第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理 (第1节)
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式 (第3节)
- 柯西中值定理

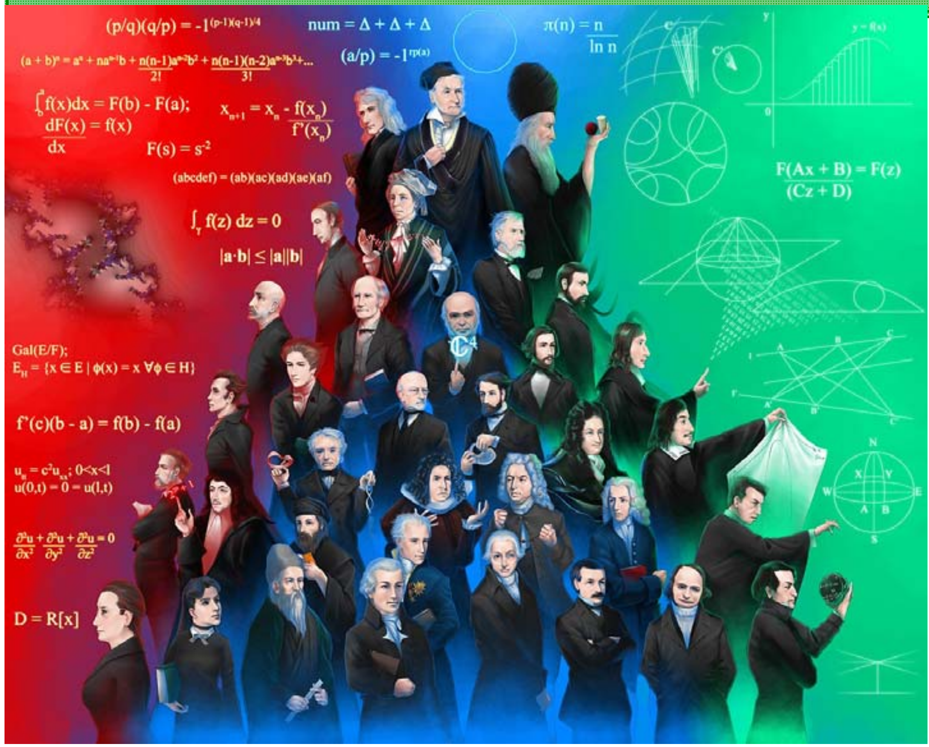
洛必达法则求极限 (第2节)

导数应用 (第4-7节) 研究曲线的性态包括单调性，极值，最值，凹凸性，拐点，曲率等

第三章

第二节

洛必达法则



内容

一、洛必达法则

二、未定式

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ （$\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）

$\Big\downarrow$ 转化 **洛必达法则**

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

法国1661 – 1704

一、洛必达法则

定理1 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

2) $f(x)$与$g(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导且$g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

$$\longrightarrow \lim_{\boxed{x\to a}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则

说明: 定理1中 $x\to a$ 换为 $x\to a^{+}$，$x\to a^{-}$, $x\to\infty$，$x\to+\infty$

$x\to-\infty$ 而条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

2) $f(x)$与$g(x)$ 在 $\overset{\circ}{\mathrm{Y}}(a)$内可导且$g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

证 不妨假设$f(a)=g(a)=0$,在指出的邻域内任取 $x\neq a$

则$f(x)$,$g(x)$ 在以 x, a 为端点的区间上应用柯西定理

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x, a \text{ 之间})$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \text{存在(或为 } \infty \text{)}$$

一、洛必达法则

定理2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

2) $f(x)$与$g(x)$在$\overset{o}{\mathrm{Y}}(a)$内可导且$g'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则

证明略. $x \to a$ 换为$x \to a^{+}$, $x \to a^{-}$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$

$x \to -\infty$ 结论仍成立

利用洛必达法则应注意如下几个问题：

1) 使用洛必达法则之前,应该先检验其条件是否满足

当 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(不包括 ∞ 情形),就不能用洛必达法则

应从另外途径求极限。

例如，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} \neq \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

极限不存在

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$$

再如. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

$\dfrac{0}{0}$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

注意: 不是未定式不能用洛必达法则!

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

2) 若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$还是未定式,且$f'(x), g'(x)$满足定理中所要求的条件,则可继续使用法则,直到不是未定式为止

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\Lambda$$

例 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n为正整数，$\lambda>0$)

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^n)'}{(e^{\lambda x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\Lambda$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

3)用洛必达法则时,要注意技巧,比如乘积项极限非零非无穷的因子可以先算,无穷小量代换或恒等变形,因式分解,有理化的要先化简然后再配合洛必达法则,以简化计算。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\dfrac{3}{2}$

$x\to 0$ 时,

$1+\cos x\to 2$

$\ln(1+x)\sim x$

分析: 原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$=\dfrac{1}{2}(3+0)$

再如 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{6}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{6}$$

$\sin x\sim x$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

典型题 **例1** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

等价代换

解: 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x)$

$=1$

$[1+f(x)]^a-1\sim af(x)$

典型题 例2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

解: 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}}{4x}$$

乘积项极
限非0非∞
可以先算

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

有理化

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}}{4\cancel{x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}$$

典型题 例3 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$

解： 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{5\sec^2 5x}{3\cos 3x}=-\dfrac{5}{3}$

注意： 有时为了使用等价代换,而 $x\to 0$ 代换较方便

当所求极限为 $x\to a$ 时,可作变换 $t=x-a$,此时 $t\to 0$

当 $x\to +\infty$ 时,作变换 $t=\dfrac{1}{x}$

原式 $\xlongequal{令 t=x-\pi}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan 5(t+\pi)}{\sin 3(t+\pi)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan 5t}{\sin(-3t)}=-\dfrac{5}{3}$

典型题 **例4** $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)$

解: 原式 $\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 2t}{3t^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+2\sin 2t}{6t}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\cos t+4\cos 2t}{6}$$

$$=\frac{1}{2}$$

并非所有$+\infty$都设 $\frac{1}{t}$

例5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}$

解: 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=1$$

例6 $f''(x)$连续, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)=6,$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$

解: 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可知 $f(0)=0,\ f'(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)\sin 2x}{4x^3}$$

等价代换

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{2x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)\sin 2x}{4x}$$

等价代换

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)2x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)}{2}$$

$$=\frac{f''(0)}{2}=3$$

二、未定式 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^{0},\infty^{0},1^{\infty}$

解决方法:

$$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \left\{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\right\} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow[\text{转化}]{\text{换底公式}} \left\{0^{0},\ 1^{\infty},\ \infty^{0}\right\}$$

$0\cdot\infty$型

$$0\cdot\infty\text{型}\ \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty,\quad \text{或}\ 0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}.\qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

技巧：反对幂三指两两乘积时,把排在后面的函数拿到分数线下

例1.求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \ \ (n>0)$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-\dfrac{x^n}{n}) = 0$

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

$$0\cdot\infty\text{型}\ \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty,\quad \text{或}\ 0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}.\qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

技巧：反对幂三指两两乘积时,把排在后面的函数拿到分数线下

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$

$0\cdot\infty$型

$$0\cdot\infty\text{型} \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty,\quad \text{或 } 0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}.\qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

技巧：反对幂三指两两乘积时,把排在后面的函数拿到分数线下

例3. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\tan x$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{-\csc^2 x}=-1$

思考题 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$

$\infty-\infty$型 $\left\{\begin{array}{l}\text{有分式通分} \\ \text{没有分式，令}x=\dfrac{1}{t}\text{ 作个分式}\end{array}\right.$

例4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$

解: 原式

$$\overset{\text{令}x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}-\ln\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1+t\ln t}{t}\qquad t\ln t\to0$$

$$=+\infty$$

例5. $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})-x]$

解: 原式

$$\overset{\text{令}x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

例6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

解: 原式

$$\overset{\text{通分}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$$

$$=\frac{2}{3}$$

练习 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

解: 原式

$$\overset{\text{通分}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$0^0, \infty^0$型 通过换底公式 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

例 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = 1$

例 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}} = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x\ln x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{\tan x \cdot \ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x\cdot\ln x} - 1}{x\cdot\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x\cdot\ln x}{x\cdot\ln x} = 1$$

$\boxed{1^{\infty}\text{型}}$

通过换底公式 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\lim_{x\to a}\left[[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)g(x)} = e^{A}$$

其中 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x) = A$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})}$$

$$\overset{令x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}} = e^{2}$$

例 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$\overset{令x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t+t^2)}{t}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1+2t}{1+t+t^2}} = e$$

1^{∞}型

通过换底公式 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\lim_{x\to a}\left([1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{(f(x)-1)g(x)} = e^{A}$$

其中 $\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x) = A$

例 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}\cdot\frac{\sin x - x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

其中 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

$\therefore$ 原极限 $= e^{-\frac{1}{6}}$

洛必达(1661 – 1704)

法国数学家, 他著有《无穷小分析》(1696), 并在该书中提出了求未定式极限的方法, 后人将其命名为“洛必达法则”. 他在15岁时就解决了帕斯卡提出的摆线难题, 以后又解出了伯努利提出的“最速降线”问题, 在他去世后的1720 年出版了他的关于圆锥曲线的书.