引例 . $x \to 0$时, $3x$, x^2, $\sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小趋于 0 的速度是多样的 .

第一章

第七节

无穷小的比较

内容

一、定义

二、 两个定理

三、 典型题

一定义. 设 α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{x} = 0, \ 4x^2 = o(x)$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty, \ \frac{1}{n} \text{是} \frac{1}{n^2} \text{低阶的无穷小;}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称 β 与 α 同阶的无穷小;

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{x^2} = 4, \ 4x^2 \text{是} x \text{的2阶无穷小}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 是 α 的等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 或 $\beta \sim \alpha$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \sin x \sim x$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$ $\quad\therefore \tan x\sim x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=1 \qquad \therefore 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1 \quad \therefore \arcsin x\sim x$$

同理 $\arctan x\sim x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x\cdot[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+1]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\underbrace{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+1}_{n\text{项}}}=1$$

$$\therefore \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

常见的等价无穷小

当$x \to 0$时

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax, \quad a^x - 1 \sim x\ln a$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$$

定理1. $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

证: $\Rightarrow$ 只需证 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

设 $\beta \sim \alpha$, 则 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$,

因此 $\beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

$\Leftarrow \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = 1 \quad \therefore \beta \sim \alpha$

例 当$x \to 0$时, $\sin x = x + o(x)$, $1 - \cos x = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\lim \frac{o(\frac{1}{2}x^2)}{\frac{1}{2}x^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{o(\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = 0 \Rightarrow o(\frac{1}{2}x^2) = o(x^2)$$

定理1. $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

证： $\Rightarrow$ 往证 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

设 $\beta \sim \alpha$，则 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$,

因此 $\beta - \alpha = o(\alpha)$，即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

$\Leftarrow \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = 1 \quad \therefore \beta \sim \alpha$

o具有下面性质

(1) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})\ (x \to 0)$ 其中$n, m > 0$

(2) $o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)\ (x \to 0)$ 其中$n > m > 0$

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o(x^n) + o(x^m)}{x^m} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o(x^n)}{x^n} \cdot x^{n-m} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o(x^m)}{x^m} = 0$

定理2.(利用等价无穷小代换求极限)

设$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在, 则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$

推广 ① $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} f = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'} f$

② $\lim \alpha f = \lim \alpha' f$

③ 当$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} \neq 1$时, $\lim(\alpha - \beta) f = \lim(\alpha' - \beta') f$

例 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^3 + 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3 + 3x} = \dfrac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\frac{1}{2}x^3} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin x}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - x}{\frac{1}{2}x}$$

$$= 2$$

定理2.(利用等价无穷小代换求极限)

设$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

推广 ① $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}f=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}f$

② $\lim\alpha f=\lim\alpha' f$

③ 当$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}\neq 1$时,$\lim(\alpha-\beta)f=\lim(\alpha'-\beta')f$

证明 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

说明:在求$\dfrac{0}{0}$型极限时,把分子分母因式中无穷小换成与其等价的无穷小,这种替换有时可使极限计算简化。

注意:无穷小代换只能**对乘除因子使用**,建议不要对加减项使用,否则可能会得到错误的答案。

定理2.(利用等价无穷小代换求极限)

设$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$

推广 ① $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} f = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'} f$

② $\lim \alpha f = \lim \alpha' f$

③ 当$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} \neq 1$时, $\lim(\alpha - \beta) f = \lim(\alpha' - \beta') f$

应记应背常用等价代换公式 当$f(x) \to 0$时

$$f(x) \sim \sin f(x) \sim \arcsin f(x) \sim \tan f(x) \sim \arctan f(x)$$

$$\sim e^{f(x)} - 1 \sim \ln[1 + f(x)]$$

$$[1 + f(x)]^a - 1 \sim af(x), \quad a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \ln a$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{1}{2} f^2(x)$$

三典型题 1. 利用等价无穷小求参数

例 若$x \to 0$时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$x\sin x$是等价无穷小，则$a=$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=1 \quad \therefore\ a=-4$

2. 利用等价无穷小求极限

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot\ln(1-x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{-x}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{2}$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(e^{x^2}-1)(1-\cos\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^2\cdot\frac{1}{2}x}$$

$$=1$$

三典型题 3. 无穷小阶数比较

并非任何两个无穷小均可比较阶的高低

如：当$x \to 0$时，$x\sin\frac{1}{x}$与x不能比较

例 设当$x \to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数n等于（ ）

$(A)\,1$ $(B)\,2$ $(C)\,3$ $(D)\,4$

解

$$\left.\begin{aligned} &x \to 0\text{时}, (1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \frac{1}{2}x^4 \\ &x\sin x^n \sim x^{1+n} \\ &e^{x^2}-1 \sim x^2 \end{aligned}\right\} 4 > 1+n > 2 \quad \therefore n = 2$$

思考题 求证：$x \to 0^+$时，$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$.

证：$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x})$

当$x \to 0^+$时，

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\ln(1-\sqrt{x}) = \ln(1+(-\sqrt{x})) \sim (-\sqrt{x})$$

$$\therefore \ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}.$$