第五节

对坐标的曲面积分

内容

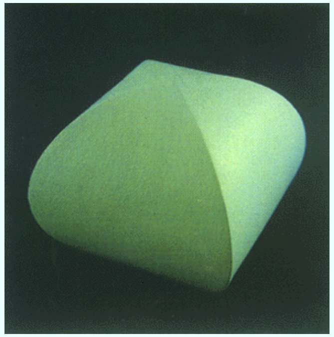
一、对坐标的曲面积分的定义、物理意义及性质

二、对坐标曲的面积分的计算方法

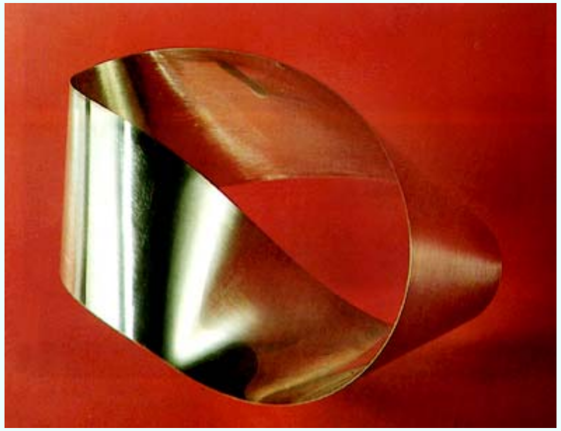
一、对坐标的曲面积分的定义、物理意义及性质

1有向曲面及投影

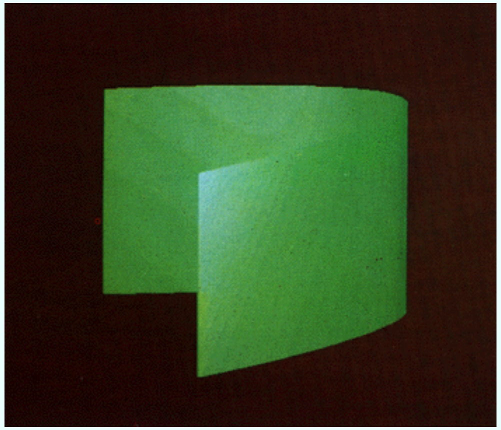
曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \quad \surd \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$



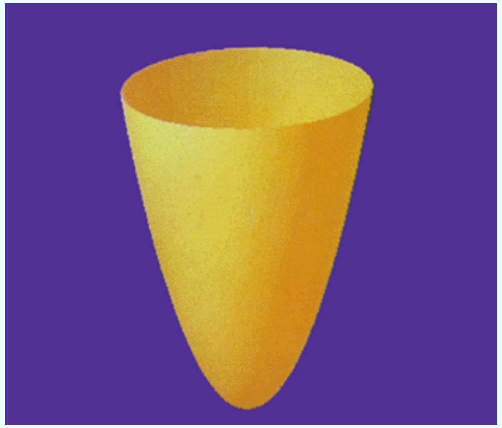
曲面分内侧和外侧



莫比乌斯带
(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

一、对坐标的曲面积分的定义, 物理意义及性质

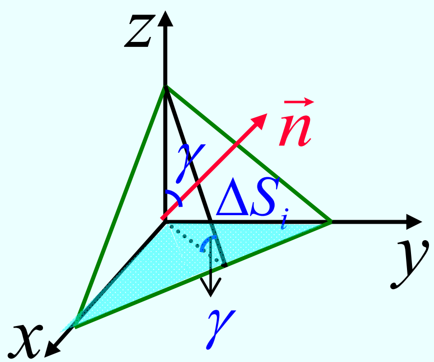
指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量的指向表示

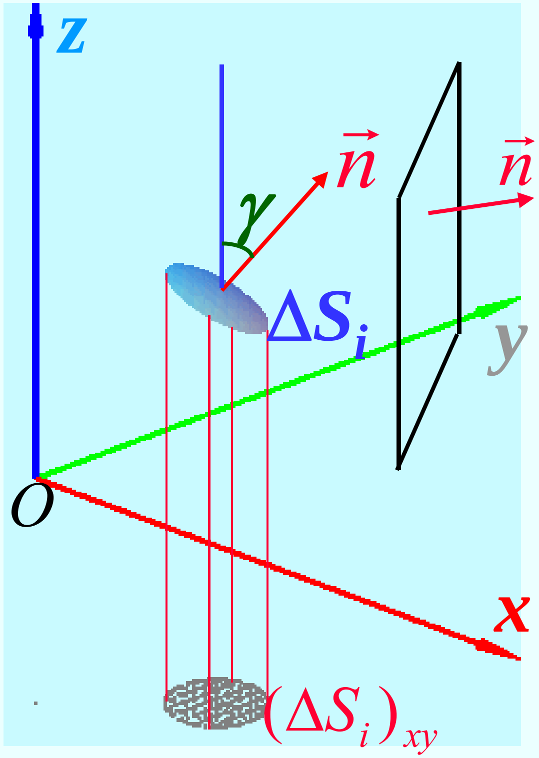
① $\Sigma: z = z(x, y)$ 如果取法向量 $\vec{n}$ 指向朝上, 认定曲面上侧

$$\begin{cases} z = z(x,y)\text{上侧；取}\vec{n}\text{指向上，} \cos(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{oz}}) = \cos\gamma > 0 \\ \qquad\qquad\ \text{下侧；}\qquad\quad\ \text{下，}\qquad\qquad\qquad\qquad\quad < 0 \end{cases}$$

有向投影

$$(\Delta S_i)_{xy} = \Delta S_i \cos\gamma = \begin{cases} (\Delta\sigma_i)_{xy}, & \cos\gamma > 0, \\ -(\Delta\sigma_i)_{xy}, & \cos\gamma < 0, \\ 0, & \cos\gamma \equiv 0. \end{cases}$$





② $\begin{cases} x = x(y,z)\text{前侧；取}\vec{n}\text{指向前，} \cos(\vec{n},\widehat{\vec{ox}}) = \cos\alpha > 0 \\ \qquad\qquad\text{后侧；}\qquad\quad\text{后，}\qquad\qquad\qquad\qquad < 0 \end{cases}$

有向投影

$$(\Delta S_i)_{yz} = \Delta S_i \cos\alpha = \begin{cases} (\Delta\sigma_i)_{yz}, & \cos\alpha > 0, \\ -(\Delta\sigma_i)_{yz}, & \cos\alpha < 0, \\ 0, & \cos\alpha \equiv 0. \end{cases}$$

---

③ $\begin{cases} y = y(x,z)\text{右侧；取}\vec{n}\text{指向右，} \cos(\vec{n},\widehat{\vec{oy}}) = \cos\beta > 0 \\ \qquad\qquad\text{左侧；}\qquad\quad\text{左，}\qquad\qquad\qquad\qquad < 0 \end{cases}$

有向投影

$$(\Delta S_i)_{xz} = \Delta S_i \cos\beta = \begin{cases} (\Delta\sigma_i)_{xz}, & \cos\beta > 0, \\ -(\Delta\sigma_i)_{xz}, & \cos\beta < 0, \\ 0, & \cos\beta \equiv 0. \end{cases}$$

---

④ Σ封闭 内外侧之分　例Σ：$x^2 + y^2 + z^2 = 1$外侧

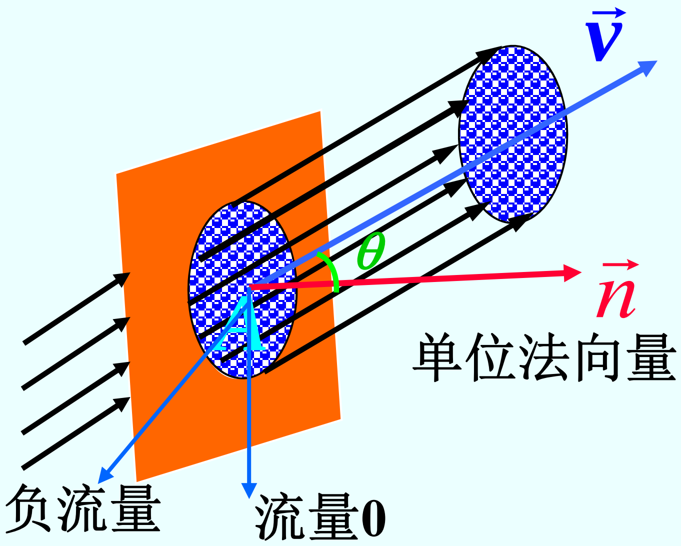
2 例子 ——流向曲面一侧的流量

设稳定流动(即流速与时间无关)的不可压缩流体(假定密度为1)的速度场为$v(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

Σ是速度场中的一片有向曲面,函数P,Q,R在Σ上连续,

求在单位时间内流过Σ指定侧的流体质量,即流量Φ

(1)流速场为$\boxed{\text{常向量}}$ $\vec{v}$,有向$\boxed{\text{平面区域}}$$A$, 求单位时间流过$A$的流体的质量$\Phi$



观察 底面积为A,斜高$|\vec{v}|$的斜柱体

当$(\widehat{\vec{v},\vec{n}})=\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $A|\vec{v}|\cos\theta=A\vec{v}\cdot\vec{n}$

$$\Rightarrow \Phi = A\vec{v}\cdot\vec{n}$$

当$(\widehat{\vec{v},\vec{n}})=\dfrac{\pi}{2}$, $\Phi=0 \Rightarrow \Phi = A\vec{v}\cdot\vec{n}$

当$(\widehat{\vec{v},\vec{n}})=\theta>\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \Phi = A\vec{v}\cdot\vec{n}$

$$\boxed{\Phi = A\vec{v}\cdot\vec{n}}$$

(2)变速且曲面

划分 $\Sigma:\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$; $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$, (第$i$小块曲面面积)

取点 $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Sigma_i$ 设 $\vec{n_i}=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$

$\Delta S_i\ \vec{v}_i\cdot\vec{n}_i$

$\Delta S_i\ [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)]\cdot[\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i]$

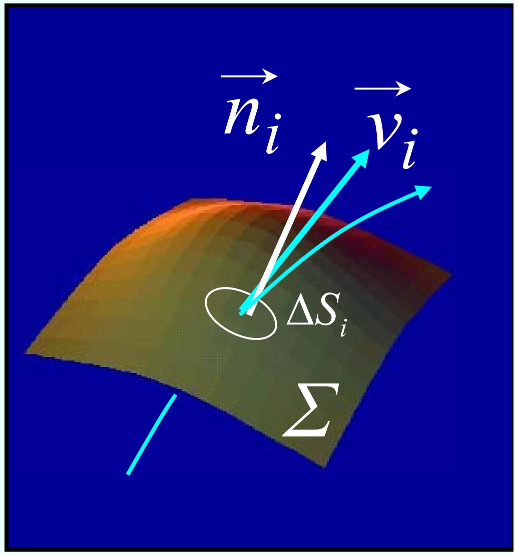
$$\Phi=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\underline{\cos\alpha_i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\underline{\cos\beta_i}\right.$$

$$\left.+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\underline{\cos\gamma_i}\ \right]\underline{\Delta S_i}$$ 有向投影

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\right.$$

$$+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$$\left.+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\right]$$



3定义 设Σ为光滑的有向曲面,函数P,Q,R在Σ上有界

把Σ划分, $\Delta S_i(i=1,\ldots,n)$， 设ΔS_i在xoy面上的投影为$(\Delta S_i)_{xy}$

在yoz面上的投影为$(\Delta S_i)_{yz}$，在xoz面上的投影为$(\Delta S_i)_{xz}$

$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$， 设$\lambda$为各小块曲面直径的最大值

若 $$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \overset{\text{存在}}{=} \iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

P在Σ上对坐标y,z的曲面积分

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} \overset{\text{存在}}{=} \iint_\Sigma Q(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Q在Σ上对坐标x,z的曲面积分

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[\, \underline{P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}} \\ \underline{+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}} \\ \underline{+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}}\,\Big]$$

3定义 设Σ为光滑有向曲面,函数P,Q,R在Σ上有界

把Σ划分, $\Delta S_i(i=1,\ldots,n)$, 设ΔS_i在xoy面上的投影为$(\Delta S_i)_{xy}$

在yoz面上的投影为$(\Delta S_i)_{yz}$, 在xoz面上的投影为$(\Delta S_i)_{xz}$

$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 设$\lambda$为各小块曲面直径的最大值

若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \overset{\text{存在}}{=} \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ **P在Σ上对坐标y,z的曲面积分**

$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} \overset{\text{存在}}{=} \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ **Q在Σ上对坐标x,z的曲面积分**

$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \overset{\text{存在}}{=} \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **R在Σ上对坐标x,y的曲面积分**

积分曲面 被积函数 或称第二类曲面积分

组合形式

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4物理意义:

设流体在空间流动,流速 $\vec{v}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

单位时间内流过光滑定向曲面Σ的体积,流量也称通量

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

5 性质 ①可加性 设$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$,则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

②反侧变号性 若Σ^-表示与Σ取相反侧的有向曲面,则

$$\iint_{\Sigma^-} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z;\quad \iint_{\Sigma^-} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x;$$

$$\iint_{\Sigma^-} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二、对坐标的曲面积分的计算法 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 二重积分

设积分曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$ 上侧, Σ 在 xoy 面上的投影域 D_{xy}

$z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上一阶连续偏导, $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R\underline{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)}\,\underline{(\Delta S_i)_{xy}}$$

$\because \Sigma$ 取上侧, $\cos\gamma > 0$ $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$

又因 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 Σ 上一点, $\therefore \zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$\therefore \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))(\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{上侧}$$

$$-\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{取下侧时}$$

1.直接法

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ上侧为正
下侧为负

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Σ前侧为正
后侧为负

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

Σ右侧为正
左侧为负

说明 计算对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，三个积分要分别计算

例如计算 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\underline{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$,

三替换

二代

一投

$$\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

把Σ表示成 $z=z(x,y)$

Σ在 xoy 面上投影 D_{xy}

Σ上侧为正
下侧为负

1.直接法

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ Σ上侧为正 下侧为负

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$ Σ前侧为正 后侧为负

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$ Σ右侧为正 左侧为负

口诀 一投,二代,三替换,曲面积分化为二重积分

一投 将曲面Σ投影到与面积元素(如dxdy)对应的坐标面(如xoy平面)上，得投影区域

二代 将曲面Σ的方程代入被积函数中

三替换（定号） 由曲面Σ的侧确定正负号

例1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 其中Σ是长方体Ω的整个表面的外侧, $\Omega = \{(x,y,z)\,|\,0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$

解: $\Sigma_1: z = c(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$上侧

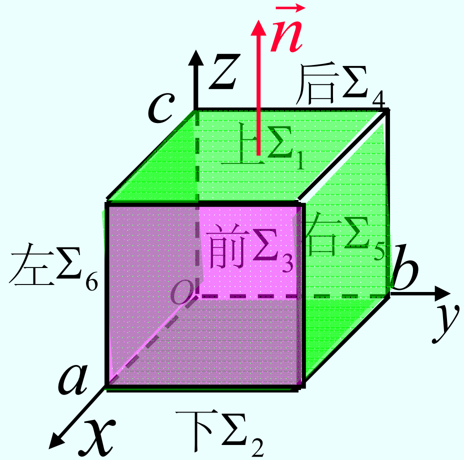
$\Sigma_2: z = 0(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$下侧

$\Sigma_3: x = a(0 \le y \le b, 0 \le z \le c)$前侧

$\Sigma_4: x = 0(0 \le y \le b, 0 \le z \le c)$后侧

$\Sigma_5: y = b(0 \le x \le a, 0 \le z \le c)$右侧

$\Sigma_6: y = 0(0 \le x \le a, 0 \le z \le c)$左侧



$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma_4} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\overset{+}{=} \iint\limits_{\substack{0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c}} a^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{\substack{0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c}} 0^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = a^2bc$$

类似的

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = ab^2c$$

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc^2$$

$\therefore$ 所求积分为$(a+b+c)\cdot abc$

例2. $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \Sigma: x^2+y^2+z^2=1$外侧

换成

$$I=\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

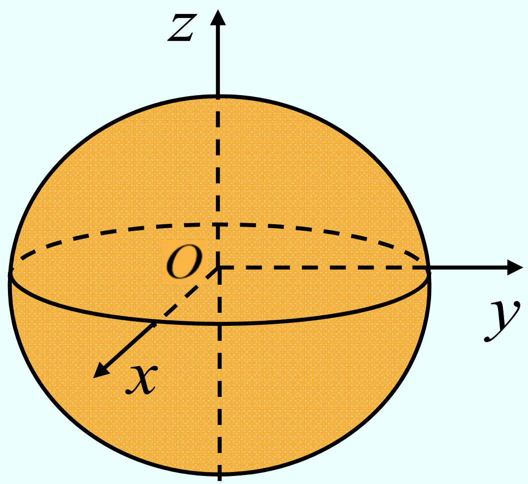
解

$\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧

$\Sigma_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 下侧

原式$=\iint_{x^2+y^2\le1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{x^2+y^2\le1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=0$



原式$=\iint_{x^2+y^2\le1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

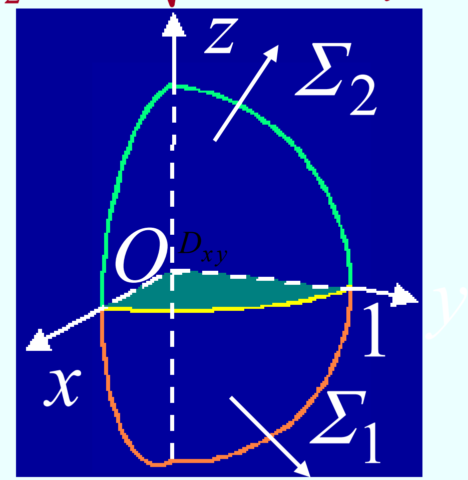
$-\iint_{x^2+y^2\le1}-\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$

$=\frac{4}{3}\pi$

例3. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在第一和第五卦限部分.

$\Sigma_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



$\Sigma_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

思考: 下述解法是否正确:

根据对称性 $\iint_{\Sigma} xyz\,\cancel{\mathrm{d}}x\,\mathrm{d}y=0$

解:

$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}$$

两类曲面积分的关系

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \underline{R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + \underline{R\cos\gamma})\,\mathrm{d}S$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是有向曲面$\Sigma$上点$(x, y, z)$处法向量的方向余弦

证明：$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \overset{\text{上侧}}{\underset{\text{下侧}}{=\!=}} \underline{\pm}\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

相等

方向余弦 $\Sigma: z = z(x, y) \Rightarrow F(x, y, z) = z - z(x, y)$

$$\Rightarrow \vec{n} = (\underline{\mp} z_x, \underline{\mp} z_y, \underline{\pm}1) \Big/ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\boxed{\cos\gamma\,\mathrm{d}S} = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y)) \frac{\underline{\pm}1}{\cancel{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

类似可得 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\boxed{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)\boxed{\cos\alpha\,\mathrm{d}S}$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\boxed{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x} = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\boxed{\cos\beta\,\mathrm{d}S}$$

2.公式法

记住 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

将含有其他变量的对坐标曲面积分化为含“dxdy”的形式

证明：$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \xlongequal[\text{下侧}]{\text{上侧}} \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

相等

方向余弦 $\Sigma: z=z(x,y) \Rightarrow F(x,y,z)=z-z(x,y)$

$$\Rightarrow \vec{n}=(\mp z_x,\mp z_y,\pm 1)\Big/\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\boxed{\cos\gamma\,\mathrm{d}S}=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\frac{\pm 1}{\cancel{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}}\cdot\cancel{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

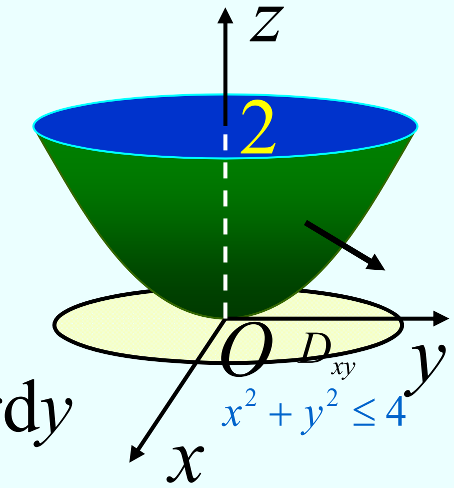
类似可得 $$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\boxed{\cos\alpha\,\mathrm{d}S}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}=\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\boxed{\cos\beta\,\mathrm{d}S}$$

例4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中Σ是旋转抛物面

$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧

解: 利用公式法



$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$原式=\iint\limits_{\Sigma}\left[(z^2+x)(-x)-z\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$F(x,y,z)$

$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z$

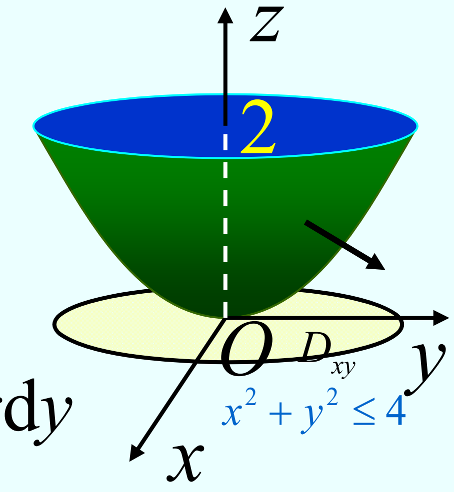
$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$=\dfrac{(x,y,-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

例4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中Σ是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面$z=0$及 $z=2$之间部分的下侧

解:利用公式法



$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\underline{\cos\gamma\,\mathrm{d}S}=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[\tfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x](-x)-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

对称性

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[x^2+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\rho^2\cos^2\theta+\tfrac{1}{2}\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=8\pi$$

例5. 把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成对面积的曲面积分

(1) Σ是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分上侧

(2) Σ是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xoy 面上方的部分上侧

解: (1) $\vec{n}=(3,2,2\sqrt{3})$ $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{9+4+12}}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{5}$, $\cos\gamma=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S$$

---

(2) $F(x,y,z)=(x^2+y^2)+z-8$ $\quad\vec{n}=(2x,2y,1)$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \qquad \text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$$

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

3.点矢法 (假定Σ在xoy投影是区域,否则不能用)

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\pm}\iint_{D_{xy}} (P,Q,R)\bullet(-z_x,-z_y,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上侧+,下侧 −

推导 $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$

$$= \iint_{\Sigma} (P,Q,R)\bullet(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} (P,Q,R)\bullet(\mp z_x,\mp z_y,\underline{\pm}1)\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,\mathrm{d}S \quad \text{再化二重积分}$$

$$= \underline{\pm}\iint_{D_{xy}} (P,Q,R)\bullet(-z_x,-z_y,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方向余弦 $\Sigma: z = z(x,y) \Rightarrow F(x,y,z) = z - z(x,y)$ 上侧

$\Rightarrow \vec{n} = (\mp z_x,\mp z_y,\underline{\pm}1)\Big/\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 下侧

例6 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$

被z=1,z=2截出部分下侧

注:把Σ写成z=z(x,y)的形式

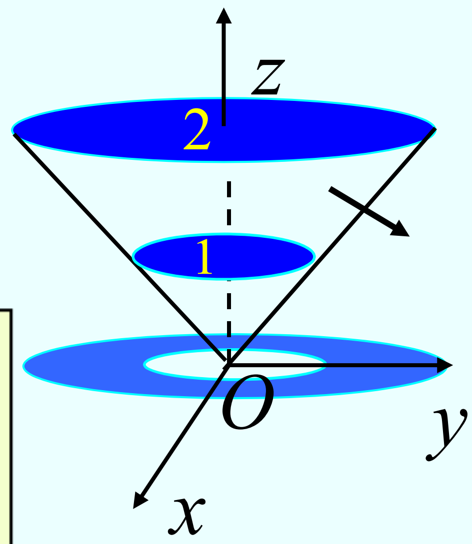
解:利用点矢法

在xoy面的投影域 $1\le x^2+y^2\le 4$ $\quad z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}[y,-x,(x^2+y^2)]\bullet(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{15}{2}\pi$$



3.点矢法 (假定Σ在xoy投影是区域,否则不能用)

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}(P,Q,R)\bullet(-z_x,-z_y,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上侧+,下侧−

上例4 计算 $I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面$z=0$及 $z=2$之间部分的下侧

解:利用点矢法

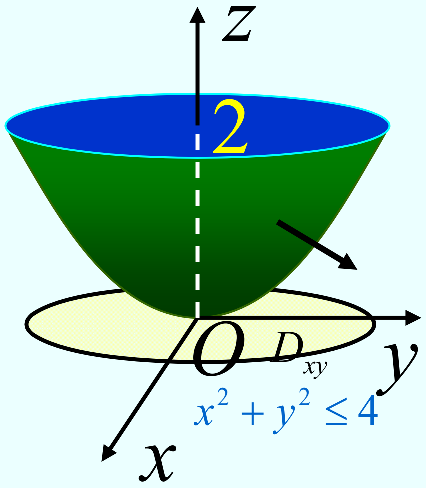
在xoy面的投影域 $x^2+y^2\le 4$

$$I=-\iint_{x^2+y^2\le 4}[\tfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x,\ 0,\ -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)]\bullet(-x,\ -y,\ 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{x^2+y^2\le 4}\{[\tfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x](-x)-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对称性

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\left[x^2+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi$$



3.点矢法 (假定Σ在xoy投影是区域,否则不能用)

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}(P,Q,R)\bullet(-z_x,-z_y,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上侧+,下侧−

4.利用曲面与坐标面的垂直性简化计算

①当Σ垂直于xoy平面时,其单位法向量的方向余弦$\cos\gamma=0$

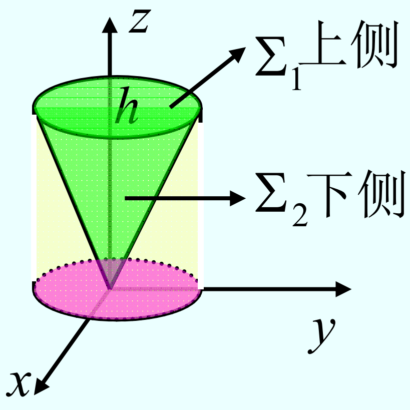
$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S=0$$

②当Σ垂直于yoz平面时,$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

③当Σ垂直于xoz平面时,$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0$

例7 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中Σ为圆锥面$x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$ 的外侧表面



解: $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$

由于Σ_1垂直xoz,yoz,

对称性

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

Σ_2上用点矢法 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}=-\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}\left(y-\sqrt{x^2+y^2},\sqrt{x^2+y^2}-x,\ x-y\right)\bullet\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对称性

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}2(x-y)\,\mathrm{d}\,x\mathrm{d}y=0$$

故I=0