第一章

第四节

无穷小与无穷大

内容

无穷小与无穷大

概念　　性质

关系

一无穷小

定义 以0为极限的数列或函数称为无穷小

记为 $\lim \alpha = 0$ 包括

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

说明 i)证明数列或函数为无穷小，即证明其极限为零

例如 $x^2, \sin x, \tan x, 1-\cos x$ 为 $x \to 0$ 时无穷小

$\dfrac{1}{x}, \dfrac{\sin x}{x}, e^{-x^2}$ 为 $x \to \infty$ 时无穷小

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 为 $n \to \infty$ 时无穷小

ii)当说明 $f(x)$ 为无穷小时，要指明在何种变化下

定理 1 (函数极限与无穷小的关系)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \rightleftarrows f(x) = A + \alpha,$$ 其中 α 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量 .

证: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$\rightleftarrows \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad |\alpha - 0| < \varepsilon$$

$$\xrightleftharpoons{\alpha = f(x) - A} \lim_{x \to x_0} \alpha = 0$$

对自变量的其他变化过程类似可证 .

常在证明中应用，可将极限号去掉给出$f(x)$的表达式

二、无穷大

定义 绝对值无限增大的数列或函数称为无穷大

记为 $\lim f(x)=\infty$ 3种情况 $\infty,+\infty,-\infty$

6种情况 $x\to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$

书上42页

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时的}\ x,$$

$$\text{总有}\ |f(x)|>M$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0,\ \text{当}\ |x|>X\ \text{时的}\ x,\ \text{总有}$$

$$|f(x)|>M$$

例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=$　　$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=$　　$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n=$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x=$　　$\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x=$

例 证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证： 任给正数 M，要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，即 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$，

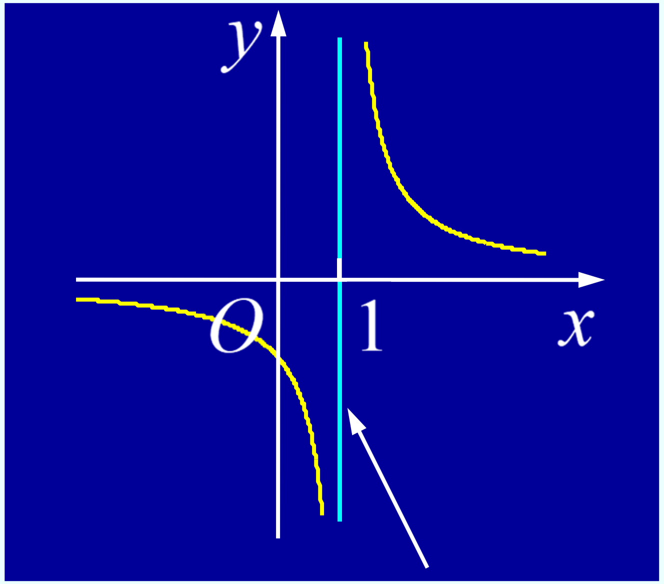
只要取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则对满足 $0<|x-1|<\delta$ 的一切 x，有

$$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$$

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

说明： 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$

为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**.



铅直渐近线

三 无穷小与无穷大的关系

定理2 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证明: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

$\forall \varepsilon>0, M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时的x,有$|f(x)|>M$

$\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\dfrac{1}{M}=\varepsilon$ 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

据此, 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ $\forall M>0, \varepsilon=\dfrac{1}{M}$, $\exists \delta>0$,

当$0<|x-x_0|<\delta$时的x,有$|f(x)|<\varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}=M$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$