第八章

空间解析几何与向量代数

§1　向量及其线性运算

§2　数量积 向量积 混合积

§3　平面及其方程

§4　空间直线及其方程

§5　曲面及其方程

§6　空间曲线及其方程

第八章

第五节

曲面及其方程

内容

一、曲面研究的基本问题

二、旋转曲面

三、柱面

四、二次曲面

五、高次代数曲面赏析

一、曲面研究的基本问题

回顾曲面方程

定义. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.

两个基本问题:

(1)已知一曲面作为点的几何轨迹时,求曲面方程.

(2)已知方程时,研究它所表示的几何形状(必要时需作图)

两个基本问题:

(1)已知一曲面作为点的几何轨迹时,求曲面方程.

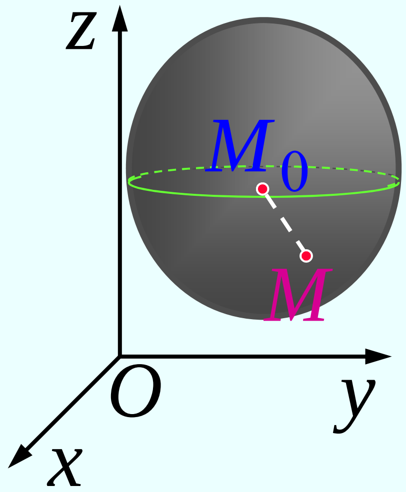
例1 建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为R的球面方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x,y,z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$

故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$



特别,当M_0在原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面

两个基本问题:

(2)已知方程时,研究它所表示的几何形状(必要时需作图)

例2. 研究方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 表示怎样的曲面.

解: 配方得 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$

可见此方程表示一个球面

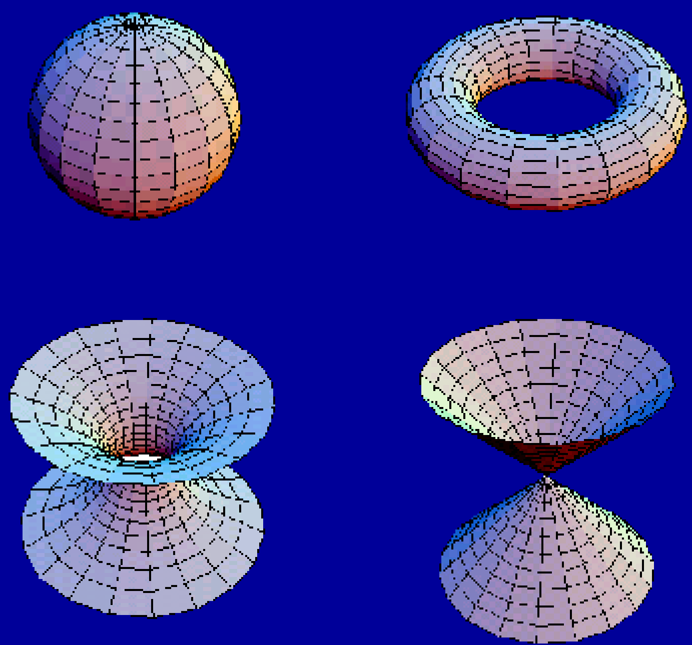
球心为 $M_0(1,-2,0)$, 半径为 $\sqrt{5}$

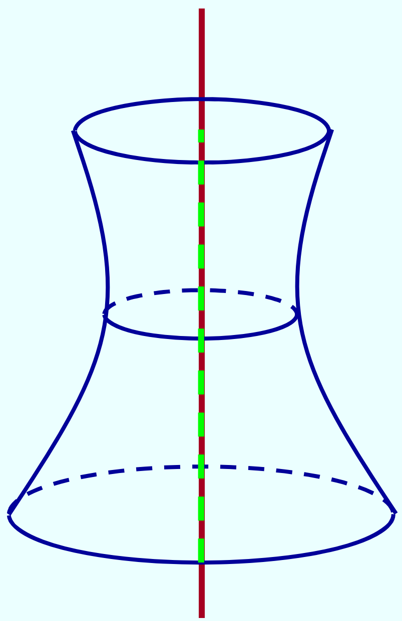
二、旋转曲面

1 定义　一条平面曲线绕其平面上一条定直线旋转一周所形成的曲面叫做旋转曲面.该定直线称为旋转轴.

旋转曲线称为旋转曲面的母线.

例如：





建立yOz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yOz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$

设点 $M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 则有

$$f(y_1,z_1)=0$$

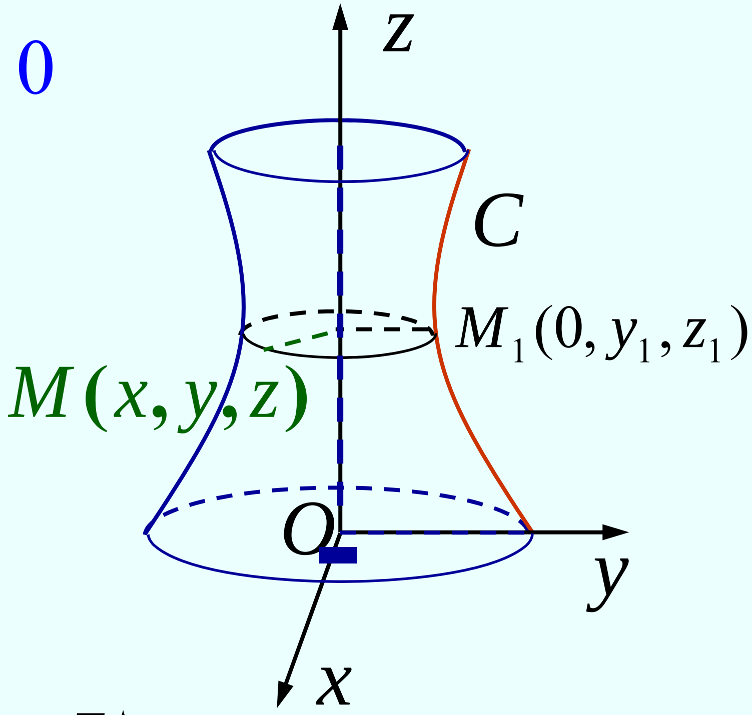
当绕 z 轴旋转时，该点转到 $M(x,y,z)$, 此时

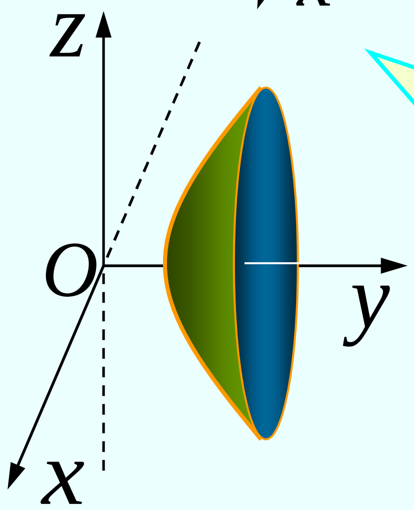
$$z_1=z,\quad y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

故旋转曲面方程为

$$\boxed{f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0}\quad \text{(绕}z\text{轴)}$$

$$\boxed{f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0}\quad \text{(绕}y\text{轴)}$$





能否绕 x轴？

曲线 C: $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$

绕x轴 $\boxed{f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0,}$

绕y轴 $\boxed{f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0,}$

曲线 C: $\begin{cases} f(x, z) = 0, \\ y = 0, \end{cases}$

绕x轴 $\boxed{f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0,}$

绕z轴 $\boxed{f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.}$

例 xoy坐标面上椭圆$4x^2 + 9y^2 = 36$

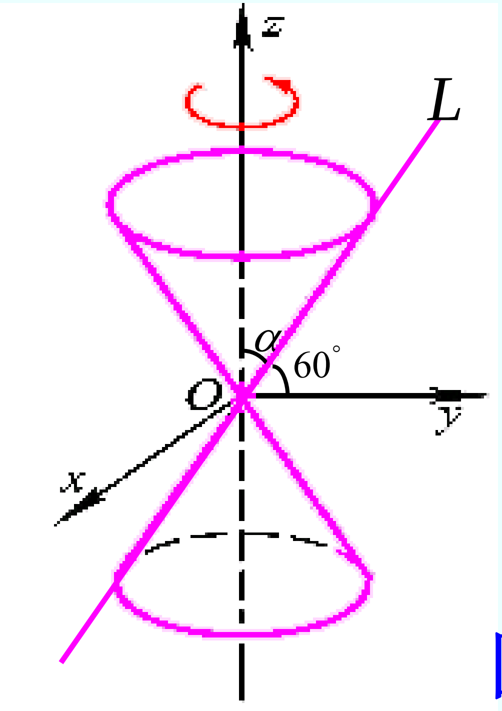
绕y轴 $4(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 + 9y^2 = 36$

绕x轴 $4x^2 + 9(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 36$

2 常见的旋转曲面

①**球面** $x^2+y^2+z^2=R^2$

②**圆锥面** 直线L绕另一条与L相交的直线旋转一周,所得旋转曲面叫做**圆锥面**, 两直线的交点称圆锥面的**顶点**, L与z轴的夹角α $(0<\alpha<\pi/2)$称为圆锥面的**半顶角**.



解: 在yOz面上直线L 的方程为

$$z=y\cot\alpha$$

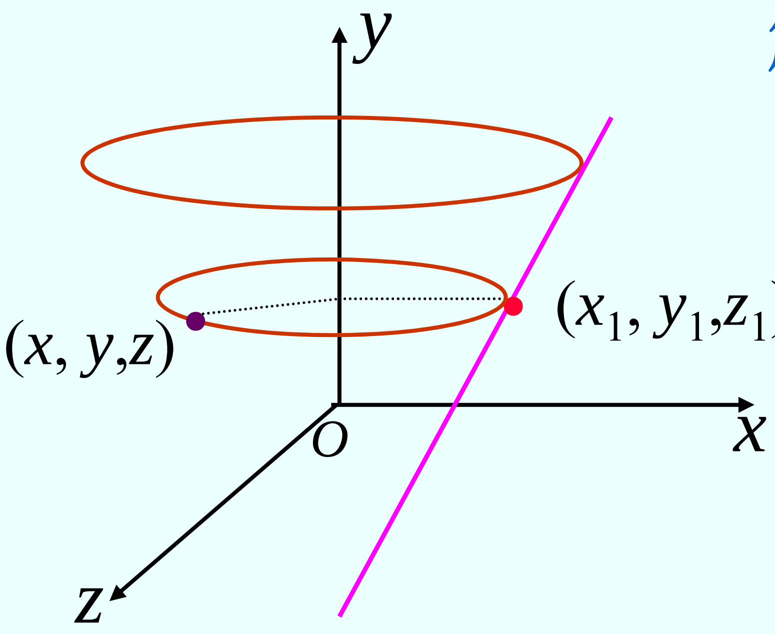
绕z轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

令 $a=\cot\alpha$ 两边平方

圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ 例 $z^2=3(x^2+y^2)$

例 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ 绕z轴旋转的旋转曲面方程



解 $\dfrac{x_1-1}{1}=\dfrac{y_1-1}{1}=\dfrac{z_1}{2}$

$$\begin{cases} z=z_1 \\ x^2+y^2=x_1^2+y_1^2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{消}x_1,y_1,z_1} x^2+y^2=(1+\frac{z_1}{2})^2+(1+\frac{z_1}{2})^2$$

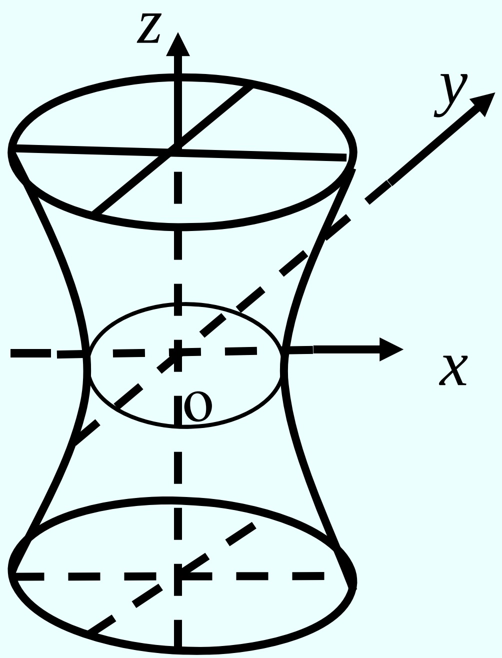
$$=2(1+\frac{z}{2})^2$$

③旋转双曲面

将xoz坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

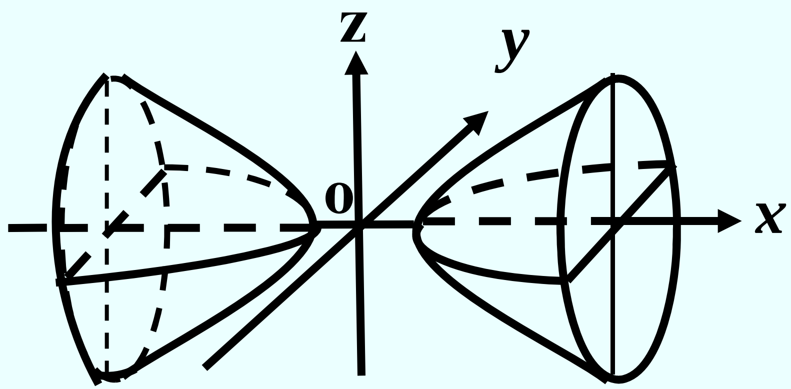
绕z轴 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

绕x轴 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$



旋转单叶双曲面

(一个负号)



旋转双叶双曲面

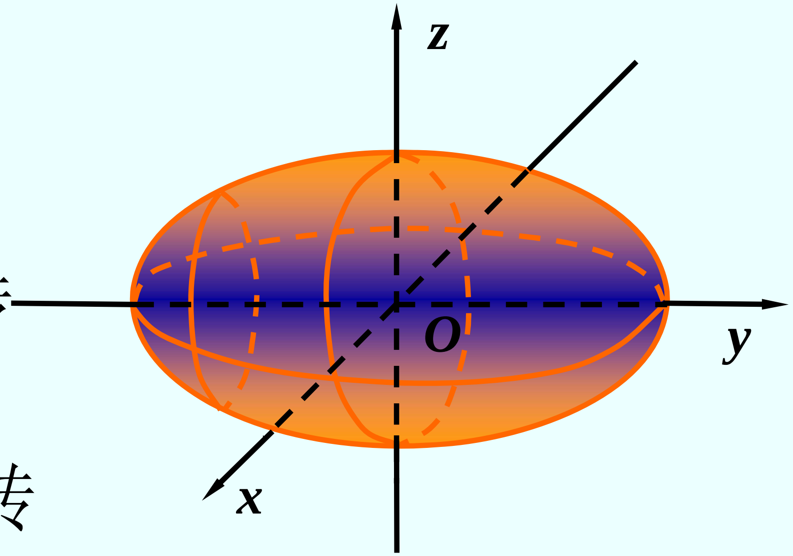
(两个负号)

④旋转椭球面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

可以看成

yoz面上椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕z轴旋转

xoz面上椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕z轴旋转

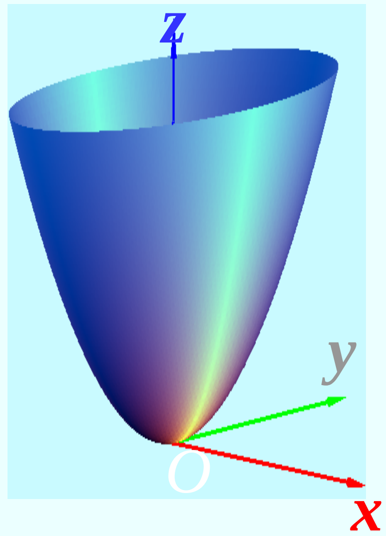


⑤ 旋转抛物面

$$x^2+y^2=2pz\ (p>0)$$

可以看成yoz面上椭圆 $y^2=2pz$ 绕z轴旋转

xoz面上椭圆 $x^2=2pz$ 绕z轴旋转



三、柱面

引例. 分析方程$x^2+y^2=R^2$表示怎样的曲面 .

解: 在 xOy 面上, $x^2+y^2=R^2$表示圆C,

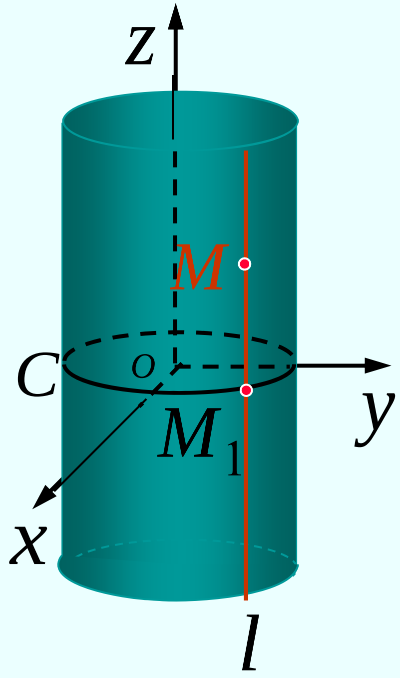
在空间直角坐标系中, 该方程与z无关

只要x, y满足方程，这些点就在曲面上.

在圆C上任取一点$M_1(x,y,0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线 l , 对任意 z , 点$M(x,y,z)$

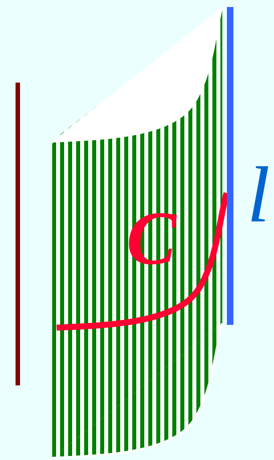
的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$



平行于 z 轴直线l沿xoy面上的圆$x^2+y^2=R^2$移动而成的,

称曲面为**圆柱面**, 圆叫做**准线**, l叫做**母线**

1 定义 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**. C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

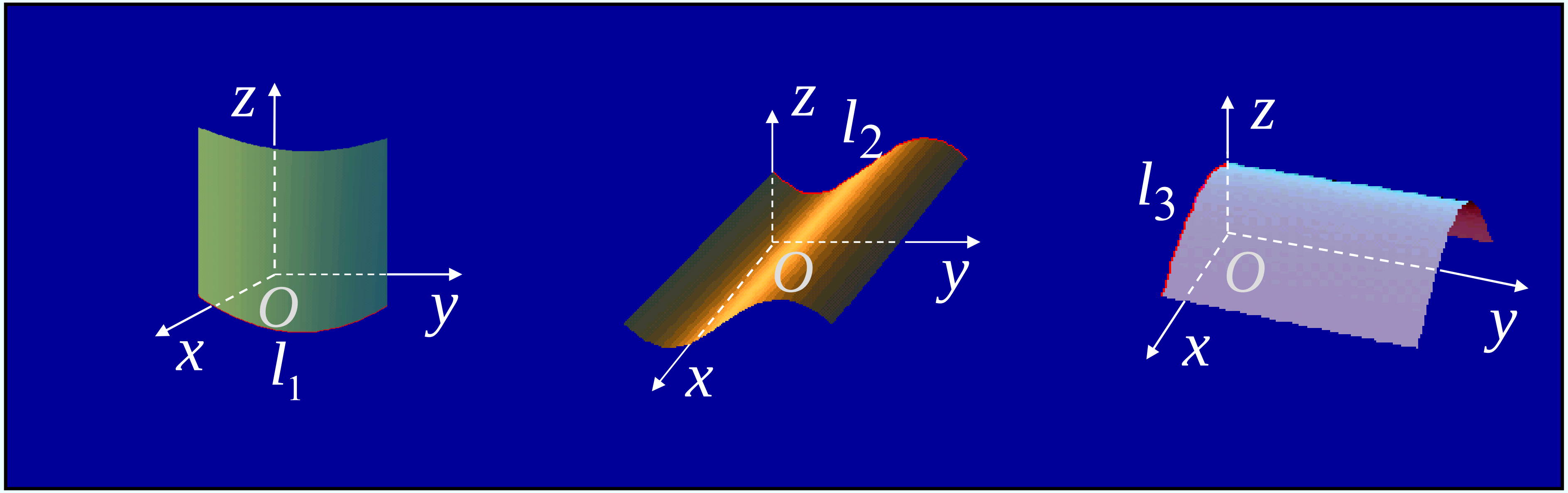


要领 在空间直角坐标系

$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面

$G(y,z)=0$表示母线平行于x轴的柱面

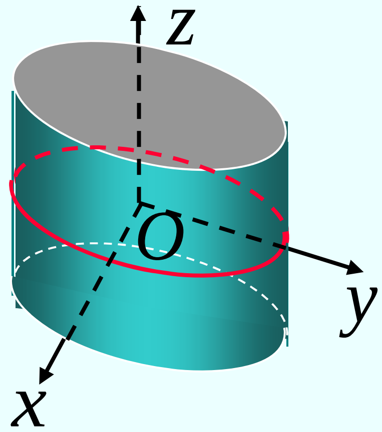
$H(x,z)=0$表示母线平行于y轴的柱面

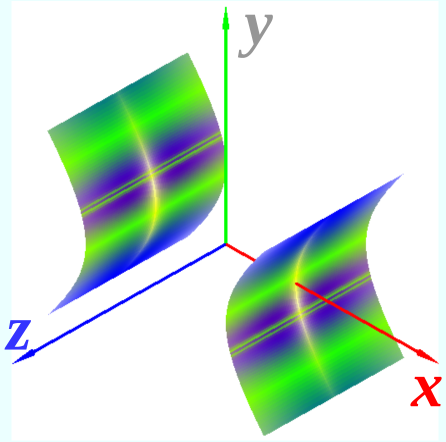


2 常见柱面

①圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$

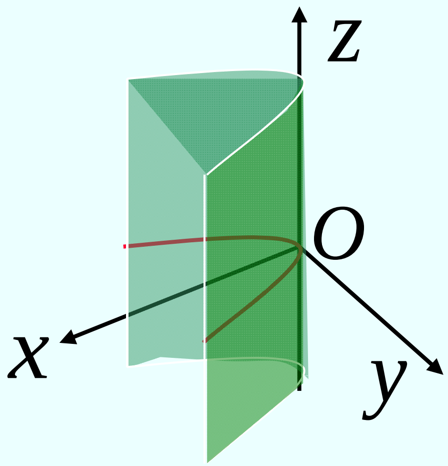
② 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



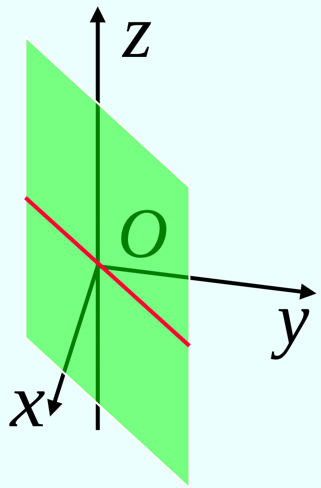


③双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

④抛物柱面 $y^2 = 2x$



例方程 $x - y = 0$



四、二次曲面

定义 三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)所表示的曲面称为二次曲面.

把平面称为一次曲面.

其基本类型有: 椭球面、抛物面、双曲面、锥面.

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,

下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍.

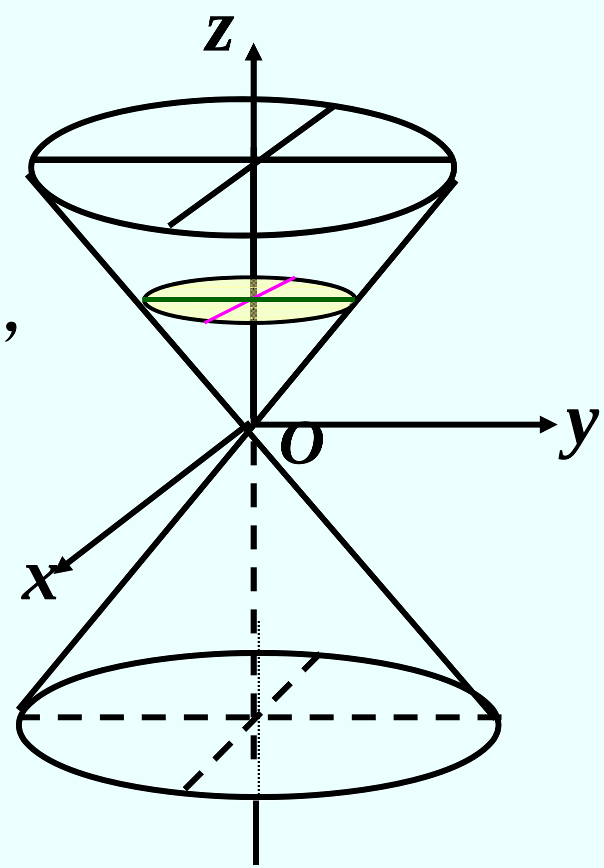
研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法.

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截, 考察其交线(即截痕)的形状, 然后加以综合, 从而了解曲面的全貌.

①椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

截痕法

以垂直于z轴的平面$z=t$截此曲面，



当$t=0$时得一点$(0,0,0)$

当$t\neq0$时得$z=t$上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1$$

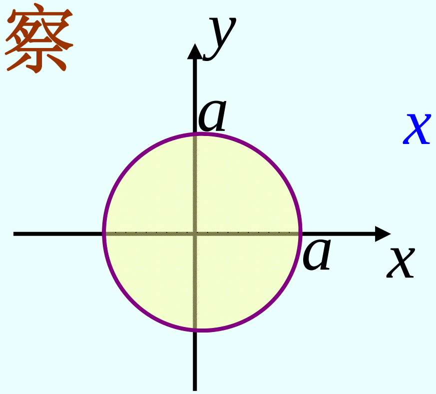
当t变化时，上式表示一族长短轴比例不变的椭圆

当$|t|$从大到小变为0时，这族椭圆从大到小缩为一点

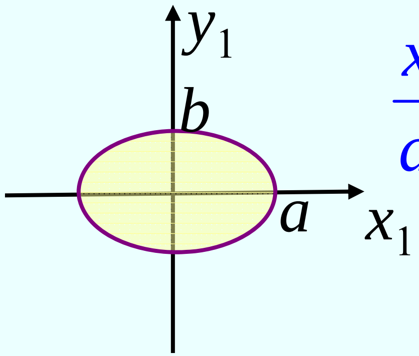
平面$z=t$与曲面$F(x,y,z)=0$的交线称为截痕

伸缩变形法

观察



$$x^2+y^2=a^2$$



$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

沿y轴方向将图伸缩$\frac{b}{a}$倍

新坐标

$$\begin{cases} x_1=x \\ y_1=\dfrac{b}{a}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ \boxed{y=\dfrac{a}{b}y_1} \end{cases}$$

代入$x^2+y^2=a^2$得

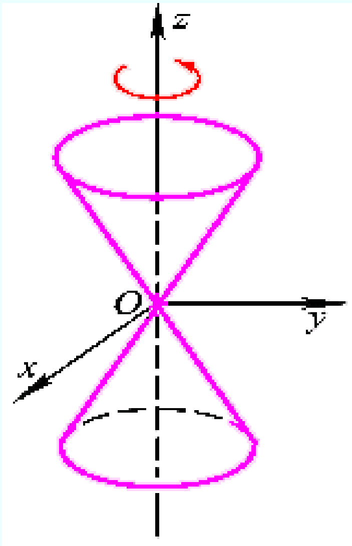
$$\boxed{x_1^2+\frac{a^2}{b^2}y_1^2=a^2}$$

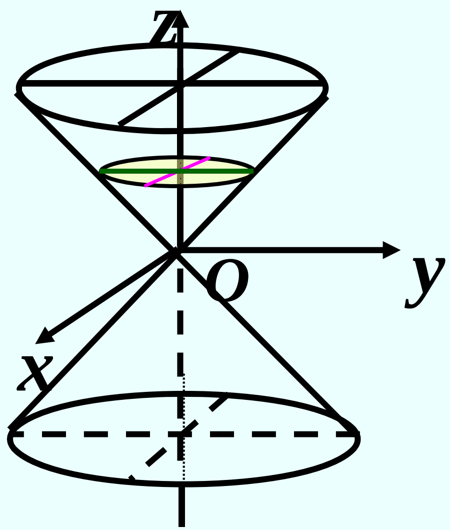
要领

$$x^2+y^2=a^2 \xrightarrow{y\text{换成}\frac{a}{b}y} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

需将 $x^2+y^2=a^2$ 沿y轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍

①椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$





伸缩变形法

可以看成圆锥面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2 \xrightarrow{\text{需代入}\frac{a}{b}y} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

沿y轴方向伸缩$\dfrac{b}{a}$倍后变成椭圆锥面

要领 $x^2+y^2=a^2 \xrightarrow{y\text{换成}\frac{a}{b}y} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

需将 $x^2+y^2=a^2$ 沿y轴方向伸缩$\dfrac{b}{a}$倍

② **椭球面** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把xoz面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

绕z轴旋转形成旋转椭球面

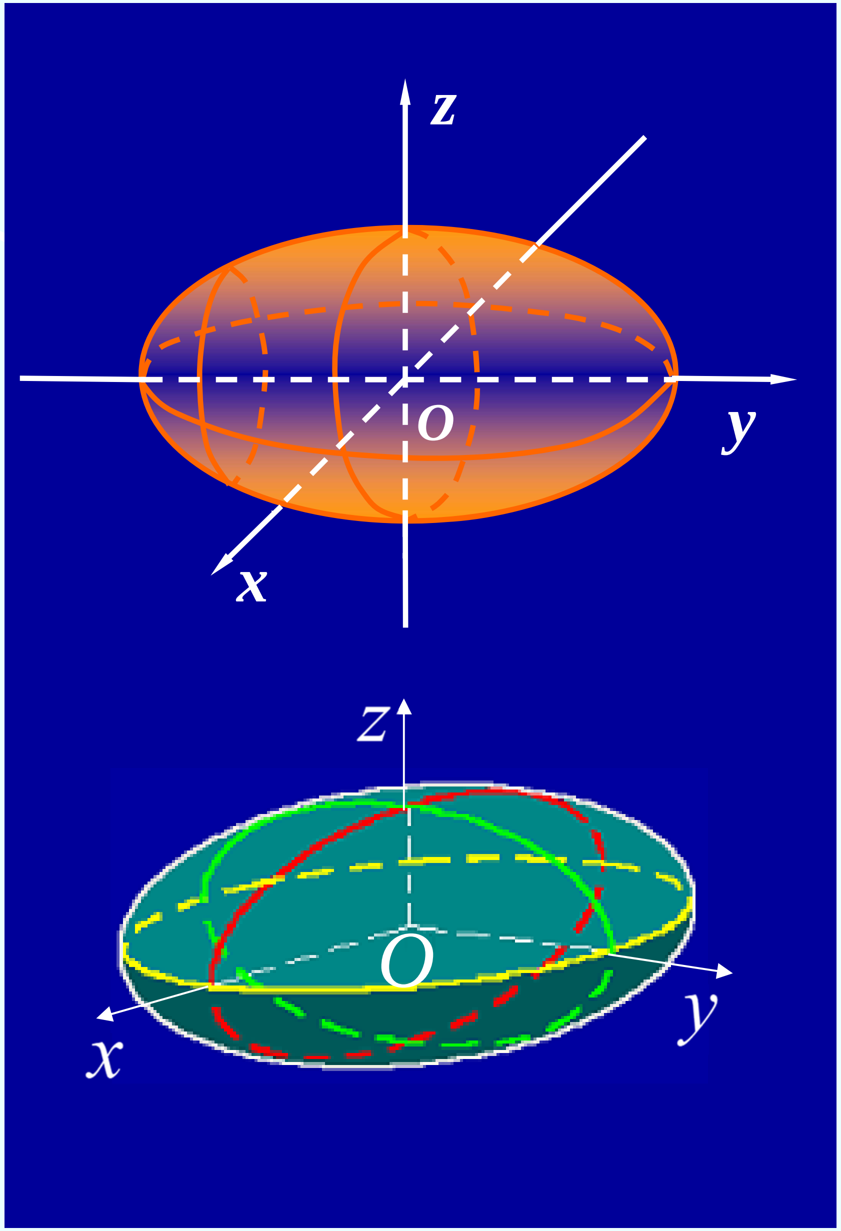
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

需代入$\dfrac{a}{b}y$

将图沿y轴方向伸缩

$\dfrac{b}{a}$倍后变成椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



③单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把xoz面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

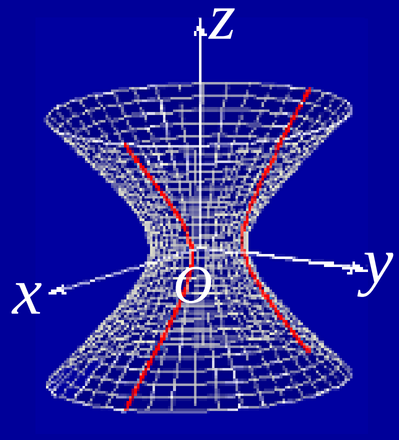
$\Downarrow$ 绕z轴旋转

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$\Downarrow$ 需代入 $\dfrac{a}{b}y$

将图沿y轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍

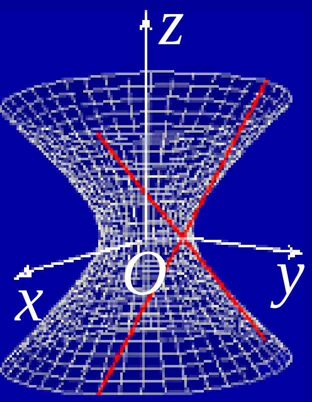
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



用$y=y_1$去截

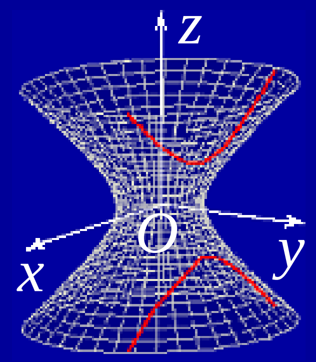
$|y_1|<b$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$



$|y_1|=b$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0\\ y=b\ (\text{或}-b)\end{cases}$$



$|y_1|>b$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\underbrace{1-\dfrac{y_1^2}{b^2}}_{<0}\\ y=y_1\end{cases}$$

④双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

把 yoz 面上的双曲线 $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

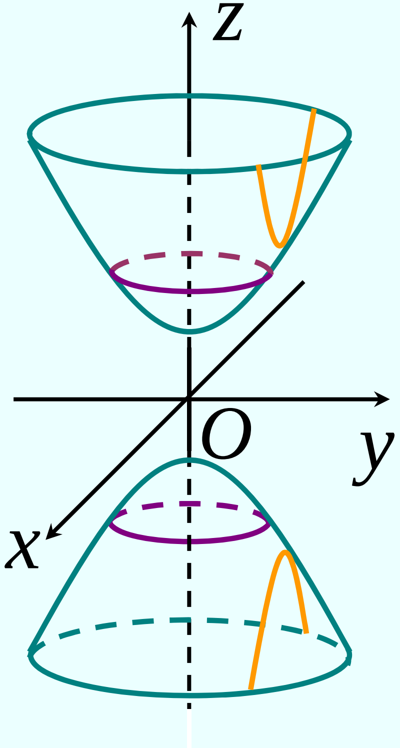
绕 z 轴旋转

$$-\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

需代入 $\frac{b}{a}x$

将图沿 x 轴方向伸缩 $\frac{a}{b}$ 倍

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$y=y_1$ 上的截痕为 双曲线

$x=x_1$ 上的截痕为 双曲线

$z=z_1$ $(|z_1|>c)$ 上的截痕为 椭圆

⑤椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$

把xoz上的抛物线 $\dfrac{x^2}{a^2}=z$

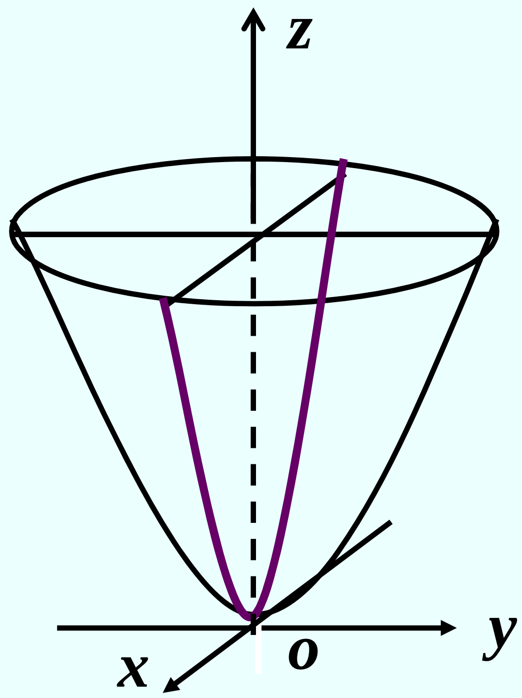
绕z轴旋转

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$$

需代入$\dfrac{a}{b}y$

将图沿y轴方向伸缩$\dfrac{b}{a}$倍

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

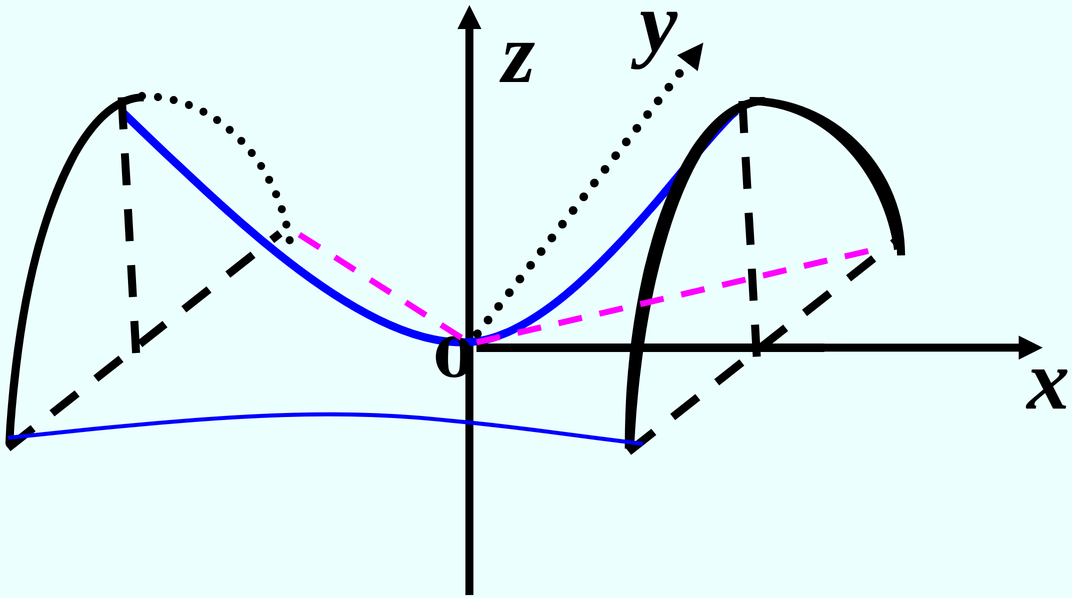


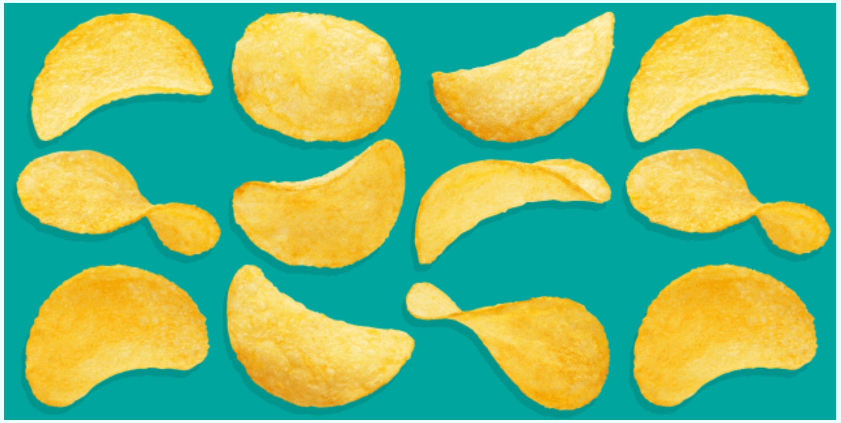
⑥双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ （马鞍面）

截痕法：用$x=t$截此曲面，截痕 $l:-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2}$

抛物线顶点 $x=t, y=0, z=\frac{t^2}{a^2}$ 开口朝下

当t变化时,抛物线顶点沿 $c: z=\frac{x^2}{a^2}$ 运动





品客薯片是双曲抛物面

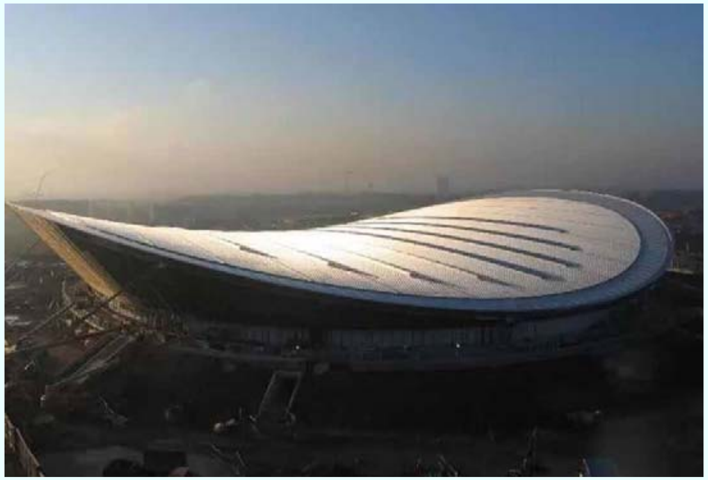
为什么要用双曲抛物面？

品客薯片很少会整一罐子都碎了，而且品客薯片从来也不会碎成对称的两瓣

双曲抛物面的几何特征让它具有奇怪的力学特性，比如无法形成一条应力线，也就是说，小裂缝很难扩大成一长条裂缝哗啦一下子扩散开来。

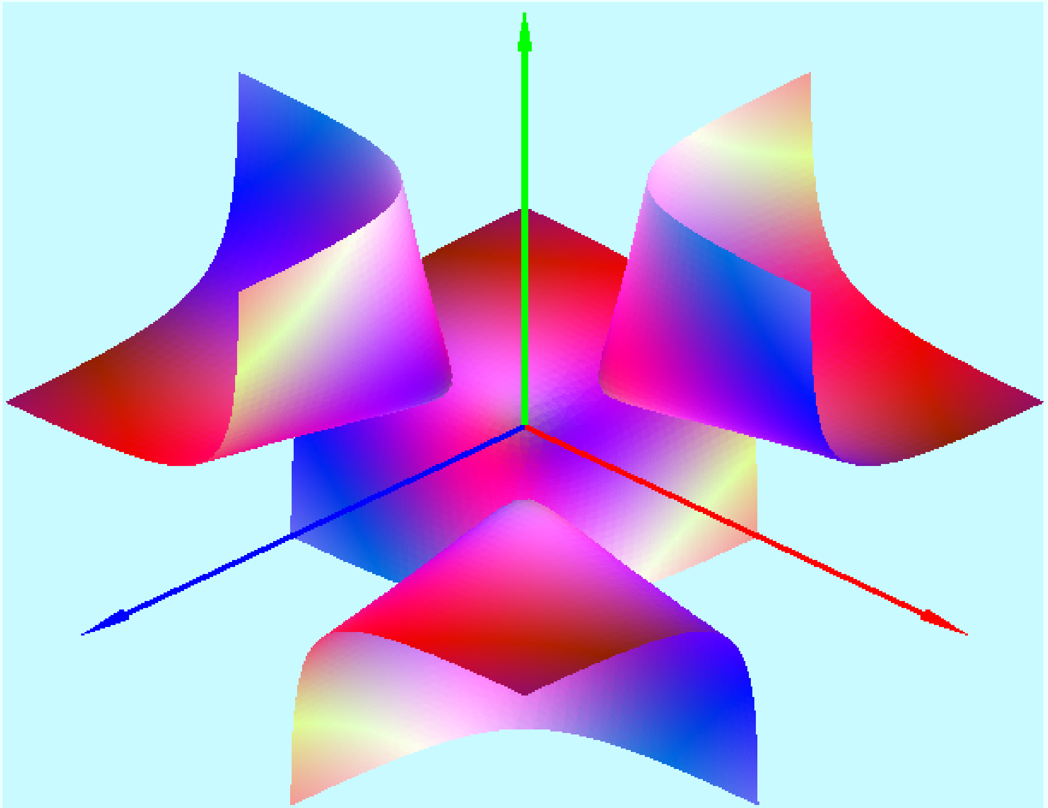
双曲抛物面不仅能承受拉扯，还能承受推挤。建筑学家早就知道双曲抛物面的这种承重抗压的性质，所以经常把这个形状设计到屋顶中。

2012伦敦奥运会的室内自行车馆→



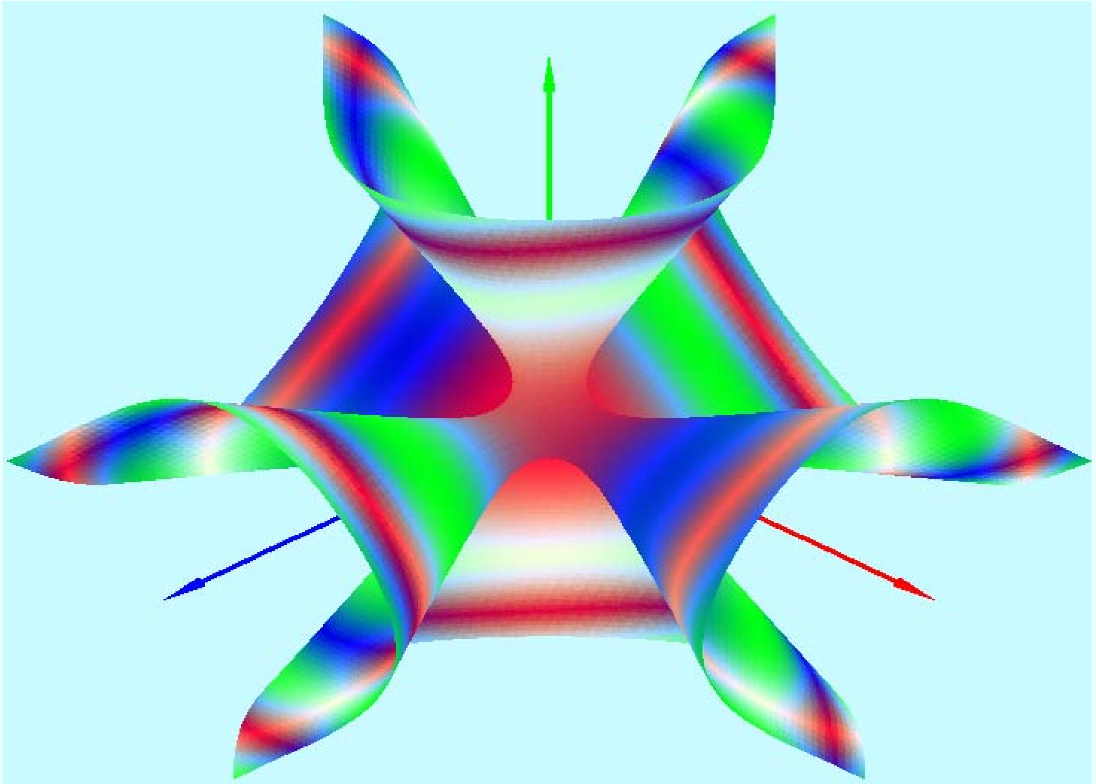
五、高次代数曲面赏析

Cayley Cublic曲面



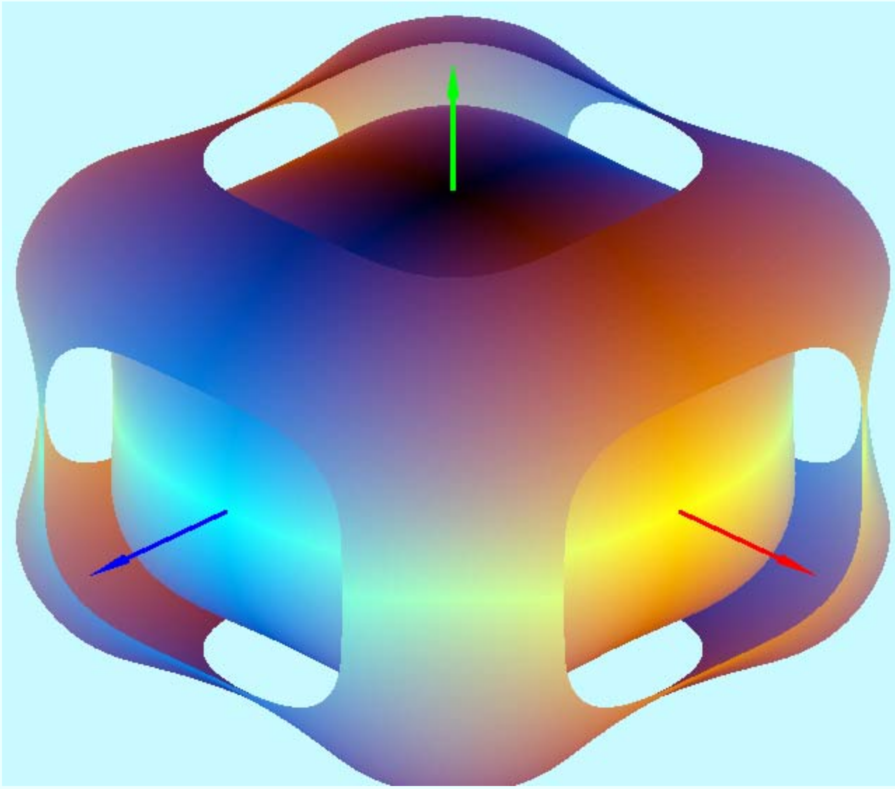
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 0$$

Clebsch Cublic曲面



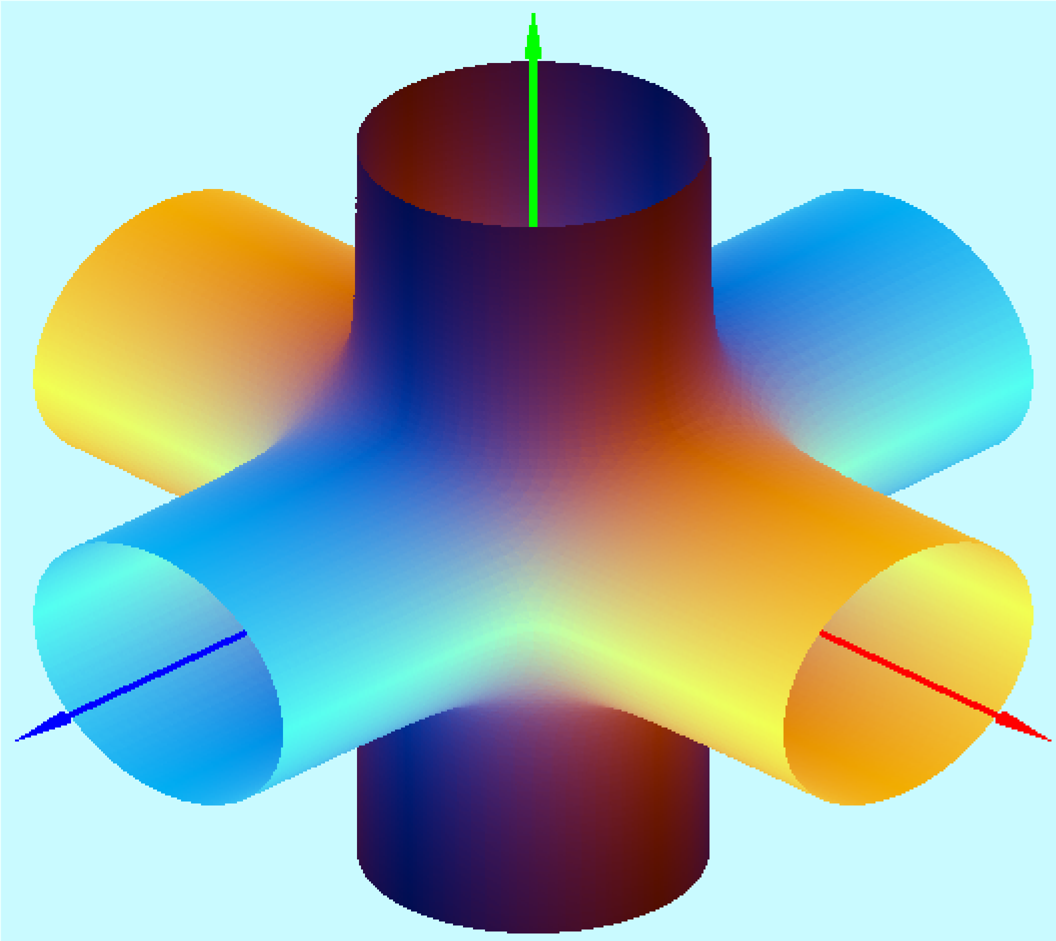
$$81(x^3+y^3+z^3)-189(x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y))$$
$$+54xyz+126(xy+yz+zx)-9(x^2+y^2+z^2)-9(x+y+z)=-1$$

Orthocircles曲面



$$((x^2+y^2-2^2)^2+z^2)((y^2+z^2-2^2)^2+x^2)$$
$$\cdot((z^2+x^2-2^2)^2+y^2)-4(x^2+y^2+z^2)=4$$

六通管道



$$(x^2+y^2-1)(y^2+z^2-1)(z^2+x^2-1)+xyz=1$$