第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理（第1节）
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式（第3节）
- 柯西中值定理

洛必达法则求极限（第2节）

导数应用（第4-7节）研究曲线的性态包括**单调性**，**极值**，**最值**，**凹凸性**，**拐点**，**曲率**等

第三章

第七节

曲率

内容

一、弧微分

二、曲率及其计算公式

三、曲率圆与曲率半径

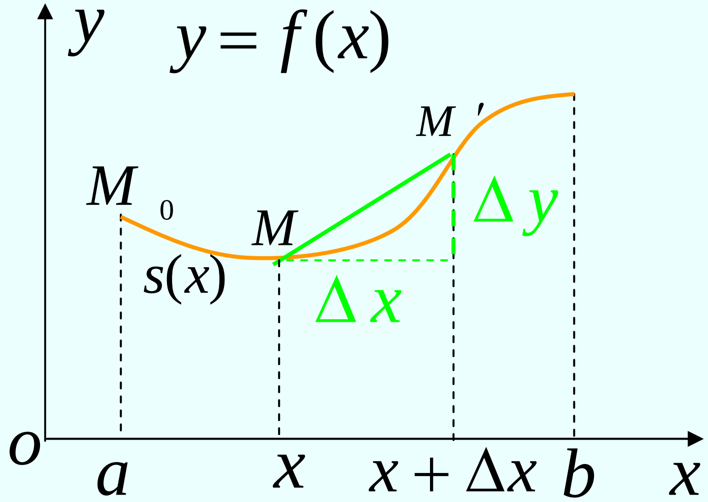
一、弧微分

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有连续导数，以 $M_0(x_0,y_0)$ 为基点

任一点 $M(x,y)$，有向弧段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的弧长为 $s(x)$

当 M 位于 M_0 的右侧时 $s(x)>0$，否则

$s(x)<0$ 于是 $s=s(x)$ 是单调增函数.



$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right|$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\overline{MM'}}{\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{|\Delta x|}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|=1$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\qquad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

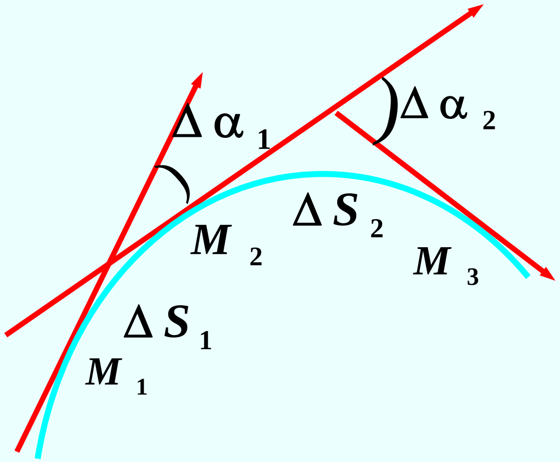
弧微分公式

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

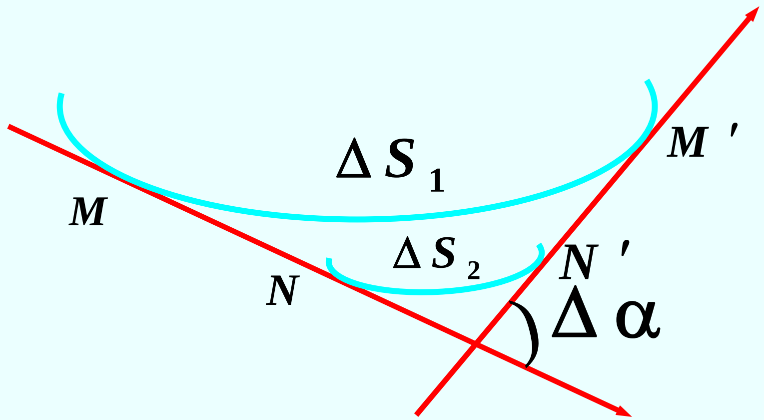
二、曲率及其计算公式

1、曲率的定义

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量.



弧段弯曲程度越大转角越大



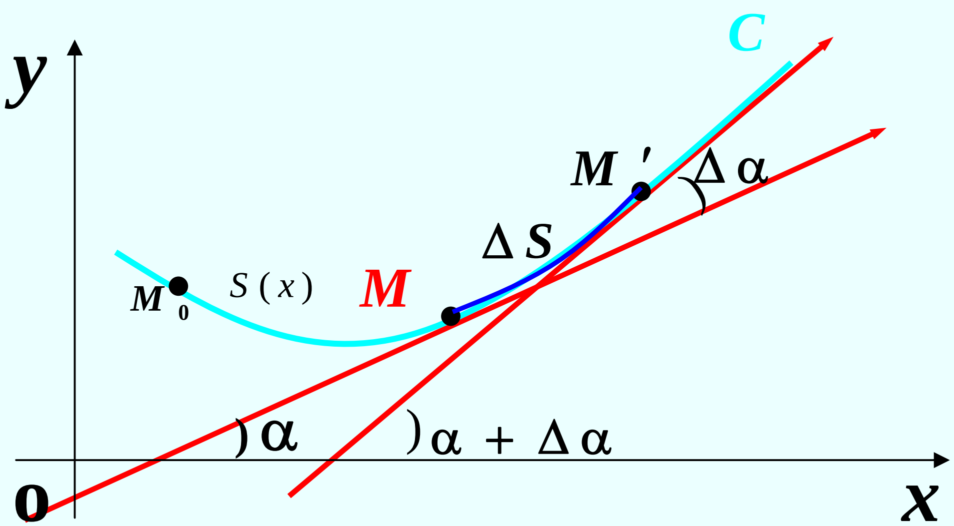
转角相同弧段越短弯曲程度越大

$$\text{曲线的弯曲程度}\begin{cases}\text{与切线的转角有关}\\ \text{与曲线的弧长有关}\end{cases}$$

设曲线C是光滑的,M_0是基点

$\left|\overset{\frown}{MM'}\right| = |\Delta s|$,

$M \to M'$ 切线转角为$|\Delta\alpha|$



定义 用比值$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$即单位弧段上切线转过的角度大小来表示弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均弯曲程度,称为$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率

记作 $\bar{\kappa} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$. 当$\Delta s \to 0$(即$M' \to M$时)若 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$存在

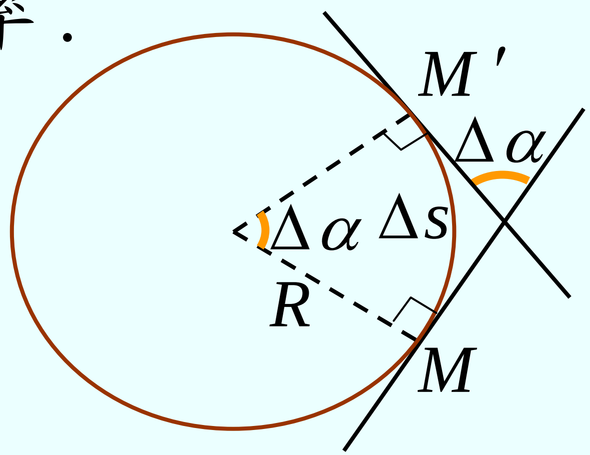
称此极限为曲线在M点处的曲率，记作K

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

例1 直线 $\Delta\alpha=0$ $K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=0$

例2 求半径为R的圆上任意点处的曲率.



解: $\Delta s=R\Delta\alpha$

$$\therefore\quad K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\frac{1}{R}$$

可见:圆上任意一点弯曲程度是一样的

R越小,则K越大,圆弧弯曲得越厉害;

R越大,则K越小,圆弧弯曲得越小.

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| \qquad \mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

2. 曲率的计算公式

设曲线的方程为 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数，

因为 $\tan\alpha=y'$，所以

$$\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y'' \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2},$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

于是得到曲率的计算公式为 $\boxed{K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.}$

曲率的计算公式为 $$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若曲线的方程由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出，

则在点$M(\varphi(t),\psi(t))$处的曲率K为

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$K=\left|\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right| \Big/ \left[1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right]^{3/2}$$

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

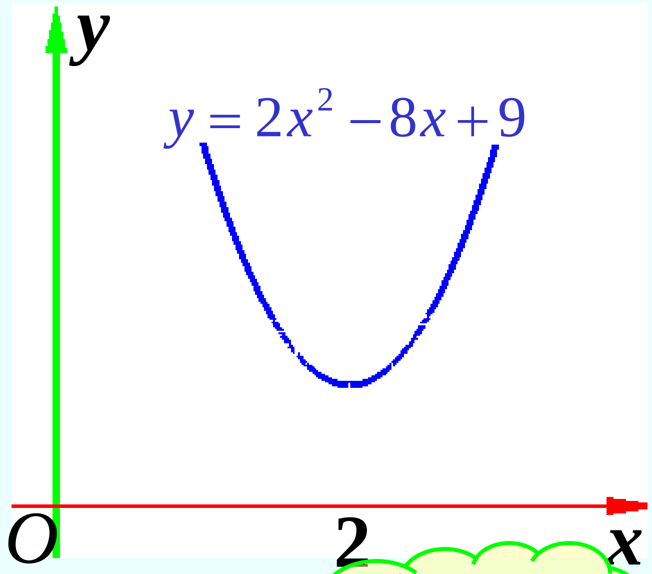
例3 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大?

解 求一阶、二阶导数，得

$$y' = 2ax + b,\quad y'' = 2a,$$

于是曲率为

$$K = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$



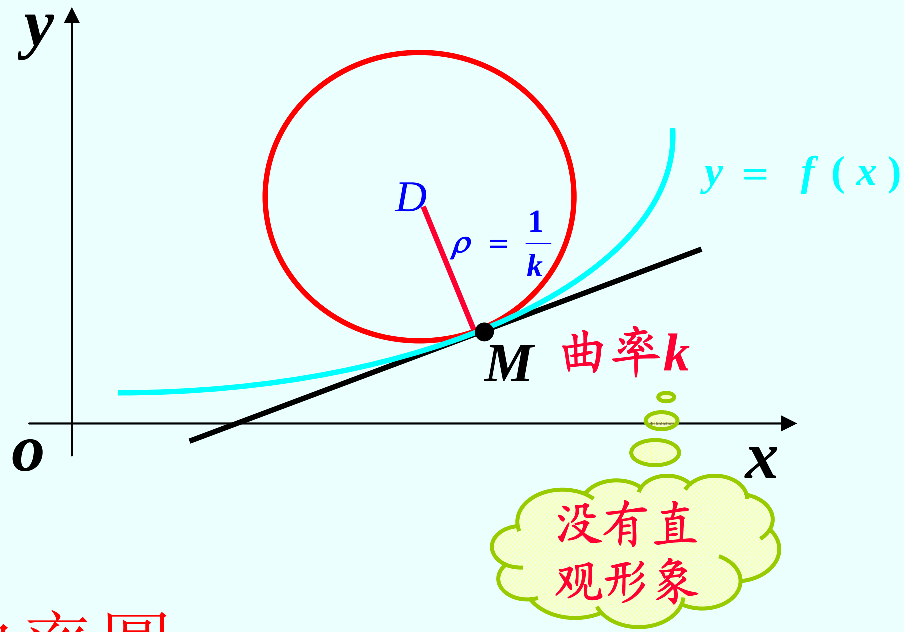
作为结论记住

由此可知，当分母取最小值时，曲率最大.

当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时曲率最大，$\boxed{\text{最大曲率为 } |2a|}$.

即抛物线在顶点处的曲率最大,这从图形上可以直观看出.

三、曲率圆与曲率半径



定义 设$y=f(x)$在$M(x,y)$处曲率k在点M处的曲线的法线上凹的一侧取点D，使$|DM|=\frac{1}{k}=\rho$.

以D为圆心,ρ为半径作圆

称此圆为曲线在点M处的曲率圆.

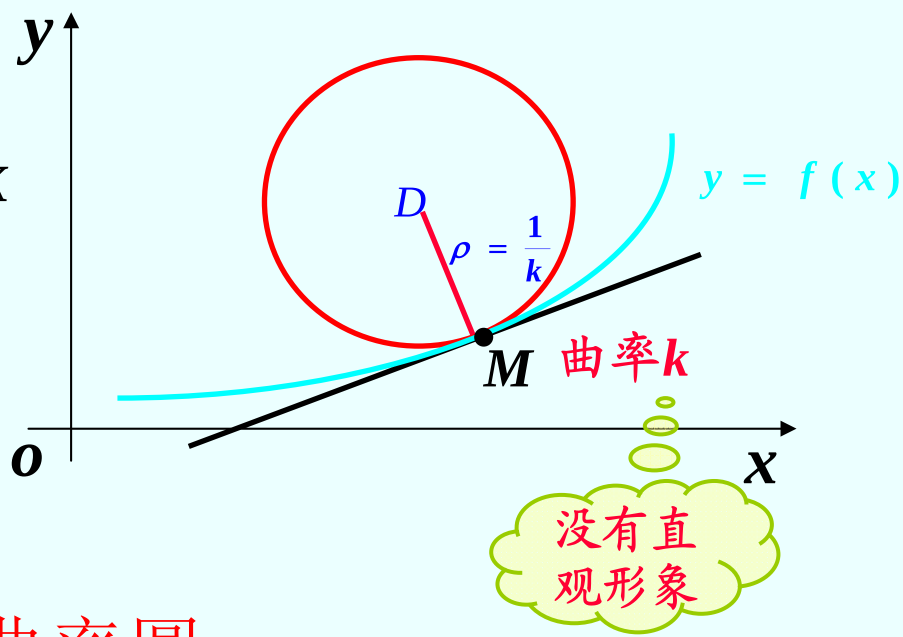
D---曲率中心，ρ---曲率半径.

注意: i) 一点处曲率半径与该点的曲率互为倒数

$$\text{即}\quad \rho=\frac{1}{k},\ k=\frac{1}{\rho}.$$

ii) 曲线上一点处的曲率半径越大，曲线越平坦;
曲率半径越小，曲线越弯曲.

三、曲率圆与曲率半径



定义 设$y=f(x)$在$M(x,y)$处曲率k

在点 M 处的曲线的法线上

凹的一侧取点D，使$|DM|=\frac{1}{k}=\rho$.

以 D 为圆心, ρ 为半径作圆

称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.

D ---曲率中心， ρ ---曲率半径 .

注意: iii) 曲率中心坐标(α,β)为

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

例1 对数曲线$y=\ln x$上哪一点的曲率半径最小？求出该点的曲率半径

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解 $y'=\dfrac{1}{x},\quad y''=-\dfrac{1}{x^2}$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}=\frac{1}{x^{-1}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+x^2)^{3/2}}{x}$

$$\rho'=\frac{(1+x^2)^{1/2}}{x^2}(2x^2-1)$$

	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
ρ'	$-$	0	$+$
ρ	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

曲线在$(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$处曲率半径最小

$$\rho=\left[1+\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^{3/2}\Big/\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

例2 求曲线$y=\tan x$在点$(\frac{\pi}{4},1)$处的曲率以及曲率圆方程

解 $y' = \sec^2 x \qquad y'' = 2\sec^2 x \cdot \tan x$

$$y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2,\ \ y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$$

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(1+4)^{3/2}} = \frac{4}{5\sqrt{5}}$$

曲率半径 $\rho = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

圆心坐标 $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2(1+4)}{4} = \dfrac{\pi - 10}{4} \\ \beta = 1 + \dfrac{1+4}{4} = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

曲率圆方程

$$(x - \frac{\pi - 10}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{125}{16}$$

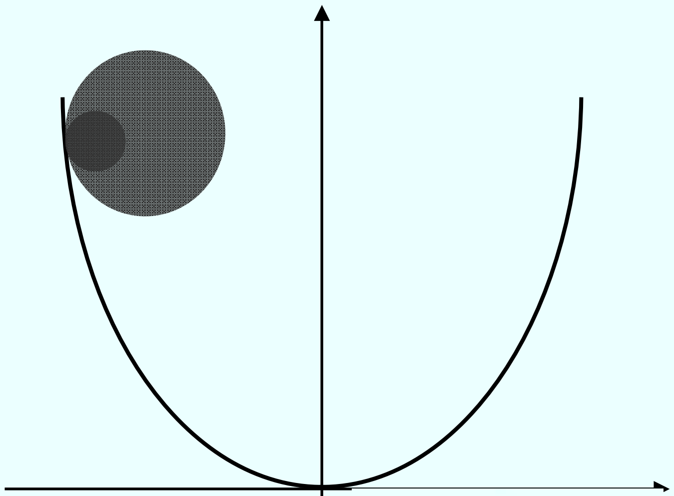
$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

例3 设工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$.现在要用砂轮磨削其内表面，问用直径多大的砂轮才比较合适?

解 为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多,砂轮的半径应不大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值.

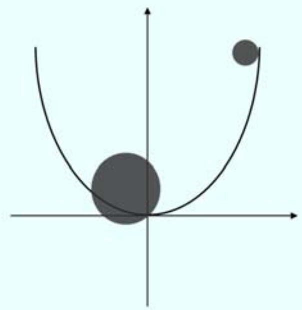


由于抛物线在其顶点处的曲率

$$K=|2a|=0.8$$

求得抛物线顶点处的曲率半径

$$\rho=\frac{1}{K}=1.25$$



所以,砂轮半径不得超过1.25单位长