A

装 订 线

一、单项选择题

（将正确选项填在括号内，不填或填错都不得分，每题 3 分，共 15 分）

1. 向量 $\vec{a}=(1,2,1)$, 向量 $\vec{b}=(0,1,1)$, 则与向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同时垂直的向量(B).

(A) $(-1,-1,1)$　(B) $(1,-1,1)$　(C) $(1,-1,-1)$　(D) $(-1,-1,-1)$

2. 已知 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 所确定的函数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ (C).

(A) $\dfrac{1}{1+y\varphi'(z)}$　(B) $1+\dfrac{1}{y\varphi'(z)}$　(C) $\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)}$　(D) $1-\dfrac{1}{y\varphi'(z)}$

3. 设 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy, D: y\ge x$ 且 $1\le x^2+y^2\le 2$, 将该二次积分化为极坐标形式，得(D).

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_1^{\sqrt{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

(B) $\int_0^{\pi} d\theta\int_1^{\sqrt{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta\int_1^{\sqrt{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta\int_1^{\sqrt{2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

4. 设 L 是从 $A(0,1)$ 沿圆周 $x^2+y^2=1$ 到点 $B(1,0)$ 处的一段弧, 则 $I=\int_L xe^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$ (A).

(A) e　(B) e^2　(C) 1　(D) 0

5. 函数 $f(x)=x^3, x\in[-\pi,\pi]$, 若它的傅里叶级数的和函数是 $s(x)$, 则 $s(\dfrac{\pi}{2})=$ (B).

(A) π^3　(B) $\dfrac{\pi^3}{8}$　(C) 0　(D) 无法确定

A

二、填空题（将正确答案填在括号内，不填或填错都不得分，每题 3 分，共 15 分）

1. 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xoy 面上的投影方程为 $\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}$.

2. 设 $z=x^{\ln y}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\ln y \cdot x^{\ln y-1}$.

3. 改变二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$ 的积分次序，得 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dy$.

4. 设曲线 L 的方程为 $y=1-x$, 起点为 $(0,1)$, 终点为 $(1,0)$ 则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$ $-\dfrac{1}{6}$.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{100^n}$ 的敛散性为 发散 .

三、(10 分) 将 yoz 坐标面上的直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程,并求该曲面与平面 $z=2$ 的交线在 xoy 面上的投影方程.

解：将 yoz 坐标面上的直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为

$$z=a(\pm\sqrt{x^2+y^2})$$

整理得 $z^2=a^2(x^2+y^2)$

当 $z=2$ 时，$4=a^2(x^2+y^2)$

该曲面与平面 $z=2$ 的交线在 xoy 面上的投影方程为 $\begin{cases} a^2(x^2+y^2)=4 \\ z=0 \end{cases}$

A

四、计算题(每题 8 分，共 16 分)

1. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 在 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的部分.

解：$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$z_x=\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=\dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=2dxdy,D_{xy}:x^2+y^2\le 3$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)2dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\rho d\rho$$

$$=9\pi$$

2. 求二重积分 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2+xye^{(x^2+y^2)})dxdy$,其中 $D:x^2+y^2\le 1$.

解：积分域 $D:x^2+y^2\le 1$ 关于 x 轴对称，函数 $f(x,y)=xye^{(x^2+y^2)}$ 关于变量 y 是奇函数，有

$$I=\iint\limits_{D}(xye^{(x^2+y^2)})dxdy=0$$

则 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2+xye^{(x^2+y^2)})dxdy$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}\rho^2\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

五、计算题(每题 7 分，共 14 分)

1. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

解：（1） $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$

当$x=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$发散，当$x=-1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$发散.

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域为（-1,1）.

(2)设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$$

$$f(x)=(\int_0^x f(x)dx)'=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2},|x|<1.$$

2. 将函数$f(x)=\ln(2+x-3x^2)$在$x=0$展为幂级数.

解： $f(x)=\ln(2+x-3x^2)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n,(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此，$f(x)=\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n\ ,(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$

$$f(x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[-1+(-1)^{n-1}(\frac{3}{2})^n\right]x^n\ ,(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

A

装

订

线

六、（6 分）设 $z=f(xy,\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1^{'}\cdot y+f_2^{'}\cdot\frac{1}{y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1^{'}+y(f_{11}^{''}\cdot x+f_{12}^{''}\cdot(-\frac{x}{y^2}))$$

$$+f_2^{'}\cdot(-\frac{1}{y^2})+\frac{1}{y}(f_{21}^{''}\cdot x+f_{22}^{''}(-\frac{x}{y^2}))$$

七、（12 分）设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

解：$P(x,y)=xy^2,Q(x,y)=y\varphi(x)$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy,\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi^{'}(x)$$

曲线积分与路径无关，有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 $2xy=y\varphi^{'}(x)$

得 $\varphi(x)=x^2+c$，又 $\varphi(0)=0$, 则 $c=0,\varphi(x)=x^2$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 0dx+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}$$

或 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 0dy+\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

A

八、（12 分）求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解：$\begin{cases} f_x' = 2x(2+y^2)=0 \\ f_y' = 2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{e} \end{cases}$，得到唯一的驻点 $(0,\dfrac{1}{e})$.

$$A=f_{xx}''(0,\frac{1}{e})=2(2+y^2)\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2})>0$$

$$B=f_{xy}''(0,\frac{1}{e})=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=0$$

$$C=f_{yy}''(0,\frac{1}{e})=(2x^2+\frac{1}{y})\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=e>0$$

因为 $B^2-AC=0-2(2+\dfrac{1}{e^2})e<0$，$A>0$，

所以二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 有极小值 $f(0,\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$.