《高等数学》期中练习题

一、选择题（每题 3 分,共 15 分）

1. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$ 是单位向量，且$\vec{a}\bullet(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{3}{2}$，则$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的夹角是（ D ）。

$(A)\quad -\dfrac{\pi}{3}\qquad (B)\quad \dfrac{\pi}{6}\qquad (C)\quad \dfrac{\pi}{4}\qquad (D)\quad \dfrac{\pi}{3}$

2. 直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$与平面$x+y-z-2=0$的关系是（ C ）.

(A) 垂直 (B) 斜交 (C) 平行且包含 (D) 平行不包含

3.设$z=f(u)$由$u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$确定，$u$为$x,y$的函数，且$f,\varphi$连续可导，$p(t)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$，则$p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（ A ）.

$(A)\quad 0\qquad (B)\quad 1\qquad (C)\quad f'(u)(1-\varphi(x))\qquad (D)\quad f'(u)(1-\varphi(y))$

4. 设 $f(u)$ 是连续函数，$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$，则 $F'(t)=$（ D ）

$(A)\quad 2\pi\cdot tf(t)\qquad (B)\quad 4\pi\cdot tf(t)$

$(C)\quad 2\pi\cdot t^2 f(t)\qquad (D)\quad 4\pi\cdot t^2 f(t)$

5. 设$x^2+y^2+z^2-4z=0$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$（ B ）

$(A)\quad \dfrac{(2-z)^2-y^2}{(2-z)^3}\qquad (B)\quad \dfrac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$

$(C)\quad \dfrac{(2-z)^2+y^2}{(2-z)^3}\qquad (D)\quad \dfrac{(2-z)^2-x^2}{(2-z)^3}$

二、填空题（每题 3 分,共 15 分）

1. $\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy=$（ $\frac{1}{6}(1-2e^{-1})$ ）。

2.由直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面方程是（ $x^2+y^2=\frac{5}{9}(z-1)^2$ ）。

3.设 $u=(\frac{y}{z})^x$，则 $du\big|_{(1,1,1)}=$（ $dy-dz$ ）。

4.设 Ω 由 $z=1-x^2-y^2,z=0$ 围成，则 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$（ $\frac{\pi}{6}$ ）。

5.设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$， $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数， a,b 为常数，

则 $\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}dxdy=$（ $\frac{\pi}{2}(a+b)$ ）

三、求直线 $\begin{cases}x+2y+2z-4=0\\2x-2y+3z-2=0\end{cases}$ 的对称式、参数方程。（10 分）

解：令 $z=0$，则 $\begin{cases}x+2y-4=0\\2x-2y-2=0\end{cases}$ 得 $x=2,y=1$ 2 分

得直线过的已知点 $(2,1,0)$ 1 分

令 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 3\end{vmatrix}=(10,1,-6)$ 3 分

所以直线方程为 $\frac{x-2}{10}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-6}$ 3 分

$\begin{cases}x=10t+2\\y=t+1\\z=-6t\end{cases}$ 1 分

四、求直线$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-2y+z+2=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影方程。（10 分）

解：直线的平面束方程$x+2y-z+1+\lambda(2x-2y+z+2)=0$-------2 分

$(1+2\lambda)x+(2-2\lambda)y+(-1+\lambda)z+(1+2\lambda)=0$-- --1 分

与$x+y+z=0$垂直得$(1+2\lambda)+(2-2\lambda)+(-1+\lambda)=0$--3 分

$\lambda=-2$-----1 分

得平面$x-2y+z+1=0$ ------ 2 分

得投影曲线$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$-----1 分

五、设D由$x=-2, y=0, y=2, x=-\sqrt{2y-y^2}$围成，计算$\iint\limits_D ydxdy$。（10 分）

解：如图

$$\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_{D+D_1} ydxdy-\iint\limits_{D_1} ydxdy \qquad 2 分$$

$$=\int_{-2}^{0}dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho \qquad 4 分$$

$$=4-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{1}{3}(2\sin\theta)^3d\theta=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{1-\cos 2\theta}{2})^2d\theta \qquad 3 分$$

$$=4-\frac{\pi}{2} \qquad 1 分$$

六、求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+2x)dv$，其中 Ω 为 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成的立方体。(10 分)

解：$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$ 2 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1\rho^2dz$ 6 分

$=2\pi\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)d\rho$

$=\dfrac{\pi}{6}$ 2 分

七、$u=f(x,y+z,xyz)$ ， f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 。（10 分）

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yzf_3'$ 2 分

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_2'+xzf_3'$ 2 分

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+yzf_{13}''+yz(f_{31}''+yzf_{33}'')$

$=f_{11}''+2yzf_{13}''+y^2z^2f_{33}''$ 3 分

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{12}''+xzf_{13}''+zf_3'+yz(f_{32}''+xzf_{33}'')$ 3 分

八、设曲面Σ为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$a>0,b>0,c>0$

（1）求曲面Σ在第一卦限部分上点$M(x_0,y_0,z_0)$的一个法向量；

（2）求曲面Σ在该点$M(x_0,y_0,z_0)$的切平面；

（3）问该切平面在三个坐标轴上的截距分别是多少？

（4）问该点$M(x_0,y_0,z_0)$为何值时，其切平面与三个坐标轴的截距的乘积最大

（10 分）

解：（1）令$F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，则$\vec{n}=(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2})$； 1 分

（2）该点切平面为：$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

化简为$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$； 2 分

（3）截距分别为：$\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0},$； 1 分

（4）令$f=\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0}$，求最大，即求$x_0\cdot y_0\cdot z_0$最小，

令$L=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ $\begin{cases} L_x=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 & (1)\\ L_y=xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 & (2)\\ L_z=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 & (3)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (4)\end{cases}$ 4 分

$(1)\times x$ 得 $xyz+2\lambda\frac{x^2}{a^2}=0$，

$(2)\times y$ 得 $xyz+2\lambda\frac{y^2}{b^2}=0$，

$(3)\times z$ 得 $xyz+2\lambda\frac{z^2}{c^2}=0$

三式相加得$3xyz+2\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})=0$ （4）代入得$xyz=-\frac{2\lambda}{3}$

回带得$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{3}$， $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$，同理得$y=\frac{b}{\sqrt{3}}$， $x=\frac{c}{\sqrt{3}}$

得唯一驻点（$\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}$）为所求。 2 分

九、设函数$f(\xi,\eta)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=0$，

证明：函数$z=f(x^2-y^2,2xy)$，其中$\xi=x^2-y^2,\eta=2xy$也满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$。

（10 分）

证明：设$z=f(\xi,\eta),\xi=x^2-y^2,\eta=2xy$ 1 分

则$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial\xi}+2y\frac{\partial f}{\partial\eta}$ 2 分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\frac{\partial f}{\partial\xi}+2x(2x\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta})+2y(2x\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2})$$

$$=2\frac{\partial f}{\partial\xi}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\cdots\cdots\text{（1）}$$ 2 分

$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial\xi}+2x\frac{\partial f}{\partial\eta}$ 2 分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\frac{\partial f}{\partial\xi}-2y(-2y\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta})+2x(-2y\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2})$$

$$=-2\frac{\partial f}{\partial\xi}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}-8xy\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\cdots\cdots\text{（2）}$$ 2 分

（1）+（2）得$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2})=0$ 1 分