专业班级：　　　学号：　　　姓名：　　　课序号：

（首页）

教务处试卷编号：

备注：试卷背面为演草区（不准用自带草纸）

课程编号：1713010430　　考核方式：（闭卷）　　考核时间：（2学时）

主考教师允许携带的用品：签字笔、铅笔、橡皮、涂改液

大连海事大学 2021-2022 学年第一学期《离散数学》试卷（B）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	卷面分(占总分比例 70%)
得分											

课程目标1 (3分)、课程目标3 (4分)、课程目标6 (3分)

一、判断题(正确打√号，错打×号，每题1分，共10分)

1. 设 P 和 Q 是命题公式。若 $P\wedge Q$ 是可满足的，则 Q 是可满足的。
2. 对于某个集合 A 和其幂集 $\rho(A)$，有可能 $A\in\rho(A)$ 和 $A\subseteq\rho(A)$ 同时成立。
3. 谓词公式 $\forall x P(x)\wedge\forall x Q(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 成立。
4. 集合 A={1，2，3}，则 A 上偏序关系的个数为 6 个。
5. 设函数 $f\circ f$ 是双射函数，则函数 f 不一定为双射函数。
6. 群的等幂元可能不止一个。
7. 对于一个 11 阶群 G，则群 G 只有平凡子群。
8. 6 个结点的简单无向图，每个结点度均为 2，则一定存在生成树。
9. 设 $\rho(A),\rho(B)$ 分别为集合 A, B 的幂集，则 $A=B\Leftrightarrow\rho(A)=\rho(B)$
10. 对于集合 A 上的二元关系 R，如果 R 同时满足对称性和反对称性，则 R 一定满足可传递性。

课程目标1 (3分)、课程目标2 (4分)、课程目标6 (3分)

二、填空题(每题1分，共10分)

1. 三个命题变元 P, Q, R 的极小项 m_3 为__________。
2. 设 P(x)：x 是人，Q(y)：y 是可取之处，H(x, y)：x 有 y，则命题“每个人都有一些可取之处”的符号化形式为__________。
3. 集合 A={1，2}，B={3，4}，求 $(A\oplus B)-(A\times B)=$ __________。
4. 假设集合 X 和 Y，满足 $|X|=3$，$|Y|=2$，则 X 到 Y 有__________个满射函数。
5. 如果 A={1, 2, 3}，关系 $R=I_A\cup\{<1,2>,<2,1>\}$，其中 I_A 为 A 上的恒等关系，则商集 A/R= __________。
6. 设〈G，*〉是一个群，若 a, x, y∈G 且 a*x = a*y，则 x= __________。
7. 集合 A 由含有三个命题变元 P、Q、R 的所有命题公式组成，T 为命题之间的等价关系，则商集 A/T 中元素个数为 __________。
8. 图 G 是 8 阶的连通无向加权图，其中边上的权值均为 4，则图 G 最小生成树的加权长度为 __________。
9. 对于实数集 R 上的函数 $f(x)=2x$，$g(x)=x+1$ 求 $(f\circ g)^{-1}(x)=$__________。
10. 一个连通无向图 G 是欧拉图的一个充分必要条件是图 G 中所有结点的度数均为______。

课程目标2(10分)、课程目标4(10分)、课程目标5(20分)

三、计算题(每题10分，共40分)

1. 用等价推导法求出命题公式 $\neg(P\to Q)\vee(Q\wedge(\neg P\to\neg R))$ 的主析取范式和主合取范式，并表示成∑和∏的形式，同时指出该公式是否为可满足式。
2. 设 X={1，2，3，6，8，18，24，27}，R 为 X 上的整除关系，则 R 为 X 上的偏序关系。

（1）试画出 R 的哈斯图。

（2）给出子集{2，3，6}的最大元和最小元、极大元和极小元、上界和下界、上确界和下确界（如果存在的话）。

3. 已知群 G = <{a, b, c, d}, *>运算表如图所示，

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

（1）求该群 G 的幺元，等幂元以及每个元素的逆元，运算*是否有可交换性。

（2）群 G 是否为循环群，如果是，给出 G 所有的生成元，并把每个元素表示成生成元幂的形式。

（3）群 G 有多少个子群，并给出群 G 所有的子群。

4. 某计算机中 5 条指令 A，B，C，D，E 出现的频度分别为：0.40，0.20，0.15，0.12，0.10

（1）构造一棵以上频度为叶子权值的最优二叉树（Huffman 树）；

（2）根据 Huffman 树，写出 5 条指令的最优编码。

课程目标3(10分)、课程目标4(20分)、课程目标5(10分)

四、证明题（每题10分，共40分）

1. 使用推理规则证明：每个考生或者勤奋或者聪明。所有勤奋的人都将有所作为。但并非所有考生都将有所作为。所以，有些考生是聪明的。【设 P(x)：x 是考生，Q(x)：x 将有所作为，R(x)：x 是勤奋的，S(x)：x 是聪明的】
2. <G，*>是一个可交换群，$H=\{x\mid x\in G, x^2=e\}$，e 为群 G 的幺元。定义 G 上的关系 R 如下：

$$R=\{<a, b>\mid a, b\in G \text{ 且 } a^{-1}*b\in H\}$$

证明：R 是 G 中的一个等价关系。【提示：群中 $x^2=e$ 等价于 $x=x^{-1}$】

3. 设<H，*>是群，定义函数 f：H→H，对任意的 a∈H，有 $f(a)=a^{-1}$。

证明：如果运算*可交换，则 f 是一个同构映射。

4. 对于一个 m (m>1)叉树 T，假设 T 中叶子结点的数目为 t，证明：T 中所有结点的数目 n 满足 $n\geq(mt-1)/(m-1)$。

判断题

1. √ 2. × 3. √ 4. √ 5. √ 6. √ 7. × 8. √ 9. × 10. ×

1. $\neg P \wedge Q \wedge R$

2. $\forall x (P(x) \to \exists y (Q(y) \wedge H(x, y)))$

3. $\{1, 2, 3, 4\}$

4. 6

5. $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$

6. y

7. 2

8. 28

9. $\frac{x-1}{2}$

10. 偏序.

三、1.

$\neg(P \to Q) \vee (Q \wedge (\neg P \to \neg R))$

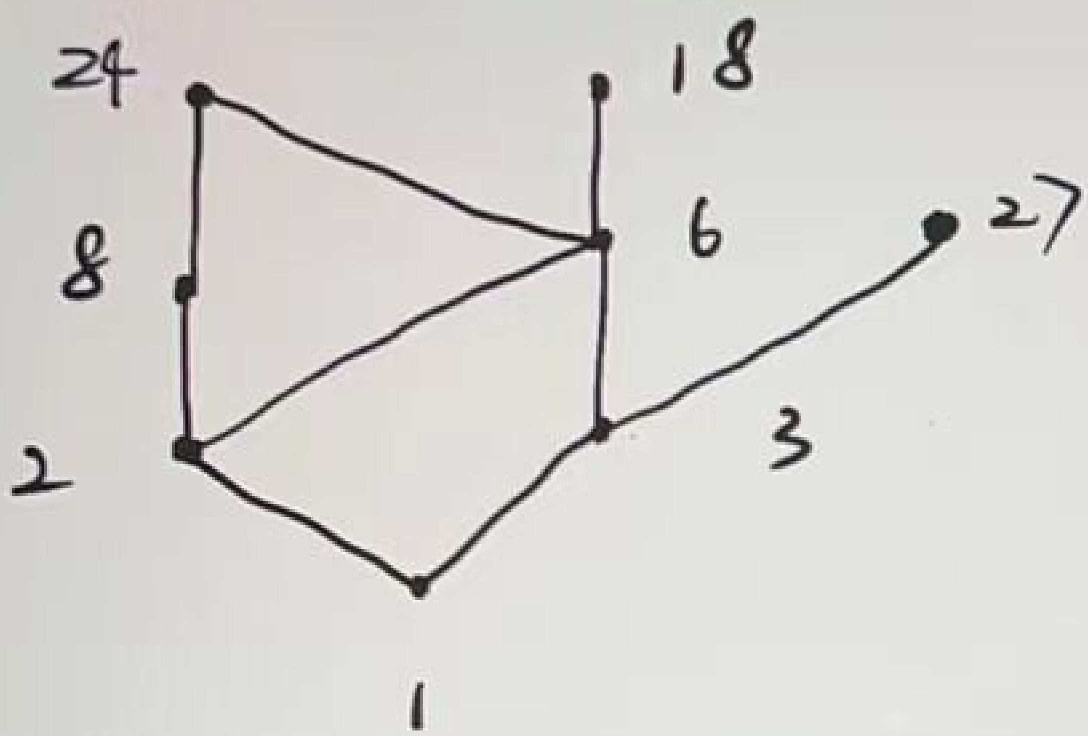
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$
$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

三、2

(1)



(2) 最大元：6　　最小元：无

极大元：6　　极小元：2、3

上界：6、18、24　　下界：1

上确界：6　　下确界：1

三、3

(1) 幺元：a

等幂元：a

逆元：$a^{-1}=a$，$b^{-1}=d$，$c^{-1}=c$，$d^{-1}=b$

具有可交换性，因为运算表关于主对角线对称。

(2) 是循环群，生成元为 b，d

$a=b^4$，$b=b$，$c=b^2$，$d=b^3$

$a=d^4$，$b=d^3$，$c=d^2$，$d=d$

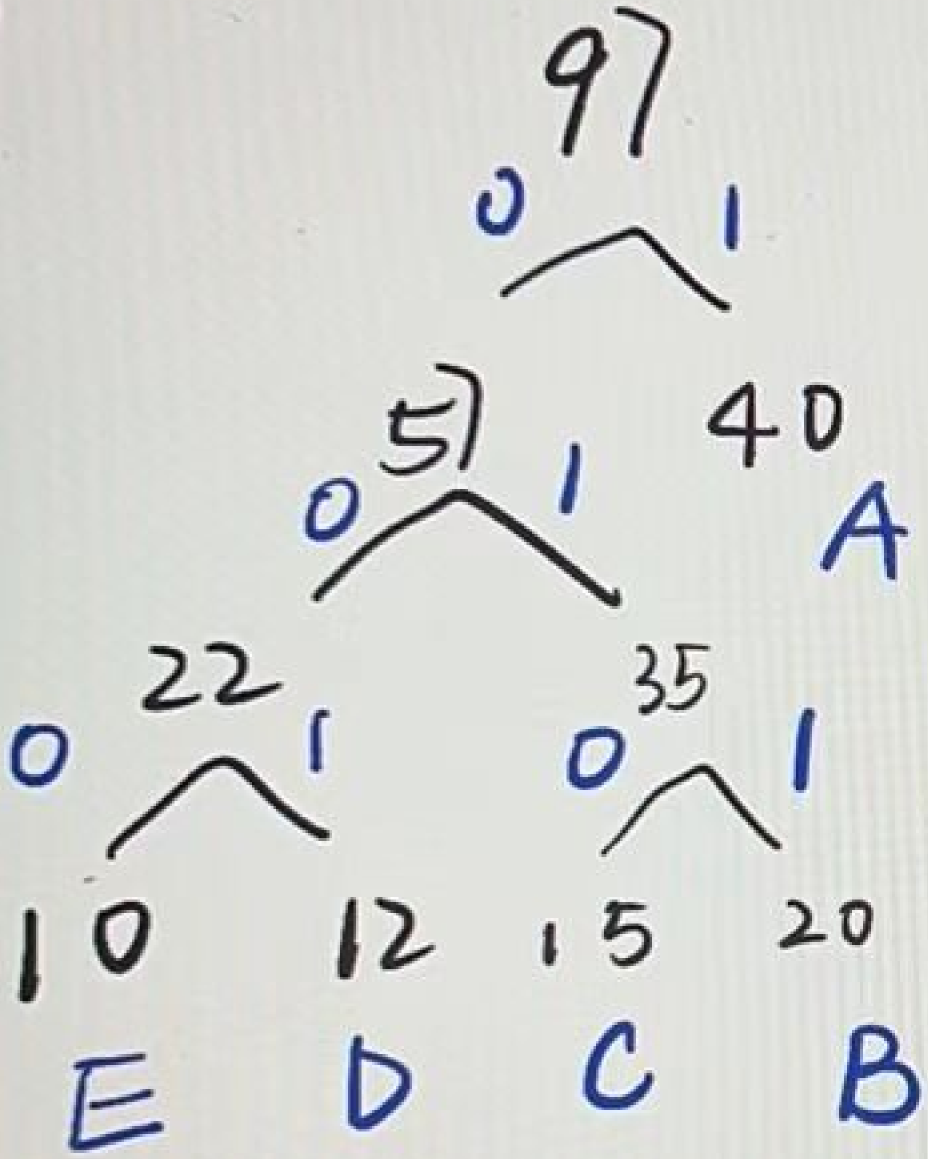
(3)

① $\{a, b, c, d\}$

② $\{a, d\}$

三、4

(1)



(2) A: 1

D: 001

B: 011

E: 000

C: 010

设 $P(e)$：e 是考生，$Q(e)$：e 将有所作为，$A(e)$：e 是勤奋的，$B(e)$：e 是聪明的，个体域：人的集合，则命题可符号化为：$x(P(x)\to(A(x)\vee B(x)))$，$x(A(x)\to Q(x))$，$\neg\ x(P(x)\to Q(x))\vdash\ x(P(x)\wedge B(x))$。

(1) $\neg\ x(P(x)\to Q(x))$　　P

(2) $\neg\ x(\neg P(x)\vee Q(x))$　　$T(1)$，E

(3) $x(P(x)\wedge\neg Q(x))$　　$T(2)$，E

(4) $P(a)\wedge\neg Q(a)$　　$T(3)$，ES

(5) $P(a)$　　$T(4)$，I

(6) $\neg Q(a)$　　$T(4)$，I

(7) $x(P(x)\to(A(x)\vee B(x))$　　P

四1

(8) $P(a)\to(A(a)\vee B(a))$　　$T(7)$，US

(9) $A(a)\vee B(a)$　　$T(8)(5)$，I

(10) $x(A(x)\to Q(x))$　　P

(11) $A(a)\to Q(a)$　　$T(10)$，US

(12) $\neg A(a)$　　$T(11)(6)$，I

(13) $B(a)$　　$T(12)(9)$，I

(14) $P(a)\wedge B(a)$　　$T(5)(13)$，I

(15) $x(P(x)\wedge B(x))$　　$T(14)$，EG

四 2.

①自反性：设 $\forall a \in G$，有 $a * a = e \in H$

$\Rightarrow \langle a, a \rangle \in R$

②对称性：设 $\forall \langle a, b \rangle \in R$，$\Rightarrow a^{-1} * b \in H$.

$\Rightarrow (a^{-1} * b)^{-1} \in H \Rightarrow b^{-1} * a \in H$

$\Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$

③传递性：设 $\forall \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in R$

$\Rightarrow a^{-1} * b \in H$ 且 $b^{-1} * c = H \Rightarrow a^{-1} * c \in H$

$\Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$

综上①②③得证.

四、3

①单射，设 $\forall a、b \in H$、若 $f(a)=f(b)$

$\Leftrightarrow a^{-1}=b^{-1} \Rightarrow a=b$

② 满射：设 $\forall b \in H$，$f(a)=b=a^{-1}$

$\Rightarrow a=b^{-1} \in H$

综上①② f 是双射.

③ $f(a) * f(b) = a^{-1} * b^{-1}$

$= b^{-1} * a^{-1}$

$= (a * b)^{-1}$

$= f(a * b)$

综上①②③得证.

四、4.

设分枝点数为 $= i$

所有点出度之和 $= mi$

所有点入度之和 $= t+i-1$

所有点度数之和 $= mi+t+i-1$

$= mn-mt+n-1$

根据握手定理

$$n \geq \frac{mt-1}{m-1}$$