第四章

不定积分

§1　不定积分的概念与性质

§2　换元积分法

§3　分部积分法

§4　有理函数的积分

第四节

有理函数的积分

内容

一、有理函数积分法

二、三角函数的不定积分

三、无理函数的不定积分

四、分段函数的不定积分

一、有理函数积分法

1. 有理函数的定义

定义 函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$ $(a_0b_0\neq 0)$

称为有理函数,当 $n<m$ 时,称真分式,当 $n\geq m$ 时,称假分式.

$\dfrac{2x^3-5x^2+3}{x^4+x^3-7x^2+2x-8}$,真分式 $\quad\quad$ $\dfrac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}$,假分式

假分式一定可以化成一个多项式与一个真分式之和.

$$+2x^2-x^2-1+4$$

$$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}$$

2. 真分式的分解式

对于真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$$Q(x) = b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$$

$$(p^2-4q<0,\quad r^2-4s<0)$$

如果 $Q(x)$ 含 $(x-a)^{\alpha}$ 则分解后有 $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}$

如果 $Q(x)$ 含 $(x^2+px+q)^{\lambda}$ 分解后有 $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\dfrac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}}$

设 $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \boxed{\frac{A_1}{x-a}}+\cdots+\boxed{\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}$$

$$+\boxed{\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}}+\cdots+\boxed{\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}}}+\frac{S_1x+T_1}{x^2+rx+s}+\cdots+\frac{S_{\mu}x+T_{\mu}}{(x^2+rx+s)^{\mu}}$$

称之为把真分式化成**部分分式**之和.

用待定系数法
进行系数比对

例1. 求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$

解: 分解部分分式 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$$= \frac{(A+2B)x^2 + (B+2C)x + A + C}{(1+2x)(1+x^2)} \Rightarrow \begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5} \\ B=-\frac{2}{5} \\ C=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

设 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \boxed{\frac{A_1}{x-a}} + \cdots + \boxed{\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$

$+ \boxed{\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}} + \cdots + \boxed{\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}} + \frac{S_1x+T_1}{x^2+rx+s} + \cdots + \frac{S_\mu x+T_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$

称之为把真分式化成**部分分式**之和.

用待定系数法进行系数比对

3.四种典型部分分式的积分:

① $$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

② $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

③ $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

$$= \int \frac{\frac{M}{2}\,d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{>0}}\,\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})$$

④ $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$$

$$\left(\begin{matrix} p^2-4q<0 \\ n \neq 1 \end{matrix}\right)$$

$$= \int \frac{\frac{M}{2}\,d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{[(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}]^n}\,\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})$$

例1. 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$

解:分解部分分式 $\displaystyle\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$$= \frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+A+C}{(1+2x)(1+x^2)} \longrightarrow \begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{4}{5} \\ B=-\dfrac{2}{5} \\ C=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

原式$= \displaystyle\frac{2}{5}\int \frac{d(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

例2. 求$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

部分分式法 设$\frac{x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

比较系数法A=1,B=0,C=-1,D=0

于是 $I=\int(\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C$

凑微分法 $\int\frac{x^3}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}(x^2+1)$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

分项积分法$\int\frac{x^3}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^3+x-x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

例3. 求 $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$

特殊问题常可采取某些技巧

解 原式$=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}$

例4. 求 $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$

解 令x-1=t 则dx=dt

原式$=\int \frac{(1+t)^2}{t^{100}}\mathrm{d}t$

例5. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)}$

解 采取倒代换 $x=\frac{1}{t}$

原式$=\int \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t^4}(\frac{1}{t^2}+1)}=-\int \frac{t^4\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$=-\int \frac{t^4+t^2-t^2-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

二、三角函数的不定积分

形如 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ R表示有理函数:多项式及多项式的商

被积函数特点 **解决方法**

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

一般式 **恒等变形**

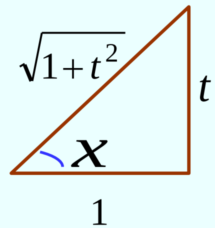
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$ 令 $t = \cos x$ ①凑出$\cos x$后换元$\cos x = t$

②直接换$t = \cos x$

$R(\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$ 令 $t = \sin x$



$R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x)$ 令 $t = \tan x$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

上述特点均不满足 令 $t = \tan\frac{x}{2}$

万能公式

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2dt}{1+t^2}$$

例1. 求 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解: 原式

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{t} + t + C$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

例2. 求 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$

解: 原式 $= \int \frac{\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^4 x + 1}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\tan x}{\tan^4 x + 1}\mathrm{d}\tan x$$

$$= \int \frac{t}{t^4 + 1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4 + 1}\mathrm{d}t^2$$

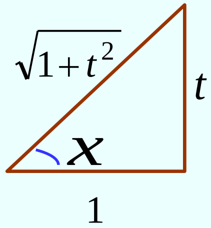
$$= \frac{1}{2}\arctan(\tan x)^2 + C$$

凑元

例3. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$

直接换

解: 令 $t=\tan x \quad x=\arctan t \quad \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$



$$\text{原式}=\int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{3+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}t}{3+4t^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\frac{2t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$$

例4. 求$\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2dt}{1+t^2}$$

解: 令$t=\tan\frac{x}{2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int \frac{A\sin x + B\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

将分子变成与分母相同的部分和分母求导形式

例5. 求 $\displaystyle\int \frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

解: $2\sin x - 3\cos x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x)$

$$= (A - B)\sin x + (A + B)\cos x$$

$$\begin{cases} A - B = 2 \\ A + B = -3 \end{cases} \quad \text{解得}\ A = -\frac{1}{2},\ B = -\frac{5}{2}$$

$$\text{原式} = \int \frac{-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{5}{2}(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C$$

三、无理函数的不定积分

被积函数特点 解决方法

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$ 令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$;

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x,$$ 令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$;

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$ 令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$,

p为m,n的最小公倍数.

例1. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

解: 令 $t=\sqrt[6]{x}$ 　则 $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$

$$原式 = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3}$$

$$= 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\int (1-\frac{1}{1+t^2})\,\mathrm{d}t$$

$$= 6(t-\arctan t)+C$$

$$= 6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$$

例2. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 　则 $x=\frac{1}{t^2-1}$

$$\mathrm{d}x = -\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$$

$$原式 = \int (t^2-1)\cdot t\cdot \frac{-2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$$

$$= -2\int \frac{t^2 -1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int 2+(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})\,\mathrm{d}t$$

$$= -2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}\right|+C$$

例3. 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

解: 令 $x-1=\dfrac{1}{t}$ 　则 $x=\dfrac{1}{t}+1$ 　于是 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int\frac{-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\dfrac{1}{t}\sqrt[3]{(\dfrac{1}{t}+2)^2\cdot\dfrac{1}{t}}}$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^{2/3}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2t+1)}{(2t+1)^{2/3}}$$

$$=-\frac{3}{2}(2t+1)^{1/3}+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$$

四、分段函数的不定积分

i） $f(x)=\begin{cases}\Phi_1(x) & x\le x_0\\ \Phi_2(x) & x>x_0\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\int\Phi_1(x)\mathrm{d}x & x<x_0\\ \int\Phi_2(x)\mathrm{d}x & x>x_0\end{cases}=\begin{cases}F_1(x)+c_1 & x<x_0\\ F_2(x)+c_2 & x>x_0\end{cases}$$

x_0另需讨论

说明：分别求函数的各分段支在相应区间内的原函数

考察在分界点处的连续性，如果连续,由原函数存在定理在包含该点的区间内有原函数存在,这时根据原函数的连续性定出积分常数．反之,函数的不定积分只能在不包含该点在内的每个分段区间内得到(不连续则不需讨论c_1,c_2）

例已知 $f(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ x^2+1 & 0\le x\le 1 \\ 2x^3 & x>1 \end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$

解: $x=0$是间断点, $x=1$是连续点,

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 2x+C_1 & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3+x+C_2 & 0<x<1 \\ \frac{1}{2}x^4+C_3 & x>1 \end{cases}$$

因为$x=1$为$f(x)$的连续点,所以$f(x)$的原函数在$x=1$连续

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{3}x^3+x+C_2=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{2}x^4+C_3$ 即 $\frac{4}{3}+C_2=\frac{1}{2}+C_3 \Rightarrow C_3=\frac{5}{6}+C_2$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 2x+C_1 & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3+x+C_2 & 0<x<1 \\ \frac{1}{2}x^4+\frac{5}{6}+C_2 & x\ge 1 \end{cases}$$

四、分段函数的不定积分

先写出分段函数,
再进行如上讨论

ii）$\int |f(x)| dx, \int \max\{\Phi_1, \Phi_2\} dx, \int \min\{\Phi_1, \Phi_2\} dx, \int \operatorname{sgn} f(x) dx$

例 计算 $\int e^{|x|} dx$

解:
$$e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ e^{x} & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + C_1 & x < 0 \\ e^{x} + C_2 & x > 0 \end{cases}$$

因为x=0为$f(x)$的连续点,所以$f(x)$的原函数在x=0连续

$$\lim_{x\to 0^-} -e^{-x} + C_1 = \lim_{x\to 0^+} e^{x} + C_2 \quad \text{即} -1 + C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -2 + C_1$$

$$\int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + C_1 & x < 0 \\ e^{x} - 2 + C_1 & x \geq 0 \end{cases}$$

第五节 积分表的使用

对初等函数来说,在其定义区间上,它的原函数一定存在,

但原函数不一定都是初等函数如

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

等等,都不是初等函数