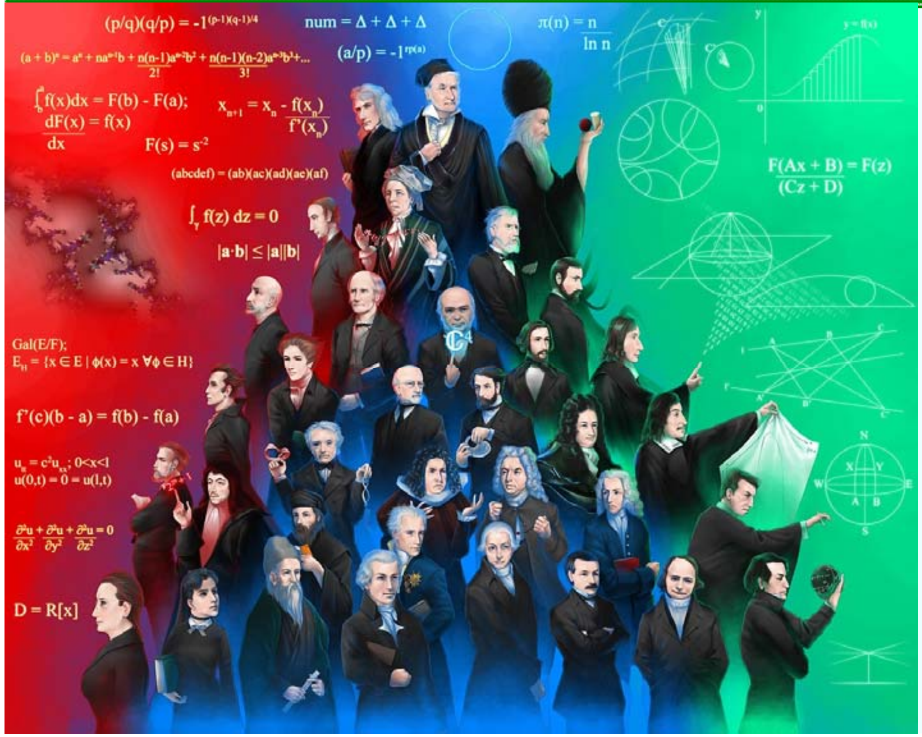
第二章 导数与微分

- §1 导数概念
- §2 函数的求导法则
- §3 高阶导数
- §4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率
- §5 函数的微分

第二章

第三节

高阶导数



内容

一、高阶导数定义

二、几个常见函数的***n***阶导数

三、***n***阶求导法则

四、典型题

一、高阶导数定义

引例：变速直线运动 $s = s(t)$

速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$， 即 $v = s'$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$

即 $a = (s')'$

一、高阶导数定义

定义 若函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$可导，则称 $f'(x)$的导数为$f(x)$的**二阶导数**，记作y''或$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，依次类推，$n-1$ 阶导数的导数称为 $\boldsymbol{n}$ **阶导数**，分别记作

$$y''', \quad y^{(4)}, \quad \cdots, \quad y^{(n)}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$$

二、几个常见函数的n阶导数

① $y = \mathrm{e}^{ax}$，求 $y^{(n)}$.

解: $y' = a\mathrm{e}^{ax}$， $y'' = a^2\mathrm{e}^{ax}$， $y''' = a^3\mathrm{e}^{ax}$，$\cdots$，

$$y^{(n)} = a^n\mathrm{e}^{ax}$$

特别有: $\boxed{(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x}$

$\boxed{(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n \cdot a^x}$

②设 $y = x^{\mu}$ (μ为任意常数)， 求 $y^{(n)}$

解: $y' = \mu x^{\mu-1}$ $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}\cdots$

$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

特别有: $(x^n)^{(n)} = n!$ $(x^n)^{(n+1)} = 0$

③ $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

一般地, $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

类似可证: $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

④ 设$y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$.

解: $$y'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}=(-1)(1+x)^{-2}$$

$$y'''=(-1)(-2)(1+x)^{-3}=(-1)^2\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}\qquad\cdots,$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

规定 $0\,!=1$

三、*n*阶求导法则

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数 , 则

① $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

② $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C为常数)

③ $(u\,v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+$

规律

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

$$+\cdots+uv^{(n)}$$

莱布尼茨(Leibniz) 公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

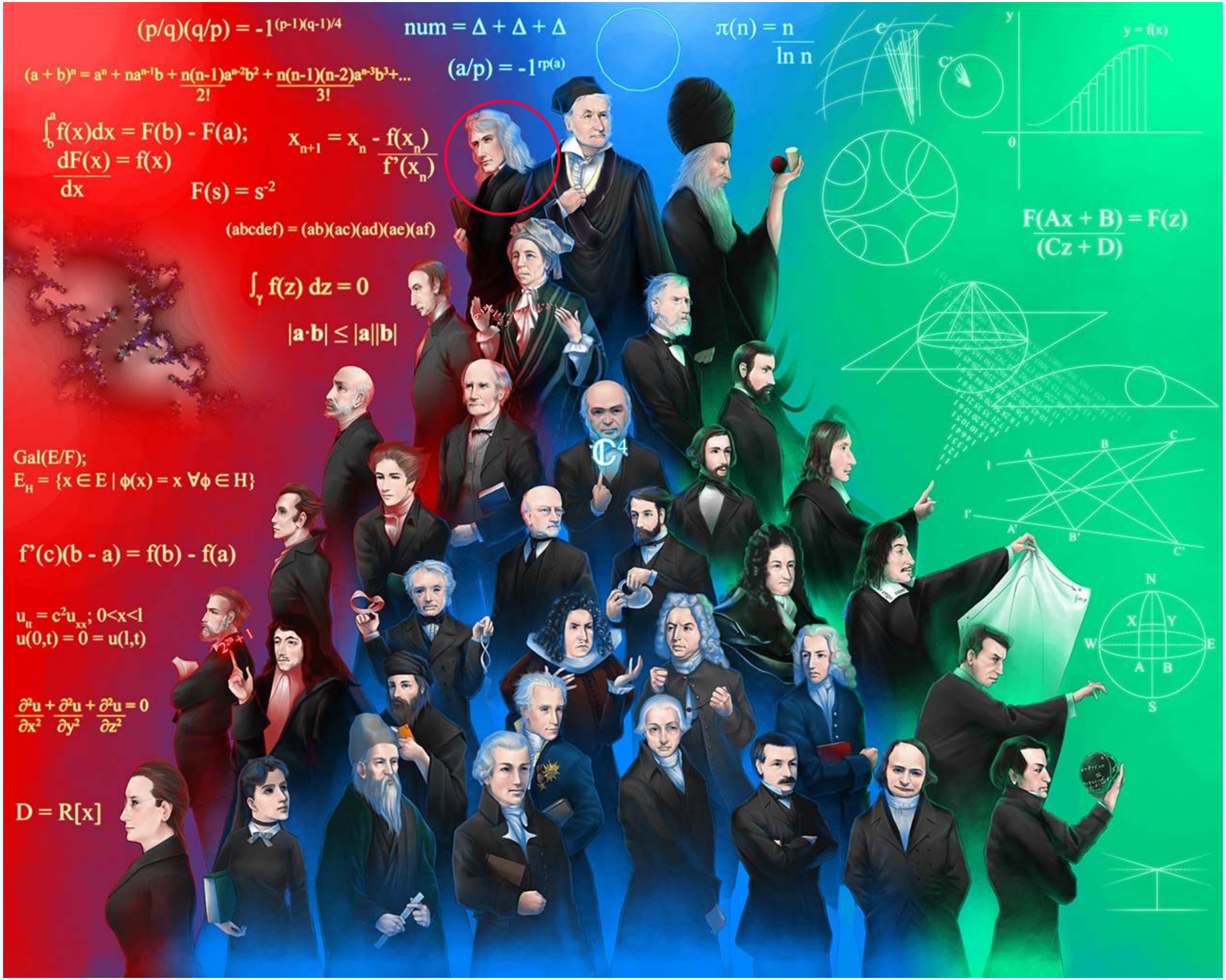
德国数学家 Leibniz

莱布尼茨(1646 – 1716)

德国数学家, 哲学家.他和牛顿同为微积分的创始人 ,他在《学艺》杂志上发表的几篇有关微积分学的论文中,有的早于牛顿,所用微积分符号也远远优于牛顿 .

他还设计了作乘法的计算机,系统地阐述二进制计数法 ,并把它与中国的八卦联系起来 .

莱布尼茨曾说：“我有非常多的思想，如果别人比我更加深入透彻地研究这些思想，并把他们心灵的美好创造与我的工作结合起来，总有一天会有某些用处.”



$(p/q)(q/p) = -1^{(p-1)(q-1)/4}$
$num = \Delta + \Delta + \Delta$
$(a/p) = -1^{r p(a)}$
$\pi(n) = \frac{n}{\ln n}$
$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$
$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a);$
$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$F(s) = s^{-2}$
$(abcdef) = (ab)(ac)(ad)(ae)(af)$
$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
$|a \cdot b| \leq |a||b|$
$F(Ax+B) = \frac{F(z)}{(Cz+D)}$
y
$y = f(x)$
0
c
C'
$Gal(E/F);$
$E_H = \{x \in E \mid \phi(x) = x\ \forall \phi \in H\}$
$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$
$u_{tt} = c^2 u_{xx};\ 0<x<l$
$u(0,t) = 0 = u(l,t)$
$2^{2^n} + 1$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
$D = R[x]$
$\mathbb{C}^4$
A
B
C
l
l'
A'
B'
C'
N
W
E
S
X
Y
A
B

四、典型题

① 求 $f(x)=\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}$ 的n阶导数一般表达式

解 化简 $f(x)=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}$

$$=2(x+2)^{-1}+3(x+3)^{-1}$$

$$[(x+2)^{-1}]^{(n)}=(-1)^n n!(x+2)^{-(1+n)}$$

同理 $[(x+3)^{-1}]^{(n)}=(-1)^n n!(x+3)^{-(1+n)}$

由此 $[f(x)]^{(n)}=(-1)^n n![2(x+2)^{-(1+n)}+3(x+3)^{-(1+n)}]$

说明：求有理分式的高阶导数，应当首先把有理分式化为真分式和多项式之和，而真分式再分解成若干个次数较低的分式之和

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

四、典型题

②乘积项求高阶导数

技巧 利用莱布尼茨公式，巧取u,v能简化计算，通常哪个函数若干阶导数迅速为0的取作v

例 $y=x^2e^{2x}$ 求 $y^{(20)}$

解 设 $u=e^{2x},v=x^2$

则 $(e^{2x}x^2)^{(20)}$

$$=(e^{2x})^{(20)}\cdot x^2+20(e^{2x})^{(19)}\cdot 2x+\frac{20\times 19}{2}(e^{2x})^{(18)}\cdot 2$$

$$=2^{20}\cdot e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\cdot e^{2x}\cdot 2x+\frac{20\times 19}{2}\cdot 2^{18}\cdot e^{2x}\cdot 2$$

$$=e^{2x}\cdot 2^{20}\cdot(x^2+20x+95)$$

四、典型题

②乘积项求高阶导数

技巧 利用莱布尼茨公式，巧取u,v能简化计算，通常哪个函数若干阶导数迅速为0的取作v

例 $y = \underset{v}{x^3}\ln(\underset{u}{1+x})$，求$y^{(99)}(0)$

解
$$y^{(99)} = [\ln(1+x)]^{(99)} \cdot x^3 + 99\cdot[\ln(1+x)]^{(98)}\cdot 3x^2$$
$$+\frac{99\times 98}{2!}\cdot[\ln(1+x)]^{(97)}\cdot 6x + \frac{99\times 98\times 97}{3!}\cdot[\ln(1+x)]^{(96)}\cdot 6$$
$$y^{(99)}\big|_{x=0} = 99\times 98\times 97\cdot[(1+x)^{-1}]^{(95)}\big|_{x=0}$$
$$= 99\times 98\times 97\cdot(-1)\cdot 95!(1+x)^{-96}\big|_{x=0}$$
$$= -\frac{99!}{96}$$

四、典型题

③ 抽象函数求高阶导数

例 设 $y = f(x^2 - x)$, f 二阶可导, 求y''

解 $y' = f'(x^2 - x) \cdot (2x - 1)$

$$y'' = f''(x^2 - x) \cdot (2x - 1)^2 + f'(x^2 - x) \cdot 2$$

例 已知 $y = \ln f(x)$, 且$f''(x)$ 存在, 求$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $\qquad \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$

例 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ （见 P100 题4）

解： $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'(x)}$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

$$x=\arcsin y$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{y}{(1-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y=\sin x$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos(\arcsin y)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

④ 分段函数求高阶导数

例 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数n为 **2**

解 由于$3x^2$有任意阶导数，只需考查$g(x)=x^2|x|$

$$g(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 0 \\ -x^3, & x<0 \end{cases}$$

$$\because\ g'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3-0}{x-0}=0$$

$$g'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-0}{x-0}=0$$

$$\therefore\ g'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\geq 0 \\ -3x^2, & x<0 \end{cases}$$

又 $$g''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2-0}{x-0}=0$$

$$g''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2-0}{x-0}=0$$

$$\therefore\ g''(x)=\begin{cases} 6x, & x\geq 0 \\ -6x, & x<0 \end{cases}$$

但是 $g'''_-(0)=-6,\quad g'''_+(0)=6$,

$\therefore g'''(0)$ 不存在.

思考题

如何求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

解: $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$

解: $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n\geq 3$$