第五章

定积分

§1 定积分的概念与性质

§2 微积分基本公式

§3 定积分的换元法和分部积分法

§4 反常积分

第五章

第二节

微积分基本公式

内容

一、引例

二、积分上限函数的定义及导数

三、典型题

一、引例

设一物体作变速直线运动，其速度函数为 $v(t)$，位置函数为 $s(t)$，求物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程.

路程 s 可以用两种方法计算：

用速度函数计算：$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$;

第一节问题2

用位置函数计算：$s=s(T_2)-s(T_1)$.

于是有 $$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t=s(T_2)-s(T_1),$$

在这里 $s'(t)=v(t)$，即 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数.

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1)$$

上式说明：定积分 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$ 等于被积函数 $v(t)$ 在积分区间 $[T_1, T_2]$ 上的一个原函数 $s(t)$ 在积分区间上的增量.

那么这一结论具不具有普遍性呢？

即若设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，是否也有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

这就是本节要研究的问题.

二、积分上限函数的定义及导数

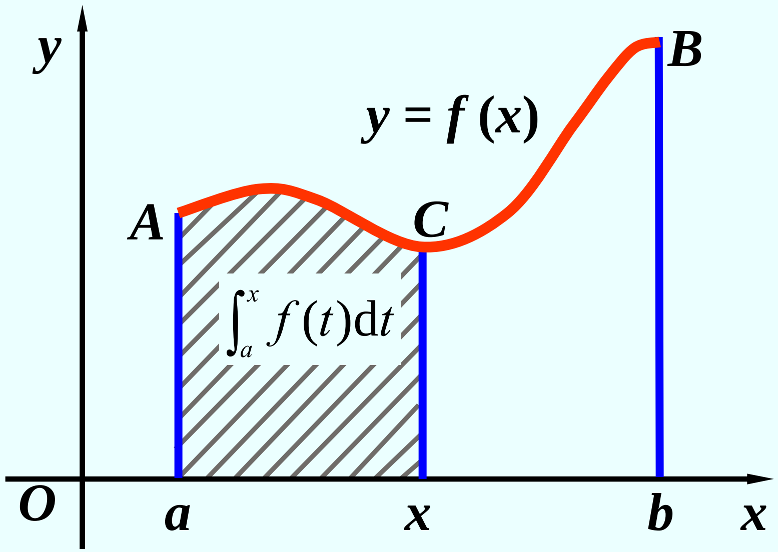
如果 x 是区间 $[a, b]$上任意一点, 定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 表示曲线$y=f(x)$在部分区间$[a,x]$上曲边梯形的面积，当 x 在区间$[a, b]$上变化时,阴影部分面积也随之变化，所以 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是变量 x 的函数.

1. 定义

设$f(x)$是$[a, b]$上的连续函数,称

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b).$$

为积分上限函数



注：x与t含义不同

定理1 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导,

且$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),x\in[a,b]$$

定理 1 证明了连续函数的原函数是存在的(定理2)，同时为通过原函数计算出定积分开辟了道路(定理3)．

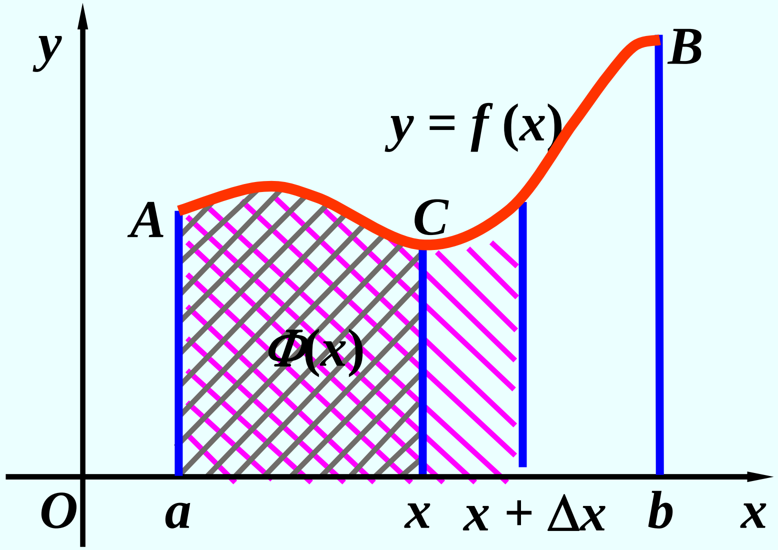
证 $$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$$



定理2.(原函数存在定理)

若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

定理3.(微积分基本公式)

设$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b$$ (牛顿-莱布尼茨公式)

证: $F'(x)=f(x)=\Phi'(x)$

$$\Phi(x)=F(x)+c$$

$$0=\Phi(a)=F(a)+c \Rightarrow c=-F(a)$$

$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)=F(x)-F(a)$ 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

定理2.(原函数存在定理)

若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

定理3.(微积分基本公式)

设$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$ (牛顿-莱布尼茨公式)

说明 1)连续函数求定积分直接利用牛顿莱布尼茨公式,

2)分段函数求定积分可在每个连续区间上分别计算定积分,然后相加

2 积分变限函数基本求导公式

① $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$; $\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$;

② $\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$; $\left(\int_{\psi(x)}^b f(t)\mathrm{d}t\right)' = -f(\psi(x))\psi'(x)$;

③ $\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) - f(\psi(x))\,\psi'(x)$.

④ $$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)g(x)\mathrm{d}t\right)' = \left(g(x)\cdot\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'$$

$$= g'(x)\cdot\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t + g(x)\cdot\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'$$

⑤ $$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\pm g(x)\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' \pm \left(g(x)[\varphi(x)-\psi(x)]\right)'$$

三、典型题

1. 求定积分

例1 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

解: 原式$= 2\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{(1+x)} = 2\arctan\sqrt{x}\,\Big|_1^2 = 2\arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$

例2 设函数$f(x)=\begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 2x & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ 求$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$

解: $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2x\mathrm{d}x$

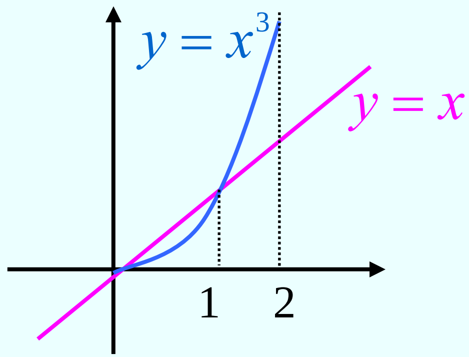
$$= -\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + x^2\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -(0-1) + \pi^2 - \tfrac{\pi^2}{4} = 1 + \tfrac{3}{4}\pi^2$$

三、典型题

1. 求定积分

例3 $\int_0^2 \max\{x, x^3\}\mathrm{d}x$



解: 原式 $=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$$=\tfrac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\tfrac{1}{4}x^4\Big|_1^2=\frac{17}{4}$$

例4 (定积分定义) 已知 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$

解: 设 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=A$ 　则 $f(x)=x^2-Ax$

两边取积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 (x^2-Ax)\mathrm{d}x$

$$A=\frac{8}{3}-2A\Rightarrow A=\frac{8}{9}\quad \therefore f(x)=x^2-\frac{8}{9}x$$

2. 与积分变限函数相结合的题目

①与导数结合

例1 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^3}^{5}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\bigg|_{x=1}$

解: 原式$=-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^6}}\cdot 3x^2\bigg|_{x=1}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

例2 $\left(\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^2\,\mathrm{d}t\right)'$

解: 原式$=\cos x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\cos\dfrac{1}{x^2}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})$

②与求极限结合

例1 设 $f'(x)$ 连续, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$

解: 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)\cdot 2\cancel{x}}{2\cancel{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^{\cancel{2}} f(x)}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt + xf(x)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{2xf'(x^2)}{2f(x)+f(x)+xf'(x)}$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{f'(x^2)}{3\frac{f(x)}{x}+f'(x)} = 4\frac{f'(0)}{3f'(0)+f'(0)} = 1$$

②与求极限结合

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$

解: 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} e^{-\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2e}$$

③与单调性结合

例　设$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续,且**f(x)>0**,证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$ 在$[0,+\infty)$内为单调增函数

证: $$F'(x)=\frac{x f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\boxed{\int_0^x \underset{>0}{(x-t)}\,\underset{>0}{f(t)}\mathrm{d}t}}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

由$0<t<x$, $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0$, $F'(x)>0\,(x>0)$

$\therefore F(x)$为单调增函数

④与分段函数相结合

例 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le 1\\ x & 1<x\le 2\\ 2 & x>2\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_0^x \boxed{f(t)}\,\mathrm{d}t$

解 当 $x<0$ 时 没有定义

当 $0\le x\le 1$ 时 $F(x)=\int_0^{\overset{\le 1}{x}} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t=1-\cos x$

当 $1<x\le 2$ 时 $F(x)=\int_0^{\overset{1<\ \le 2}{x}} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \sin t\,\mathrm{d}t+\int_1^x t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-\cos 1$

当 $x>2$ 时 $F(x)=\int_0^{\overset{>2}{x}} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \sin t\,\mathrm{d}t+\int_1^2 t\,\mathrm{d}t+\int_2^x 2\,\mathrm{d}t=2x-\frac{3}{2}-\cos 1$

$$F(x)=\begin{cases}1-\cos x & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-\cos 1 & 1<x\le 2\\ 2x-\frac{3}{2}-\cos 1 & x>2\end{cases}$$

④与分段函数相结合

练习 设$x \geq -1$, 则$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t = ?$

解 当$-1 \leq x \leq 0$时 $\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

当$x > 0$时 $\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t = \begin{cases} x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 & x > 0 \end{cases}$$

⑤与凹凸性结合

例 设 $\varphi(t)$是正值连续函数, $f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t,$

$-a\le x\le a\ \ (a>0)$则曲线$y=f(x)$在$[-a,a]$上是凹的

证 $f(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

$$=x\int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_{-a}^{x}t\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}t\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=\int_{-a}^{x}\varphi(t)dt+\cancel{x\varphi(x)}-\cancel{x\varphi(x)}-\cancel{x\varphi(x)}-[\int_{x}^{a}\varphi(t)dt-\cancel{x\varphi(x)}]$$

$$=\int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$f''(x)=\varphi(x)-(-\varphi(x))=2\varphi(x)>0$$

所以$f(x)$在$[-a,a]$上是凹的