第十二章　无穷级数

无穷级数
- 数项级数
  - §1 概念和性质
  - §2 如何判定
- 幂级数
  - §3 收敛半径,和函数
  - §4 函数展开成幂级数
- 傅里叶级数　§7,8函数展开成Fourier级数

两类问题: 在收敛域内

$$\text{幂级数}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}} \text{和函数 } S(x)$$

第十二章

第四节

函数展开成幂级数

内容

一 泰勒级数 麦克劳林级数

二 将$f(x)$展开成x或$x-x_0$的幂级数

直接法 间接法

一、泰勒 (Taylor) 级数与麦克劳林级数

1.泰勒级数

复习: $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式

若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有直到 $n+1$ 阶导数,则在该邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+R_n(x) \qquad \text{其中} R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi\text{在}x\text{与}x_0\text{之间})$$

为了提高精度,将展开式进行到底

若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内任意阶可导, 则幂级数

$$\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{S_{n+1}(x)}\overbrace{\underbrace{+\cdots}_{r_{n+1}(x)}}^{R_n(x)}$$

称为 $f(x)$ 的泰勒级数.

若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内任意阶可导, 则幂级数

$$\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{S_{n+1}(x)}\overbrace{\underbrace{+\cdots}_{r_{n+1}(x)}}^{R_n(x)}$$

称为 $f(x)$ 的泰勒级数.

当 $x=x_0$ 时, $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x_0)$

待解决的问题:

1)除 $x=x_0$ 外, $f(x)$ 的泰勒级数是否一定收敛?

或它的收敛域是什么?

2) 在收敛域上, 和函数是否为 $f(x)$?

若泰勒级数的和函数是 $f(x)$, 称

$f(x)$ 在此收敛域内能展开成泰勒级数

定理1． 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内**能展开成**泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0.$

证明: $\Rightarrow$ **$f(x)$在$U(x_0)$内能展开成泰勒级数**,即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x\in U(x_0)$$

$$=S_{n+1}(x)+R_n(x) \qquad \because \lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)=f(x) \quad \therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

$\Leftarrow$ **$f(x)$的泰勒公式** $f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$

$$\because \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-R_n(x)]=f(x)$$

$f(x)$的泰勒级数在$U(x_0)$内收敛,并收敛于$f(x)$

2.麦克劳林级数 当$x_0=0$,得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为$f(x)$的麦克劳林级数

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的, 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设$f(x)$所展成的幂级数为 $x\in(-R,R)$

$$f(x)=\boxed{a_0}+\boxed{a_1}x+\boxed{a_2}x^2+\cdots+\boxed{a_n}x^n+\cdots \leftarrow a_0=f(0)$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \quad a_1=f'(0)$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot2a_3x+\cdots+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots \quad a_2=\frac{1}{2!}f''(0)$$

$\cdots\cdots$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots2a_{n+1}x+\cdots \quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

$\cdots\cdots$

2.麦克劳林级数 当 $x_0=0$,得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的, 且与它的麦克劳林级数相同.

说明:由函数 $f(x)$ 的展开式的唯一性可知,如果 $f(x)$ 能展开成 x 的幂级数,那么这个幂级数就是 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

如果 $f(x)$ 在 $U(0)$ 内具有各阶导数, $f(x)$ 的麦克劳林级数就能作出来,但这个级数的和函数在此区间内是否为 $f(x)$ 仍需进一步考察

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒级数公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{cases}$

1. 直接展开法

函数$f(x)$展开成幂级数的步骤如下：

① 求 $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$

② 写出麦克劳林 $f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

计算收敛半径 R；

③ 判别在收敛区间$(-R, R)$内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为0

若为0, $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

例 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x,\ f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots),$

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\Big/\frac{1}{n!}=0 \qquad \text{收敛半径为 } R=+\infty$$

对任何有限数 x, 其余项

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\text{收敛}}0$$

$(\xi$ 在0与x之间$)$ 有限数

故 $$\boxed{\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1,1)$$

注意

①求出函数的展开式后,一定要说明相应的展开区间

②**熟记常用的泰勒展开式**,既方便于应用间接法展开,在求幂级数和函数或常数项级数和时也带来很大方便

2. 间接展开法

例1 将函数 $\dfrac{1}{1+x^3}, \sin^2 x, \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: ① $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{1-(-x^3)} = 1 - x^3 + x^6 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

$(-1 < x^3 < 1)$ 即 $(-1 < x < 1)$

② $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

$(-\infty < x < \infty)$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)}$$

2. 间接展开法

例1 将函数 $\dfrac{1}{1+x^3}, \sin^2 x, \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: ③ $f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^x [1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots]\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1,1]}$$

思考 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 展开成 x 的幂级数.

$$=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\tfrac{3}{2}x) \qquad \begin{matrix}(-1\le x<1)\\ (-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})\end{matrix} \quad \Rightarrow (-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

例2. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

例3. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$$\cancel{\left|\frac{x-1}{2}\right|<1} \quad \cancel{\left|\frac{x-1}{4}\right|<1}$$

$$(|x-1|<2)$$

$$=\frac{1}{4[1-(-\frac{x-1}{2})]}-\frac{1}{8[1-(-\frac{x-1}{4})]}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

例4. 将 $f(x)=\ln x$ 展成$x-3$的幂级数

解: $\ln x = \ln(x-3+3)$

$$= \ln[3(1+\frac{x-3}{3})]$$

$$= \ln 3 + \ln(1+\frac{x-3}{3})$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x-3}{3})^n}{n}$$

$$-1 < \frac{x-3}{3} \le 1$$

即$0 < x \le 6$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1,1]}$$

例5. 把 $\arctan x$ 展成幂级数, 求 $\boxed{S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(\frac{3}{4})^n}$

分析有关数项级数的问题, 有时可从幂级数的角度解决

解 (1) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad |x|<1$

$$\arctan x-\cancel{\arctan 0}=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

$x=-1$时收敛; $x=1$时收敛; 收敛域为 $x\in[-1,1]$

(2) $$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(\frac{3}{4})^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n-1}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$$

欧拉公式

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

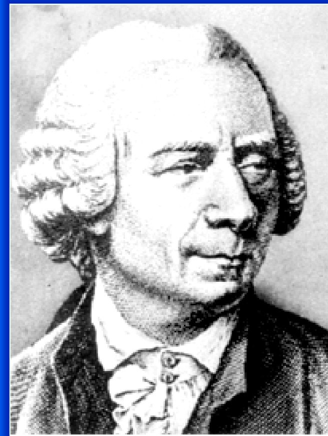
$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$= \cos x + i \sin x$$

欧拉 (1707 – 1783)

瑞士数学家.他写了大量数学经典著作,如《无穷小分析引论》,《微分学原理》,《积分学原理》等,还写了大量力学, 几何学, 变分法教材.他在工作期间几乎每年都完成 800 页创造性的论文.他的最大贡献是扩展了微积分的领域, 为分析学的重要分支 (如无穷级数, 微分方程) 与微分几何的产生和发展奠定了基础.在数学的许多分支中都有以他的名字命名的重要常数, 公式和定理.



欧拉，L.