

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	得分
得分									

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%；本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%。

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $y' = \frac{1}{2x+e^{2y}}$ 的通解为 $x = e^{2y}(y+C)$

2. 设 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段，则 $\oint_L (x+y)ds = \sqrt{2}$

3. 两平行平面 $x-2y+2z-15=0, x-2y+2z+18=0$ 间的距离为 11

4. 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$ ，单位向量 $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$ ，则

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,2,3)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. 将 $\int dx \int f(x,y)dy$ 化为极坐标系下的二次积分为

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}}} \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho d\theta$$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 利用变量代换 $u=x, v=\frac{y}{x}$ ，可以把方程 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ 化简为 ((B))

(A) $v \frac{\partial z}{\partial v} = z$

(B) $u \frac{\partial z}{\partial u} = z$

(C) $u \frac{\partial z}{\partial v} = z$

(D) $v \frac{\partial z}{\partial u} = z$

2. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ， Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分，则下列等式正确的是 ((C))

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = \iint_{\Sigma} y dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 2 \iint_{\Sigma} x dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma} x dS$

(D) $\iint_{\Sigma} dS = 3 \iint_{\Sigma} dS$

3. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[0, 2\pi]$ 上 $f(x) = x^2$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x = 3\pi$ 处收敛于 (D) .

(A) $4\pi^2$ (B) $2\pi^2$

(C) 0 (D) π^2

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$ (A)

(A) $\ln 2$ (B) $\ln 3$

(C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=4$ 处 (D)

- (A) 敛散性不定 (B) 绝对收敛
 (C) 条件收敛 (D) 发散

三、(8 分) 设 $z = f(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{z}{x+z} = \frac{z}{x+z}, \quad \text{2分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{z^2}{x+z} = \frac{z^2}{y(x+z)}, \quad \text{2分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x+z} \right) = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}(x+z) - z \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{(x+z)^2}, \quad \text{2分}$$

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共 16 分)

达课序

专业班级

姓名：

三

$$1. \text{ 计算二重积分 } I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy, \quad D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1.$$

解：将积分区域 D 两部分： $D_1 : y > x$, $D_2 : y < x$ 2 分

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(y-x) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy - \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \dots \quad 2 \text{ 分}$$

= 0 2 分

2. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转

一周形成的曲面与平面 $z = 1$ 和 $z = 4$ 所围成的区域

解: Ω 空间区域为: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ 1 \leq z \leq 4 \end{cases}$ 2 分

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV \quad \dots \dots \dots \quad .2 \text{ 分}$$

$$= \int dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \rho^3 d\rho$$

五、计算下列各题（每题 8 分，共 16 分）

11. 计算 $\oint \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$

的正向

解： $L: (x-1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ，包含了点(1, 0)。

$$P(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{-(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 则}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 + y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

2 分

取以 $(1, 0)$ 为圆心, r ($r > 1$) 为半径的圆,

则圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). 方向取顺时针.

时针方向

2分

所以由格林公式

$$\begin{aligned} & \oint_L \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \oint_{I_1 \cup I_4} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} - \oint_{I_4} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{I_4} \frac{ydx + (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 - \oint_{I_4} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \\
 &= \oint_{I_4} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} d\theta = -2\pi
 \end{aligned} \quad 2 \text{ 分}$$

2. 计算 $I = \iint_D 2x^3 dy dz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上半部分.

例.

解 作辅助平面 $\sum_1: z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, 则平面 \sum_1 与曲面 \sum 围成空间有界闭区域

Ω 则

$$= \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy \quad \dots \text{2'}$$

山西断公武集

$$\iint 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dxdy$$

$$= 6 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{z-r^2} dr r(z+r^2)$$

选课序号

专业班级

姓名

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x \frac{\partial z}{\partial y}}{(x+z)^2} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$$

重难点 1. 计算二重积分 $I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy$, $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

解:

解: 将积分区域 D 两部分: $D_1: y > x$, $D_2: y < x$ 2 分

$$I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy = \iint_{D_1} dx dy - \iint_{D_2} dx dy$$

装

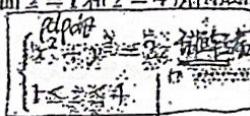
$$= \int_1^1 dx \left[\int_{x^2}^{1-x} dy - \int_x^{1-x} dy \right]$$

$$= 0$$

经典重 2. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转

一周形成的曲面与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成的区域

解: Ω 空间区域为:



$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$$

$$= \int_1^4 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\Rightarrow = \int_1^4 dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho$$

$$= 42\pi$$

64-1
63 21

五、计算下列各题(每题 8 分, 共 16 分)

1. 计算 $\oint_L \frac{xy - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$

的正向.

解: $L: (x-1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$, 包含了 $(1,0)$ 点,

$$P(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{-(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 则}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 + y^2 - 2(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

取以 $(1, 0)$ 为圆心, $r (r > 1)$ 为半径的圆

$$\text{则圆的参数方程 } L: \begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi). \text{ 依顺时针方向取顺时针方向.}$$

所以由格林公式

$$\begin{aligned} & \oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ & \stackrel{\text{Eins}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} - \int_0^{2\pi} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ & \stackrel{\text{Green}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_0^{2\pi} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 0 - \int_0^{2\pi} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ & = \int_0^{2\pi} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ & = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

2. 计算 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

解 作辅助平面 $\sum_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 则平面 \sum_1 与曲面 Σ 围成空间有界闭区域

Ω 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy \\ & = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy \quad \dots \text{2 分} \\ & \stackrel{\text{高斯公式得}}{=} \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy \\ & \stackrel{\text{Green}}{=} \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dx dy dz \quad \dots \text{2 分} \\ & = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} r(z + r^2) dr \end{aligned}$$

理由: $f(x, y)$ 必在 D 的内部取最值, 是分

选课序号

本题设 $f(x_0, y_0) = M = \max_{(x, y) \in D} f(x, y), (x_0, y_0) \in D$ 内;

则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值, 所以 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0,$

$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0); C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0. \text{ 所以}$$

$AC - B^2 = -A^2 - B^2 < 0$ 且 $f(x_0, y_0)$ 为极大值矛盾.

故 $f(x, y)$ 在 D 的边界上取最大值和最小值. 2 分

专业班级

姓名

学分