大连海事大学 2021—2022 学年第二学期《高等数学》试卷 A

参考答案

一、单项选择题

（将正确选项填在括号内，不填或填错都不得分，每题 3 分，共 15 分）

装

1. 设直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 及平面 $\Pi: x-y-z=0$，则直线 L（ C ）。

(A) 平行于平面 Π,但不在平面上　　(B) 垂直于平面 Π

(C) 平行于平面 Π,且在平面上　　(D) 与平面 Π 斜交

2. 利用变量代换 $u=x, v=\dfrac{y}{x}$，可以把方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化简为（ A ）。

订

(A) $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　　(B) $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(C) $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(D) $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

3. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\dfrac{\sin x}{x}dx=$（ D ）。

(A) $1-\cos 1$　(B) $1+\cos 1$　(C) $1+\sin 1$　(D) $1-\sin 1$

4. 设曲线 Γ 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\oint_\Gamma (x^2+z)ds=$（ A ）。

线

(A) $\dfrac{2\pi R^3}{3}$　　(B) $\dfrac{2\pi R^2}{3}$　　(C) πR^2　　(D) πR^4

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{\sqrt{\lambda n}},(\lambda>0)$ 是（ B ）。

(A) 发散的　　(B) 条件收敛的

(C) 绝对收敛的　　(D) 敛散性与 λ 有关

试卷A

二、填空题（将正确答案填在括号内，不填或填错都不得分，每题3分，共15分）

1. 曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影柱面方程为($4x^2-6x+5y^2-29=0$)。

2. 由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$，在点 $(0,1,1)$ 的全微分 $dz=$($dx+dy$)。

3. 若 $\int_L (2021x^{2021}+2x^2y^3)dx+(cx^3y^2-2022y^{2022})dy$ 与路径无关，则 $c=$(2)。

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[-1,3]$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为($|x|\le\sqrt{2}$)。

5. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, x^2+y^2\ge 2x\}$，则 $\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=$ ($\dfrac{13\pi}{2}$)。

三、求直线 $\begin{cases} x+2y-2z-2=0 \\ x-y+3z+1=0 \end{cases}$ 的对称式、参数方程（10分）

解：$\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4,-5,-3)$ 　　3分

令 $z=0$, 得 $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

$x=0, y=1$, 得点 $(0,1,0)$ 　　2分

得 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z}{-3}$ 　　3分

得 $\begin{cases} x=4t \\ y=-5t+1 \\ z=-3t \end{cases}$ 　　2分

选课序号
姓　　名
学　　号
专业班级

装　订　线

大连海事大学 2021—2022 学年第二学期《高等数学》试卷 A

四、已知函数 f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x,x+y,x-y)$，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。（10 分）

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'+f_3'$　　2 分

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_2'-f_3'$　　2 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{12}''+f_{22}''+f_{23}''-f_{13}''-f_{23}''-f_{33}''$$

$$=f_{12}''+f_{22}''-f_{13}''-f_{33}''$$　　3 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{22}''-f_{23}''-f_{23}''+f_{33}''$$

$$=f_{22}''-2f_{23}''+f_{33}''$$　　3 分

五、计算 $\oint_L \dfrac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为曲线 $4x^2+y^2-8x=0$ 的顺时针方向。（10 分）

解：设曲线 C：$\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 逆时针方向，　　2 分

$$\oint_{L^{-1}}\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=\oint_{L^{-1}+C^{-1}}\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}-\oint_{C^{-1}}\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$　　2 分

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma+\oint_C\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$　　3 分

$$=0+\int_0^{2\pi}\frac{-r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}d\theta$$　　2 分

$$=-2\pi$$

$$\oint_L\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=-\oint_{L^{-1}}\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=2\pi$$　　1 分

六、求函数 $u=x^2y^4z^2$，在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}, x>0, y>0, z>0$，

下的最小值。（10 分）

解：令 $L=x^2y^3z^2+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{2})$ 2 分

$$\begin{cases} L_x = 2xy^4z^2-\lambda\frac{1}{x^2}=0 \\ L_y = 4x^2y^3z^2-\lambda\frac{1}{y^2}=0 \\ L_z = 2x^2y^4z-\lambda\frac{1}{z^2}=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \end{cases}$$ 3 分

解得 $x=8, y=4, z=8$ 3 分

得唯一驻点 $(8,4,8)$ 为所求， 1 分

最小值为 $u=2^{20}$。 1 分

选课序号
姓　　名
学　　号
专业班级

大连海事大学 2021—2022 学年第二学期《高等数学》试卷 A

七、计算 $\iint\limits_{\Sigma} z^2dydz+(x^3z^2+3yz)dzdx-2dxdy$，其中 Σ 为曲面

$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0$ 上方部分的下侧。（10 分）

解：设曲面 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 1$ 取上侧，　　2 分

则 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} z^2dydz+(x^3z^2+3yz)dzdx-2dxdy$

装

$=-\iiint\limits_{\Omega} 3zdv=-3\iiint\limits_{\Omega} zdv$　　4 分

$=-3\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z} dxdy=-\frac{1}{4}\pi$　　1 分

$\oiint\limits_{\Sigma_1} z^2dydz+(x^3z^2+3yz)dzdx-2dxdy \ =-2\iint\limits_{D_{xy}} 1dxdy=-2\pi$　　2 分

所以 $\iint\limits_{\Sigma} z^2dydz+(x^3z^2+2yz)dzdx-2dxdy$

订

$=-\frac{1}{4}\pi-(-2\pi)=\frac{7}{4}\pi$　　1 分

八、计算 $\iiint\limits_{\Omega} y^2dv$，其中 Ω 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 围成的区域。（10 分）

解：$\iiint\limits_{\Omega} y^2dv=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$　　3 分

解：$\iiint\limits_{\Omega} = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$

$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$　　5 分

$x=r\sin\varphi\cos\theta$

$y=r\sin\varphi\sin\theta$

$z=r\cos\theta$

线

$=\frac{4\pi a^5}{15}$　　2 分

另解：$\iiint\limits_{\Omega} y^2dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\cdot r^2\sin\varphi dr$　　7 分

$=\frac{4\pi a^5}{15}$　　3 分

九、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$，求（1）此幂级数的收敛半径； **试卷 A**

（2）此幂级数的收敛域；

（3）此幂级数在收敛域的和函数。（10 分）

解：（1）因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以 $R=1$， 2 分

（2）当 $x=\pm1$ 时， 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n(2n+1)$ 发散

所以，收敛域为 $-1<x<1$， 2 分

（3）当 $-1<x<1$ 时，设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$

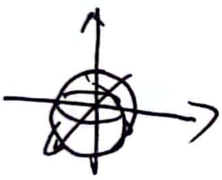
$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n \qquad 1\text{ 分}$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}x^n \qquad 1\text{ 分}$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{x}{1-x} \qquad 2\text{ 分}$$

$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{x}{1-x} \qquad 1\text{ 分}$$

$$=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2},\quad -1<x<1 \qquad 1\text{ 分}$$

dw


∫ r sinφ dr .