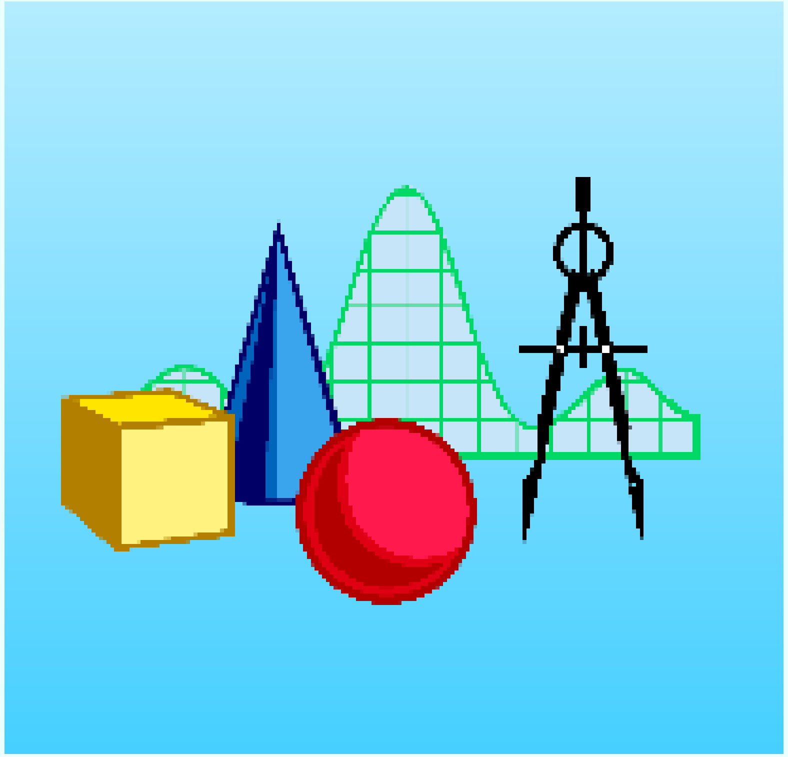
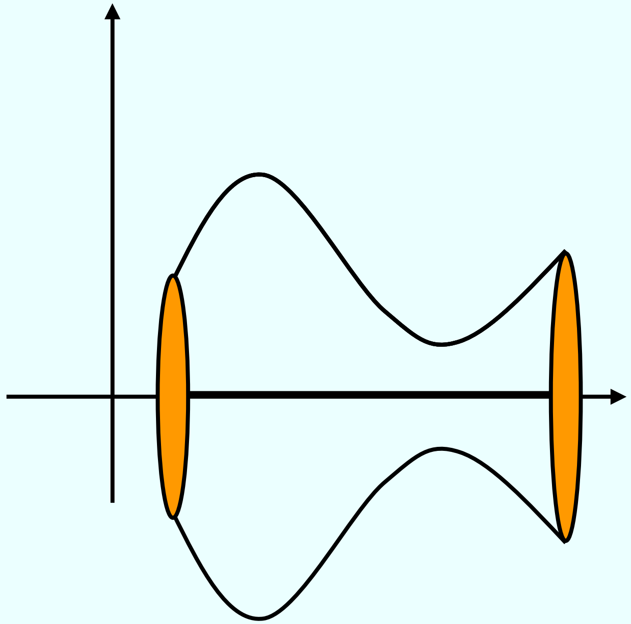
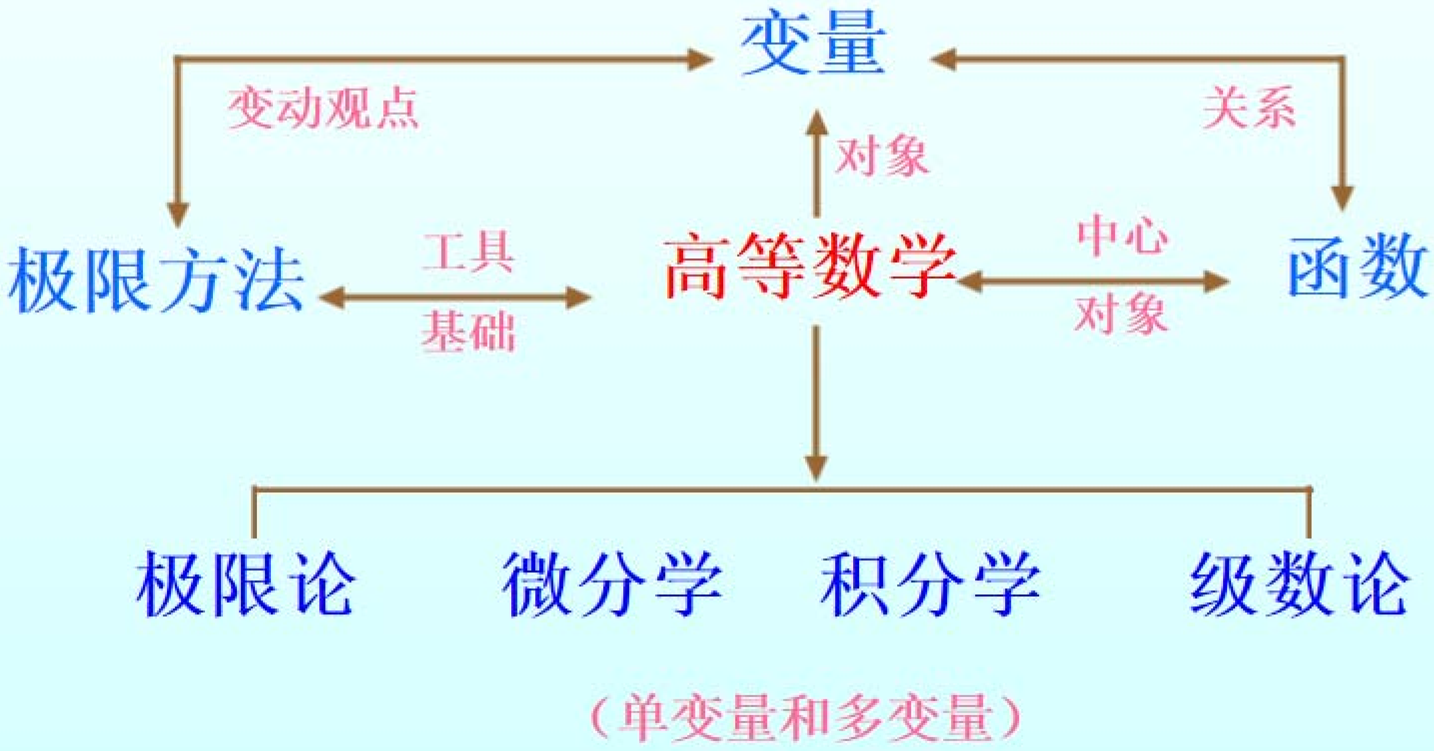




高等数学



第一章

- 第一章 函数与极限
- §1 映射与函数 ← 函数的简单性质
- §2 数列的极限
- §3 函数的极限

  极限的概念
- §4 无穷小与无穷大
- §5 极限运算法则
- §6 极限存在准则 两个重要极限
- §7 无穷小的比较

  求极限的方法
- §8 函数的连续性与间断点
- §9 连续函数的运算与初等函数的
- §10 闭区间上连续函数的性质

  函数的连续性

第一节

映射与函数

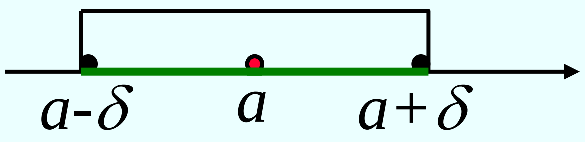
一、预备知识

二、函数

一、 预备知识

常用符号 $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\exists$

点a的δ邻域 表示与点a距离小于δ的一切点x的全体



$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

点a的去心 δ邻域 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$

左 δ邻域：$(a-\delta,a)$， 右 δ邻域：$(a,a+\delta)$.

其中, a 称为邻域中心，δ称为邻域半径 .

二、函数

1. 函数概念

①定义 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数 , 记为 $y = f(x),\ x \in D$

定义域

因变量

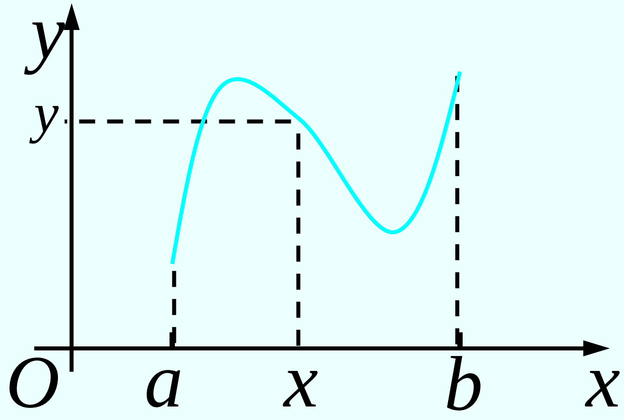
自变量

$$R_f = f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

称为值域

函数图形:

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$



$(D = [a, b])$

$$\forall x \in D \xmapsto{\ f\ } y \in R_f = f(D) = \{ y \mid y = f(x), x \in D \}$$

(定义域) (对应规则) (值域)

说明: 函数两个要素：定义域、对应规则

两个函数相同$\Leftrightarrow$定义域、对应规则相同

例1 $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$

不同定义域，所以不同

②函数记号 $f \,/\, f(x), x \in D \,/\, y = f(x), x \in D$

或 $y = f(x) / g(x) / F(x) / G(x) / \varphi(x) / \psi(x) / y(x)$

③典型题

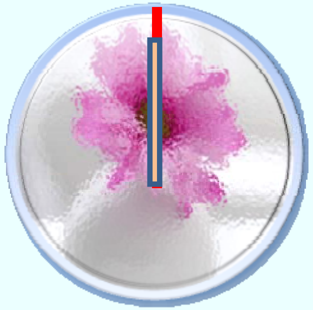
求具体函数的定义域：应求使函数有意义的*x*的范围

i) $y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ 则 $\varphi(x)\neq 0$

ii) $y=\sqrt[n]{\varphi(x)}, n$为偶数，则 $\varphi(x)\geq 0$

iii) $y=\log_a \varphi(x)$，则 $\varphi(x)>0$

iv) $y=\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$ 则 $|\varphi(x)|\leq 1$



③典型题

求具体函数的定义域：应求使函数有意义的**x**的范围

例2求函数 $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$ 的定义域

$$[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$$

例3求函数 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域

$$(-\infty,0)\cup(0,3]$$

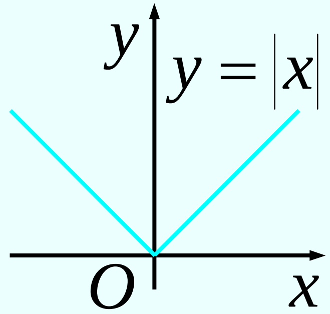
④特殊函数

i)单值函数　每个**x**对应唯一**y**

多值函数　每个**x**，多个**y**

附加条件

ii)绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



分段函数　自变量不同变化范围，对应法则用不同式子来表示的函数

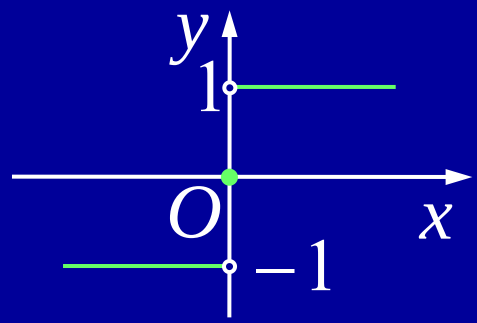
但是有些分段函数也可用一个式子表达

$$y=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$y=|x|=\sqrt{x^2}$$

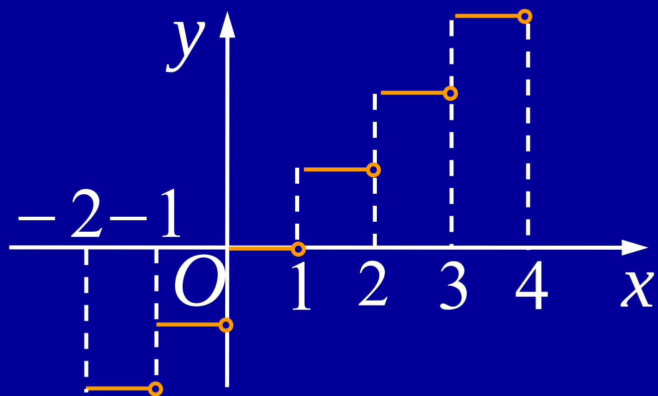
iii）符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ 0, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$$



iV）取整函数

$$y = [x] = n,\ 当\ n \le x < n+1,\ n \in \mathbf{Z}$$



2. 函数的几种特性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

(1) 有界性

如果存在数$\boldsymbol{k_1}$,$\boldsymbol{k_2}$, $\forall x \in I$,恒有 $f(x) \le k_1 (f(x) \ge k_2)$

称 $f(x)$ 在I上有上界（下界）

如果 $\exists M > 0$, $\forall x \in I$, $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 在I上有界

否则称在 I 上无界

说明 $f(x)$在I上既有上界又有下界$\Leftrightarrow$ $f(x)$有界

$$f(x) \le k_1, f(x) \ge k_2 \quad \text{取} \quad M = \max\{|k_1|, |k_2|\}$$

$$-M \le f(x) \le M \qquad \text{即} \quad |f(x)| \le M$$

2. 函数的几种特性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

(1) 有界性

如果存在数$\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2}$, $\forall x \in I$, 恒有 $f(x) \le k_1$ ($f(x) \ge k_2$)

称 $f(x)$ 在$\boldsymbol{I}$上有上界（下界）

如果 $\exists M > 0$, $\forall x \in I$, $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 在$\boldsymbol{I}$上有界

否则称在 $\boldsymbol{I}$ 上无界

几何意义

$y = k_1, y = k_2$ 使曲线$\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$夹在直线

$y = k_1, y = k_2$ 之间，否则就是无界

2. 函数的几种特性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

(1) 有界性

如果存在数$\boldsymbol{k_1}$,$\boldsymbol{k_2}$, $\forall x \in I$, 恒有 $f(x) \le k_1$ ($f(x) \ge k_2$)

称 $f(x)$ 在$\boldsymbol{I}$上有上界（下界）

如果 $\exists M > 0$, $\forall x \in I$, $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 在$\boldsymbol{I}$上有界

否则称在 $\boldsymbol{I}$ 上无界 怎么证

例4 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界

$y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 有界, 在 $(0,1)$ 无界

2. 函数的几种特性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

(1) 有界性

如果存在数$\boldsymbol{k_1, k_2}$, $\forall\, x \in I$, 恒有 $f(x) \le k_1\,(f(x) \ge k_2)$

称 $f(x)$ 在$\boldsymbol{I}$上有上界（下界）

如果 $\exists M > 0$, $\forall\, x \in I$, $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 在$\boldsymbol{I}$上有界

否则称在 $\boldsymbol{I}$ 上无界 怎么证

例5 $y = x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$是否有界

证: $\forall M > 0$, $\exists x = 2k\pi$,

$$当|k| > \frac{M}{2\pi}, |y| = |2k\pi| > M, 无界$$

2. 函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$, 且有区间 $I\subset D$.

(2) 单调性

$\forall x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2$时,

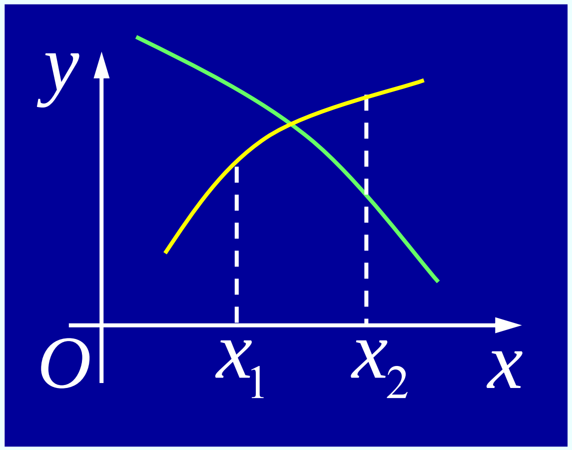
若 $f(x_1)<f(x_2)$, 称 $f(x)$为 $\boldsymbol{I}$ 上的单调增函数 ;

若 $f(x_1)>f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{I}$ 上的单调减函数 .

例6 $y=x^2$在$(0,+\infty)$单调增加

$(-\infty,0)$单调减少

$(-\infty,+\infty)$不是单调的

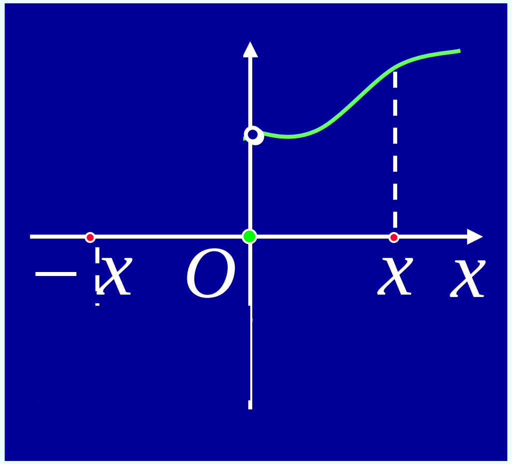


(3) 奇偶性

$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;

若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.



从图像上看，偶函数关于y轴对称，奇函数关于原点对称

例7 $y = x^2, \cos x$ $\qquad$ $y = x^3, \sin x$ $\qquad$ $y = x^2 + \sin x$

偶函数 $\qquad$ 奇函数 $\qquad$ 非奇非偶

常见的奇函数 $\quad \ln(\sec x - \tan x) \qquad \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

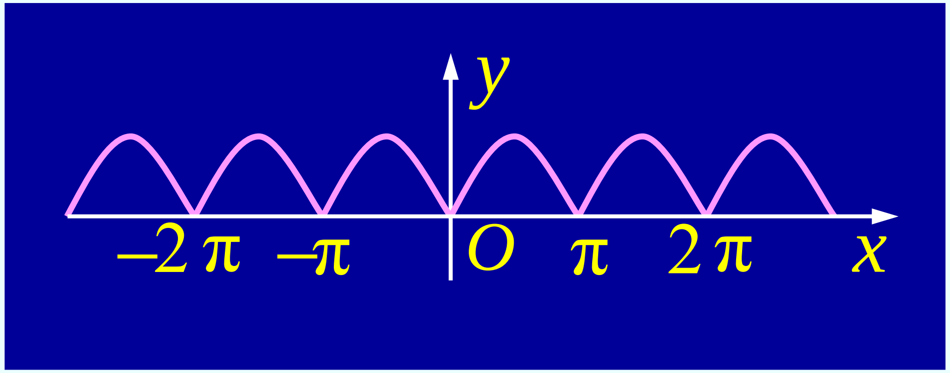
$$\ln\frac{1-x}{1+x} \qquad \frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}} \qquad f(x) - f(-x)$$

常见的偶函数 $\quad f(x) + f(-x)$

(4) 周期性

$\forall x \in D, \exists T > 0$, 且 $x \pm T \in D$, 若 $f(x \pm T) = f(x)$

则称 $f(x)$为周期函数, 称 T 为周期(一般指最小正周期).



周期为 π

注: 周期函数不一定存在最小正周期.

例如

狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

有+有=有

无+有=无

所以，正有理数均为$D(x)$的周期，没有最小正周期

3. 反函数与复合函数

(1) 反函数

若函数 $f : D \to f(D)$ 为$\boxed{\text{单射}}$, 则存在一新映射

$$f^{-1} : f(D) \to D,$$

使 $\forall y \in f(D),\ f^{-1}(y) = x$, 其中 $f(x) = y$,

称此映射 f^{-1} 为 $\boldsymbol{f}$ 的反函数 .

并非所有的函数都有反函数

习惯上, $y = f(x),\ x \in D$ 的反函数记成

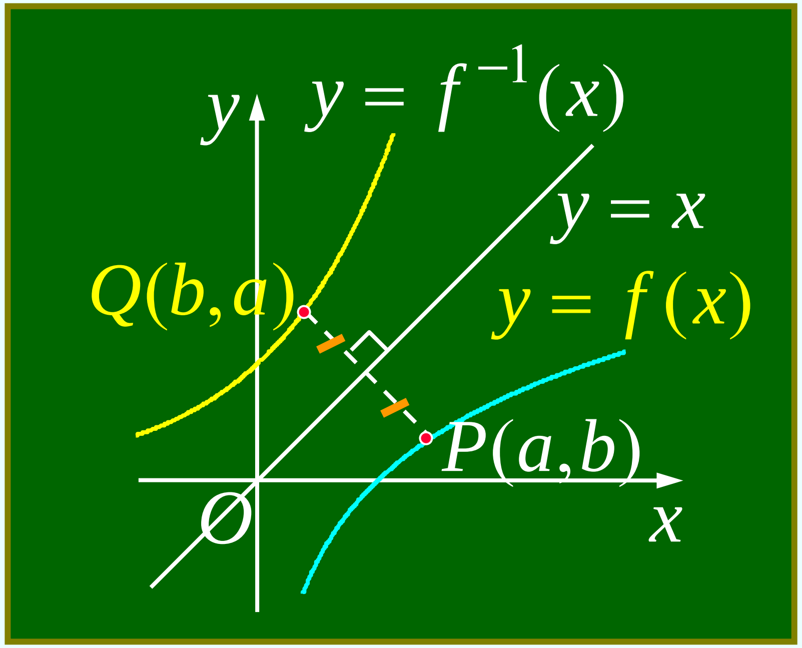
$$y = f^{-1}(x)\ ,\ x \in f(D)$$

说明:

① $\boldsymbol{y=f(x)}$单调递增(减) ,其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在,

且也单调递增(减) .

②函数$y = f(x)$与其反函数$y = f^{-1}(x)$的图形关于直线$y = x$对称 .

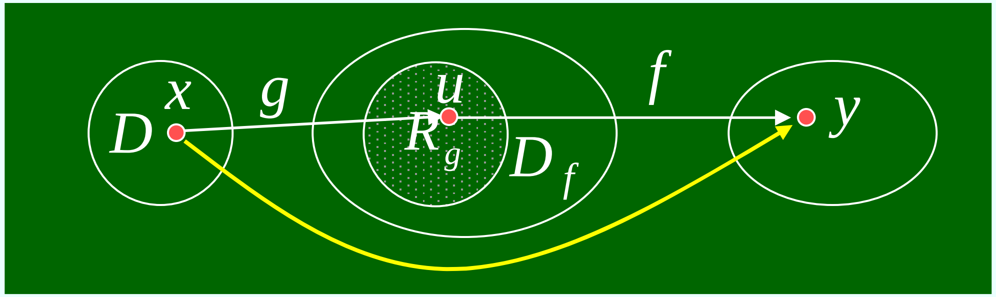


例如

$$\left.\begin{array}{l}\text{指数函数}\quad y = \mathrm{e}^x,\ x \in (-\infty, +\infty) \\ \text{对数函数}\quad y = \ln x\ ,\ x \in (0, +\infty)\end{array}\right\}\text{互为反函数,}$$

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y = x$ 对称 .

(2) 复合函数



设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_f \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D,\ \text{且}\ R_g \subset D_f \qquad ②$$

则 $$y = f[g(x)],\ x \in D$$

称为由①, ②确定的复合函数 , ***u*** 称为中间变量.

注意:

①并非任意两个函数都可以复合成一个复合函数

例如, 函数链 : $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 不能复合

能否复合关键在于$R_g \subset D_f$

(2) 复合函数

②两个以上函数也可构成复合函数.

对复合函数要弄清楚是由哪些简单函数组成的

例如 $y=\sqrt{1+\lg(2+\cos\sqrt{x})}$ 是由四个简单函数

$y=\sqrt{u}$, $u=1+\lg v$, $v=2+\cos w$, $w=\sqrt{x}$ 复合而成

约定: 为简单计, 书写复合函数时不一定写出其定义域, 默认对应的函数链顺次满足构成复合函数的条件.

典型题（复合函数）

①求函数值或已知函数关系**求函数*f*(*x*)的表达式**

i)已知***f*(*x*),*g*(*x*)**求***f*[*g*(*x*)]**

解题要领:将***f*(*x*)**中每一个分段支用***g*(*x*)**代即可

例8 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1\,, & x<1\\ x\,, & x\geq 1\end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

解: $f(x)=\begin{cases}\overset{<4}{3x+1\,,} & x<1\\ x\,\overset{\geq 1}{,} & x\geq 1\end{cases}$,

$$\therefore f[f(x)]=\begin{cases}3(3x+1)+1 \quad 9x+4 & x<0 & x<0\\ 3x+1 & 0\leq x<1 & 0\leq x<1\\ x & x\geq 1 & x\geq 1\end{cases}$$

典型题（复合函数）

①求函数值或已知函数关系**求函数*f*(*x*)的表达式**

ii)已知$f[g(x)]=h(x)$,求$f(x)$

解题要领:令$g(x)=u$,求出$x=g^{-1}(u)$代入到$h(x)$中得

$$f(u)=h(g^{-1}(u))\text{再将}u\text{换成}x$$

例9 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ 求$f(x)$

解得 $f(x)=x^2-2$

典型题（复合函数）

②求复合函数的定义域

i)已知$\boldsymbol{f(x)}$的定义域为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$,求$\boldsymbol{f(g(x))}$的定义域

解题要领：只要解 $a \le g(x) \le b$ 即可

例10　设 $f(x)$的定义域为**[0,1]**,求$\boldsymbol{f(\ln x)}$的定义域

解得 $0 < \ln x \le 1 \Rightarrow 1 < x \le e$

典型题（复合函数）

②求复合函数的定义域

ii)已知***f*(*x*)**的定义域为[***a***,***b***], $f(x)=\begin{cases} h_1(x) & a\le x\le c \\ h_2(x) & c<x\le b \end{cases}$

求***f*(*g*(*x*))**的定义域

解题要领: $f(g(x))=\begin{cases} h_1(g(x)) & a\le g(x)\le c \Rightarrow x\text{范围} \\ h_2(g(x)) & c<g(x)\le b \Rightarrow x\text{范围} \end{cases}$

例11 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & 1<x\le 2 \end{cases}$ 求***f*(2*x*)**的定义域

解 $f(2x)=\begin{cases} 1 & 0\le 2x\le 1 \\ 0 & 1<2x\le 2 \end{cases} \Rightarrow f(2x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$

③求分段函数的反函数

例12 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2\mathrm{e}^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.

解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

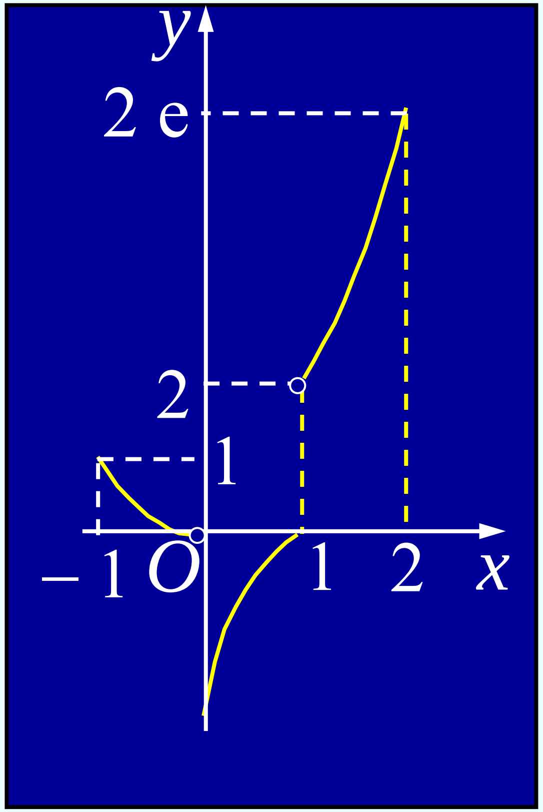
则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=\mathrm{e}^y$, $y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2\mathrm{e}^{x-1}\in(2,2\mathrm{e}]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2}$, $y\in(2,2\mathrm{e}]$



反函数 $y=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2\mathrm{e}] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2\mathrm{e}]$

4. 初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数 $y = x^{a}$

指数函数 $y = a^{x}$

对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, \neq 1)$

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x,$

$y = \tan x, y = \cot x,$

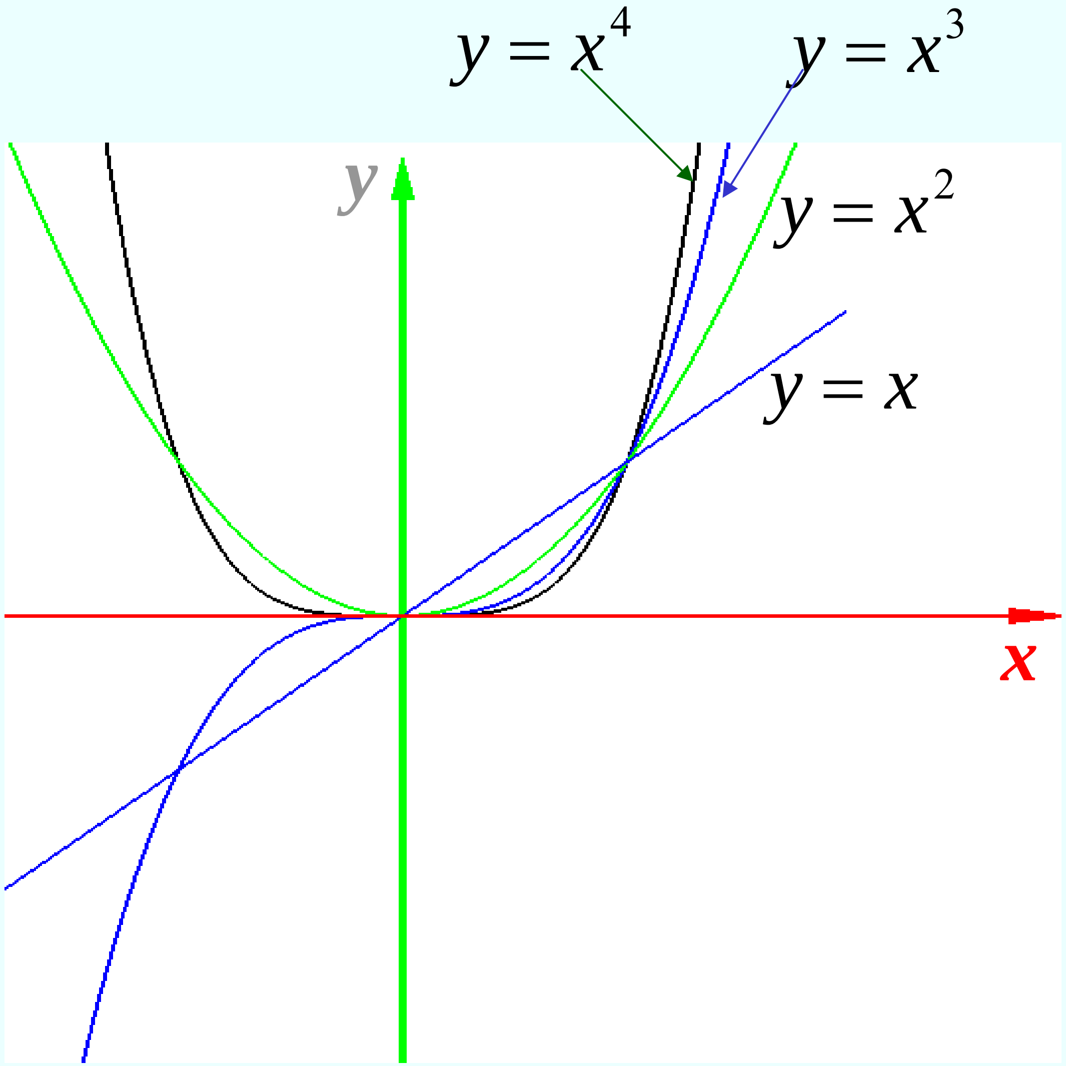
$y = \sec x, y = \csc x$

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x$

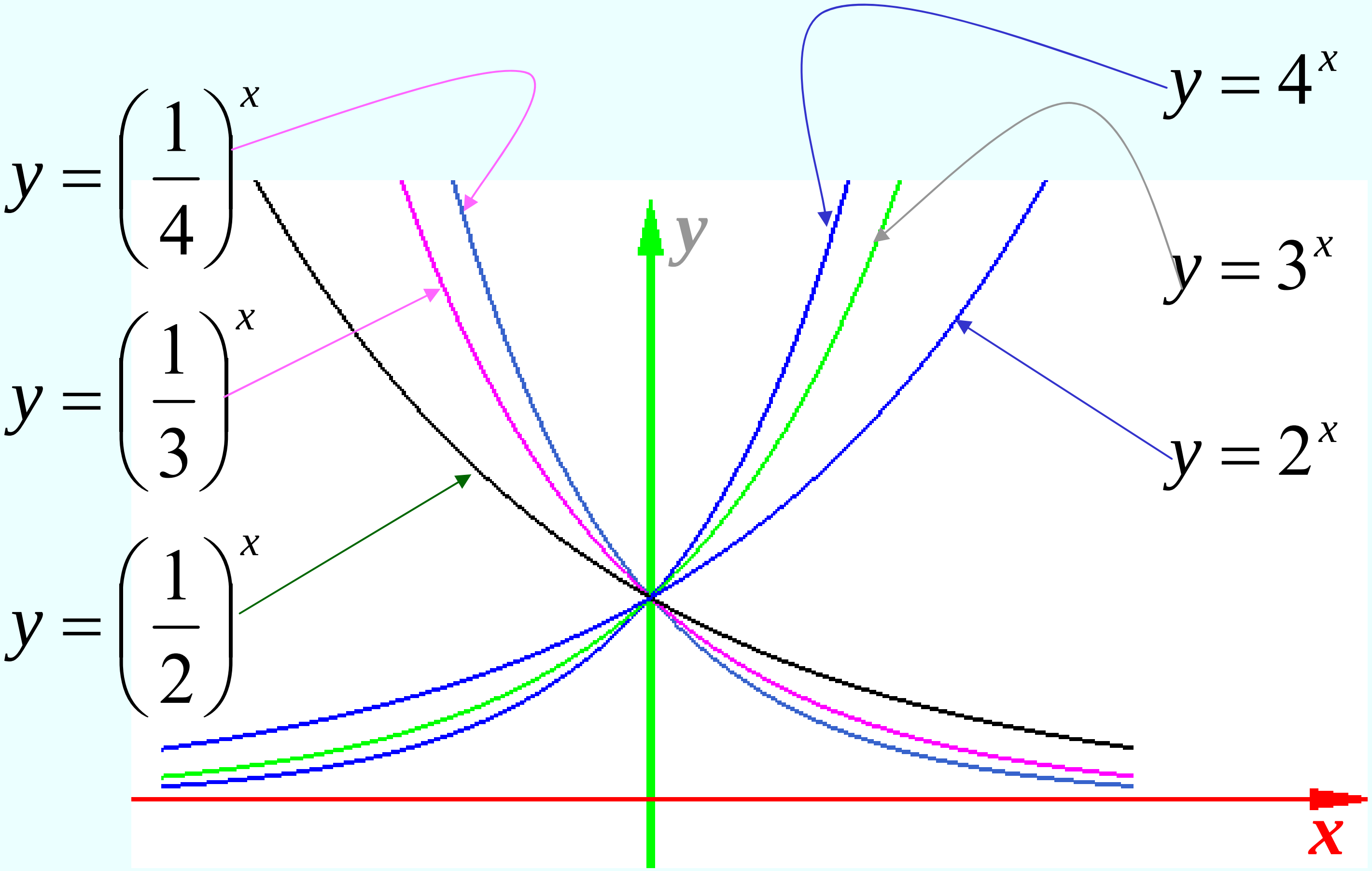
$y = \arctan x, y = \operatorname{arc}\cot x$

幂函数

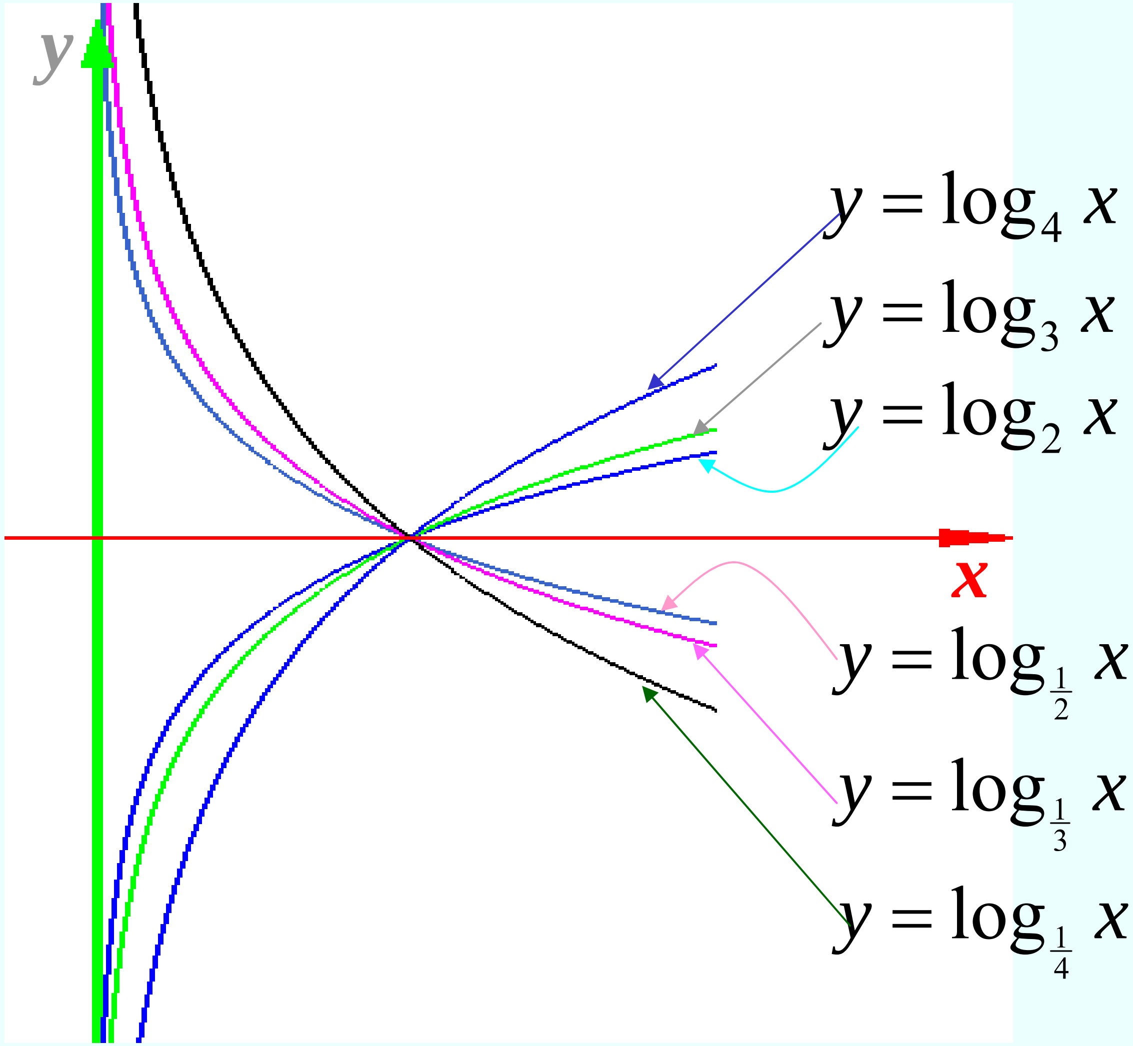
$y = x^{\mu}$ ($\mu \in$ R是常数),



指数函数 $y = a^x$ ($a>0$且$a\neq1$)，

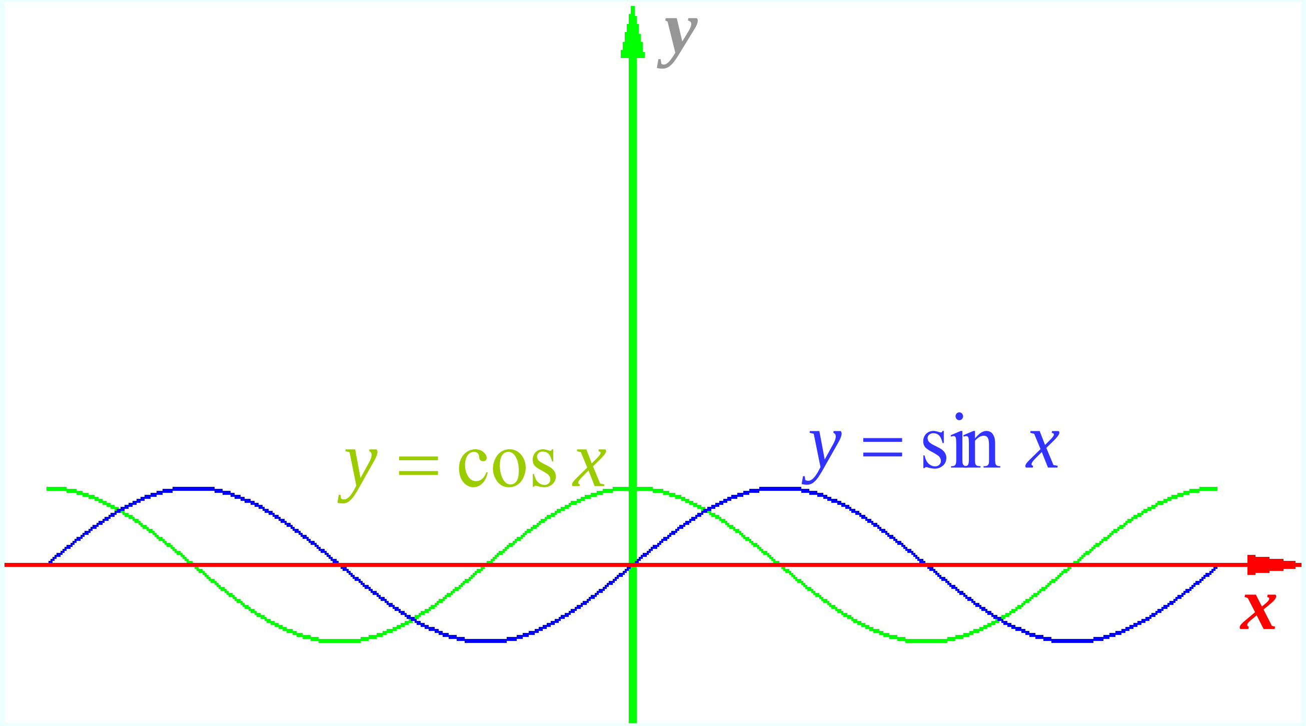


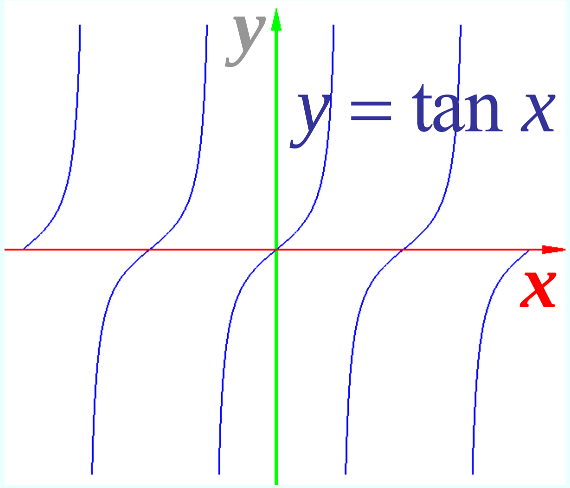
对数函数 $y=\log_a x$ (a>0且a≠1)，a=e时，记为$y=\ln x$

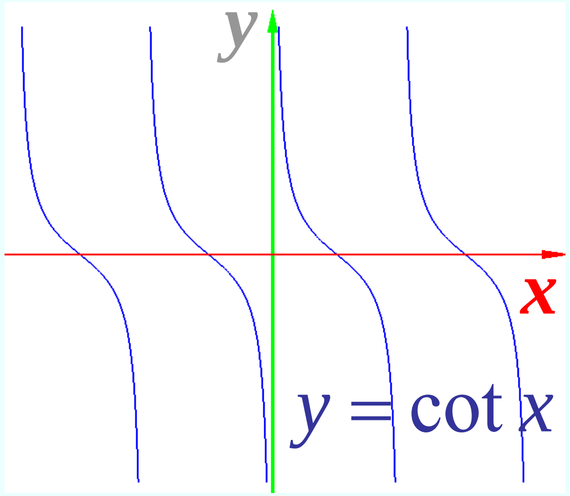


三角函数

$$y = \sin x\ ,\ y = \cos x\ ,\ y = \tan x\ ,\ y = \cot x$$

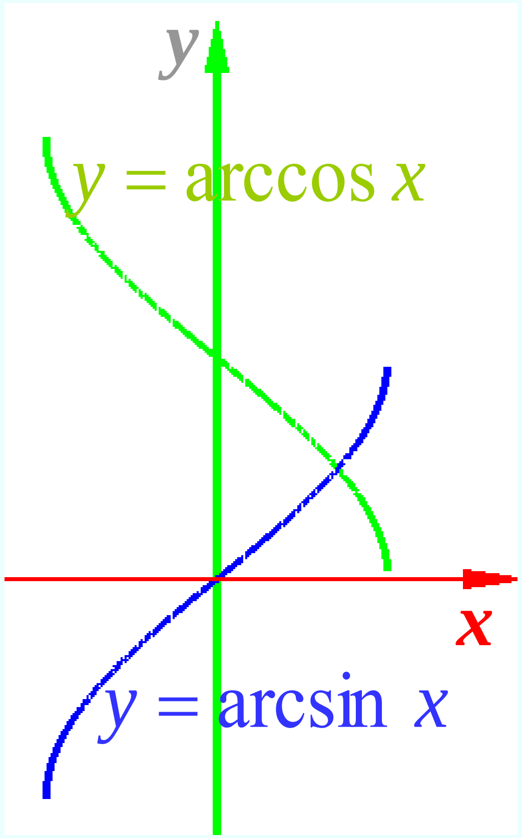


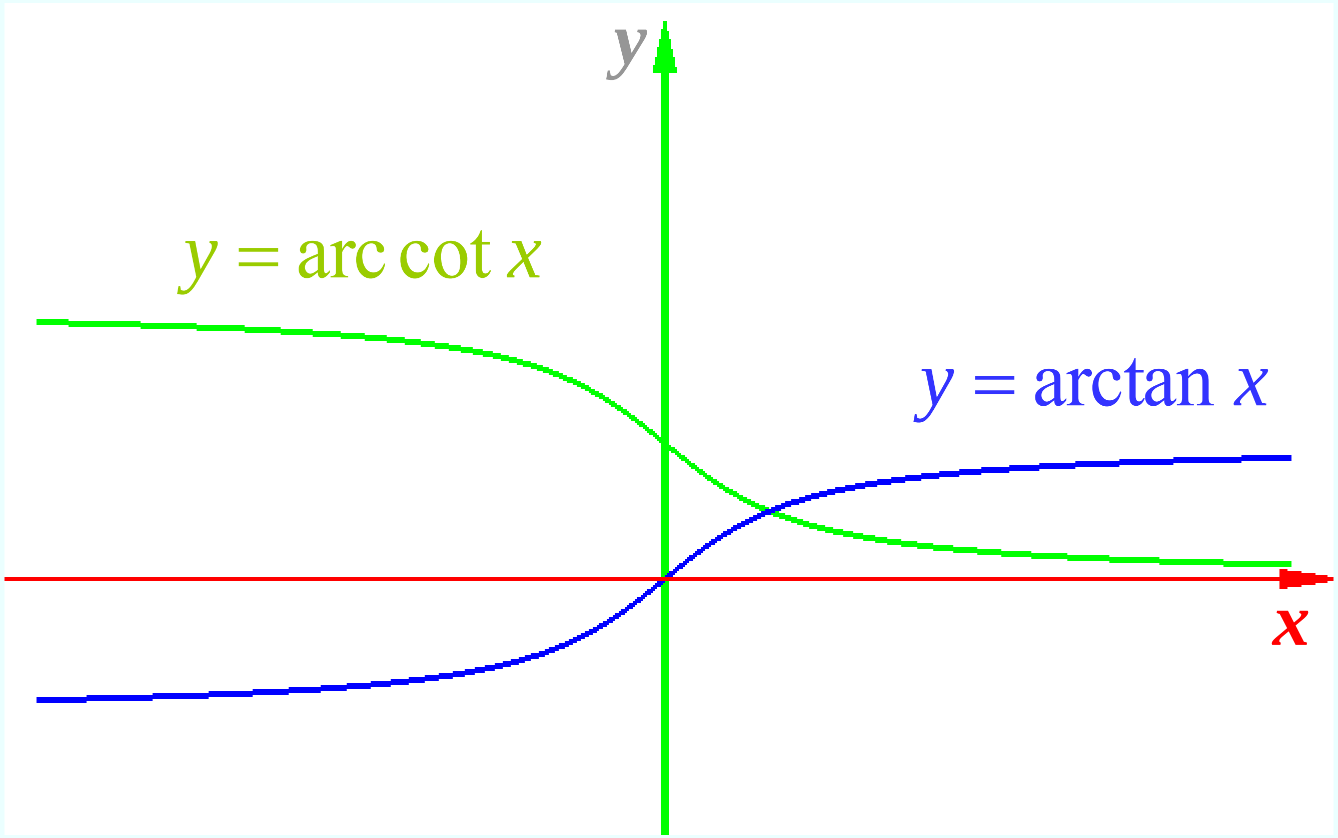




反三角函数

$$y=\arcsin x\,,\ y=\arccos x\,,\ y=\arctan x\,,\ y=\operatorname{arc}\cot x$$





4. 初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数 $y = x^a$

指数函数 $y = a^x$

对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, \neq 1)$

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x,$

$y = \tan x, y = \cot x,$

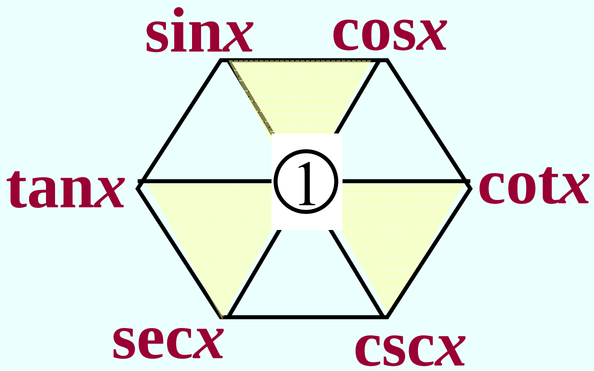
$y = \sec x, y = \csc x$

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x$

$y = \arctan x, y = \operatorname{arc}\cot x$

初等函数恒等式

$$a^{\log_a x} = x$$



$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$$

4. 初等函数

(2) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数 .

否则称为非初等函数 .

例如 $y = \lg\sin^2 x,\ y = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{\tan x}}$ 都是初等函数.

(3) 非初等函数

绝大多数

常见的非初等函数：分段函数、用参数方程确定的函数、隐函数、用极坐标方程确定的函数等

例如 $y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 可表为 $y = \sqrt{x^2}$，为初等函数.