第六章

第1-2节

定积分的元素法及其在几何学上的应用

内容

一、定积分的元素法

二、平面图形的面积

三、求体积

四、平面曲线的弧长

五、旋转体的侧面积

一、定积分的元素法

1.回顾曲边梯形求面积问题

分析:所求量与区间有关,且对区间具有可加性

1)分划 $\Delta x_i \,(i=1,\cdots,n)$

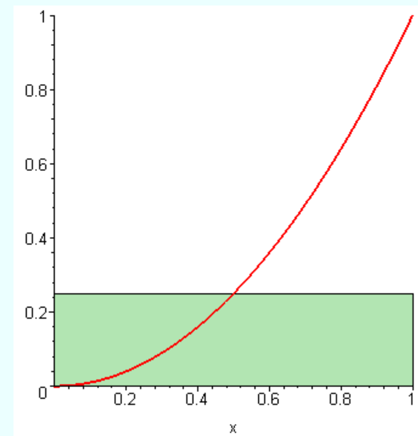
2)取点 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

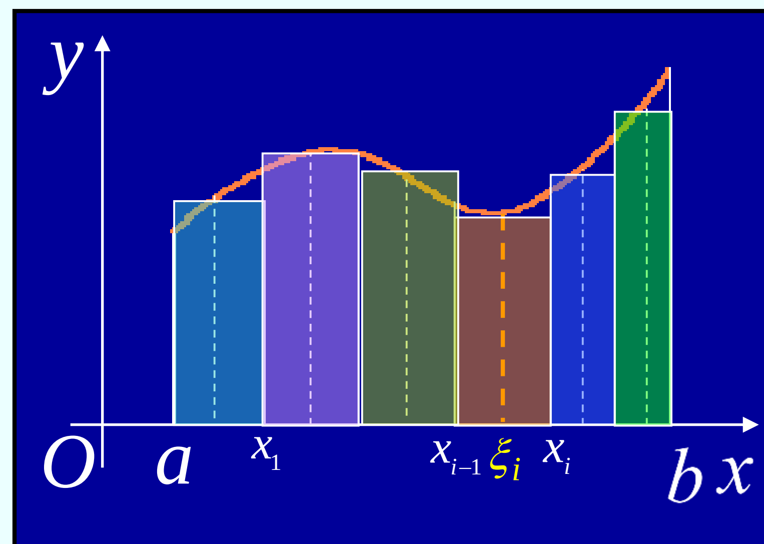
关键步骤

3) 求和 $A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

4) 取极限

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$





一、定积分的元素法

1.回顾曲边梯形求面积问题

分析:所求量与区间有关,且对区间具有可加性

为简便

1)分划 $\Delta x_i \,(i=1,\cdots,n)$

$\boxed{\textbf{2)取点}\ \ \Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i}$ 关键步骤

3) 求和 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

4) 取极限

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

任取小区间[x,x+dx]

$\Delta A \approx f(x)\mathrm{d}x$ $\longrightarrow$面积元素

$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2.应用元素法的条件

(1) 所求的量 U 与变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关;

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性:

什么量不具有可加性?

(3)部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$;

就可以考虑用定积分来表达这个量 U

3 元素法的步骤:

Step1 选取一个变量如 x 为积分变量,并确定它的变化区间$[a , b]$;

Step2 切片在 $[a , b]$ 内切下一小片$[x , x + \mathrm{d}x]$,在$[x , x + \mathrm{d}x]$上求出ΔU 的近似值$f(x)\mathrm{d}x$,记作

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

所求量元素

面积元素

体积元素

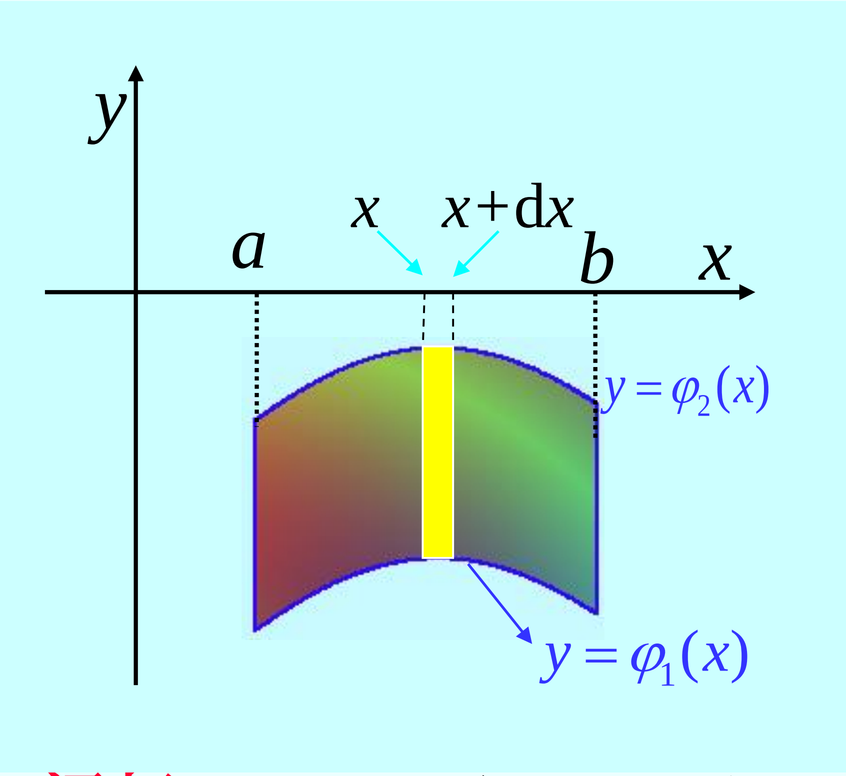
Step3 构造定积分

$$U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

二、平面图形的面积

1 直角坐标系

X-型



特点 上下曲边型

选取 x为积分变量

切片 $[x,x+\mathrm{d}x]$

面积元素

$$[\varphi_2(\boldsymbol{x})-\varphi_1(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

积分 $A=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\mathrm{d}x$.

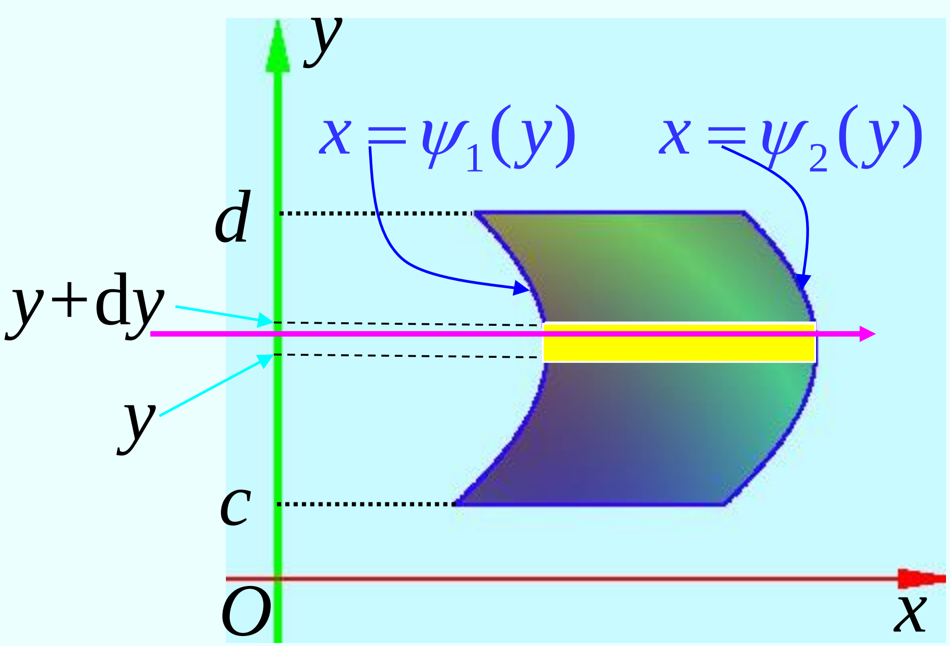
记忆： 画一条平行y轴的箭头方向朝上穿过图形

箭头平行移动最大活动范围为x的上下限

箭头出射所在曲线减去入射曲线作为被积函数

1 直角坐标系

Y-型



特点 左右曲边型

选取 y为积分变量

切片 $[y,y+\mathrm{d}y]$

面积元素

$$[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\mathrm{d}y$$

积分 $\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\mathrm{d}y$

记忆： 画一条平行x轴的箭头方向朝右穿过图形

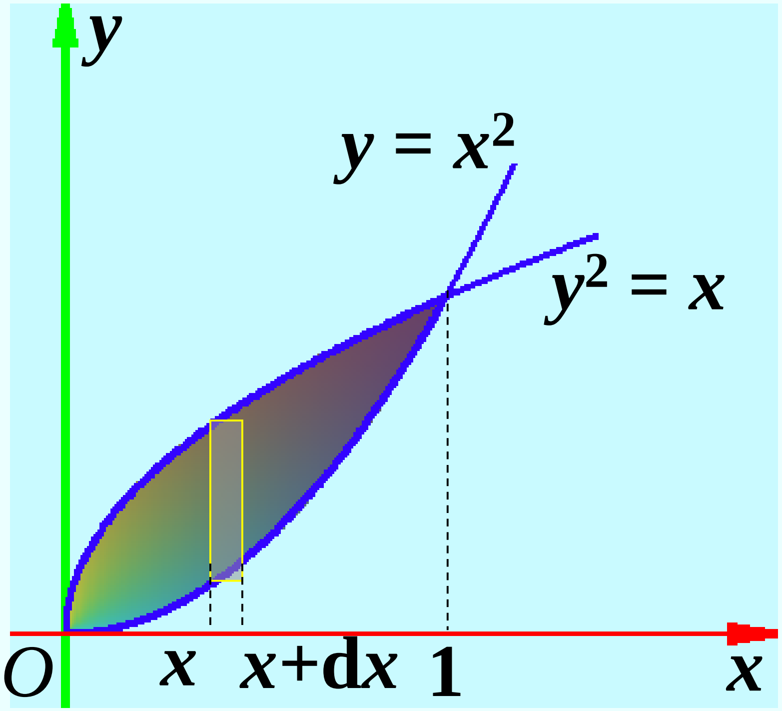
箭头平行移动最大活动范围为y的上下限

箭头出射所在曲线减去入射曲线作为被积函数

例1 计算由两条抛物线：$y^2 = x$、$y = x^2$ 所围成的图形的面积.

解 X型 积分变量为x

变化范围为 $[0\ ,\ 1]$,



面积元素 $\mathrm{d}A = (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x$.

所求面积为

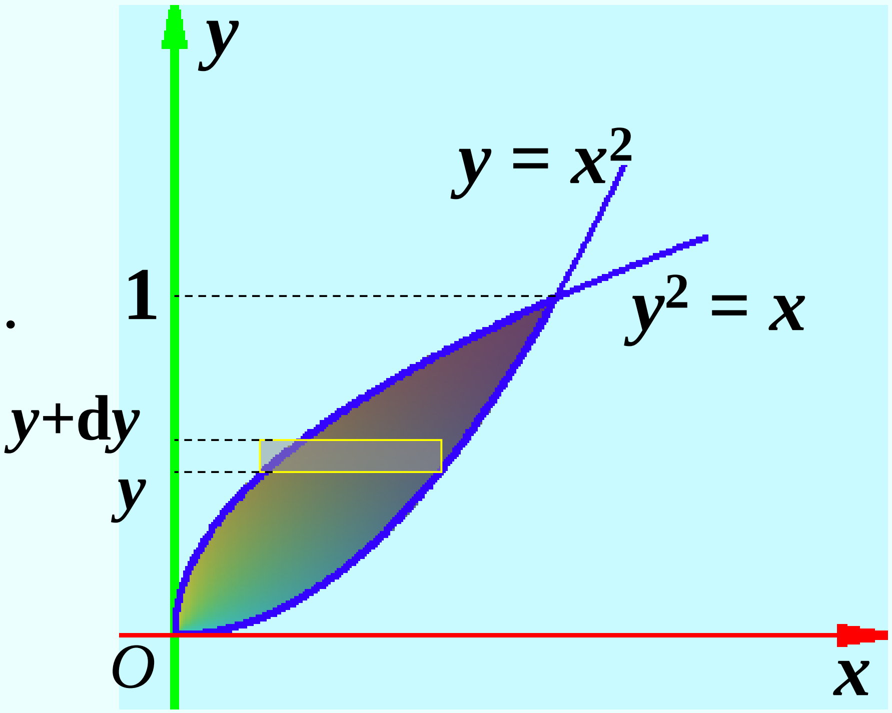
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例1 计算由两条抛物线：$y^2 = x$、$y = x^2$ 所围成的图形的面积.

解 Y型 积分变量为y

变化范围为 $[0, 1]$,



面积元素 $\mathrm{d}A = (\sqrt{y} - y^2)\mathrm{d}y$.

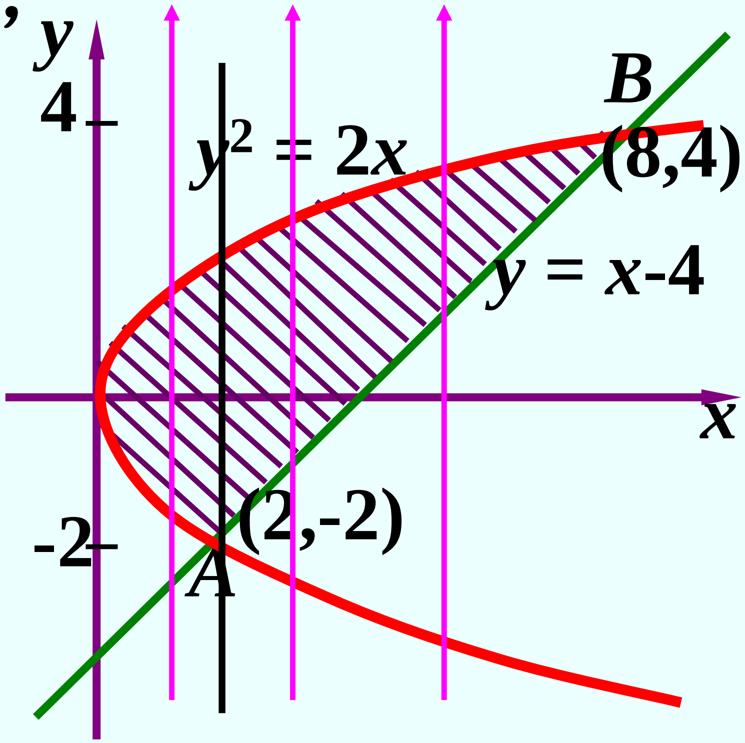
所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例2 求出抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的平面图形的面积.

解 作图求抛物线与直线的交点，



解方程组 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$

得交点 $A\ (2, -2)$ 和 $B\ (8, 4)$.

X-型

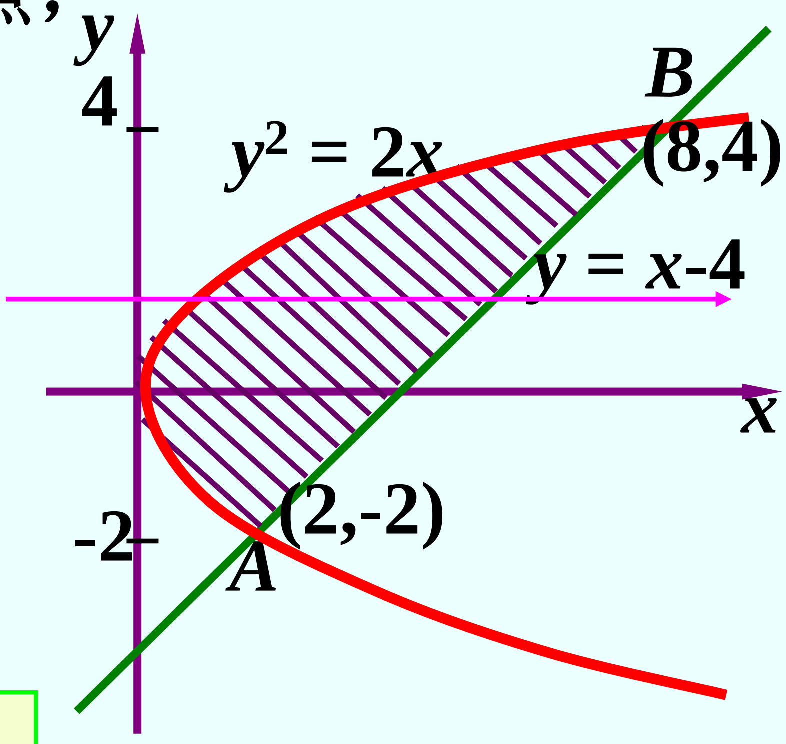
$$\int_0^2 \sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})\,dx + \int_2^8 \sqrt{2x} - (x-4)\ dx$$

$$= 18$$

注意：积分变量是*x*，就要用*x*变量来表示这条线代入被积函数

例2 求出抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的平面图形的面积.

解 作图求抛物线与直线的交点,



解方程组 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$

得交点 $A\,(2, -2)$ 和 $B\,(8, 4)$.

Y-型 $\int_{-2}^{4} y + 4 - (\frac{1}{2}y^2)\ dy$

$= 18$

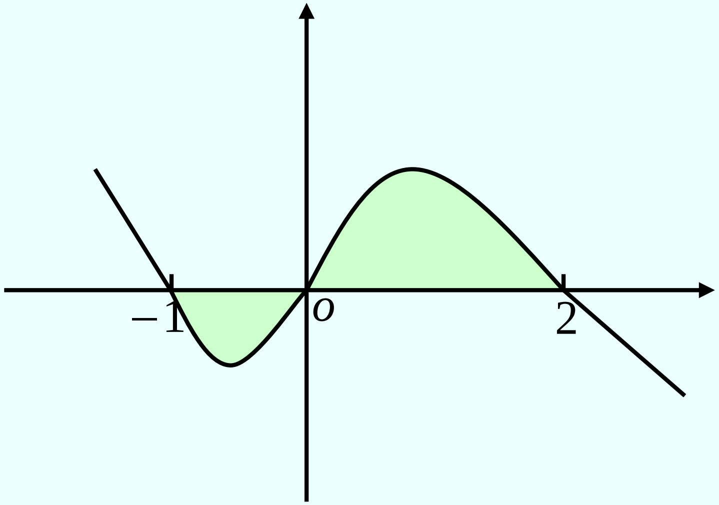
注意：积分变量是y,
就要用y变量来表示
这条线代入被积函数

例3 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积

解 $y=-x(x+1)(x-2)$

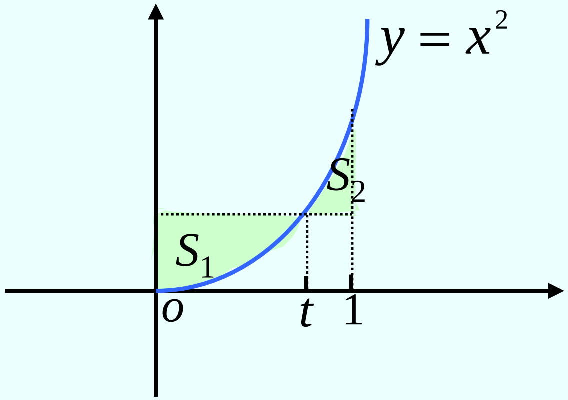
$$S=\int_{-1}^{0}-(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{37}{12}$$



例4(与极值结合题型)

如图 $t \in (0,1)$为何值时, S_1+S_2最小.

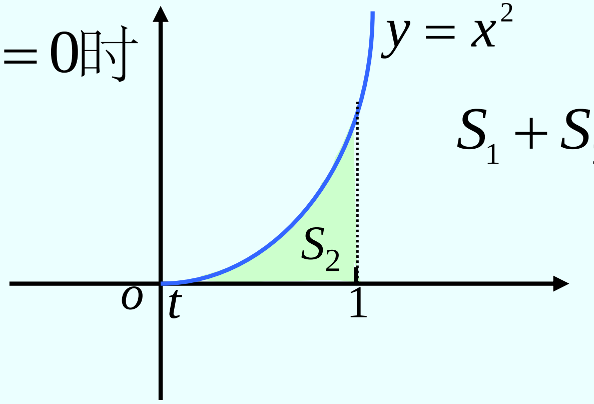


解 $S_1 + S_2 = \int_0^t (t^2 - x^2)\mathrm{d}x + \int_t^1 (x^2 - t^2)\mathrm{d}x$

$$= \tfrac{4}{3}t^3 - t^2 + \tfrac{1}{3} = f(t)$$

求驻点 $f'(t) = 4t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$, $\quad f(\dfrac{1}{2}) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ 故$t = \dfrac{1}{2}$时,取得最小值$\dfrac{1}{4}$

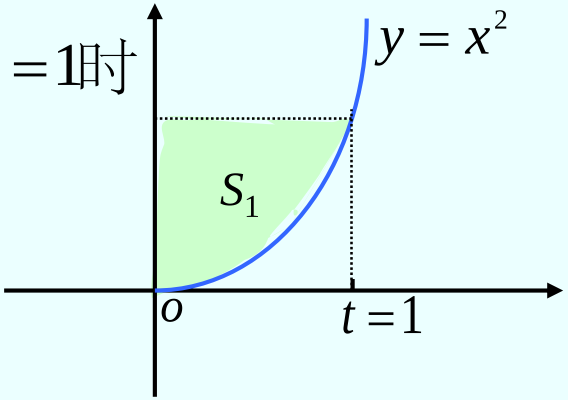
$t = 0$时



$S_1 + S_2 = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

$= \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$t = 1$时

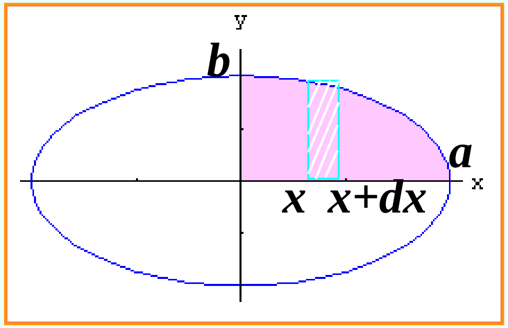


$S_1 + S_2 = 1 - \dfrac{1}{3}$

$= \boxed{\dfrac{2}{3}}$

例5(直角坐标+参数方程)

求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.



解 由对称性总面积等于第一象限面积的4倍

$$S=4\cdot\int_0^a ydx$$

椭圆的参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

令 $x=a\cos t$，则 $y=b\sin t$，$dx=-a\sin t dt$，

x	0	a
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt \ =\pi ab$$

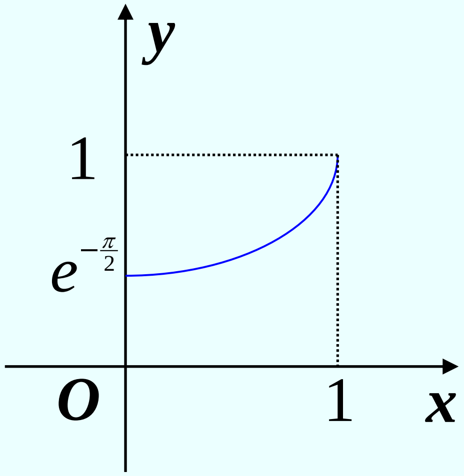
$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx \qquad n \text{ 为正整数}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & n\text{为奇数（}n>1\text{）} \end{cases}$$

例6(直角坐标+参数方程)

求曲线$\begin{cases} x=\cos t \\ y=e^{-t} \end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$ 及直线

$x=0, x=1, y=0$所围成平面图形面积



解 $S=\int_0^1 y\,dx$

令$x=\cos t, y=e^{-t}$, $dx=-\sin t\,dt$

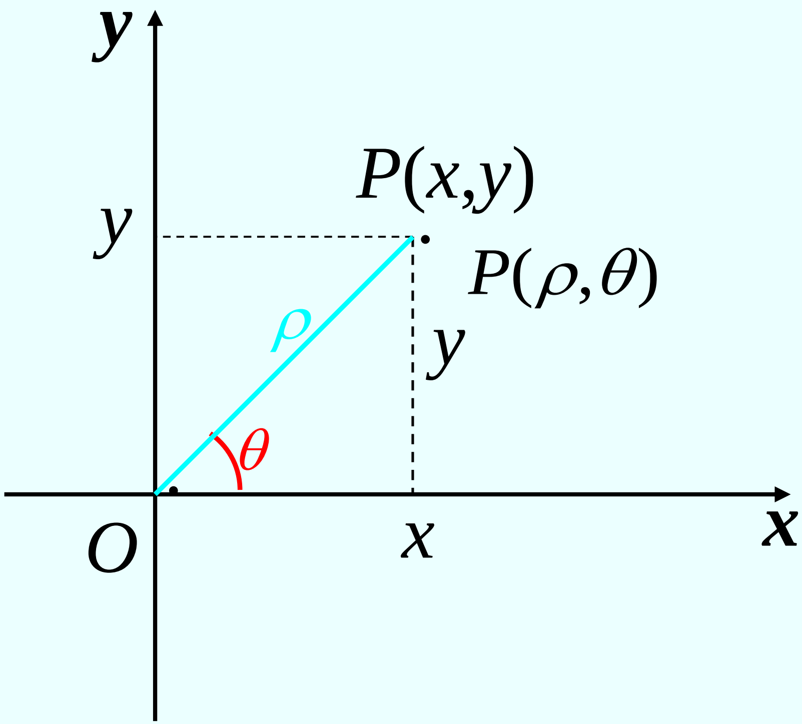
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array},$$

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-t}(-\sin t)dt$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{\pi}{2}})$$

二、平面图形的面积

2 极坐标系



$$\rho^2 = 2\rho\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2x \longleftarrow \rho = 2\cos\theta$$

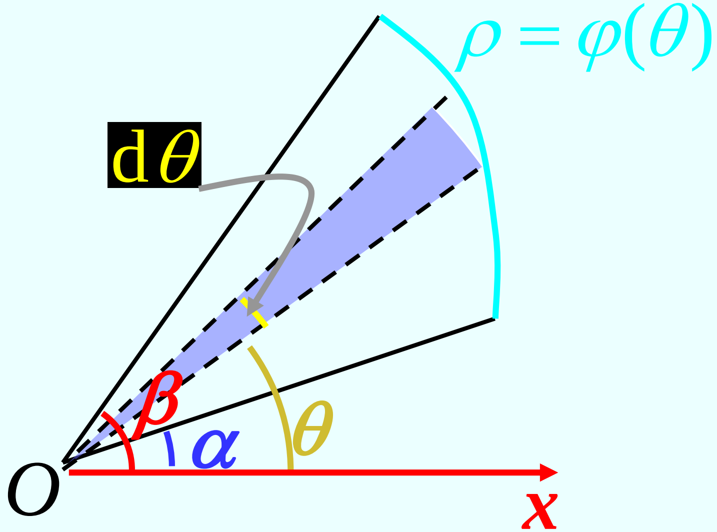
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \longrightarrow \rho = a$$

二、平面图形的面积

2 极坐标系

情形1



曲边扇形

选取 极角θ为积分变量

切片 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$

面积元素 $\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$

积分 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

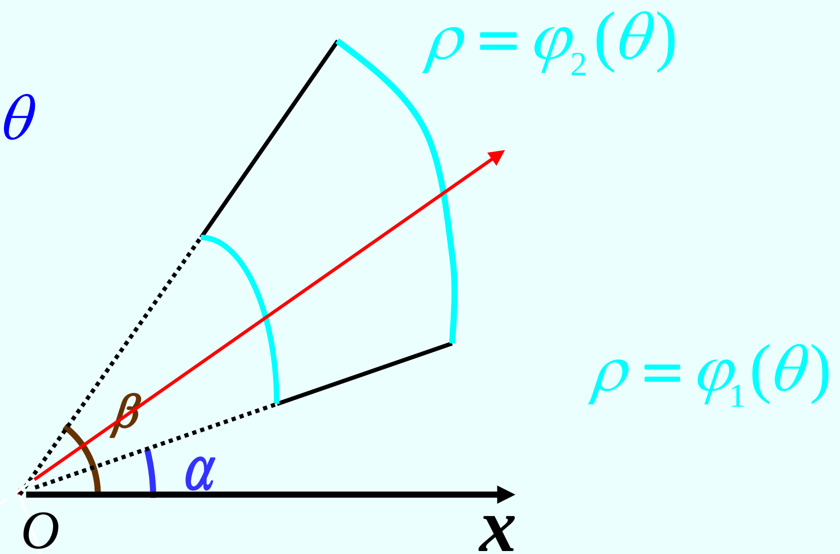
二、平面图形的面积

2 极坐标系

情形2

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_2^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_1^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]\,\mathrm{d}\theta$$

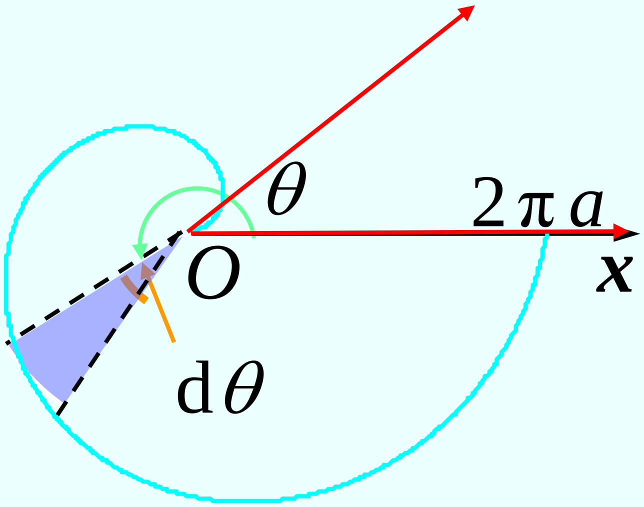


记忆： 过O点作一个箭头方向朝外穿过图形

箭头逆时针旋转最大活动范围为θ的上下限

$\frac{1}{2}$[箭头出射线²－入射线²]作为被积函数

例1. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a>0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .



解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$

例2. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围图形的面积 .

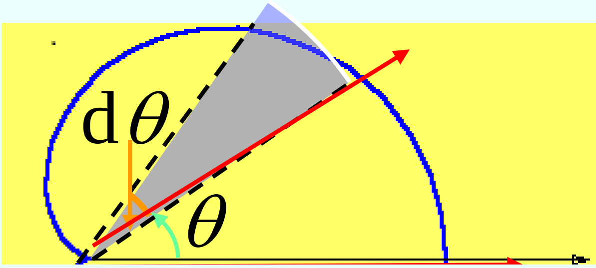
解: $A = 2\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

$$= a^2\int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

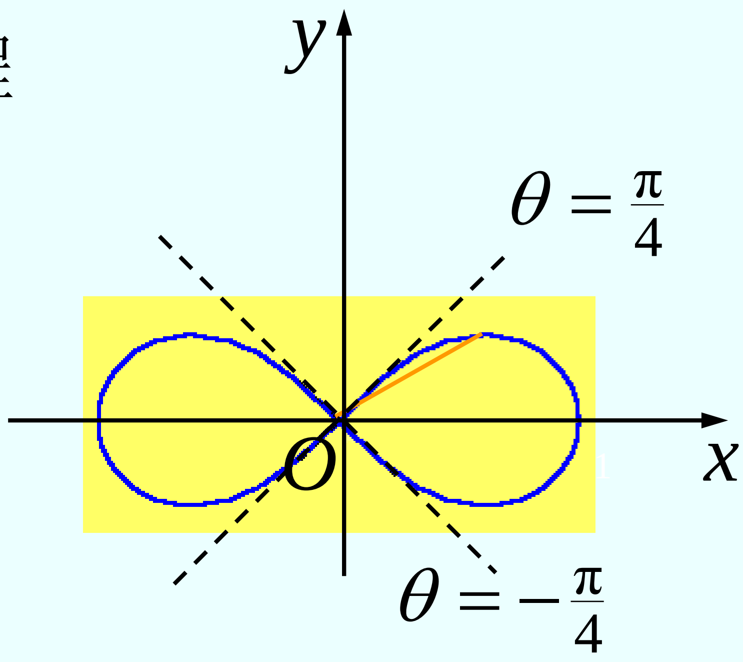


$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x \quad n\ \text{为正整数}$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\ \text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & n\text{为奇数（}n>1\text{）} \end{cases}$$

例3. 计算双纽线 $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成图形的面积 .

解: 将曲线方程化为极坐标方程



将 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 代入可得

$$\rho^2 = \cos 2\theta \geq 0$$

图形关于x,y轴对称

$$A = 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos 2\theta \,\mathrm{d}\,\theta$$

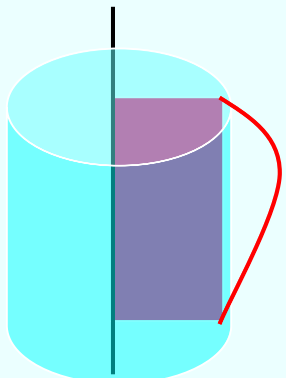
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

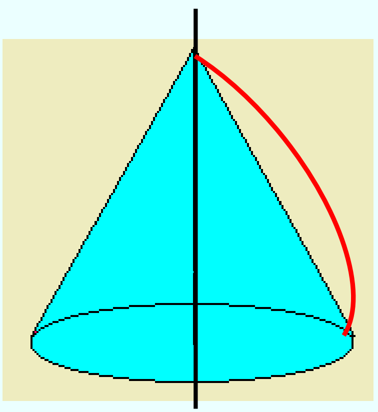
三、求体积

1、旋转体体积

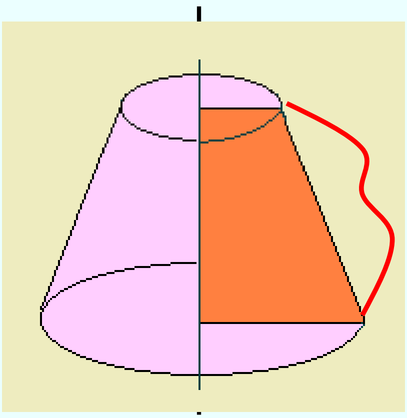
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴．



圆柱



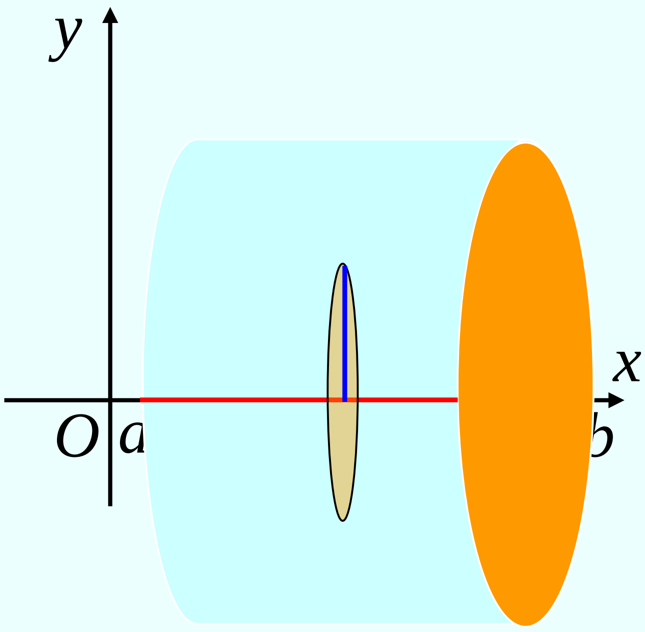
圆锥



圆台

绕x轴旋转的旋转体体积

(1)由曲线$y=f(x)$, $f(x)\geq 0$, 直线$x=a, x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所成的立体体积



圆片法

绕x轴

选取 积分变量x

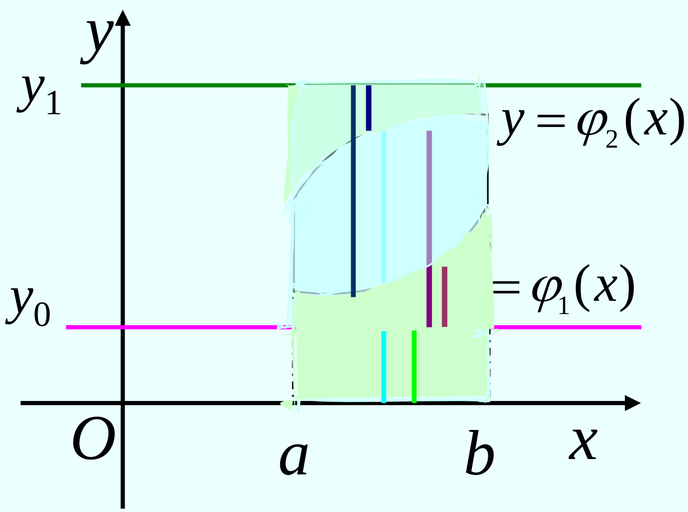
切片 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}]$

体积元素 $\pi[f(x)]^2\cdot \mathrm{d}x$

积分 $V_x=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$

圆片半径

(2)由曲线$y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, 直线$x=a$,$x=b$所围成平面图形绕x轴,$y=y_0$,$y=y_1$旋转一周所成的立体体积



绕x轴

$$V_x=\pi\int_a^b[\varphi_2^2(x)-\varphi_1^2(x)]\mathrm{d}\,x$$

绕$y=y_0$

$$V_{y=y_0}=\pi\int_a^b([\varphi_2(x)-y_0]^2-[\varphi_1(x)-y_0]^2)\mathrm{d}\,x$$

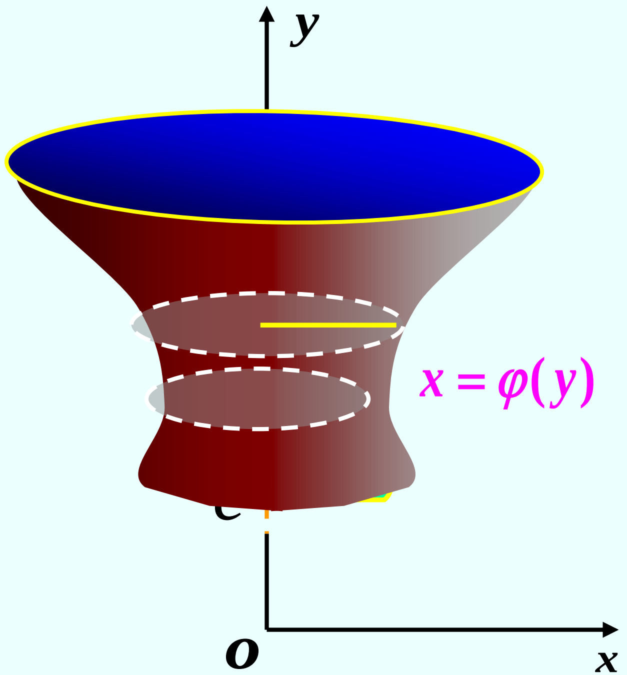
绕$y=y_1$

$$V_{y=y_1}=\pi\int_a^b([y_1-\varphi_1(x)]^2-[y_1-\varphi_2(x)]^2)\mathrm{d}\,x$$

说明：$y=y_0,y_1$平行x轴,积分变量是x

绕y轴旋转的旋转体体积

由曲线$x=\varphi(y)$, $\varphi(y)\geq 0$, 直线$y=c, y=d$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周所成的立体体积



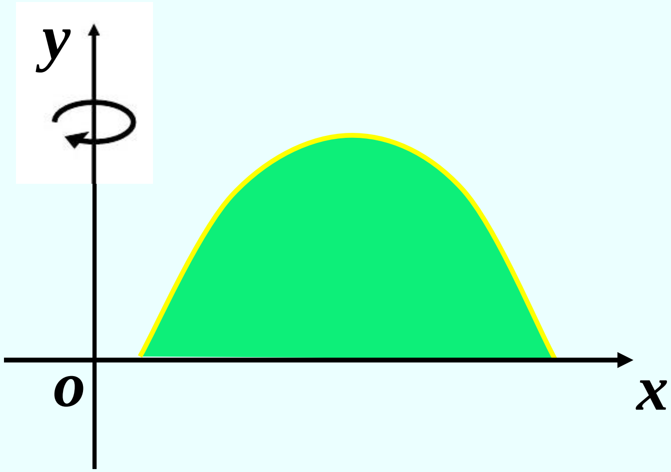
选取 积分变量y

切片 $[y, y+\mathrm{d}y]$

体积元素 $\pi[\varphi(y)]^2 \cdot \mathrm{d}\,y$

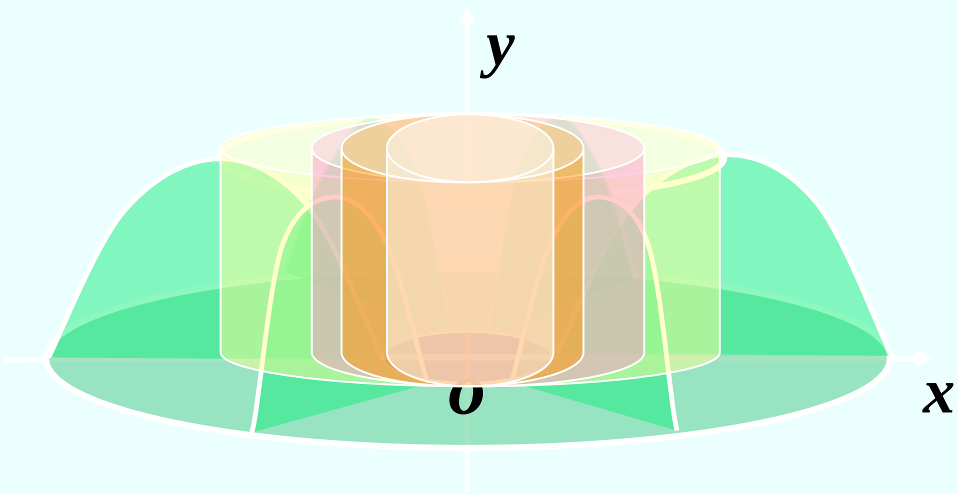
积分 $V_y = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 \,\mathrm{d}\,y$

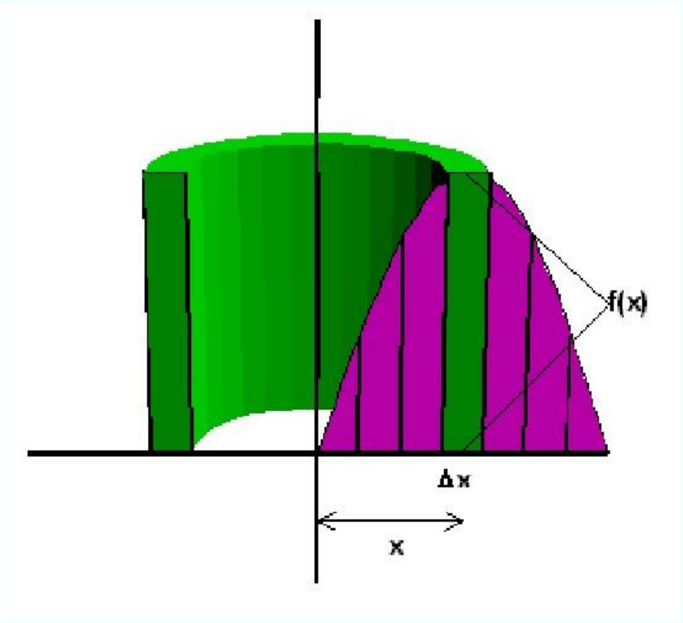
柱壳法



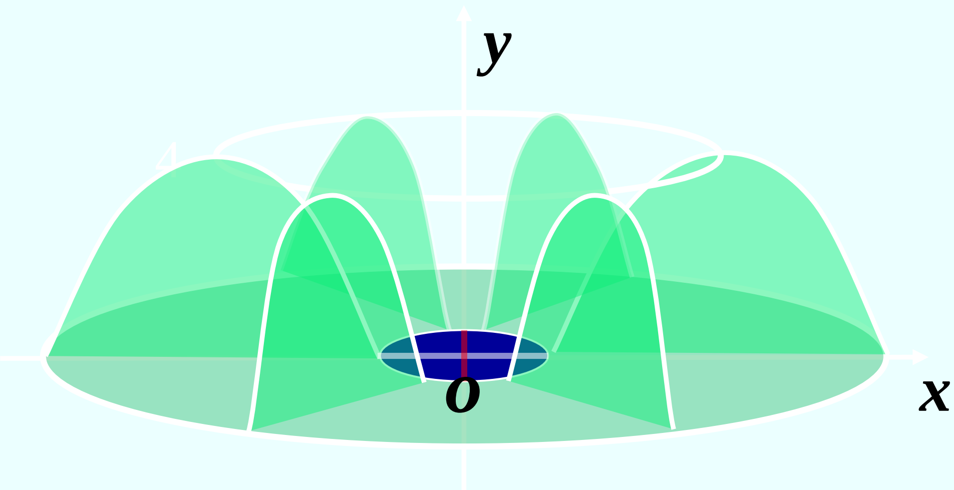
柱壳法的思路：将旋转体分成很多很薄的柱壳，然后利用定积分将这些柱壳的体积累积起来，得到旋转体的体积

柱壳法的示意图

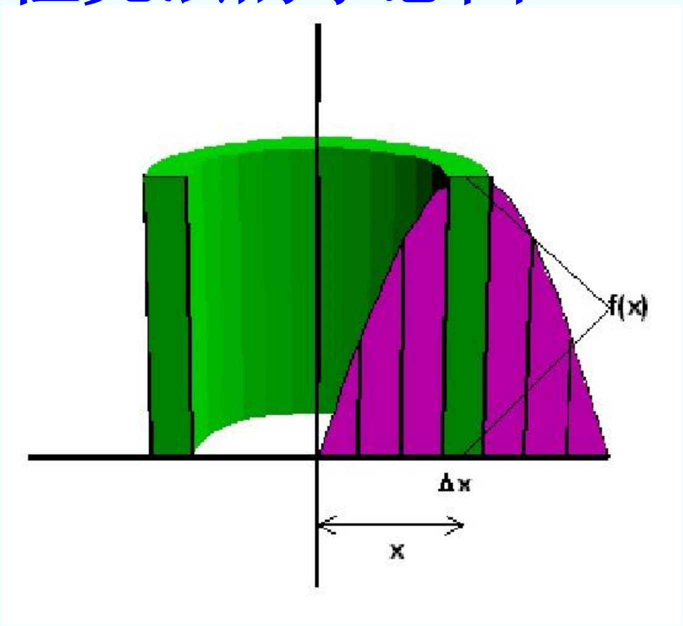




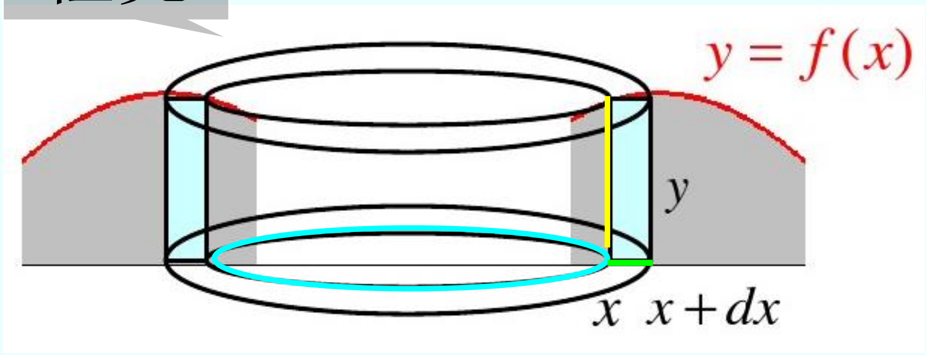
柱壳法



柱壳法的示意图



柱壳

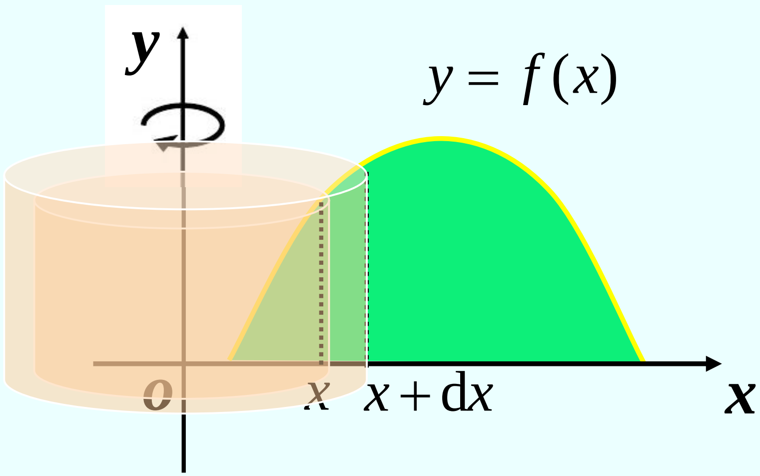


一层柱壳体积的近似值

$$2\pi x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

柱壳周长　柱壳高度　柱壳厚度

柱壳法



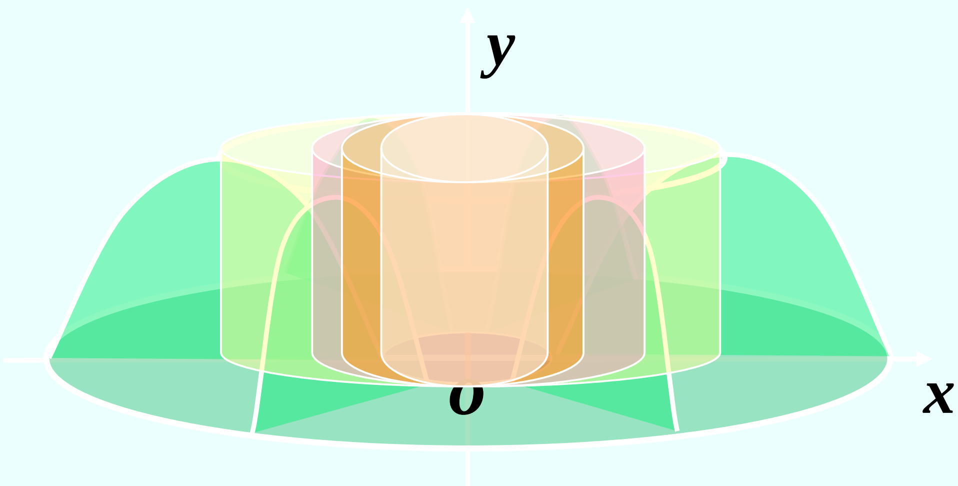
绕y轴

选取 积分变量x

切片 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}]$

柱壳体积 $2\pi x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x$

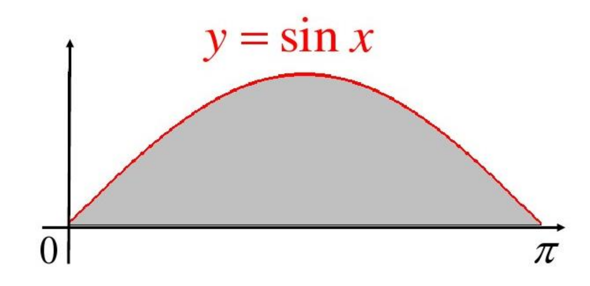
积分 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$



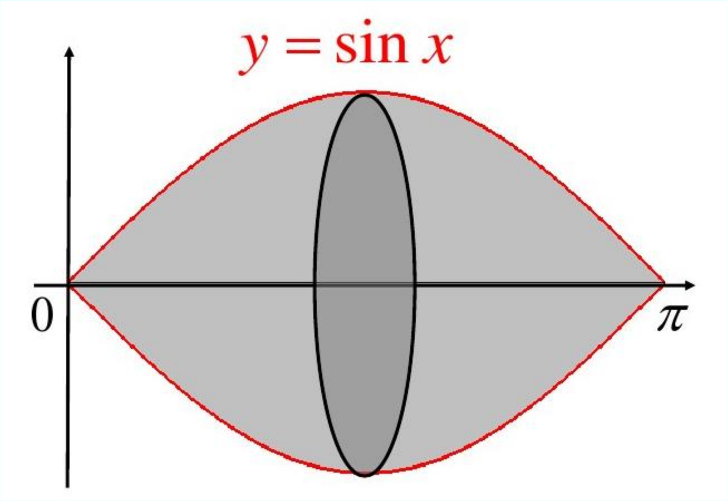
柱壳法的方便之处虽然图形是绕y轴旋转,但是柱壳法却是沿x轴积分,这样做有时会给我们的计算带来极大地便利

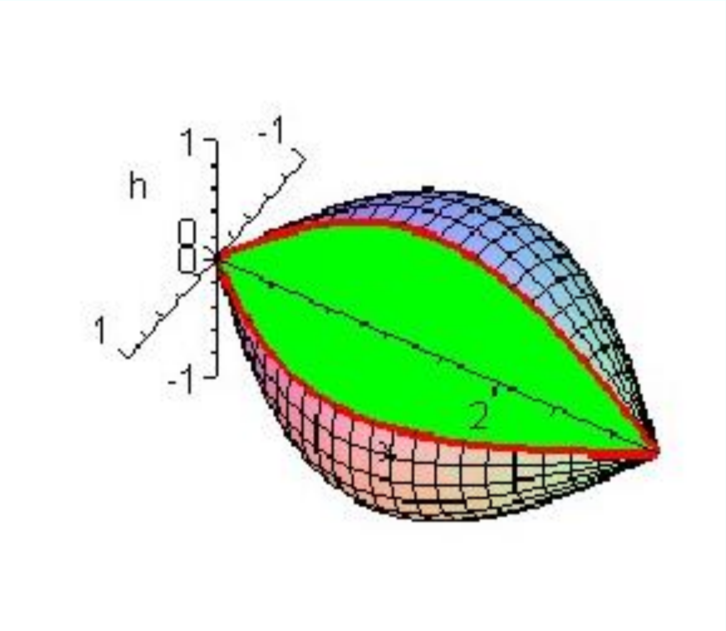
例1 求y=sin$x$ $(0 \le x \le \pi)$与x轴所围成的图形分别绕x轴和y轴所得的旋转体的体积

解：绕x轴旋转（圆片法）



$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$$

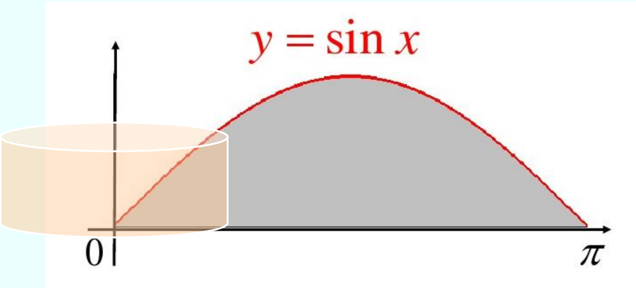


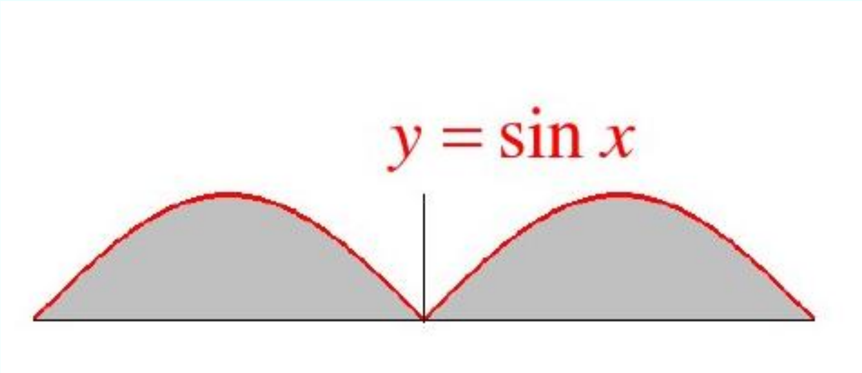


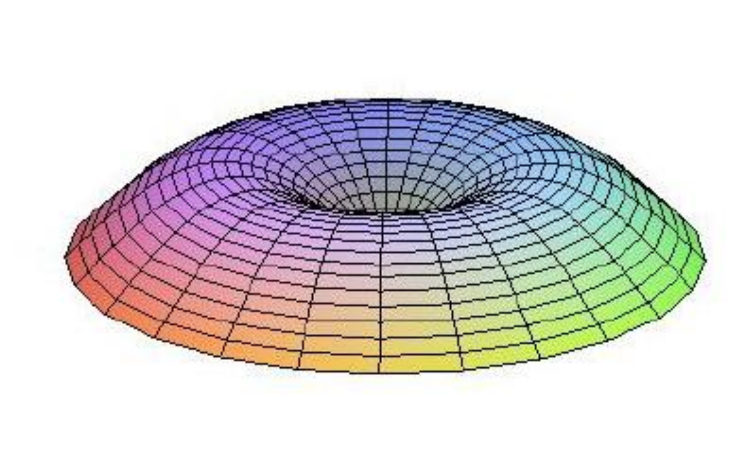
例1 求$y=\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$与x轴所围成的图形分别绕x轴和y轴所得的旋转体的体积

解：绕y轴旋转（柱壳法）

$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}\,x = 2\pi^2$$

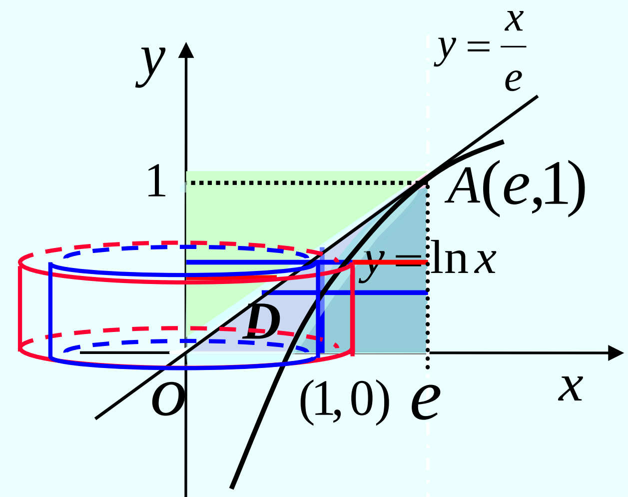






例1. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与 $y=\ln x$，x轴围成图形D，求D绕直线x轴，y轴 $x=e$旋转一周所得旋转体的体积

解： 画图 求交点设切点为$A(x_0,\ln x_0)$



则过A点的切线为 $y-\ln x_0=x_0(x-x_0)$

因 $(0,0)$ 在切线上 $\therefore\ -\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)=-1,$

$\therefore x_0=e \quad A(e,1)$

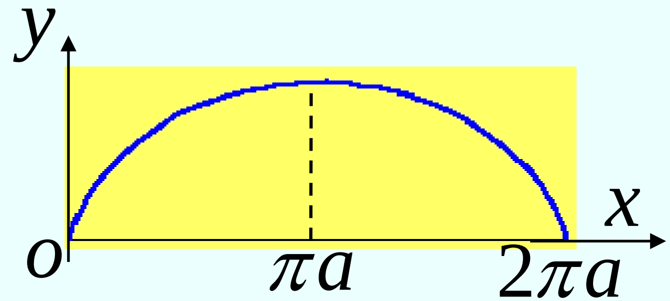
$$V_x=\int_0^e\pi\left(\tfrac{x}{e}\right)^2dx-\int_1^e\pi\ln^2 x\ dx=2\pi-\tfrac{2}{3}\pi e$$

柱壳法

$$V_y=\int_0^1\pi(e^y)^2dy-\int_0^1\pi(ey)^2dy=\tfrac{\pi}{6}e^2-\tfrac{\pi}{2}\ \text{或}=2\pi\int_0^e x\cdot\tfrac{x}{e}dx-2\pi\int_1^e x\cdot\ln x dx$$

$$V_{x=e}=\int_0^1\pi(e-ey)^2dy-\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\tfrac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$$

例2 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积 .



解: 绕 x 轴旋转而成的体积为

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \,\mathrm{d}x$$

令 $x = a(t-\sin t)$ 则 $y = a(1-\cos t)$ $dx = a(1-\cos t)dt$

x	0	$2\pi a$
t	0	2π

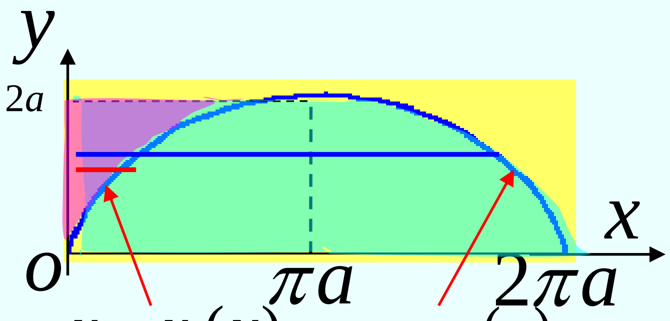
$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 \,\mathrm{d}t = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \quad (令\ u = \frac{t}{2})$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \,\mathrm{d}u = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$

例2 计算摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$的一拱与 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积 .

解: 绕 y 轴旋转而成的体积为



$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$$

令$y = a(1 - \cos t)$ 则$x = a(t - \sin t)$

$$dy = a\sin t dt$$

$x_2(y)$:

y	0	$2a$
t	2π	π

$x_1(y)$:

y	0	$2a$
t	0	π

$$V_y = \pi\int_{2\pi}^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a\sin t dt - \pi\int_0^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t = 6\pi^3 a^3$$

技巧：构造对称区间积分

$$\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(t^2\sin t-2t\sin^2 t+\sin^3 t)\mathrm{d}t \quad (令\ u=t-\pi)$$

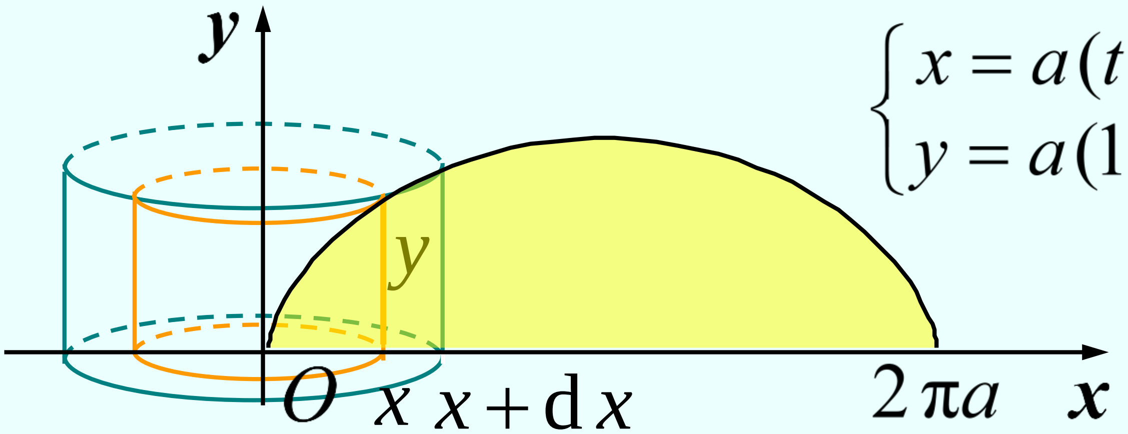
$$=\int_{-\pi}^{\pi}[-(\cancel{u^2}+2\pi u+\cancel{\pi^2})\sin u-2(\cancel{u}+\pi)\sin^2 u-\cancel{\sin^3 u}\,]\mathrm{d}u$$

$$=\underbrace{-4\pi\int_0^{\pi}u\sin u\,\mathrm{d}u}_{分部积分}\ \underbrace{-4\pi\int_0^{\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u}_{关于\frac{\pi}{2}对称}$$

$$=-4\pi^2-8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u=-4\pi^2-8\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-6\pi^2$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,\mathrm{d}t=6\pi^3 a^3$$

柱壳法



$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

柱面面积 $2\pi x \cdot y$　　　柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \, \mathrm{d}t = 6\pi^3 a^3$$

三、求体积

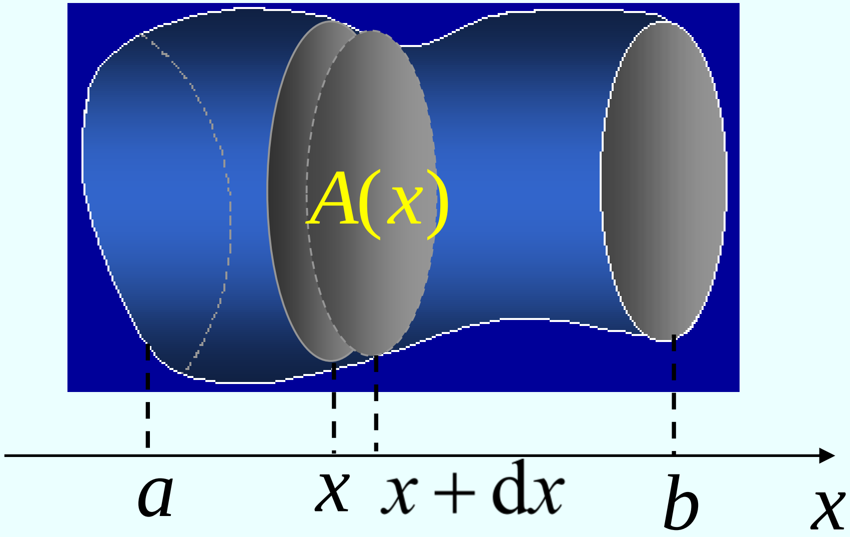
2、已知截面面积求体积

设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$，$A(x)$在$[a,b]$上连续，则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

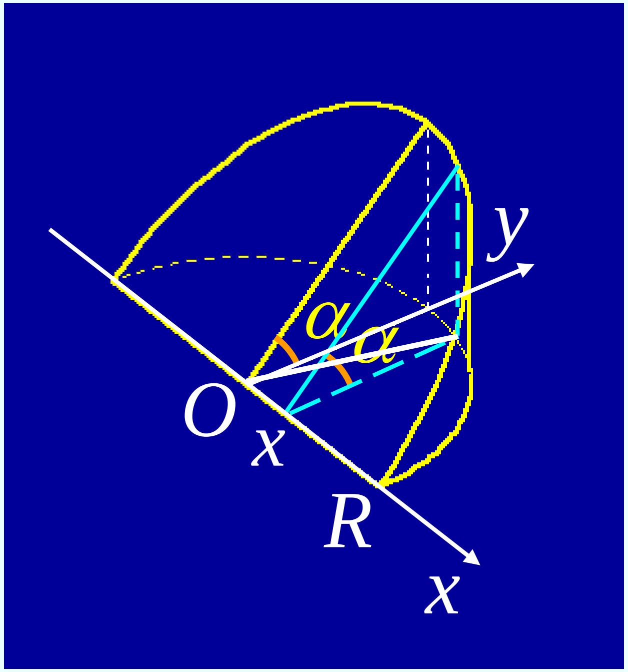
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



例 一平面经过半径为R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成 α 角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积 .

解: 如图所示取坐标系，则圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$

垂直于x 轴的截面是直角三角形，其面积为



$$A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,\tan\alpha$$

$$(-R\le x\le R)$$

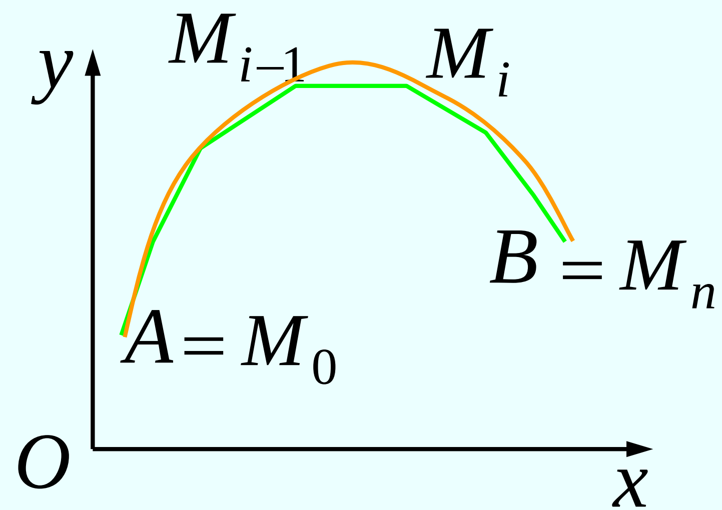
$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

四、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$



并称此曲线弧为可求长的.

定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的.

(证明略)

四、平面曲线的弧长

公式1 设曲线弧的方程为 $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ 时，

则曲线弧的长度为 $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$

公式2 曲线弧由参数方程给出 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

则所求弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

公式3 曲线弧极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta).$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'(\theta) = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta \\ y'(\theta) = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = \rho^2 + \rho'^2$$

四、平面曲线的弧长

公式1 设曲线弧的方程为 $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ 时，

则曲线弧的长度为 $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$

公式2 曲线弧由参数方程给出 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

则所求弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

公式3 曲线弧极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta).$

则所求弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

例1 曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le 0.5$ 的一段弧的长度

解 所求弧长 $s=\int_0^{0.5}\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$y'=\dfrac{-2x}{1-x^2}$

$$=\int_0^{0.5}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$

$1-x^2>0$

$$=-0.5+\ln 3$$

公式1 设曲线弧的方程为 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 时，

则曲线弧的长度为 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$

例2 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的弧长.

解 因为 y 为连续函数，所以函数 $\sqrt{\cos t}$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},x\right]$ 上连续，故有 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$. 又 $y'=\sqrt{\cos x}$,

于是

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=4.$$

公式1 设曲线弧的方程为 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 时，则曲线弧的长度为 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$

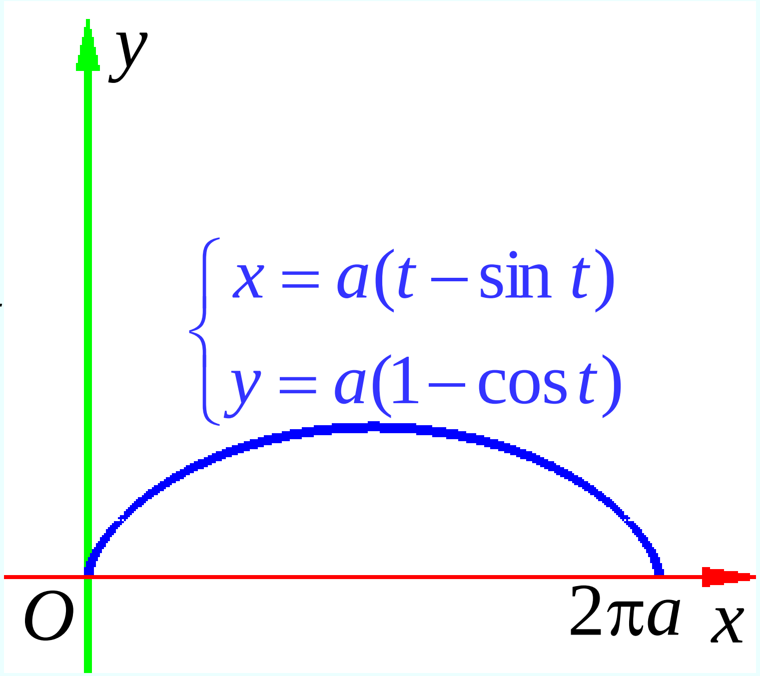
例3 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱的长度.

解 $s = \int_0^{2\pi} x'^2(t) + y'^2(t) dt$

$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t \mathrm{d}t$

$= \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$

$= 8a .$



公式2 曲线弧由参数方程给出 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$.

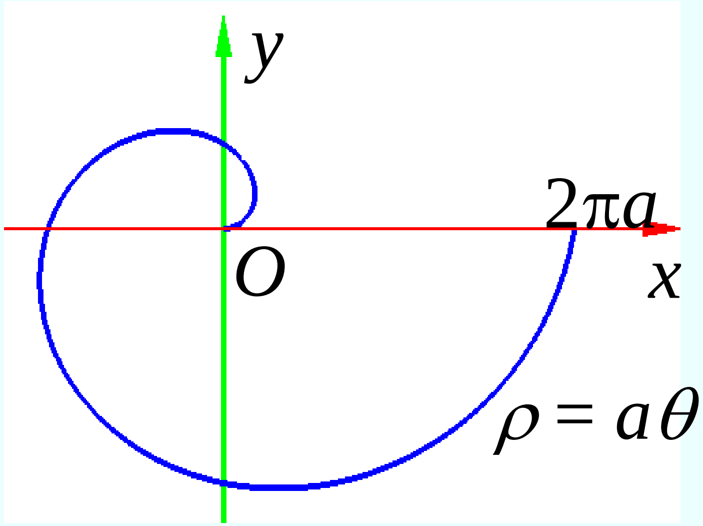
则所求弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, \mathrm{d}t$

例4 计算阿基米德螺线$\rho = a\theta \quad (a>0)$上相应于$\theta$从

0 变到 2π 的一段弧的长度.

解 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$



公式3 曲线弧极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$.

则所求弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

例4 计算阿基米德螺线$\rho = a\theta \ (a>0)$上相应于θ从 0 变到 2π 的一段弧的长度.

解 $$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\,\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

+1-1

其中$$\boxed{\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta}=\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\theta\cdot\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$

出现原式

$$=2\pi\sqrt{1+4\pi^2}-\boxed{\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta}+\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$

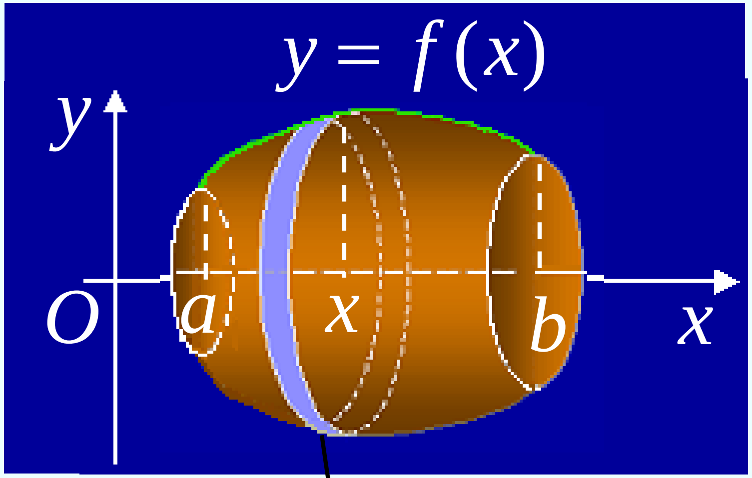
$$=2\pi\sqrt{1+4\pi^2}-\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\Big|_0^{2\pi}$$

$$\therefore s=\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})]$$

$$=\frac{1}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})].$$

五、旋转体的侧面积 (补充)

设平面光滑曲线 $y = f(x) \in [a,b]$, 且 $f(x) \geq 0$, 求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的侧面积

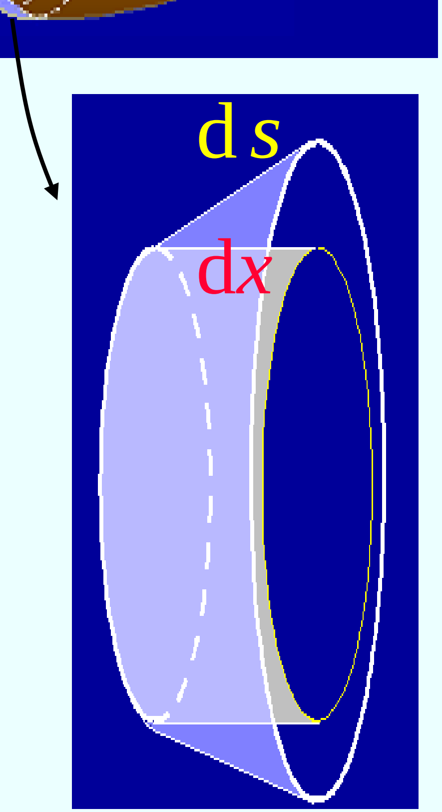


取侧面积元素:

位于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的圆台的侧面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s \neq 2\pi y\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$



积分后得旋转体的侧面积

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

例 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过原点(0,0)作其切线,求此切线与曲线及x轴围成的平面图形绕x轴旋转一周所得到旋转体的全表面积

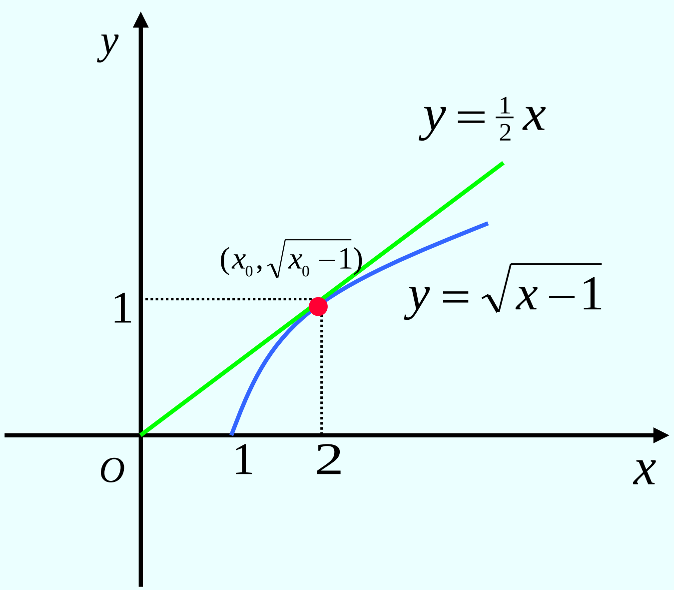
解 设切点 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$ 切线方程 $y-\sqrt{x_0-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$

将(0,0)代入解得$x_0=2$

$y=\frac{1}{2}x\,(0\le x\le 2)$ 绕x轴所得面积

$$S_1=2\pi\int_0^2\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+\tfrac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi$$

$y=\sqrt{x-1}\,(1\le x\le 2)$ 绕x轴所得面积



$$S_2=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\tfrac{1}{4(x-1)}}\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

$\therefore$全面积为 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$