专业:____ 座位号:____ 考场号:____ 所在院校:____ 准考证号:____ 姓名:____

密封线 答题时不要超过此线

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(非数学 A 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=$____________.

(2) 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{x}\partial y}=$____________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 则 $f^{(n)}(0)=$____________.

(4) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域为____________.

(5) 设曲面 Σ 是平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分, 则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{dS}=$____________.

解答. (1) 使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+9}}}{-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-23}}}=-\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^3-23}}{\sqrt{x^3+9}}=-\frac{1}{3}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
z_x &= 2xf_1+yf_2,\\
z_{xy} &= 2x(f_{11}(-2y)+xf_{12})+f_2+y(f_{21}(-2y)+xf_{22})\\
&= f_2-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= -\tfrac{1}{x-1}+\tfrac{1}{x-2}. \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}\cdot n!(\tfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\tfrac{1}{(x-2)^{n+1}}). \\ f^{(n)}(0) &= n!(1-\tfrac{1}{2^{n+1}}). \end{aligned}$$

(4) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(2n-1)}}=1$, 所以收敛半径为 1.

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛，故收敛域为 $[-1,1]$.

(5) Σ 的方程为 $z=5-y$, 故

$$\mathrm{dS}=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Σ 在 xOy 平面的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 25$, 故

$$I=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=125\sqrt{2}\pi.$$

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2y-\frac{x^2}{y}).$$

解答. 原方程变形为 $\dfrac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}=\dfrac{2(2y^2-x^2)}{x^2+y^2+3}$.

令 $u=x^2, v=y^2$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\dfrac{2(2v-u)}{u+v+3}$. .... (5 分)

解方程 $2v-u=0, u+v+3=0$, 得到 $u=-2, v=-1$, 再令 $U=u+2, V=v+1$, 上述方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U}=\dfrac{2(2V-U)}{U+V}$. .... (8 分)

作变量替换 $W=\frac{V}{U}$ 得到 $U\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}U}=-\dfrac{W^2-3W+2}{W+1}$. .... (11 分)

这是分离变量方程，解之得 $U(W-2)^3=C(W-1)^2$, 回代得

$$(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)^2.$$

.... (14 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 设 Σ_1 是以 $(0,4,0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2 : \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1(y>0)$ 相切的圆锥面，求曲面 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积.

解答. 设 L 是 xOy 平面上过点 $(0,4)$ 且与 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切于点 (x_0,y_0) 的直线，则 $\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$ 且切线斜率 $\dfrac{y_0-4}{x_0}=-\dfrac{4x_0}{3y_0}$, 解得 $x_0=\pm\dfrac{3}{2}, y_0=1$.

.... (5 分)

显然，Σ_1 与 Σ_2 分别是切线 L 和曲线 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转而成的曲面，它们的交线位于平面 $y_0=1$ 上. .... (8 分)

记该平面与 Σ_1,Σ_2 围成的空间区域分别记为 Ω_1 和 Ω_2.

由于 Σ_1 是底面圆的半径为 $\dfrac{3}{2}$, 高为 3 的圆锥体，所以其体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\pi(\dfrac{3}{2})^2\cdot 3=\dfrac{9\pi}{4}$. 又 Ω_2 的体积为

$$V_2=\iiint_{\Omega_2}\mathrm{dV}=\int_1^2\mathrm{d}y\iint_{x^2+z^2\leqslant 3(1-\frac{y^2}{4})}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\pi\int_1^2 3(1-\frac{y^2}{4})\mathrm{d}y=\frac{5\pi}{4}.$$

因此，曲面 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积为 $\dfrac{9\pi}{4}-\dfrac{5\pi}{4}=\pi$.

.... (14 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分)

设 $I_n = n\displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, 其中 $a>1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

解答. 记 $b=\frac{1}{a}$, 则 $0<b<1$. 作变量替换 $x=\frac{1}{t}$, 得到

$$I_n = \int_b^1 \frac{nt^{n-1}}{t(1+t^n)}\mathrm{d}t = \int_b^1 \frac{\mathrm{d}(\ln(1+t^n))}{t}.$$

分部积分得

$$I_n = \ln 2 - \frac{\ln(1+b^n)}{b} + \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

………………………………………………………… (8 分)

当 $t\in[b,1]$ 时，$\dfrac{\ln(1+t^n)}{t^2} \leqslant t^{n-2}$,

$$0 \leqslant \int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_b^1 t^{n-2}\mathrm{d}t = \frac{1-b^{n-1}}{n-1}.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-b^{n-1}}{n-1}=0$. 由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_b^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\mathrm{d}t = 0$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+b^n)}{b}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \ln 2$.

………………………………………………………… (14 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$. 求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

解答. 由分部积分法

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x &= (x-1)f^2(x)\Big|_0^1 - \textstyle\int_0^1 (x-1)2f(x)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= 2\textstyle\int_0^1 (1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (4 分)

由 Cauchy 积分不等式, 有

$$\int_0^1 (1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 (1-x)^2(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

等式成立时应有常数 c 使得 $(1-x)f'(x)=cf(x)$. 因此当 $x\in(0,1)$ 时, 有

$$((1-x)^c f(x))' = (1-x)^{c-1}\big((1-x)f'(x)-cf(x)\big)=0.$$

因而存在常数 d 使得 $f(x)=d(1-x)^{-c}$ $(0<x<1)$.
当 $x\to 0$ 时， $f(x)\to 0$, 故 $d=0$. 于是 $f=0$. 所以使得题中不等式成为等式的函数是 $f(x)=0$. $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = \dfrac{1}{3}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2}, n \geqslant 0$. 证明：无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛并求其和.

解答. 方法1. 根据数学归纳法可知 $x_n > 0$.

此外，$x_{n+1} - x_n = -\dfrac{x_n(1-x_n)^2}{1-x_n+x_n^2} < 0$.

故 x_n 单调递减, $x_n \leqslant \frac{1}{3}$.

于是，$x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{x_n}{1-x_n+x_n^2} \leqslant \dfrac{4}{9}x_n$,

x_n 收敛于 0. .... (6 分)

令 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x > 0$, 不难验证 $f(x)$ 严格单调递增且其反函数为 $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$.

注意到 $x_{n+1} = f(f^{-1}(x_n) - x_n)$, 故

$$f^{-1}(x_{n+1}) = f^{-1}(x_n) - x_n, \quad x_n = f^{-1}(x_n) - f^{-1}(x_{n+1}).$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = f^{-1}(x_0) - f^{-1}(x_{n+1}).$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = f^{-1}(x_0) - f^{-1}(0) = \frac{1}{2}.$$

.... (14 分)

解答. 方法2. 证明 x_n 收敛于 0 同方法1.

注意到

$$x_n = \frac{x_n}{1-x_n} - \frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}.$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \frac{x_0}{1-x_0} - \frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}.$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \frac{x_0}{1-x_0} = \frac{1}{2}.$$

.... (14 分)