第四章

不定积分

§ 1 不定积分的概念与性质

§ 2 换元积分法

§ 3 分部积分法

§ 4 有理函数的积分

$$\left.\begin{array}{l} \text{微分法: } F'(x) = (\ ?\ ) \\[2ex] \text{积分法: } (\ ?\ )' = f(x) \end{array}\right\} \text{互逆运算}$$

第四章

第一节

不定积分的概念与性质

内容

一、原函数与不定积分的概念

二、基本积分表

三、基本积分法

一、原函数与不定积分的概念

1 原函数 若$F(x)$与$f(x)$在区间 I 内，$\forall x \in I$

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

称$F(x)$是 $f(x)$在I内的一个**原函数**.

性质：①连续函数一定有原函数.（**原函数存在定理，下章证**）

i)原函数不唯一

若$F(x)$是 $f(x)$的原函数，则$F(x)+C$ 也是 $f(x)$的原函数

ii)若$F'(x)=f(x)=\Phi'(x)$，则 $\Phi(x)=F(x)+C$

iii)初等函数在定义区间内任何区间上有原函数

但原函数未必是初等函数

一、原函数与不定积分的概念

1 原函数 若$F(x)$与$f(x)$在区间 I 内，$\forall x \in I$

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

称$F(x)$是 $f(x)$在I内的一个**原函数**.

性质：①连续函数一定有原函数.（**原函数存在定理，下章证**）

② $f(x)$为偶函数$\xLeftarrow{F(0)=0}$$F(x)$为奇函数 例$f(x) = x^2, F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

③ $f(x)$为奇函数$\Longleftarrow$$F(x)$为偶函数 例$f(x) = x^3, F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

④$F(x)$以T为周期 $\longrightarrow$ $f(x)$以T为周期（下章）

2 不定积分的概念与性质

定义 在区间I内,函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的**不定积分**,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$.

若 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的原函数，则

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.}\quad (\,C\text{ 为任意常数}\,)$$

积分号 被积函数 积分变量 被积表达式

i) 称为积分常数不可丢！

ii) C可换成$\ln C$

但不能$\sin C, e^{C}$等

若 $f(x)$在 I 内原函数存在,则称$f(x)$在I内**可积**,今后总认为被积函数是可积的

2 不定积分的概念与性质

性质 ① $\dfrac{\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = f(x) = [\int f(x)\mathrm{d}x]'$

或 $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$

例 $\left(\int [f(x)+c]dx\right)'$

$= f(x)+c$

② $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C = \int df(x)$

例 如果 $\int df(x) = \int dg(x)$ 则下列结论中不正确的是（A）

(A) $f(x) = g(x)$ (B) $f'(x) = g'(x)$

(C) $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}g(x)$ (D) $\mathrm{d}\int f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\int g'(x)\mathrm{d}x$

2 不定积分的概念与性质

性质 ① $\dfrac{\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = f(x) = [\int f(x)\mathrm{d}x]'$

例 $\left(\int [f(x)+c]dx\right)' = f(x)+c$

或 $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$

② $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C = \int df(x)$

③ $\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$

④ $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x$

推广 $\int \left[k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x)\right]\mathbf{d}x$

$= k_1\int f_1(x)\mathbf{d}x \pm k_2\int f_2(x)\mathbf{d}x \pm \cdots \pm k_n\int f_n(x)\mathbf{d}x.$

称为分项积分.

二、基本积分表

① $\int k\mathrm{d}x = kx + C$

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$ $\begin{cases} \int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$

③ $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

解 当 $x > 0$ 时 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\quad \therefore \ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数

在$(0,+\infty)$内 $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + C$

当 $x < 0$ $\quad [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$

$\therefore \ln(-x)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 内的一个原函数

在$(-\infty,0)$内 $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$

把$x>0$及$x<0$内结果合起来,即得

二、基本积分表

① $\int k\mathrm{d}x = kx + C$

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

$$\begin{cases} \int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$$

③ $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

④ $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

⑤ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

⑥ $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

⑦ $\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

⑧ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad \int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

三、基本积分法

分项积分法（直接法）：计算积分时，常常需要对被积函数作适当的恒等变形（变量代换,三角公式, 代数公式）使之成为积分表中函数的线性组合形式

例1. 求 $\int \frac{2xe^x+\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+1}{x}dx$

解: 原式 $=2\int e^x dx+\int x^{-\frac{1}{8}}dx+\int \frac{1}{x}dx$

$=2e^x+\frac{8}{7}x^{\frac{7}{8}}+\ln|x|+C$

求代数和的不定积分时，只需在最后写出一个积分常数 C 即可.

例2. 求 $\int 2^x\cdot e^{-x}dx$

解: 原式 $=\int\left(\frac{2}{e}\right)^x dx=\frac{1}{\ln 2-1}\left(\frac{2}{e}\right)^x+C$

例3. 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解: 原式 $=\int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

例4. 求 $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

解: 原式 $=\int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x - \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \quad = -\frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{x} + \arctan x + C$$

例5. 求 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

解: 原式 $=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x})dx$

$= \tan x - \cot x + C$

例6. 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

解: 原式 $=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x})dx$

$= \tan x - \sec x + C$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

例7. 求 $\int \frac{1-\cos x}{1-\cos 2x} dx$

解: 原式 $= \int \frac{1-\cos x}{2\sin^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}(-\cot x + \csc x) + C$$

例8. 求 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

解: 原式 $= \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right) dx$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

例9. 求 $\int\left(\tan^2 x+\frac{4\sin^3 x-1}{\sin^2 x}\right)dx$

解: 原式 $=\int(\sec^2 x-1+4\sin x-\frac{1}{\sin^2 x})dx$

$$=\tan x-x-4\cos x+\cot x+C$$

例10. 若$f(x)$的导函数是$\sin x$,则$f(x)$的一个原函数为(B)

(A)$1+\sin x$ (B)$1-\sin x$

(C)$1+\cos x$ (D)$1-\cos x$

解: $f'(x)=\sin x \quad f(x)=\int\sin x dx=-\cos x+C_1$

$$\int f(x)dx=\int -\cos x+C_1 dx=-\sin x+C_1 x+C_2$$

取$C_1=0, C_2=1$