第十章

第四节

重积分的应用

内容

曲面的面积

曲面的面积

设曲面S由方程 $z=f(x,y)$给出

D为S在xOy面上的投影区域

在D上 $f_x(x,y), f_y(x,y)$连续

在D上任取一个小闭区域$\mathrm{d}\sigma$

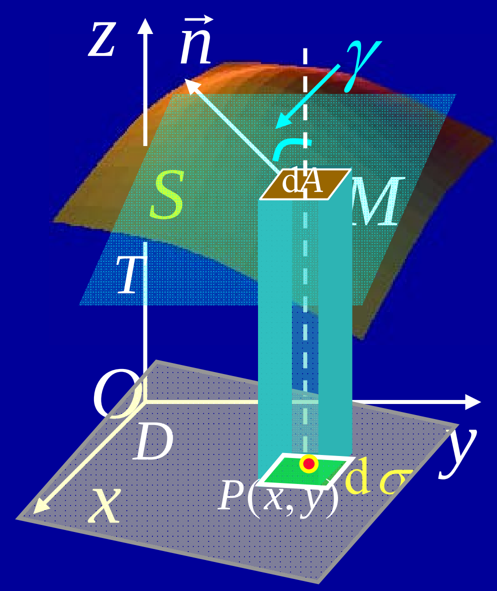
$\forall P(x,y)\in \mathrm{d}\sigma$

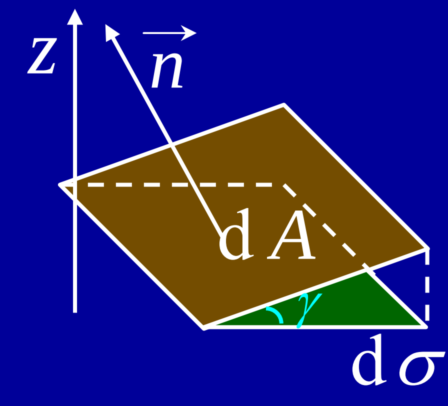
S上对应的点为$M(x,y,f(x,y))$

设点M处曲面S的切平面为T

以$\mathrm{d}\sigma$为底作柱面,该柱面在S上截下一小片曲面,截T上一片平面$\mathrm{d}A$

当$\mathrm{d}\sigma$很小时,$\mathrm{d}A$可近似代替S上的小曲面





曲面的面积

设点M在曲面S上的法线与z轴

所成的角为γ　　？求dA

T和xoy平面所成的角为γ

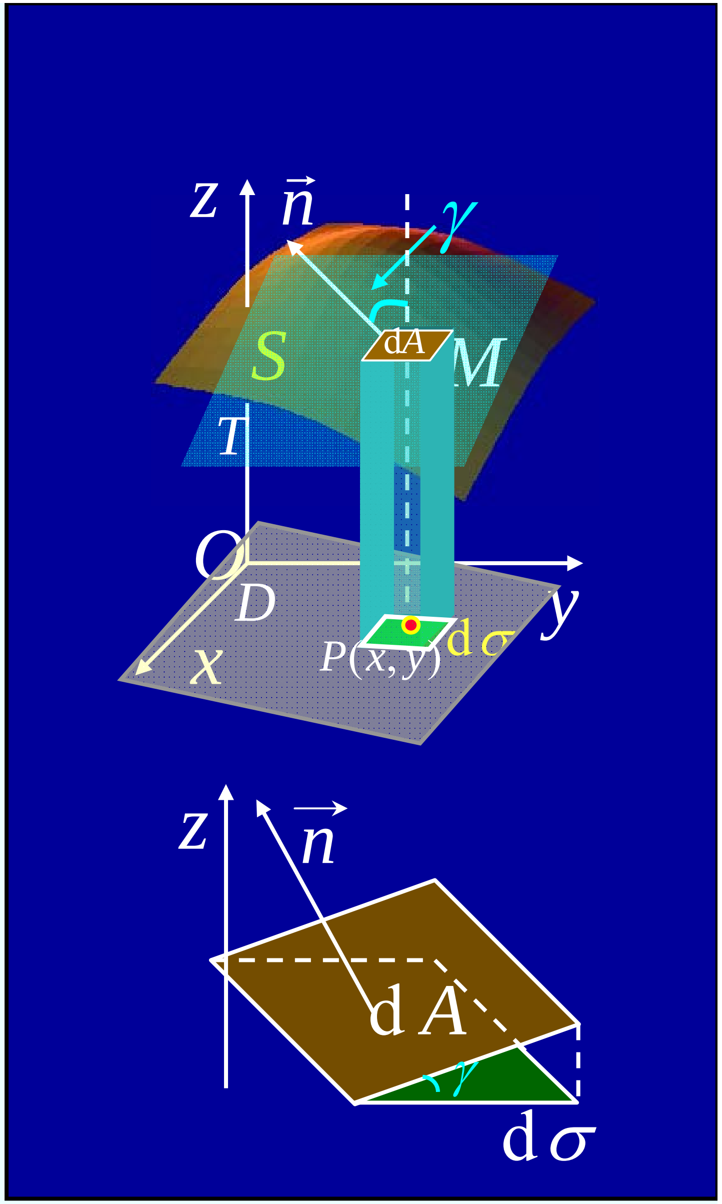
$$\left.\begin{aligned} dA &= \frac{d\sigma}{\cos\gamma} \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dA = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

曲面S的面积元素

$$A = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

$$= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma$$

曲面面积公式



$F(x,y,z) = z - f(x,y)$

$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

曲面面积公式

设光滑曲面方程为 $z=f(x,y)$，把曲面投影到xoy面上D_{xy}，则

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设光滑曲面方程为 $x=g(y,z)$，把曲面投影到yoz面上D_{yz}，则

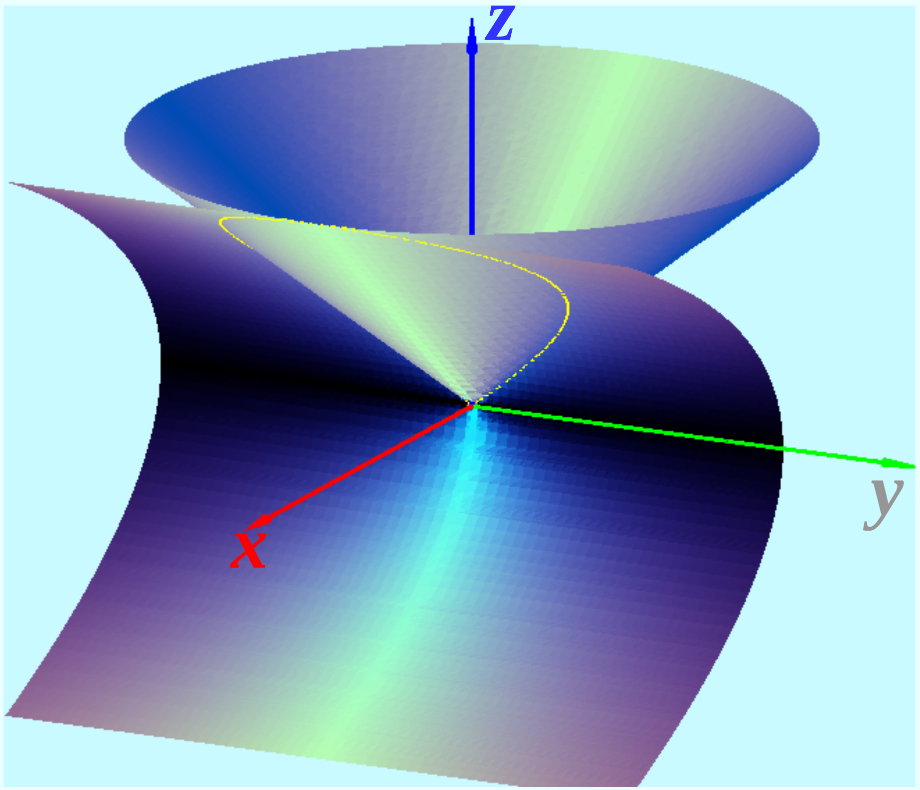
$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

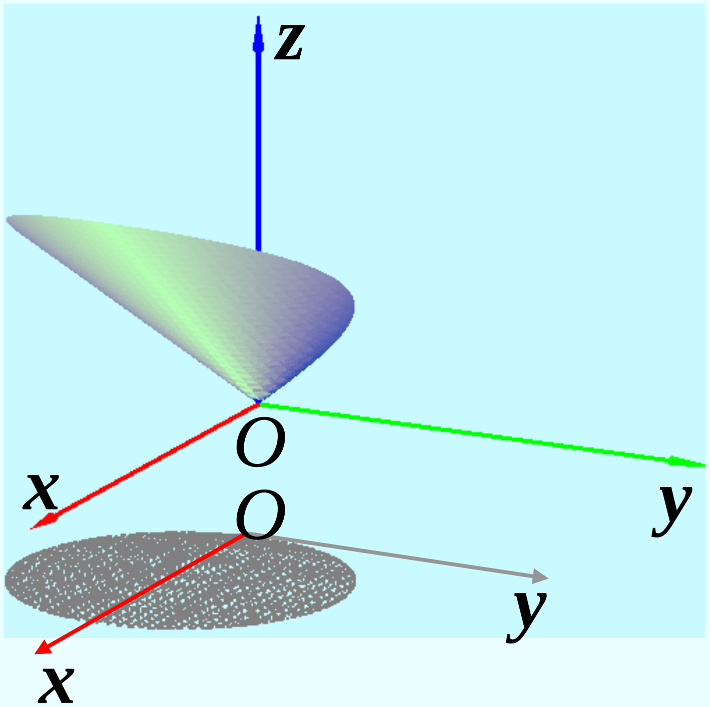
设光滑曲面方程为 $y=h(z,x)$，把曲面投影到xoz面上D_{xz}，则

$$A=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

怎样求曲面面积　明确被积函数与投影区域

例1 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面 $z^2=2x$ 割下部分的曲面面积





例1 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面 $z^2=2x$ 割下部分的曲面面积

解 曲面方程为$z=\sqrt{x^2+y^2}$

消z得向xoy平面的投影柱面 $x^2+y^2=2x$

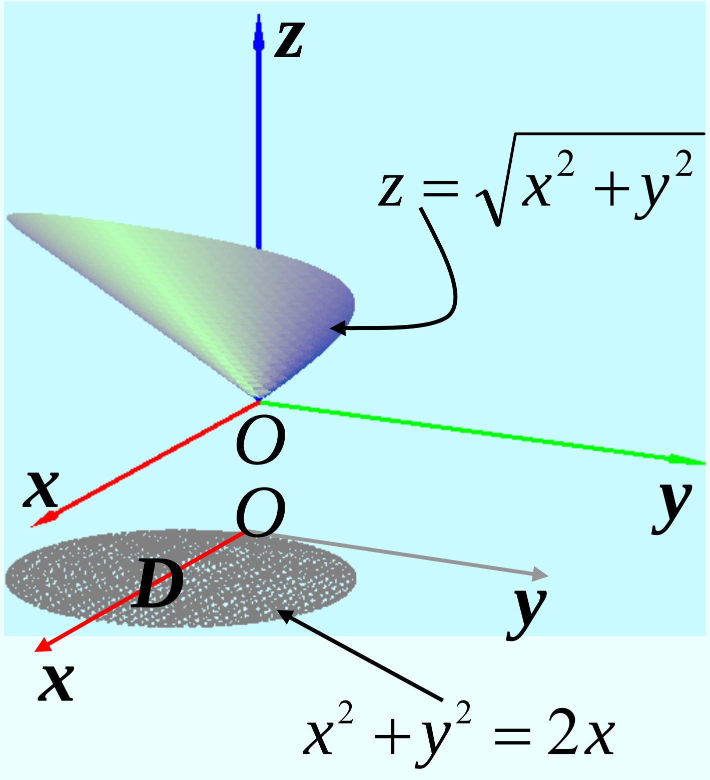
它在 xOy面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 2x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以，所求面积为

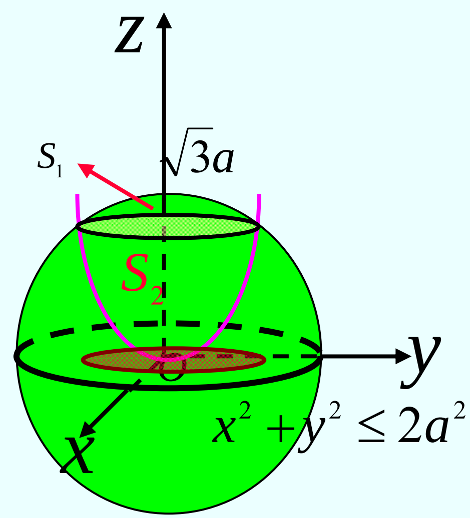
$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$



例2 试用二重积分表示由曲面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=2az$ 所围成的立体的表面积

解 表面积由球面与抛物面两部分构成



联立 $\begin{cases} z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$ 消去 z

得投影柱面方程 $x^2+y^2=2a^2$

投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2a^2$

$$S_1=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 2a^2}\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$S_2=\iint_{x^2+y^2\le 2a^2}\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

S_1+S_2