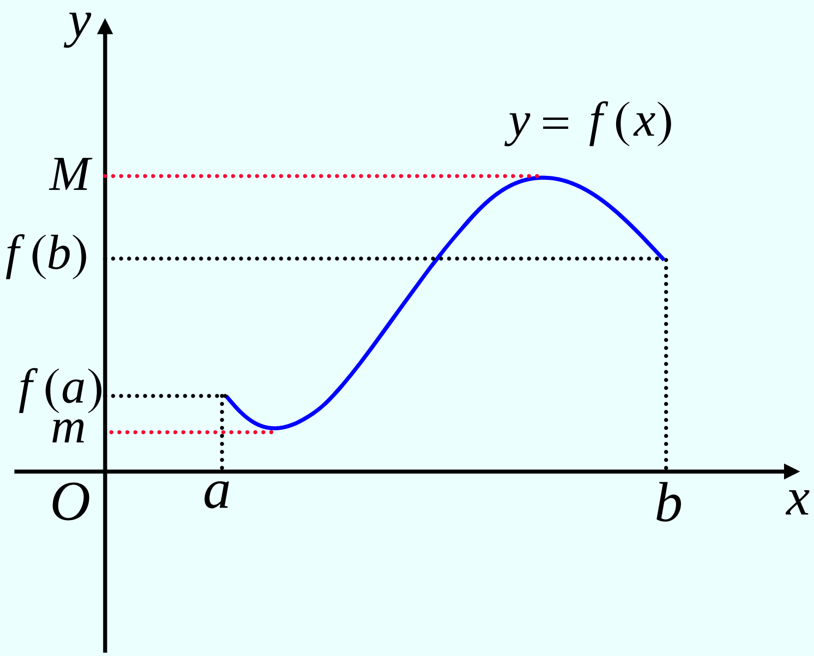
第十节

闭区间上连续函数的性质

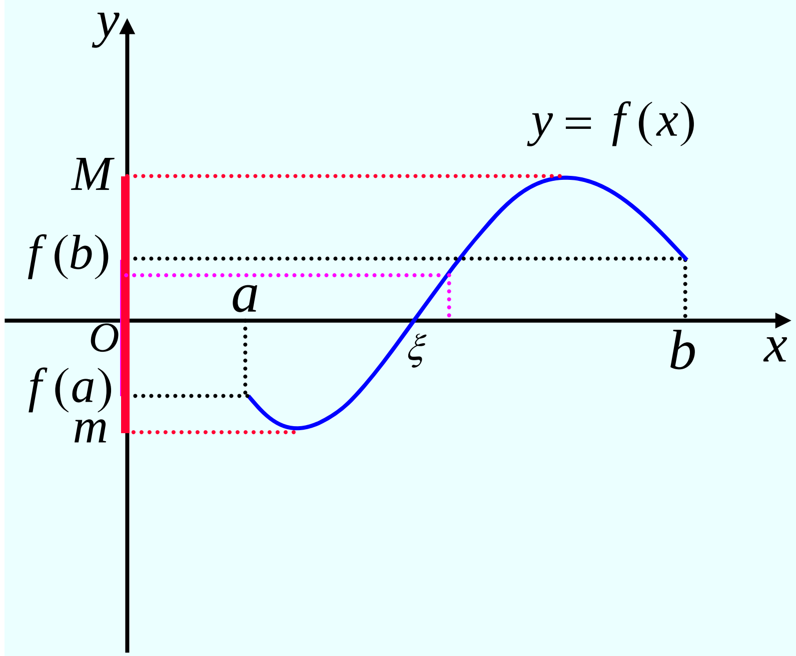


内容

一 有界性与最大值最小值定理

第十节

闭区间上连续函数的性质



内容

一 有界性与最大值最小值定理

二 零点定理与介值定理

一、有界性与最大值最小值定理

最值 设 $f(x), x \in I$, 如果 $x_0 \in I$, 使得 $\forall x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0)\ (\text{或} f(x) \ge f(x_0))$$

称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(或最小值)

例1 函数 $f(x) = 1 + \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 有最大值2和最小值0

例2 $f(x) = x$ 在 (a, b) 既无最大值又无最小值

注 并非任何函数都有最大值和最小值最值要能取到

定理1. (有界性与最大值最小值定理)
在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得最大值和最小值.

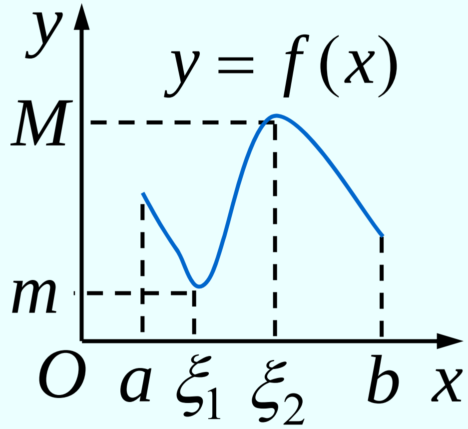
即若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\exists\ \xi_1,\xi_2\in[a,b]$,使

$$f(\xi_1)=\min_{a\le x\le b} f(x)=m$$

$$f(\xi_2)=\max_{a\le x\le b} f(x)=M$$

(证明略)

则$\forall x\in[a,b]$,有 $m\le f(x)\le M$

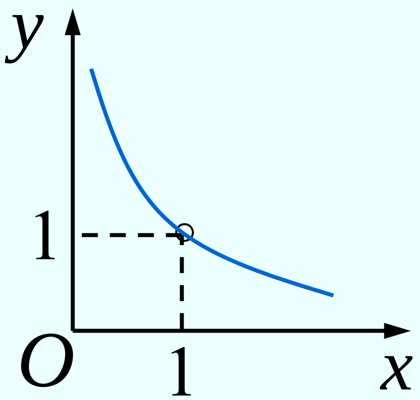


注 (1)定理1中的条件“闭区间”和“连续”是不可少的若函数在开区间上连续,或在闭区间内有间断点,结论不一定成立.

注 (1)定理1中的条件“闭区间”和“连续”是不可少的 若函数在开区间上连续,或在闭区间内有间断点,

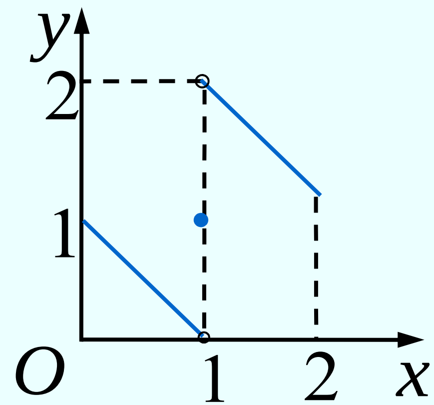
结论不一定成立 .

例如, $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内连续



无界,无最大值和最小值

如 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\\ -x+3, & 1<x\le 2\end{cases}$



有界,无最大值和最小值

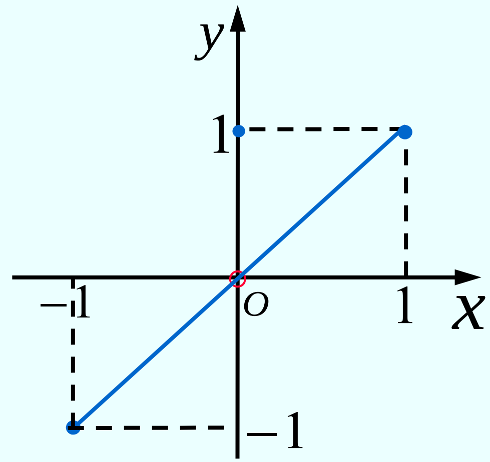
注 (2) “**闭区间**” 和 “**连续**” 仅是定理的充分条件，非必要条件

例 $y=\sin x$在$(0,2\pi)$内连续

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 取得最大值1

$x=\dfrac{3\pi}{2}$ 取得最小值-1

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-1,1], x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$



最大值1和最小值-1

二、零点定理与介值定理

零点：如果x_0使$f(x_0)=0$，则称x_0为**函数$f(x)$的零点**

方程$f(x)=0$的根

定理2. (零点定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a),f(b)$异号(即$f(a)f(b)<0$)

则在(a,b)内至少有一点ξ, 使$f(\xi)=0$;

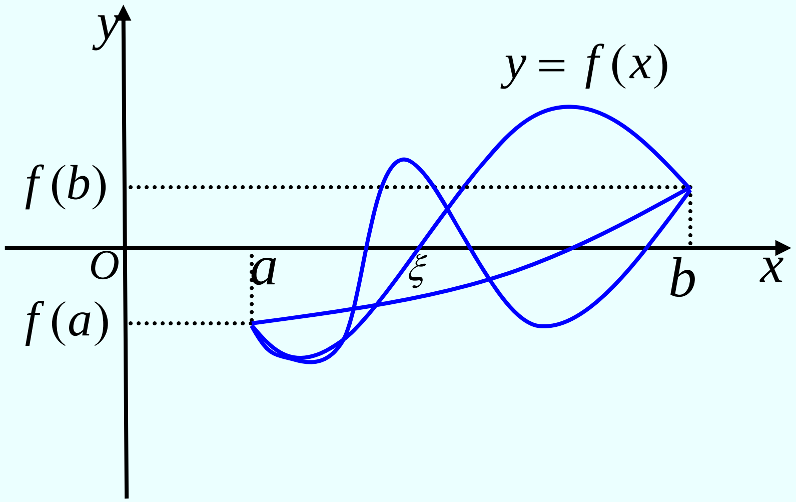
若$f(x)$在$[a,b]$是单调的,则点ξ是唯一的;

若$f(a)f(b)\le 0$至少$\exists \xi \in [a,b],\ f(\xi)=0$

几何解释

如果连续曲线弧$y=f(x)$的两个端点位于x轴不同侧则该弧与x轴至少有一个交点,单调时就一个交点

(证明略)



何时用：零点定理常常被用来证明方程根的存在性，

或曲线弧与x轴有交点问题

解题关键：构造辅助函数 $f(\xi)=0 \xrightarrow{\text{分析出}} f(x)$

例1 设 $f(x)=e^x-2$，求证在(0,2)内至少有一个点x_0，

使$\boxed{e^{x_0}-2=x_0}$

证明 令$F(x)=e^x-2-x$

显然$F(x)$在[0,2]上连续

$\because F(0)=-1<0,\ F(2)>0$

由零点存在定理，

$\exists x_0\in(0,2)$，使$F(x_0)=0$ 得证

分析

$e^{x_0}-2-x_0=0$

e^x-2-x 代入x_0

例2 证明方程$x^3-4x+1=0$在区间$(0,1)$内只有一个根

或证明曲线$y=x^3-4x+1$在x轴0与1之间只有一个交点

证明

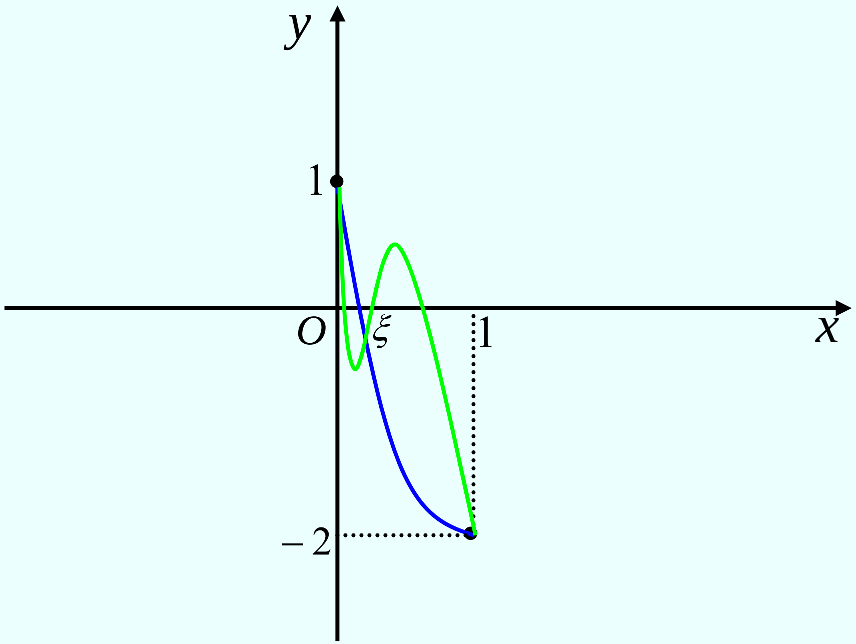
草图

$y=x^3-4x+1$在$[0,1]$上连续,

$f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0$

由零点定理, 至少存在一点

$\xi\in(0,1)$,使$f(\xi)=0$,



$f(x)=0$ 是三次代数方程,

至多有三个实根

例2 证明方程$x^3-4x+1=0$在区间(0,1)内$\boxed{\text{只有}}$一个根

或证明曲线$y=x^3-4x+1$在x轴0与1之间$\boxed{\text{只有}}$一个交点

证明

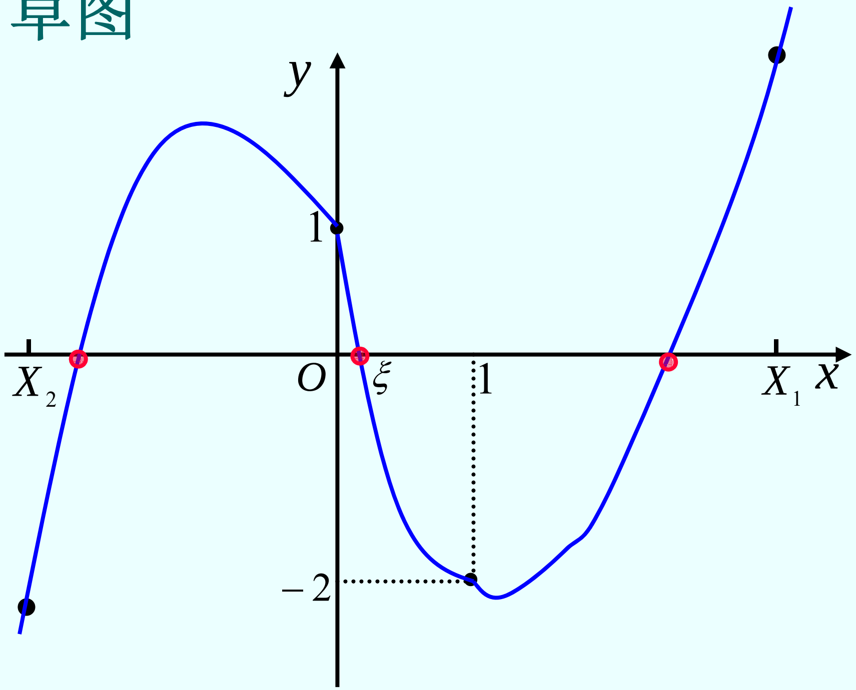
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \exists X_1>0, f(X_1)>0$

在$(1, X_1)\subset(1,+\infty)$内至少有一个根

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \exists X_2<0, f(X_2)<0$

在$(X_2,0)\subset(-\infty,0)$内至少有一个根

草图



$f(x)=0$ 是三次代数方程,

至多有三个实根

可见(0,1)内只有一个根

二、零点定理与介值定理

定理3. (介值定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续且 $f(a)=A,\ f(b)=B,\ A\neq B$,则对A与B $\boxed{\text{之间的任一数 } C,\text{至少有一点 } \xi\in(a,b)}$, 使 $f(\xi)=C$.

若设$A<B,\forall C,$ $\boxed{A\le C\le B,\text{则}\exists\xi\in[a,b]}$, 使$f(\xi)=C$

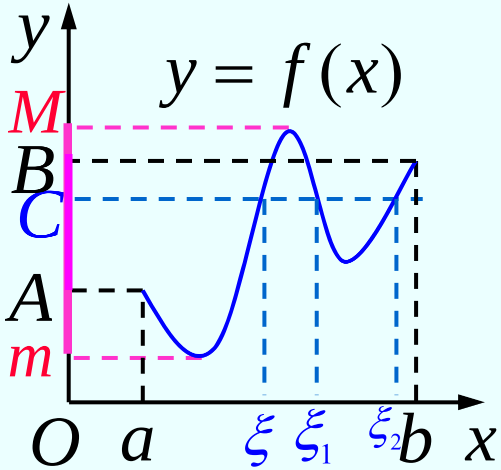
证: 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-C$

则$\varphi(x)$是$[a,b]$上连续函数,且

$$\varphi(a)\,\varphi(b)=(A-C)(B-C)<0$$

由零点定理，至少有一点$\xi\in(a,b)$,

使$\varphi(\xi)=0$， 即 $f(\xi)=C$.



推论: 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值 .

例3 设 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^n, n=2,3,\cdots$

证明：$f(x)=1$在$(0,1)$内至少有一个实根

$f(x)=1.5$ $f(x)=\sqrt{2}$

证明 $f(x)$显然在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=0, f(1)=n>1$

$0<1<n$

由介值定理,在$(0,1)$内至少存在一点ξ使 $f(\xi)=1$

从而$f(x)=1$在$(0,1)$内至少有一个实根

命题是证明函数值等于某数时,考虑利用介值定理

定理3. (介值定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$,则对A与B之间的任一数C,至少有一点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=C$.

若设$A<B,\forall C,\boxed{A\le C\le B,\text{则}\exists\xi\in[a,b]}$,使$f(\xi)=C$

设$f(x)$在$[a,b]$上最大值M，最小值m

$$m\le f(x_1),\ldots,f(x_n)\le M$$

$$\Rightarrow m\le\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}\le M$$

由介值定理 $\exists\xi\in[a,b]\subset(a,b)$

$$\text{使得}f(\xi)=\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

利用介值定理
注意闭区间连续,开区间取点

例5 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，证明必有$\xi\in[0,\frac{1}{2}]$

使$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$

证明 构造辅助函数

$$G(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$$

$G(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续

而$G(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$,

$$G(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})=f(0)-f(\frac{1}{2})$$

显然 $G(0)\cdot G(\frac{1}{2})\le 0$ 由零点定理必有$\xi\in[0,\frac{1}{2}]$，使$G(\xi)=0$

即$f(\xi+\frac{1}{2})-f(\xi)=0$

分析

$$f(\xi+\frac{1}{2})-f(\xi)=0$$

$f(x+\frac{1}{2})-f(x)$代入ξ

例6 证明方程$x=a\sin x+b$,其中$a>0,b>0$

则至少存在一个正根, 并且不超过$a+b$

证明 令$f(x)=a\sin x+b-x, x\in[0,a+b]$

$\because f(0)=b>0,$

$f(a+b)=a\sin(a+b)-a=a[\sin(a+b)-1]\le 0$

1)若$f(a+b)=0$, 则方程的根为$x=a+b>0$

2)若$f(a+b)\ne 0, f(0)>0, f(a+b)<0$

由零点存在定理$\exists\xi\in(0,a+b)$,使$f(\xi)=0$

$\therefore x=a\sin x+b$至少有一个正根且不超过$a+b$