

第八章

空间解析几何与向量代数

§ 1 向量及其线性运算

§ 2 数量积 向量积 混合积

§ 3 平面及其方程

§ 4 空间直线及其方程

§ 5 曲面及其方程

§ 6 空间曲线及其方程

第三节

平面及其方程



内容

- 一、曲面方程与空间曲线方程的概念
- 二、平面方程
- 三、两平面的夹角

一、曲面方程与空间曲线方程的概念

1. 曲面方程的定义

曲面的实例:水桶的表面、台灯的罩子面等

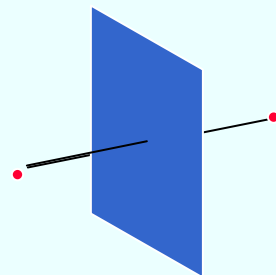
引例: 求到两定点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 等距离的点的轨迹方程.

解: 设轨迹上的动点为 $M(x, y, z)$, 则 $|AM| = |BM|$, 即

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}$$

化简得 $2x - 6y + 2z - 7 = 0$

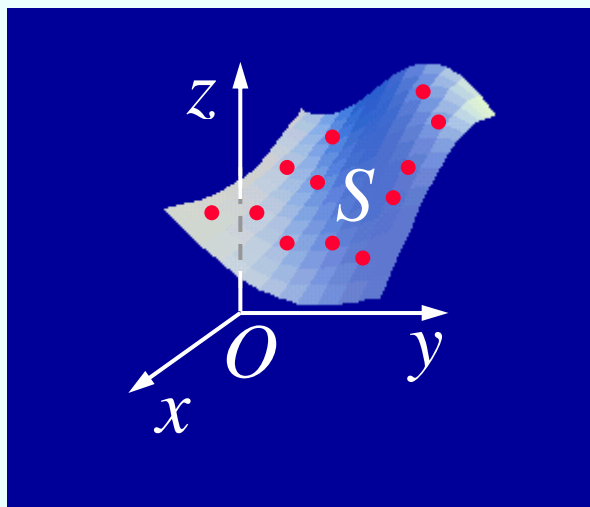
说明: 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.
显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,
不在此平面上的点的坐标不满足此方程.



一、曲面方程与空间曲线方程的概念

1. 曲面方程的定义

■ (x, y, z)



$$F(x, y, z) = 0$$

求解一张曲面的方程就是将其点的制约关系用代数方程加以表示

点 (x, y, z) 落在曲面上,其坐标受到某种制约, $F(x, y, z) = 0$;
满足方程 $F(x, y, z) = 0$ 点的全体在空间的几何形状就是曲面

1. 曲面方程的定义

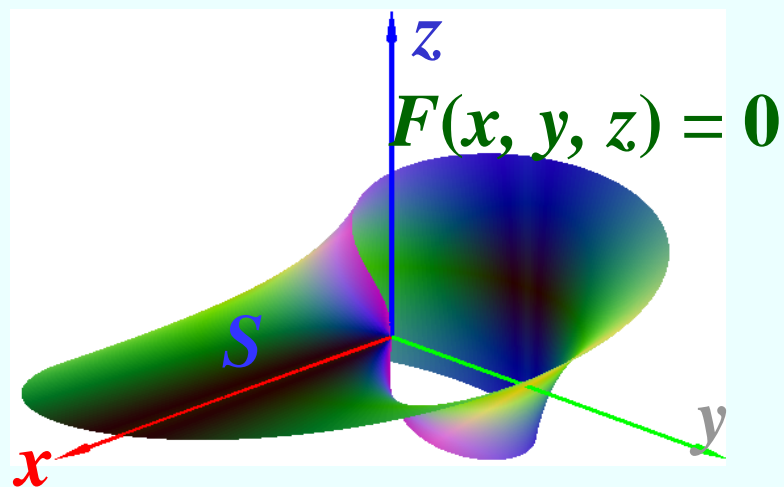
定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.



莫比乌斯带

德国数学家1790 ~ 1868

1. 曲面方程的定义

定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.

两个基本问题:

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,求曲面方程.

(2) 已知方程时,研究它所表示的几何形状(必要时需作图)

二、平面方程

1.点法式方程

定义： 如果一个非零向量垂直于一平面，这向量称平面的法线向量 \vec{n}

分析 过空间任一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线

所以当平面 Π 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

和它的一个法线向量 $\vec{n} = (A, B, C)$

为已知时，平面 Π 的位置就完全确定了.

下面我们来建立平面 Π 的方程.

二、平面方程

1.点法式方程

设平面 Π 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 来确定平面 Π 的方程

$$\forall M(x, y, z) \in \Pi, \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$\text{则有 } \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

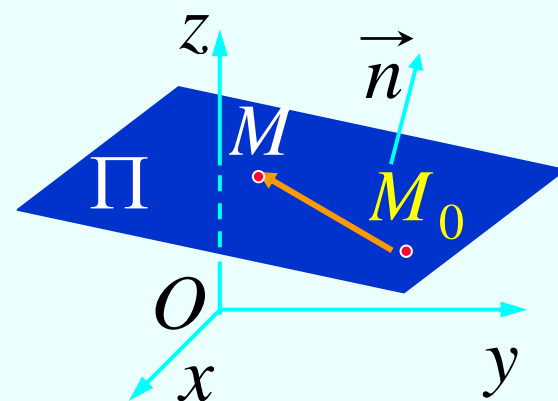
$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\text{故 } \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

反过来, 如果 $M(x, y, z) \notin \Pi$,

$\overrightarrow{M_0M}$ 与 \vec{n} 不垂直, 从而 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \neq 0$

不在平面 Π 上点不满足方程



平面的点法式方程

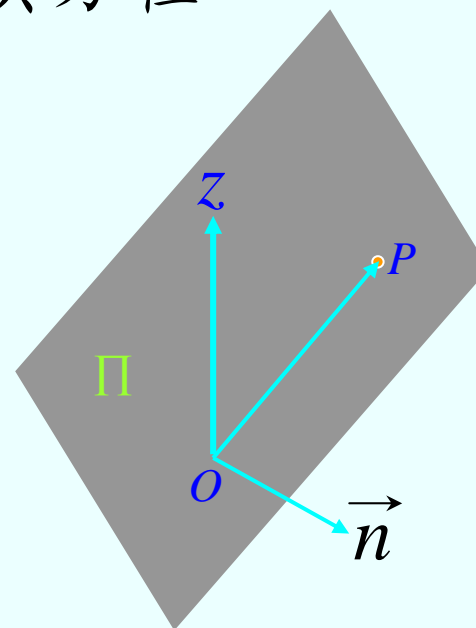
例3.平面过点 $P(2,3,4)$ 及 z 轴, 求其方程

解: 法向量

$$\vec{n} = (2 \ 3 \ 4) \times (0 \ 0 \ 1)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3, -2, 0)$$



用点法式得平面方程

$$3(x-2) - 2(y-3) + 0(z-4) = 0$$

$$\text{即 } 3x - 2y = 0$$

例4.求过三点 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$, $M_3(0, 2, 3)$ 的平面 Π 的方程.

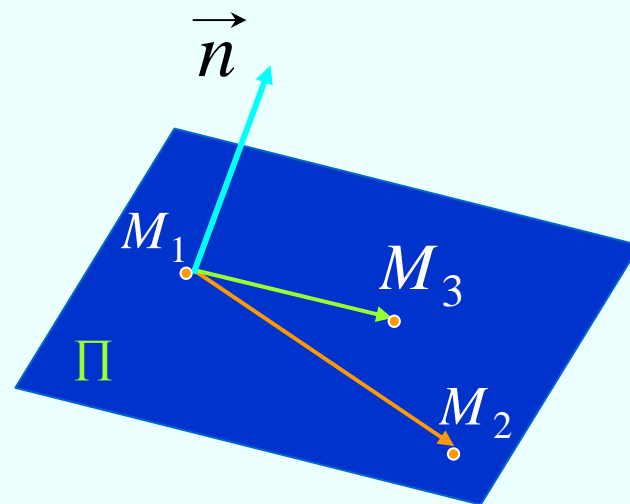
解: 取该平面 Π 的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (14, 9, -1)\end{aligned}$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

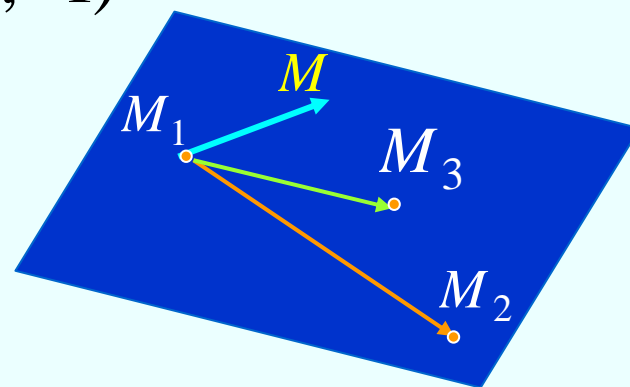
$$\text{即 } 14x + 9y - z - 15 = 0$$



例4.求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

解: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 4, 6)$ $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$

$$\overrightarrow{M_1M} = (x-2 \quad y+1 \quad z-4)$$
$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$



2. 三点式方程

过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1, 2, 3$) 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

3. 一般式方程

分析 点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0) \quad (1)$$

反过来,设有三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$, (A,B,C 不同时为零)

取满足方程的一组数 x_0, y_0, z_0 即 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$,

两式相减得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (2)

(1)与(2)同解表示平面法向量为 (A, B, C) 过点 (x_0, y_0, z_0)

三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A,B,C \text{不同时为零})$$

的图形是平面,以 (A, B, C) 为法向量,过点 (x_0, y_0, z_0)

称为平面的一般方程

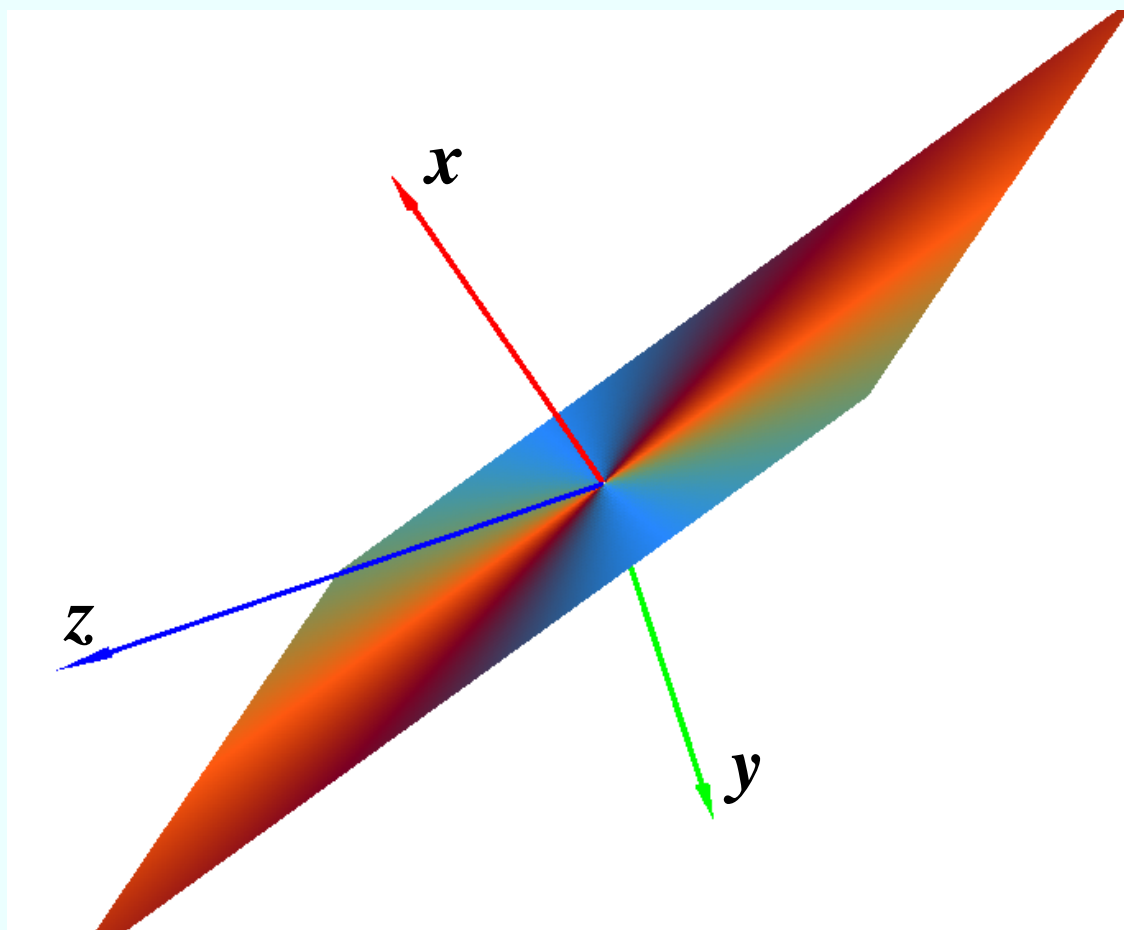
3. 一般式方程

几个特殊的平面

(1) $D=0$

$$Ax+By+Cz=0$$

特点：过原点的平面



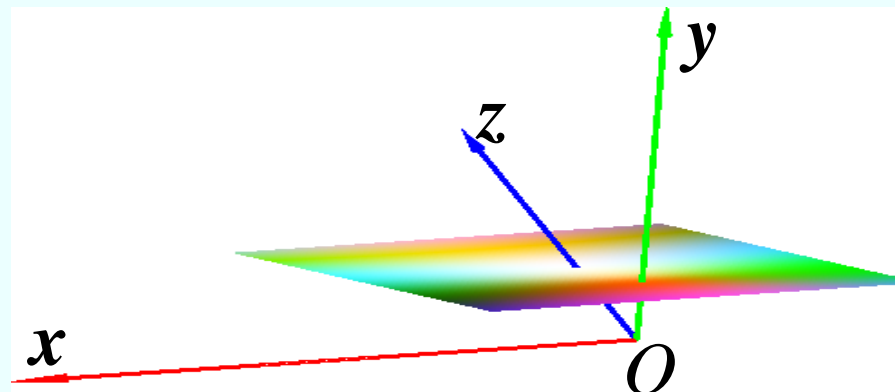
(2) 平行于坐标轴的平面

当 $A=0$ 时

$$By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i},$$

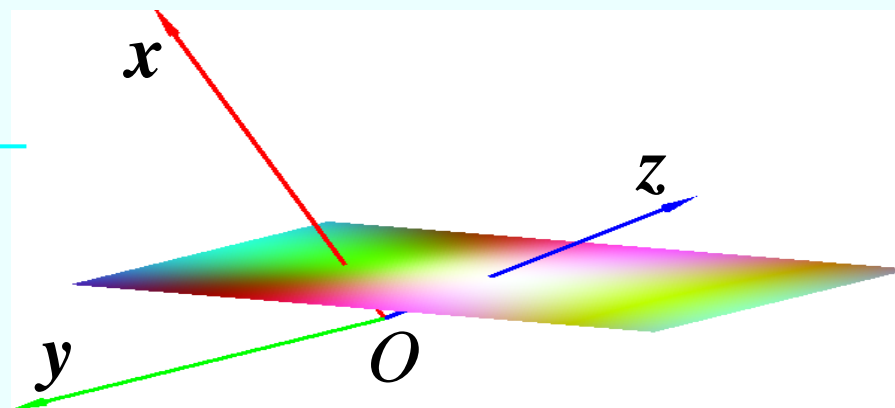
特点 平面平行于 x 轴



当 $B=0$ 时

$$Ax + Cz + D = 0$$

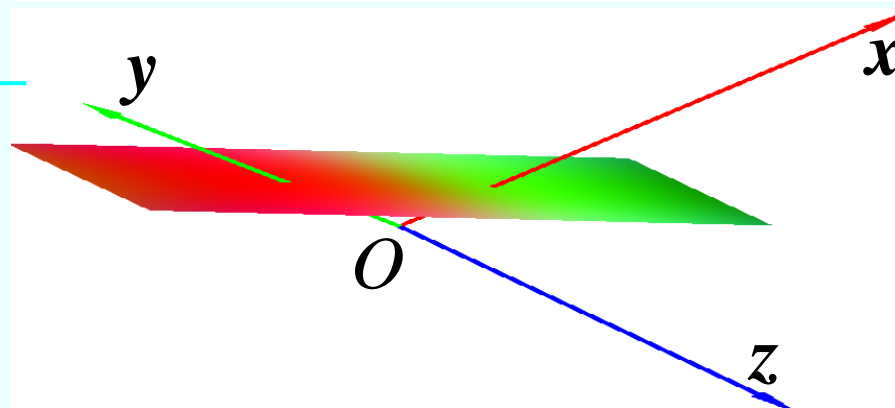
特点 平面平行于 y 轴



当 $C=0$ 时

$$Ax + By + D = 0$$

特点 平面平行于 z 轴

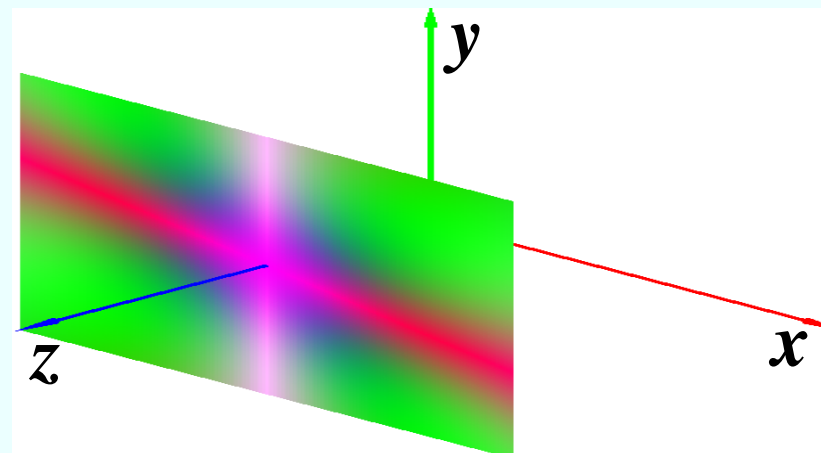


(3) 平行于坐标面的平面

当 $A=B=0$ 时

$$Cz+D=0$$

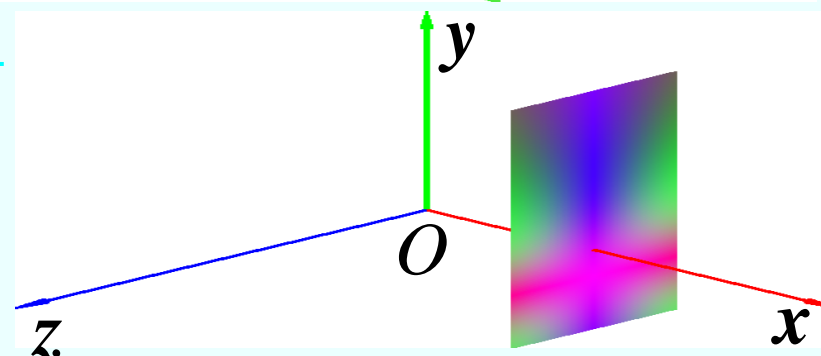
特点: 平行于 xOy 面的平面



当 $B=C=0$ 时

$$Ax+D=0$$

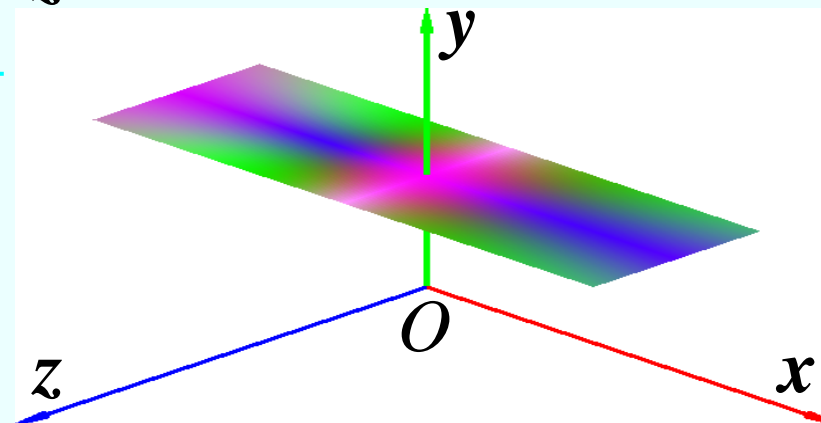
特点: 平行于 yOz 面的平面



当 $A=C=0$ 时

$$By+D=0$$

特点: 平行于 zOx 面的平面



上例3. 平面过点 $P(2,3,4)$ 及 z 轴, 求其方程

解法一: 设平面方程 $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{平行 } z \text{ 轴} \Rightarrow C = 0 \\ \text{经过原点} \Rightarrow D = 0 \end{array} \right\} Ax + By = 0$$

代入 $(2,3,4)$ 得 $3x - 2y = 0$

解法二: 平面经过不共线三点

$(0 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1), (2 \ 3 \ 4)$

由一般式代入三点

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 0 \\ C + D = 0 \\ 2A + 3B + 4C + D = 0 \end{array} \right. \quad \text{得 } 3x - 2y = 0$$

4. 截距式方程

设平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$, $R(0, 0, c)$, $abc \neq 0$, 求平面的方程

解 设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$

经过三点有

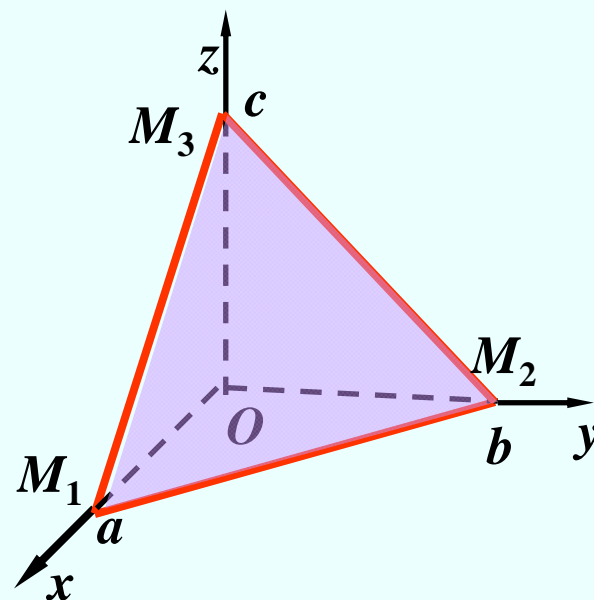
$$\begin{cases} aA + D = 0 \\ bB + D = 0 \\ cC + D = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} A = -\frac{D}{a} \\ B = -\frac{D}{b} \\ C = -\frac{D}{c} \end{cases}$$

所求平面方程 $-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

称为平面的**截距式方程**

a, b, c 为平面在 x, y, z 轴上的截距



三、两平面的夹角

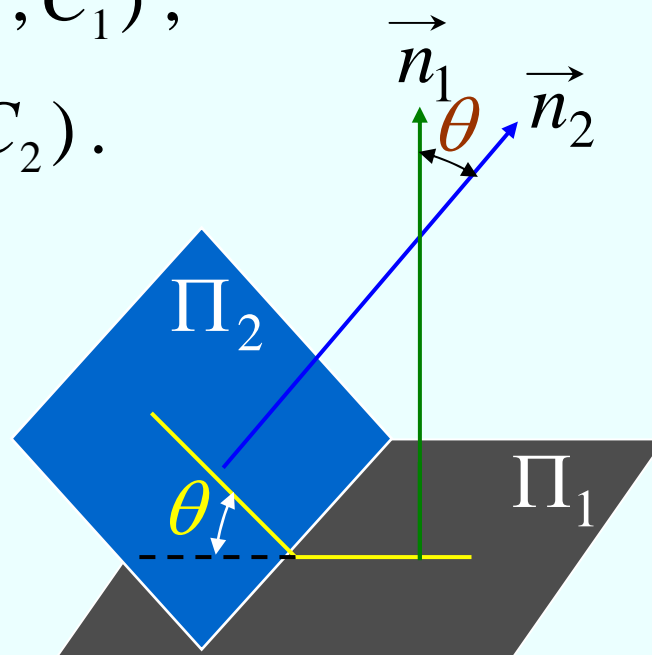
定义：两平面法向量的夹角（常指锐角）称为
两平面的夹角。

设平面 Π_1 的法向量为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$,

平面 Π_2 的法向量为 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

则两平面夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$
$$= \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



三、两平面的夹角

定义：两平面法向量的夹角（常指锐角）称为
两平面的夹角。

设平面 Π_1 的法向量为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$,

平面 Π_2 的法向量为 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

则两平面夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$
$$= \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

例5：求两平面

$x - y + 2z - 6 = 0$ 和
 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角

解 $\cos \theta = \frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}}$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

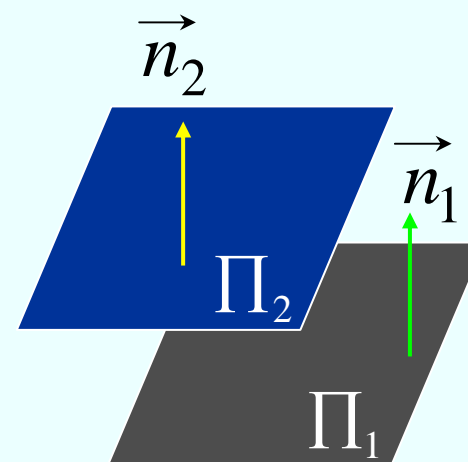
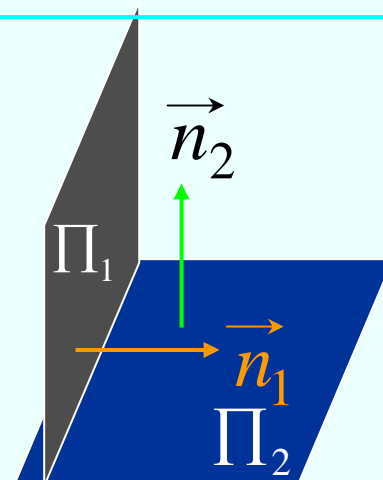
$$\begin{aligned} \Pi_1 : \vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1) \\ \Pi_2 : \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2) \end{aligned} \quad \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

说明:

(1) Π_1 与 Π_2 互相垂直 $\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

(2) Π_1 与 Π_2 互相平行 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

(3) Π_1 与 Π_2 重合 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$



例6. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\Pi: x + y + z = 0$, 求其方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$,

则因为 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \rightarrow -A + 0 \cdot B - 2C = 0,$

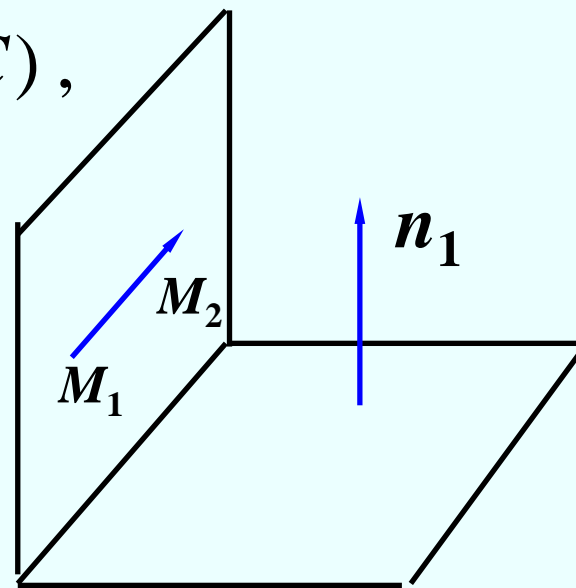
$\vec{n} \perp \Pi$ 的法向量 $\rightarrow A + B + C = 0,$

$$A = -2C \quad B = -(A + C) = C$$

因此有 $-2\cancel{C}(x-1) + \cancel{C}(y-1) + \cancel{C}(z-1) = 0 \quad (C \neq 0)$

约去 C , 得 $-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$

则所求平面 $2x - y - z = 0$



例6. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\Pi: x + y + z = 0$, 求其方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$,

则因为 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$

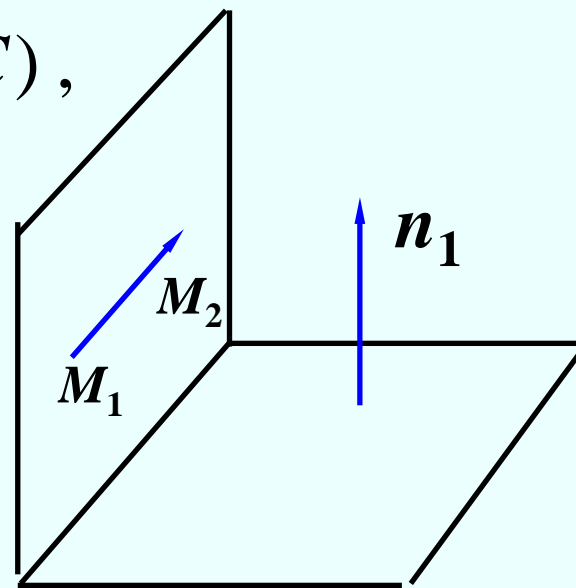
法2 $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$

$\vec{n} \perp \Pi$ 的法向量

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$

则所求平面 $-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$

即 $2x - y - z = 0$



例7. 求与已知平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行且与三个坐标面所构成的四面体体积为1的平面方程

解: 设平面方程为 $2x+y+2z=D$

化成截距式 $\frac{x}{D/2} + \frac{y}{D} + \frac{z}{D/2} = 1$

在三个坐标轴上的截距

$$a = \frac{D}{2}, b = D, c = \frac{D}{2}$$

$$\text{则 } V = \frac{1}{6} |abc| = \frac{1}{24} |D|^3 = 1$$

$$\text{解得 } D = \pm 2\sqrt[3]{3}$$

$$\text{则所求平面方程为 } 2x + y + 2z = \pm 2\sqrt[3]{3}$$

例8. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离 d .

解: 设平面法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 P_0 到平面的距离为

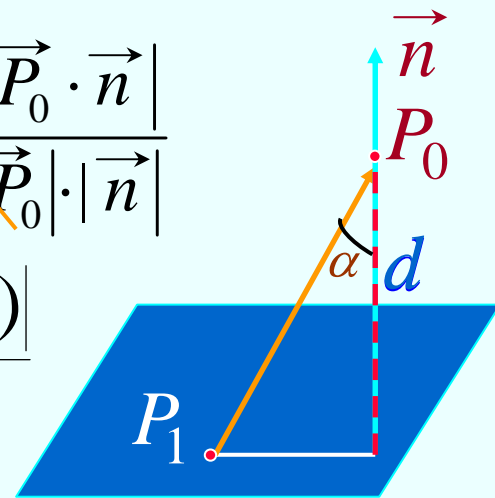
$$d = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \left| \overrightarrow{P_1 P_0} \right| \cdot |\cos \alpha| = \cancel{\left| \overrightarrow{P_1 P_0} \right|} \frac{\left| \overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} \right|}{\cancel{\left| \overrightarrow{P_1 P_0} \right|} \cdot \left| \vec{n} \right|}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(点到平面的距离公式)



点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

例9 求点 $(2, 1, 1)$ 到平面 $x + y - z + 1 = 0$ 的距离.

解 $d = \frac{|2 + 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

说明: (1) $P_0 \in \Pi \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

(2) 若有 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$,

P_1 与 P_2 位于 Π 同侧

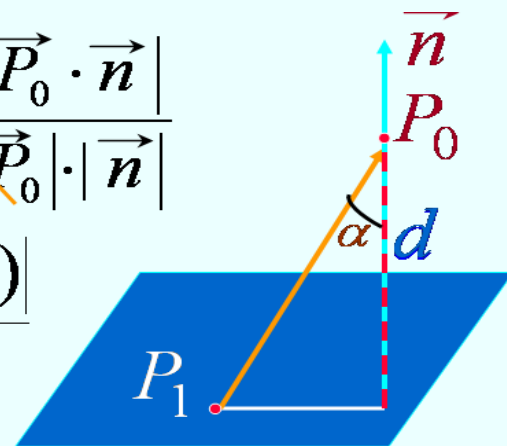
P_1 与 P_2 位于 Π 两侧

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}| = |\overrightarrow{P_1 P_0}| \cdot |\cos \alpha| = \overbrace{|\overrightarrow{P_1 P_0}|}^{>0} \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{P_1 P_0}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \begin{matrix} > 0 & \text{法线指向与 } P_0 \text{ 在同一侧} \\ & \text{(点到平面的距离公式)} \end{matrix}$$



说明: (1) $P_0 \in \Pi \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

(2) 若有 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$,

P_1 与 P_2 位于 Π 同侧

$$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) \cdot (Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0$$

P_1 与 P_2 位于 Π 两侧

$$\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) \cdot (Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$$

