B

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%，本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%.

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{(1-x)\tan x}{|x|(x^2-1)}$，则（ B ）.

A. $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点

C. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点　　D. $x=1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点

2. 设 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$（ B ）.

A. $x\cos x+\sin x+C$　　B. $x\sin x+\cos x+C$

C. $x\cos x-\sin x+C$　　D. $x\sin x-\cos x+C$

3. 下列反常积分中，收敛的是（ A ）.

A. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}\cos x\,\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2025}+\sin^4 x)\cos x\,\mathrm{d}x=$（ C ）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{5}$

C. $\dfrac{2}{5}$　　D. 1

5. 设 $f(x)=\left(1+\sin^2 x\right)^{\tan x}-1$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的（ A ）.

A. 3阶无穷小　　B. 2阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶但非等价无穷小

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+b\sin^2 x}-a}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a+b=$ __5__.

2. 设函数 $y=x^2(x+1)^3(x-1)$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=$ __$8\mathrm{d}x$__.

3. 曲线 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 的拐点为 __$(1,\ 1)$__ .

4. 设函数 $f(x)=(2x^2+x+3)\sin x$，则 $f^{(6)}(0)=$ __6__.

5. 计算心形线 $\rho=1-\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ 所围平面区域的面积 __$\dfrac{3}{2}\pi$__ .

三.（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^2\ln(1+x)}, & x\in(-1,0)\cup(0,1]\\ b, & x=0\end{cases}$ 是连续函数，求常数 b.

解： $b=\lim\limits_{x\to0}f(x)$（1 分） $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-x)-(1-\sin x)}{x^2\ln(1+x)(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-\sin x})}$ (2分)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ (2分) $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$ (3分)

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}$ $=-\dfrac{1}{12}$ （2 分）

四.（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{3x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 确定，求 $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$.

解：代入 $x=0$ 得 $y(0)=1$.(2 分)

方程两边分别关于 x 求导，得 $\mathrm{e}^{3x+y}(3+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$, (2 分)

将 $x=0$， $y(0)=1$ 代入得 $y'(0)=-3$.(2 分)

再分别关于 x 求导，得 $\mathrm{e}^{3x+y}(3+y')^2+\mathrm{e}^{3x+y}\,y''+\cos(xy)(y+xy')^2+\sin(xy)(2y'+xy'')=0$,(2 分)

将 $x=0$， $y(0)=1$， $y'(0)=-3$ 代入得 $y''(0)=-\mathrm{e}^{-1}$.(2 分)

五.（12 分）设函数 $f(x)$ 连续， $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ ，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{B}$， B 为常数.

(1)求 $g'(x)$.

(2)讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：(1) 由题设，知 $f(0)=0, g(0)=0$ ，（2 分）

令 $u=xt$ ，得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x}, x\neq0.\text{（2 分）}$$

而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, x\neq0.\text{（3 分）}$$

由导数的定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{\mathrm{B}}{2}.\text{（2 分）}$$

综上所述 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{\mathrm{B}}{2}, & x=0\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\mathrm{B}-\dfrac{\mathrm{B}}{2}=\dfrac{\mathrm{B}}{2}=g'(0).$

从而得知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.（3 分）

六.（10 分）设 $f(u)$ 在 $-\infty<u<+\infty$ 内可导，且 $f(0)=1$，又 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ \sqrt{x}, & x>1\end{cases}$，

求出 $f(u)$ 在 $-\infty<u<+\infty$ 的表达式.

解：令 $\ln x=u$，则 $x=e^u$， $f'(u)=\begin{cases}1, & u\le 0\\ e^{\frac{u}{2}}, & u>0\end{cases}$ （3 分）

两边同时取不定积分，得

$f(u)=\begin{cases}u+C_1, & u\le 0\\ 2e^{\frac{u}{2}}+C_2, & u>0\end{cases}$ （3 分）

而 $f(u)$ 可导，一定连续，所以，$\lim\limits_{u\to 0^+}f(u)=\lim\limits_{u\to 0^-}f(u)=f(0)=1$，从而 $C_1=2+C_2=1$，（2 分）

装

故 $f(u)=\begin{cases}u+1, & u\le 0\\ 2e^{\frac{u}{2}}-1, & u>0\end{cases}$ （2 分）

七.（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0\end{cases}$，计算 $\int_1^3 f(x-2)\,dx$.

解 设 $x-2=t$，则 $\int_1^3 f(x-2)\,dx=\int_{-1}^1 f(t)\,dt$（2 分）$=\int_{-1}^0 f(t)\,dt+\int_0^1 f(t)\,dt$（2 分）

$=\int_{-1}^0\dfrac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^1 te^{-t^2}\,dt=\tan\dfrac{x}{2}\Big|_{-1}^{0}-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1$（2 分+2 分）$=\tan\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e}+\dfrac{1}{2}$（2 分）

订

八.（12 分）已知 $0<k<2$，将直线 $y=kx$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成平面图形面积记为 $S_1(k)$. 将直线 $y=kx$ 与曲线 $y=x^2$ 及直线 $x=2$ 所围成的曲边三角形面积记为 $S_2(k)$

(1) 求 k，使 $S_1(k)+S_2(k)$ 取得最小值.

(2) 求在该最小值下，$S_1(k)+S_2(k)$ 所对应的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解：(1)直线 $y=kx$ 与曲线 $y=x^2$ 的交点 (k,k^2) （1 分）

线

$S_1(k)=\int_0^k(kx-x^2)\,dx=\left[\dfrac{1}{2}kx^2-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^k=\dfrac{1}{6}k^3$

$S_2(k)=\int_k^2(x^2-kx)dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}kx^2\right]_k^2=\dfrac{8}{3}-2k+\dfrac{1}{6}k^3$（4 分）

令 $S(k)=S_1(k)+S_2(k)=\dfrac{8}{3}-2k+\dfrac{1}{3}k^3$ 则 $S'(k)=-2+k^2$，解 $S'(k)=0$ 得唯一驻点 $k=\sqrt{2}$，即当 $k=\sqrt{2}$ 时，$S_1(k)+S_2(k)$ 取得最小值；（3 分）

(2) $V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi(2x^2-x^4)\,dx+\int_{\sqrt{2}}^2\pi(x^4-2x^2)\,dx=\dfrac{16}{15}(\sqrt{2}+1)\pi$（4 分）

九.（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且满足 $f(0)+f(1)=2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，

于是 $2m\le f(0)+f(1)\le 2M$，$m\le\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\le M$，由介值定理知，存在 $\xi_1\in[0,1]$，使得

$f(\xi_1)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.(2 分)

再由积分中值定理，存在 $\xi_2\in[2,3]$，使得 $f(\xi_2)=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$. (2 分)

$f(\xi_1)=f(\xi_2)$，由 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset[0,3]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.(2 分)