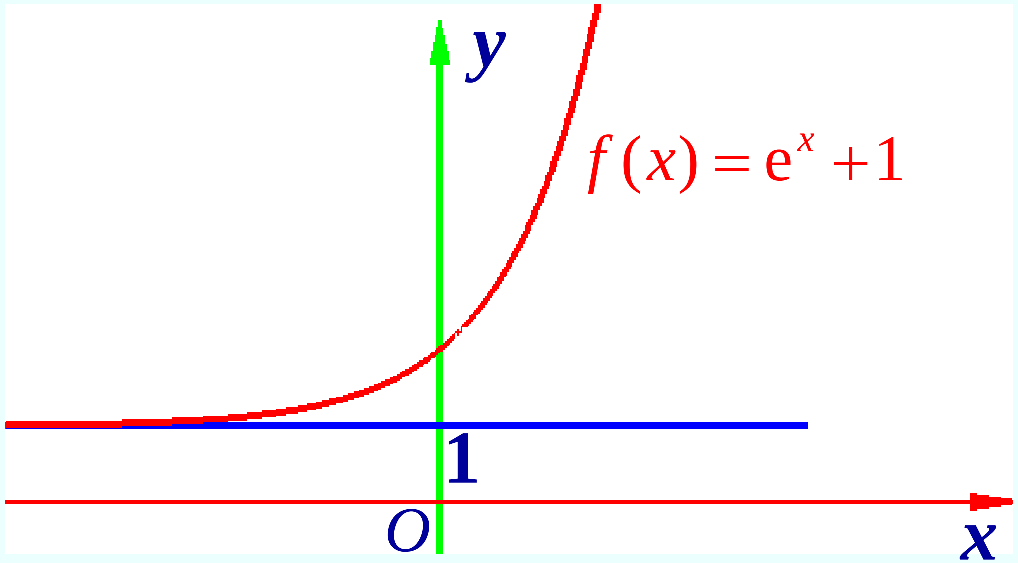
一、渐近线

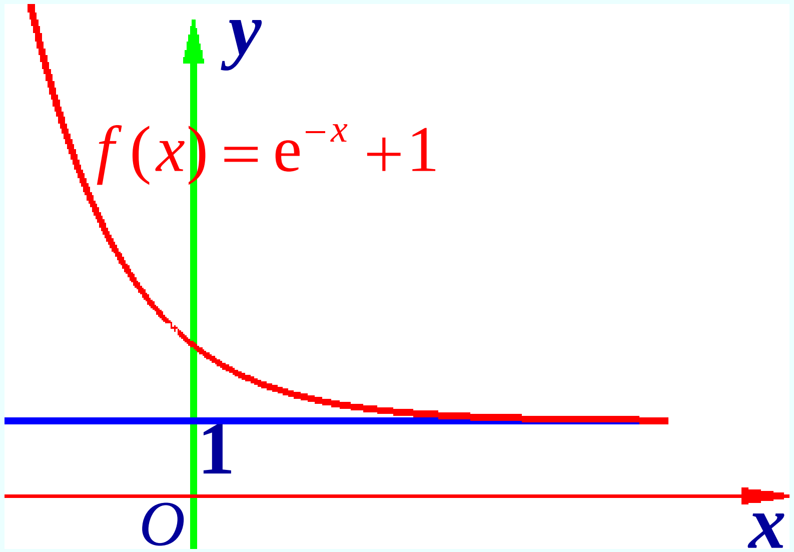
$$\text{渐近线}\begin{cases}\text{水平渐近线}\\ \text{垂直渐近线}\\ \text{斜渐近线}\end{cases}$$

1. 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,

则 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

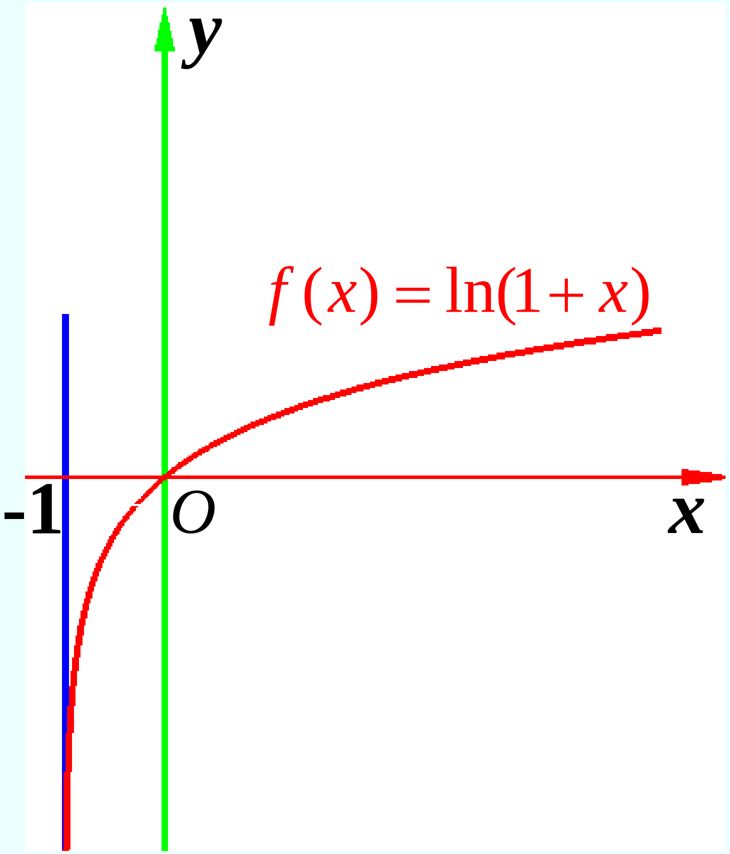


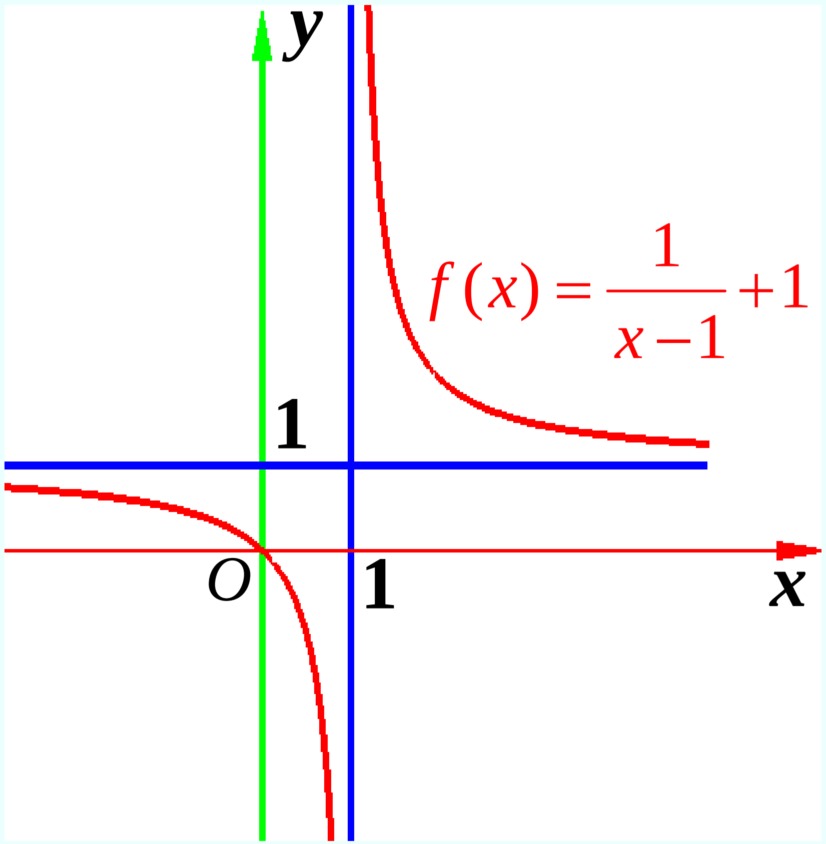


2. 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$，

则 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的**铅直渐近线**.





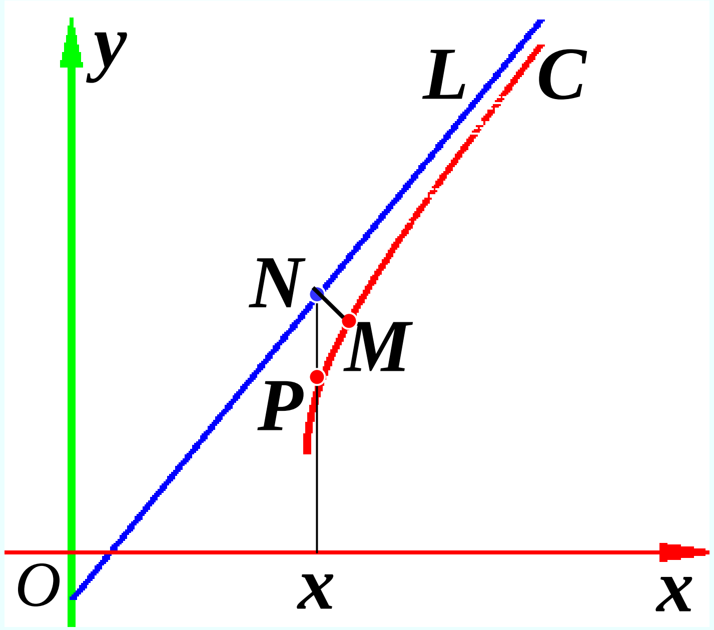
3. 斜渐近线

设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，

直线 L 的方程为 $y=ax+b\ (a\neq 0)$.

则直线 L 是曲线 C 的斜渐近线的

的充要条件为



$$\lim_{x\to\infty} MN=0 \iff \lim_{x\to\infty} NP=0 \iff \lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

$$\Rightarrow\quad a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

二、绘图步骤

Step1 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域及某些几何特性(如奇偶性、周期性)，求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ ；

Step2 求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点及它们不存在的点， 并用它们把定义域分成几个部分区间；

Step3 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值与拐点；

Step4 确定函数图形的水平、铅直及斜渐近线；

Step5 确定函数极值点、拐点在图形上的位置，必要时再在图形上补作几个点， 然后结合Step1、Step2中得到的结果，连接这些点画出图形.

例 $y=(\frac{1+x}{1-x})^2$

解: ①. $x\neq 1$

②. $y'=2(\frac{1+x}{1-x})\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=4\frac{1+x}{(1-x)^3}$

$$y''=4\frac{(1-x)^3+(1-x)\cdot 3(1-x)^2}{(1-x)^6}=4\frac{1-x+3(1+x)}{(1-x)^4}$$

$$=8\frac{x+2}{(1-x)^4}$$

令$y'=0, y''=0$, 得$x_1=-2, x_2=-1, x_3=1$

③	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	不存在	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
y		拐点		极小值			

④.渐近线

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \qquad x=1.\text{铅直}$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=1 \qquad y=1.\text{水平}$$

⑤ 求特殊点的函数值:

$f(-2)=\dfrac{1}{9}$, $f(0)=1$

$f(-1)=0$, $f(-3)=\dfrac{1}{4}$

$f(2)=9$