第八章

空间解析几何与向量代数

§1　向量及其线性运算

§2　数量积 向量积 混合积

§3　平面及其方程

§4　空间直线及其方程

§5　曲面及其方程

§6　空间曲线及其方程

第二节

数量积 向量积 混合积

内容

一、数量积

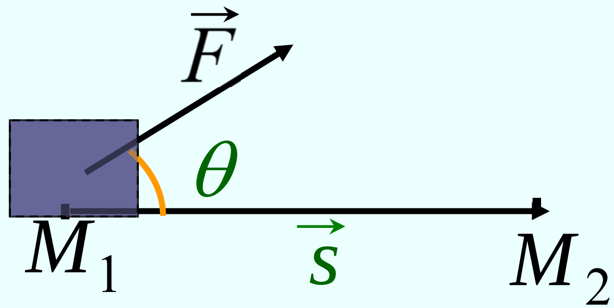
二、向量积

三、混合积

一、数量积 (点积或内积)

引例. 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为 θ 的直线从点 M_1 移动到点 M_2, 以 $\vec{s}$ 表示位移, 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



启示 两向量作这样的运算, 结果是一个数量.

1. 定义 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ, 称

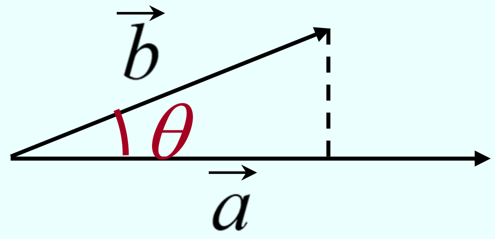
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 (点积或内积)

一、数量积 (点积或内积)

当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为

$$|\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$$



故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

同理，当$\vec{b}\neq\vec{0}$时，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$$

两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

1. 定义 设向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，称

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$$

为$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积** (点积) .

2. 性质

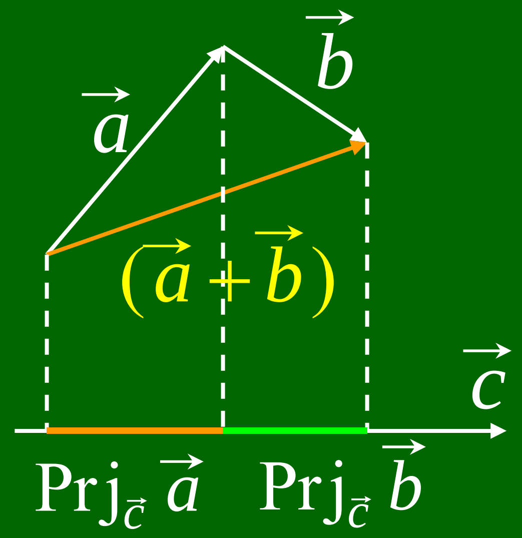
① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ λ数

③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

④ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



$\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=|\vec{c}|\,(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b})$$

$$=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

2. 性质

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$　λ数

③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

④ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

⑥ $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,

$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$,

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\Updownarrow$

$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$

零向量与任何向量正交

2. 性质

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ λ数

③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

④ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

⑥ $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,

$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$,

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$,

$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot$

$(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$,

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

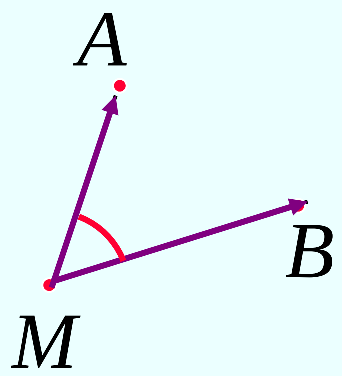
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

例1. 已知三点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.

解: $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$



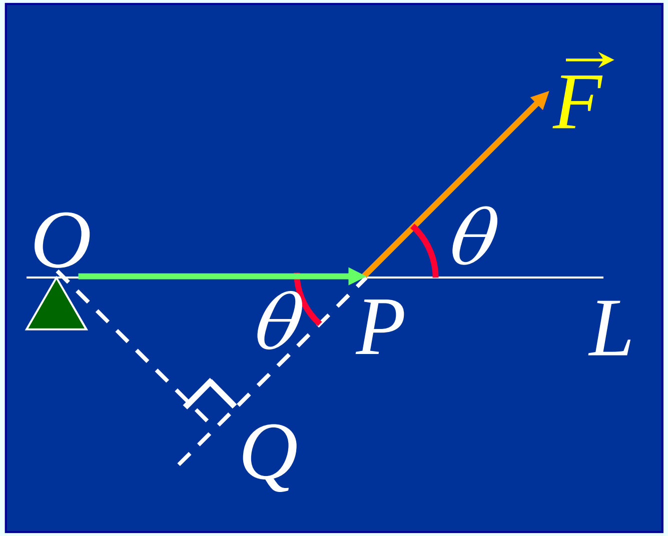
则 $\cos\angle AMB = \dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|} = \dfrac{1+0+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

故 $\angle AMB = \dfrac{\pi}{3}$

二、两向量的向量积(叉积或外积)

引例. 设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P 点上，则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩是一个向量 $\vec{M}$：

$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$



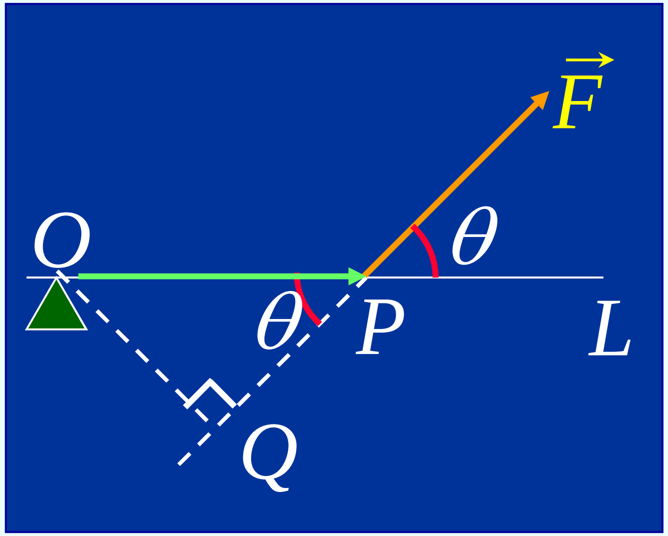
力矩大小等于作用力乘以支点到力的垂直距离；

力矩方向与它所造成的旋转运动的旋转轴同向

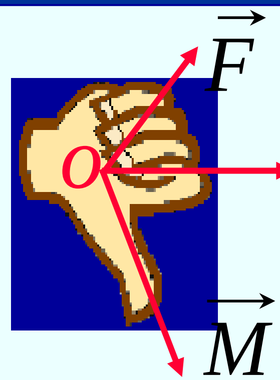
二、两向量的向量积(叉积或外积)

引例. 设O为杠杆L的支点，有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，则力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩是一个向量$\vec{M}$:

$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$



它的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\vec{F}$所决定的平面，指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$以不超过π的角转向$\vec{F}$握拳时大拇指的指向就是$\vec{M}$的指向



力矩方向与它所造成的旋转运动的旋转轴同向

二、两向量的向量积(叉积或外积)

1. 定义 对于任意两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，定义新向量$\vec{a}\times\vec{b}$

称为$\vec{a}$和$\vec{b}$的向量积(叉积或外积)

$\vec{a}\times\vec{b}$模 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

以$\vec{a},\vec{b}$为边的平行四边形面积

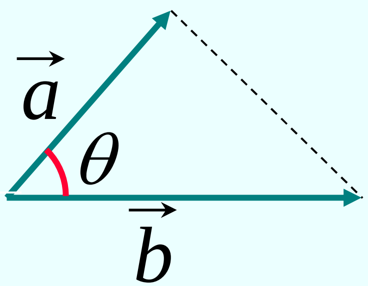
$\vec{a}\times\vec{b}$方向 同时垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$所确定的平面

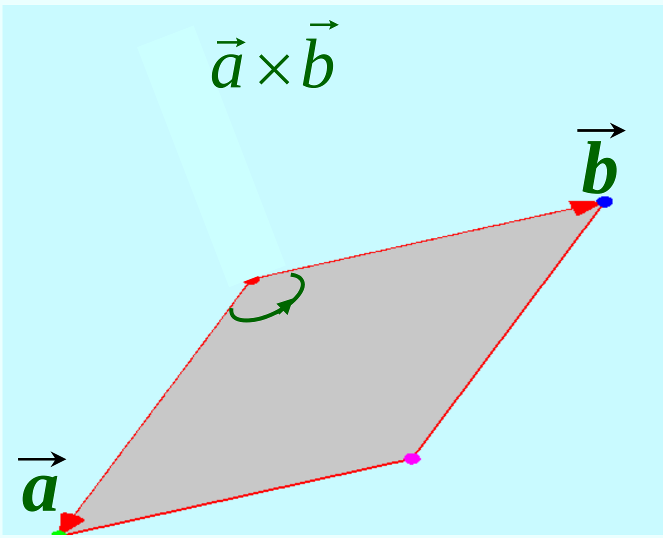
按右手从$\vec{a}$握向$\vec{b}$,拇指所指方向

引例中的力矩 $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$

思考：右图三角形面积

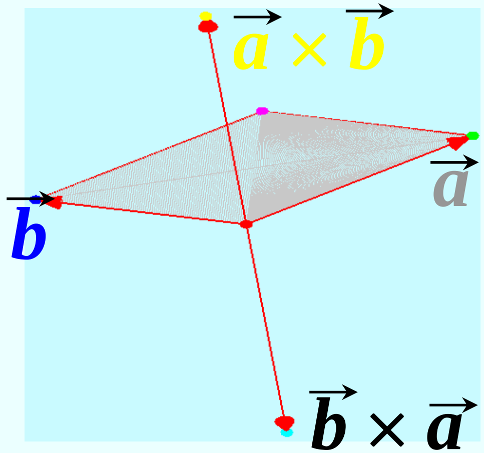
$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$





2. 性质

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$



① $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

② $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

③ $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

⑤ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

⑥ $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,

$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$,

则 $\vec{a}\times\vec{b}=?$

证明: 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

$$\Leftrightarrow\sin\theta=0,$$

即 $\theta=0$ 或 π

$$\Leftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})$$

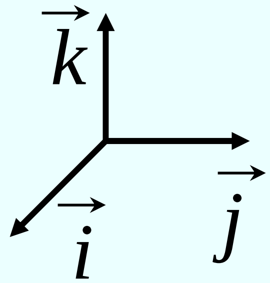
$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

怎么记



设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

2. 性质

① $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

② $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

③ $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

⑤ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

⑥ $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z),$

则 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$

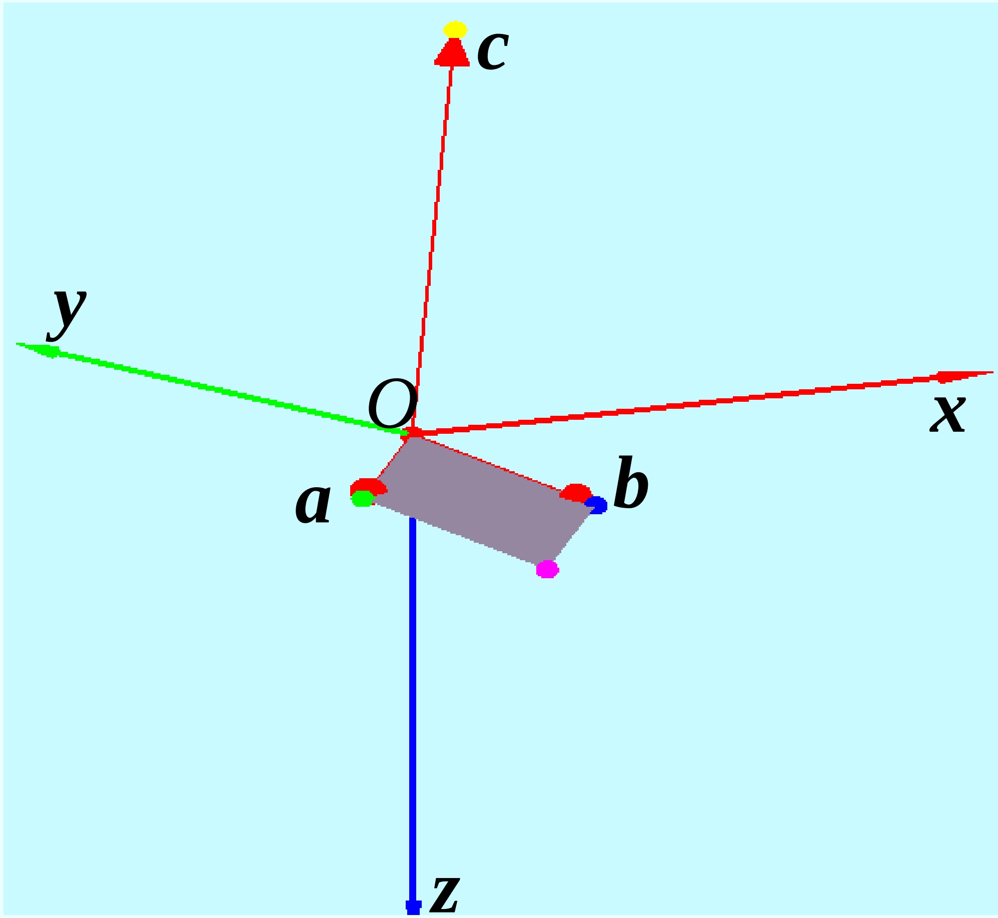
例1 求一个与向量 $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (2, 1, 1)$ 都垂直的向量.

解 令

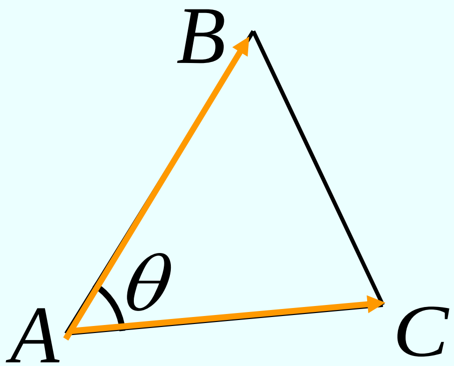
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$



例2. 已知三点 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$, 求三角形 ABC 的面积 .



解: 如图所示,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(4, -6, 2)|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

例3 已知 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=26, \vec{a}\cdot\vec{b}=26\sqrt{5}$ 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=?$

解 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2}{3}$$

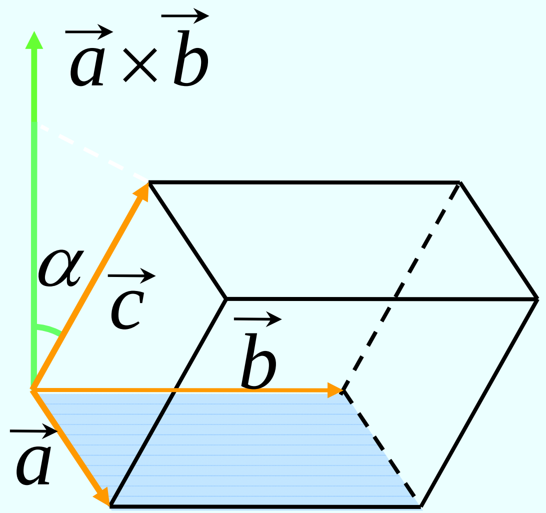
所以 $|\vec{a}\times\vec{b}|=52$

三、向量的混合积

1. 定义 已知三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \ \underline{\underline{\text{记作}}}\ [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积 .



$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = \underbrace{|\vec{a}\times\vec{b}|}_{\text{底面积}}\,\underbrace{|\vec{c}|\left|\cos(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}})\right|}_{\text{高}}$$

几何意义

以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱作平行六面体

$|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$ 为平行六面体体积　怎么算?

2.混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\ \vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

3. 性质

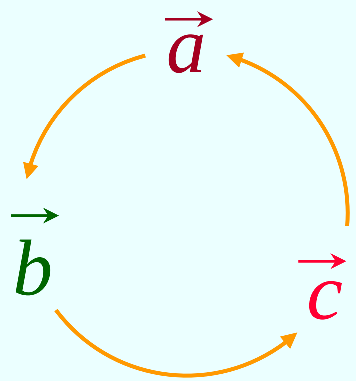
(1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

(2) 轮换性

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$



(利用行列式运算性质)