

# 第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

## 参考答案及评分标准

### (非数学类, 2011)

一、(本题共 4 小题, 每题 6 分, 共 24 分) 计算题

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$

解: 因为  $\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x},$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)}}{x} = e^2, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2} - 1}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2}{x}$   
 $= 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -e^2, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

所以

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

2. 设  $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

解: 若  $\theta = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

若  $\theta \neq 0$ , 则当  $n$  充分大, 使得  $2^n > |\theta|$  时,

$a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}}$   
 $= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$   
 $= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^2} \sin \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}}$

这时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{\theta}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

3. 求  $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

解: 设  $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$

$$D_2 = \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$$D_3 = \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} dx dy = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x} = 1 + 2 \ln 2, \quad \iint_{D_3} dx dy = 3 - 2 \ln 2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dx dy = \iint_{D_3} dx dy - \iint_{D_2 \cup D_3} dx dy = 2 - 4 \ln 2. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的和函数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$  的和.

解: 令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ , 则其的定义区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .  $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2-x^2}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{于是, } S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{9}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

二、(本题 2 两问, 每问 8 分, 共 16 分) 设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  为数列,  $a, \lambda$  为有限数, 求证:

1. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ ;

2. 如果存在正整数  $p$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$ .

证明: 1. 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\exists M > 0$  使得  $|a_n| \leq M$ , 且  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_1$  时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \exists N_2 > N_1, \text{ 当 } n > N_2 \text{ 时, } \frac{N_1(M+|a|)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{于是, } \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| \leq \frac{N_1(M+|a|)}{n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-N_1)}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ . .....8 分

2. 对于  $i = 0, 1, \cdots, p-1$ , 令  $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$ , 易知  $\{A_n^{(i)}\}$  为  $\{a_{n+p} - a_n\}$  的子列.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ , 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda$ .

而  $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$ . 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda$ .

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p+i}}{n} = 0$ . 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda$ . .....12 分

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)p+i} \cdot \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \frac{\lambda}{p}$

$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n, p, i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq p-1)$ , 使得  $m = np + i$ , 且当  $m \rightarrow \infty$  时,  $n \rightarrow \infty$ .

所以,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$ . .....16 分

三、(15 分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有连续的三阶导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ .

求证: 在开区间  $(-1, 1)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $f'''(x_0) = 3$

证. 由马克劳林公式, 得

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(\eta)x^3, \quad \eta \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}, \quad x \in [-1, 1] \cdots 3 \text{ 分}$$

在上式中分别取  $x = 1$  和  $x = -1$ , 得

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2!} f''(0) + \frac{1}{3!} f'''(\eta_1), \quad 0 < \eta_1 < 1. \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2!} f''(0) - \frac{1}{3!} f'''(\eta_2), \quad -1 < \eta_2 < 0. \quad \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\text{两式相减, 得} \quad f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

由于  $f'''(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上连续, 因此  $f'''(x)$  在闭区间  $[\eta_2, \eta_1]$  上有最大值  $M$  最小值  $m$ , 从而

$$m \leq \frac{1}{2} (f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)) \leq M \quad \cdots 13 \text{ 分}$$

再由连续函数的介值定理, 至少存在一点  $x_0 \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$ , 使得

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2} (f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)) = 3. \quad \cdots 15 \text{ 分}$$

四、(15 分) 在平面上, 有一条从点  $(a,0)$  向右的射线, 线密度为  $\rho$ . 在点  $(0,h)$  处 (其中  $h > 0$ ) 有一质量为  $m$  的质点. 求射线对该质点的引力.

解: 在  $x$  轴的  $x$  处取一小段  $dx$ , 其质量是  $\rho dx$ , 到质点的距离为  $\sqrt{h^2 + x^2}$ , 这一小段与质点的引力是

$$dF = \frac{Gm\rho dx}{h^2 + x^2} \quad (\text{其中 } G \text{ 为引力常数}). \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

这个引力在水平方向的分量为  $dF_x = \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$ . 从而

$$F_x = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm\rho}{2} \int_a^{+\infty} \frac{d(x^2)}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = -Gm\rho(h^2 + x^2)^{-1/2} \Big|_a^{+\infty} = \frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

而  $dF$  在竖直方向的分量为  $dF_y = \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$ , 故

$$F_y = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\pi/2} \frac{Gm\rho h^2 \sec^2 t dt}{h^3 \sec^3 t} = \frac{Gm\rho}{h} \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\pi/2} \cos t dt = \frac{Gm\rho}{h} \left( 1 - \sin \arctan \frac{a}{h} \right)$$

所求引力向量为  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ . \dots\dots\dots 15 分

五、(15 分) 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $F(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}) = 0$  确定的隐函数, 其中  $F$  具有连续的二阶偏导数,

且  $F_u(u, v) = F_v(u, v) \neq 0$ . 求证:  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  和  $x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

解: 在方程  $F(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}) = 0$  两边分别关于  $x$ 、 $y$  求偏导, 得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\right)F_u + \frac{\partial z}{\partial x}F_v = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}F_u + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y^2}\right)F_v = 0. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由此解得,  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_u}{x^2(F_u + F_v)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_v}{y^2(F_u + F_v)}$

所以,  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

对上式两边关于  $x$  和  $y$  分别求偏导, 得

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2x \frac{\partial z}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2y \frac{\partial z}{\partial y}$$

上面第一式乘以  $x$  加上第二式乘以  $y$ ，并注意到  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ，得到

$$x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

六、(15 分) 设函数  $f(x)$  连续， $a, b, c$  为常数， $\Sigma$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。记第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS. \quad \text{求证: } I = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u) du$$

解：由  $\Sigma$  的面积为  $4\pi$  可见：当  $a, b, c$  都为零时，等式成立。 .....2 分

当它们不全为零时，可知：原点到平面  $ax + by + cz + d = 0$  的距离是

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

设平面  $P_u: u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ，其中  $u$  固定。则  $|u|$  是原点到平面  $P_u$  的距离，从而

$$-1 \leq u \leq 1. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

两平面  $P_u$  和  $P_{u+du}$  截单位球  $\Sigma$  的截下的部分上，被积函数取值为

$$f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

这部分摊开可以看成是一个细长条。这个细长条的长是  $2\pi\sqrt{1-u^2}$ ，宽是  $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ，它的面积是  $2\pi du$ ，故

我们得证。 .....15 分