# 第八章

## 空间解析几何与向量代数

§1 向量及其线性运算

§2 数量积 向量积 混合积

§3 平面及其方程

§4 空间直线及其方程

§5 曲面及其方程

§6 空间曲线及其方程

第八章

# 第六节

# 空间曲线及其方程


内容

一、空间曲线方程

二、空间曲线在坐标面上的投影

## 一、空间曲线方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

要求 $\begin{cases}\text{(1) } C\text{上任一点满足方程组;}\\\text{(2) 不在}C\text{上的点不满足方程组.}\end{cases}$

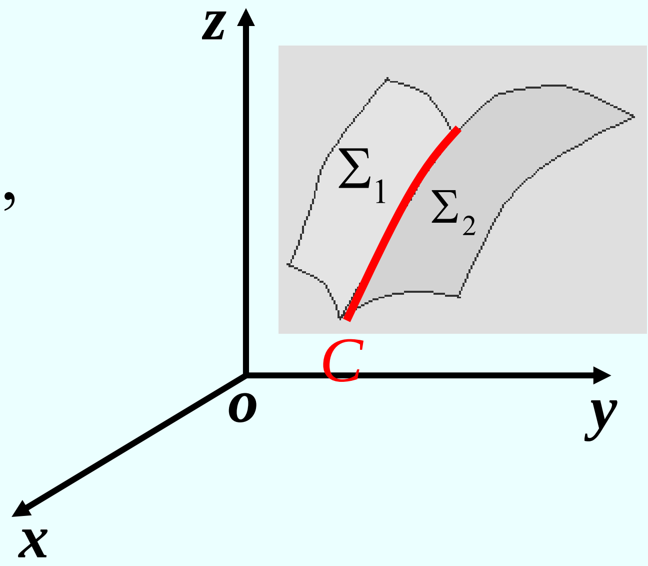
### 一般式

设两相交曲面方程为

$\Sigma_1: F(x,y,z)=0\,,\Sigma_2: G(x,y,z)=0\,,$

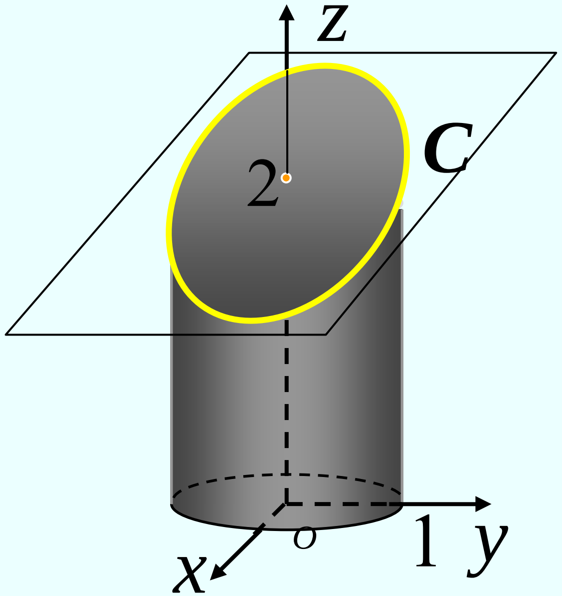
则相交曲线 $C$ 的方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$



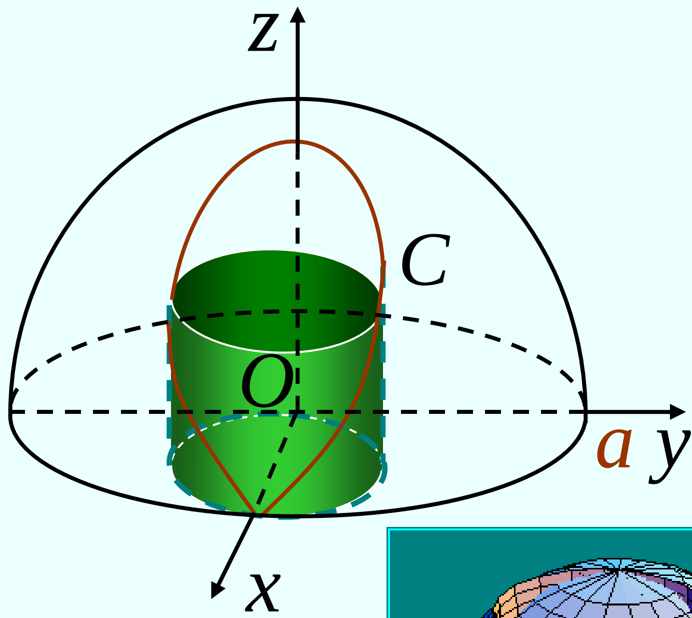
例方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$

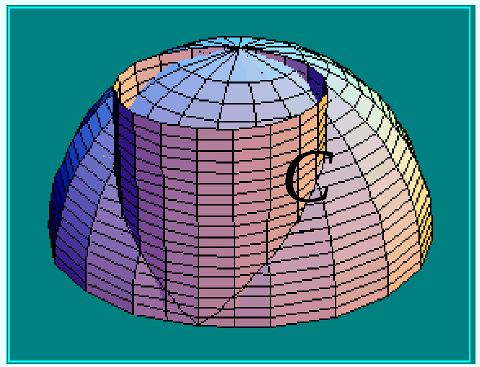
表示圆柱面与平面的交线




例方程组$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

表示上半球面与圆柱面的交线



**参数式** 把空间曲线看作质点的运动轨迹时，常采用参数表示法,将$C$上动点坐标$x,y,z$表示为参数$t$的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t\text{为参数} \\ z = z(t) \end{cases}$$

当给定$t=t_1$时,得到$C$上一点$(x_1,y_1,z_1)$,随着t的变动可得$C$上全部点

问题

参数式化一般式

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad f(x,y) = 0 \qquad g(y,z) = 0$$

一般式化参数式 对一般式中的一个变量赋予参数

将参数代入一般方程,求出另外两个变量的参数表达式

**例1.** 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

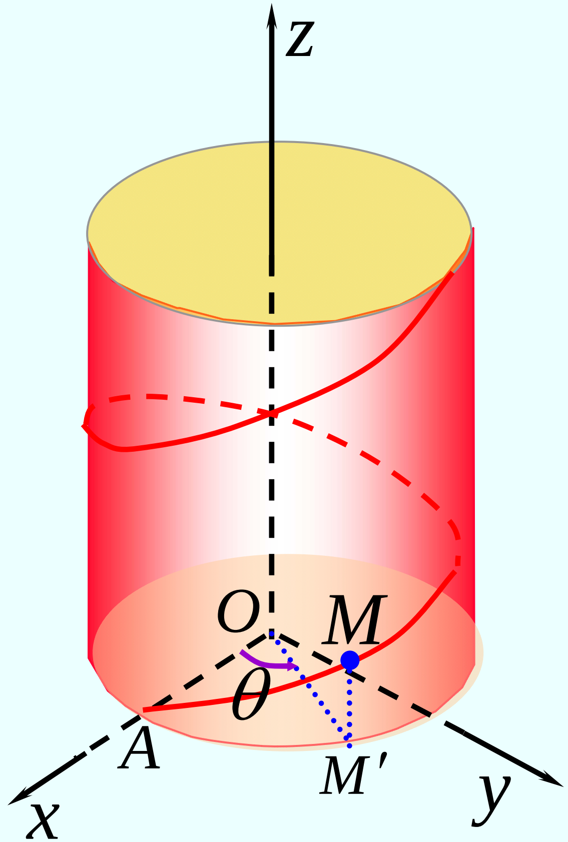
**解:** (1) 根据第一方程引入参数, 得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

**例2** 如果空间一点$M$在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以均匀的角速度$\omega$绕$z$轴旋转，同时又以线速度$v$沿平行于$z$轴的正方向上升($\omega, v$常数),那么点$M$构成的图形叫做螺旋线,试建立其参数方程.




**解** 取时间$t$为参数,

设当$t=0$时, 动点在$A(a,0,0)$

经过时间$t$,动点运动到$M(x,y,z)$

设$M$在$xoy$面上投影$M'(x,y,z)$

经过时间$t$, $\angle AOM'=\omega t$, $M'M=vt$

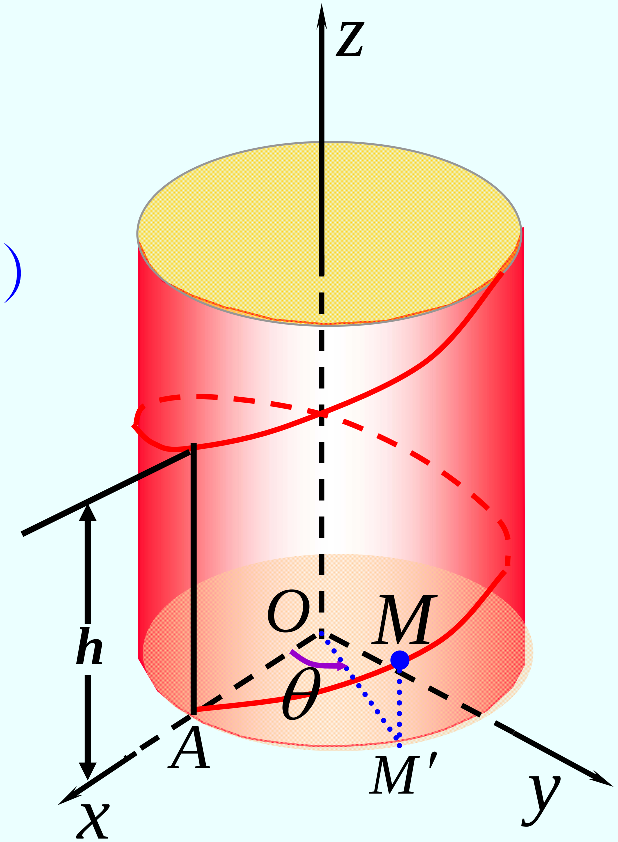
**螺旋线方程**

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases} \xrightarrow[b=\frac{v}{w}]{\text{令}\ \omega t=\theta} \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$$

（$\theta$为参数）

**例2** 如果空间一点$M$在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以均匀的角速度$\omega$绕$z$轴旋转，同时又以线速度$v$沿平行于$z$轴的正方向上升($\omega, v$常数),那么点$M$构成的图形叫做螺旋线,试建立其参数方程.

**解** **螺旋线方程** $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$ （$\theta$为参数）




螺旋线有一个重要性质:

当$\theta$从$\theta_0 \to \theta_0+\alpha$时, $z$从$b\theta_0 \to b\theta_0+b\alpha$

$\left.\begin{array}{l}\text{即当}OM'\text{转过角}\alpha, \\ M\text{点沿螺旋线上升}b\alpha\end{array}\right\}$ 成正比

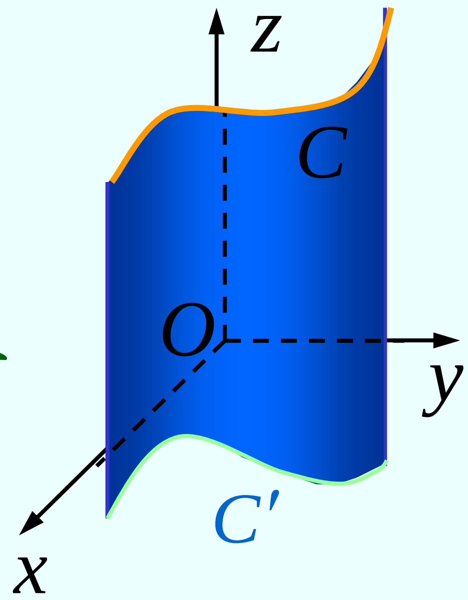
**特别**当$\alpha=2\pi$上升高度$h=2\pi b$在工程技术上叫做**螺距**.

## 二、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线$C$的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ (1)

消去变量 $z$ 后得方程 $H(x,y)=0$ (2)

当$(x,y,z)$满足(1)时，$(x,y)$满足(2)




**说明曲线$C$上所有点都在(2)表示的曲面上**

**$H(x,y)=0$表示一个母线平行于z轴的柱面**

**这柱面必包含曲线$C$**

**视为以$C$为准线,母线平行于z轴**

**称$H(x,y)=0$为$C$在xoy面上的投影柱面**

## 二、空间曲线在坐标面上的投影

**定义**：设空间曲线$C$ $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去变量$z$，得$C$在$xOy$面上的**投影柱面方程**为$H(x,y)=0$，

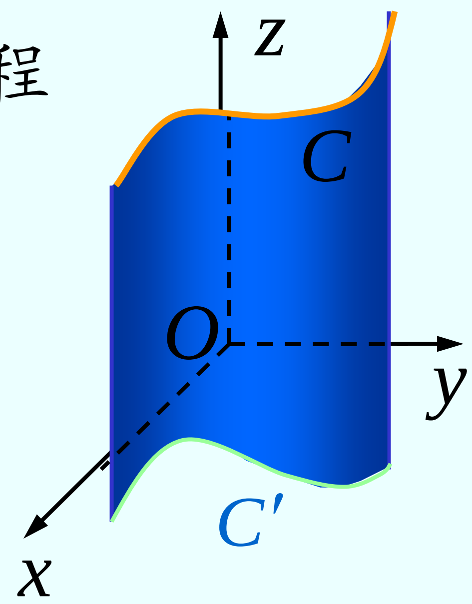
则$C$在$xOy$面上**投影(曲线)方程** $C'$ 为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

类似地，消去$x$得$C$在$yOz$面上的投影方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去$y$得$C$在$zOx$面上的投影方程

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$



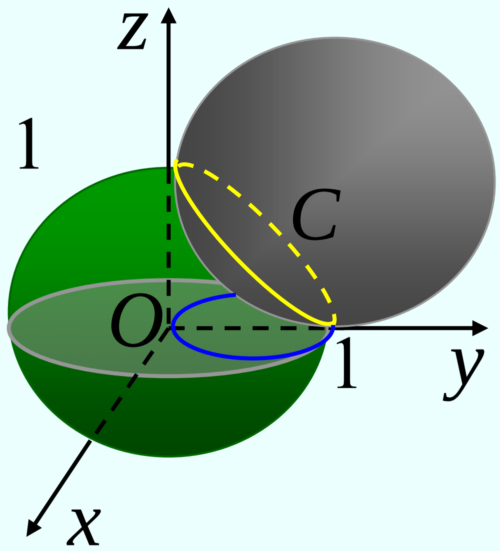
**例1** 已知球面的方程为$x^2+y^2+z^2=1$和$z=\dfrac{1}{2}$的交线在$xOy$平面上的投影方程.

**解** 消$z$得$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=0 \end{cases}$

**例2** 已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1 \ (1) \ 和 \ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \ (2)$$

求它们的交线$C$在$xOy$面上的投影方程.

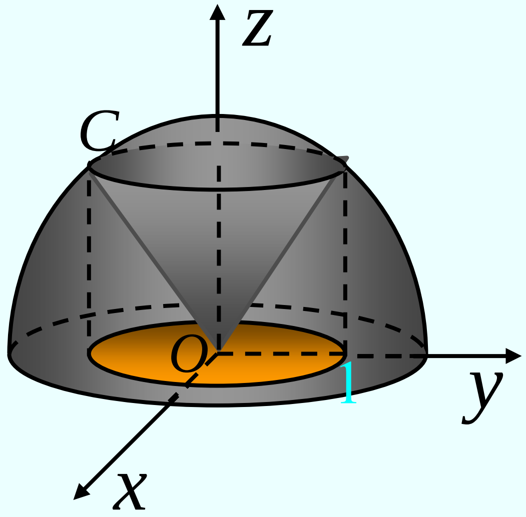



**解** 消$z$, (1)式减去(2)式并化简, 得到$y+z=1$

再以$z$=1-$y$代入方程(1)或(2)即得投影方程

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

**例3** 设一个立体由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成,求它在$xOy$面上的投影




**解** 消去z得 $x^2+y^2=1,$

故交线在 $xOy$ 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

从而，所围成的立体在$xOy$面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$$

**例4** 求螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程

**解** 消$z$得 在 $xOy$ 面上的投影方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$

消$x$得 在 $yOz$ 面上的投影方程 $\begin{cases} y = a\sin\dfrac{z}{b} \\ x = 0 \end{cases}$

消$y$得 在 $xOz$ 面上的投影方程 $\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b} \\ y = 0 \end{cases}$