac{\pi}{2})$$

显然有 $$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\qquad (0<|x|<\tfrac{\pi}{2})$$

$$\because \lim_{x\to 0}\cos x=1,\qquad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

例 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$ 有理化

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x\boxed{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}}$ 乘积项极限非0非∞可以先算

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

式子中出现三角函数时
一般化为含**sinx,cosx**形式

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x$$
$$=2\cos^2 x-1$$

$=\dfrac{1}{\cancel{2}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{2}\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2 x}$ 凑重要极限

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot x^2}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

例 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{2}\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}$$

$$=\cos a$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

利用重要极限

第8节证明cos$x$在 $(-\infty,+\infty)$内连续的

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

令 $\arcsin x=t$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin\sin x}{\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin\sin x}{\sin\sin x}\cdot\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$=1$$

例 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}\sqrt{2x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}(-x)\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x}\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$

不存在

准则II (单调有界准则)

单调有界数列必有极限

单调增有上界

单调减有下界

几何解释

有界

单调的数列只可能向一个方向

移向无穷远 ×

移向定点 √

特点：出现关系式或可转化关系式

准则II (单调有界准则)

单调有界数列必有极限

单调增有上界

单调减有下界

特点：出现关系式或可转化关系式

解题步骤：

i)证明数列$\{x_n\}$有上界（或下界）办法“界”在极限中找，数学归纳法证有界

ii)证明数列$\{x_n\}$单调增（或减）办法如证明 $x_{n+1}-x_n \geq 0 (\leq 0)$

$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 1$；数学归纳法

iii)将所给的关系式两边取极限，求出极限

例 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求极限值

证明 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$ 往证单调递减有下界

显然 $x_n\ge 0$, $\{x_n\}$有下界

假设$x_k>x_{k+1}$ 往证$x_{k+1}>x_{k+2}$

$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$即$\{x_n\}$单调递减

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 有$a=\sqrt{6+a}$ 解得$a=3\ (-2$舍去$)$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

法2(数学归纳法证有界)

$x_1=10>3$ 假设 $x_n>3$ 则$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>\sqrt{6+3}=3$

例 $a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdots a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\cdots}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

解: $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$,

$a_1=\sqrt{2}<2$ 假设$a_n<2$,

则$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}<\sqrt{2+2}=2$ 故$\{a_n\}$有界

假设$a_n>a_{n-1}$, 则$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}>\sqrt{a_{n-1}+2}=a_n$

故$\{a_n\}$单调递增

由单调有界数列的性质知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在

$\because \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}+2}$ $\quad a=\sqrt{a+2}\Rightarrow a=2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

例 设 $x_1 > 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ $(n = 1,2,\cdots)$ 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求极限值

证明 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \geq 1$ $\{x_n\}$有下界

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$ 即 $\{x_n\}$ 单调递减

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n$存在

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 有 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 解得 $a = 1$ $(-1$舍去$)$

故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

重要极限

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

变型

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (若$f(x)\neq 0$)

则 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

特点：1^∞ 型幂指函数的极限 $a(x)^{b(x)}$

例 $$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-\frac{x}{2}(-6)} = \left[\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-\frac{x}{2}}\right]^{(-6)} = e^{-6}$$

例 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^x} = \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}\right]^a}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{-\frac{x}{a}}\right]^{-a}} = e^{2a}$$

重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

证: 利用二项式公式, 有

$$x_n = (1+\tfrac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \cdots$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots$$

大 大

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

正

比较可知 $x_n < x_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

又 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

重要极限 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

比较可知 $x_n < x_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

又 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

根据单调有界准则 可知数列$\{x_n\}$极限存在

记此极限为 e，即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

e 为无理数，其值为 $e=2.718281828459045\cdots$