

大连海事大学《离散数学》2020–2021 学年第二学期

期末试卷 B

一、单项选择题

1. 设图 G 的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 G 的边数为()。

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

2. 已知图 G 的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则 G 有()。

- A. 5 点, 8 边 B. 6 点, 7 边

- C. 6 点, 8 边 D. 5 点, 7 边

3. 设图 $G = \langle V, E \rangle$, 则下列结论成立的是()。

- A. $\deg(V) = 2|E|$ B. $\deg(V) = |E|$

- C. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ D. $\sum_{v \in V} \deg(v) = |E|$

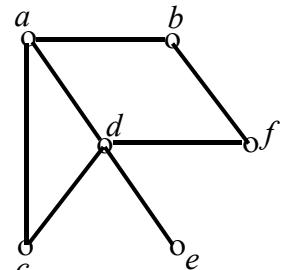
4. 图 G 如图一所示, 以下说法正确的是()。

- A. $\{(a, d)\}$ 是割边

- B. $\{(a, d)\}$ 是边割集

- C. $\{(d, e)\}$ 是边割集

- D. $\{(a, d), (a, c)\}$ 是边割集



图一

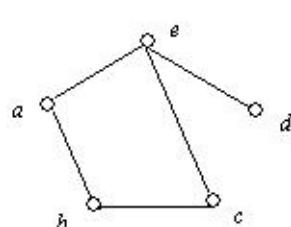
5. 如图二所示, 以下说法正确的是()。

- A. e 是割点

- B. $\{a, e\}$ 是点割集

- C. $\{b, e\}$ 是点割集

- D. $\{d\}$ 是点割集



图二

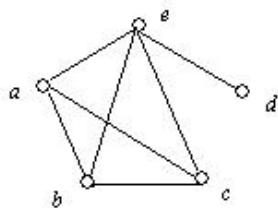
6. 如图三所示, 以下说法正确的是()。

- A. $\{(a, e)\}$ 是割边

- B. $\{(a, e)\}$ 是边割集

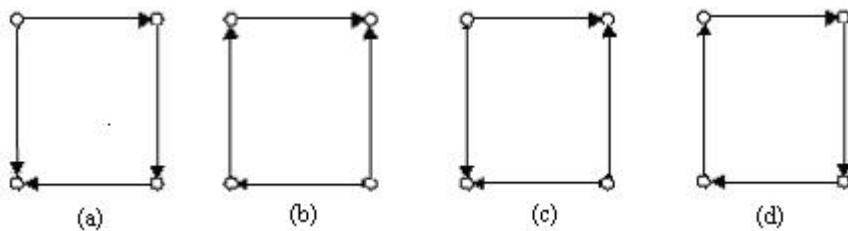
- C. $\{(a, e), (b, c)\}$ 是边割集

- D. $\{(d, e)\}$ 是边割集



图三

7. 设有向图(a)、(b)、(c)与(d)如图四所示, 则下列结论成立的是().



图四

- A. (a) 是强连通的 B. (b) 是强连通的
C. (c) 是强连通的 D. (d) 是强连通的

应该填写: D

8. 设完全图 K_n 有 n 个结点($n \geq 2$), m 条边, 当()时, K_n 中存在欧拉回路.

- A. m 为奇数 B. n 为偶数 C. n 为奇数 D. m 为偶数

9. 设 G 是连通平面图, 有 v 个结点, e 条边, r 个面, 则 $r =$ ().

- A. $e - v + 2$ B. $v + e - 2$ C. $e - v - 2$ D. $e + v + 2$

10. 无向图 G 存在欧拉通路, 当且仅当().

- A. G 中所有结点的度数全为偶数
B. G 中至多有两个奇数度结点
C. G 连通且所有结点的度数全为偶数
D. G 连通且至多有两个奇数度结点

11. 设 G 是有 n 个结点, m 条边的连通图, 必须删去 G 的()条边, 才能确定 G 的一棵生成树.

- A. $m - n + 1$ B. $m - n$ C. $m + n + 1$ D. $n - m + 1$

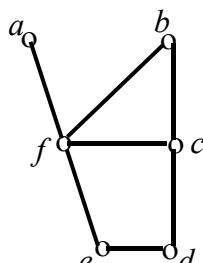
12. 无向简单图 G 是棵树, 当且仅当().

- A. G 连通且边数比结点数少 1 B. G 连通且结点数比边数少 1
C. G 的边数比结点数少 1 D. G 中没有回路.

二、填空题

1. 已知图 G 中有 1 个 1 度结点, 2 个 2 度结点, 3 个 3 度结点, 4 个 4 度结点, 则 G 的边数是_____.

2. 设给定图 G (如图四所示), 则图 G 的点割



图四

集是_____.

3. 若图 $G = \langle V, E \rangle$ 中具有一条汉密尔顿回路，则对于结点集 V 的每个非空子集 S ，在 G 中删除 S 中的所有结点得到的连通分支数为 W ，则 S 中结点数 $|S|$ 与 W 满足的关系式为_____.

4. 无向图 G 存在欧拉回路，当且仅当 G 连通且_____.

5. 设有向图 D 为欧拉图，则图 D 中每个结点的入度_____.
应该填写：等于出度

6. 设完全图 K_n 有 n 个结点 ($n \geq 2$)， m 条边，当_____时， K_n 中存在欧拉回路.

7. 设 G 是连通平面图， v, e, r 分别表示 G 的结点数，边数和面数，则 v, e 和 r 满足的关系式_____.

8. 设连通平面图 G 的结点数为 5，边数为 6，则面数为_____.

9. 结点数 v 与边数 e 满足_____关系的无向连通图就是树.

10. 设图 G 是有 6 个结点的连通图，结点的总度数为 18，则可从 G 中删去_____条边后使之变成树.

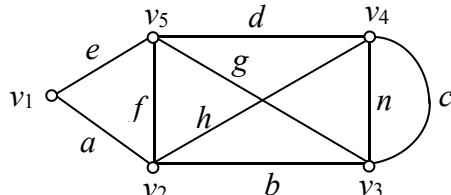
11. 已知一棵无向树 T 中有 8 个结点，4 度，3 度，2 度的分支点各一个， T 的树叶数为_____.

12. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是有 6 个结点，8 条边的连通图，则从 G 中删去_____条边，可以确定图 G 的一棵生成树.

13. 给定一个序列集合 $\{000, 001, 01, 10, 0\}$ ，若去掉其中的元素_____，则该序列集合构成前缀码.

三、判断说明题

1. 如图六所示的图 G 存在一条欧拉回路.

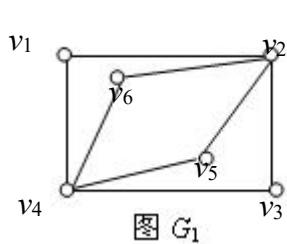
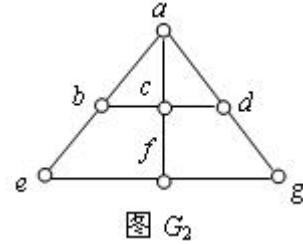


图六

2. 给定两个图 G_1, G_2 (如图七所示)：

(1) 试判断它们是否为欧拉图、汉密尔顿图？并说明理由.

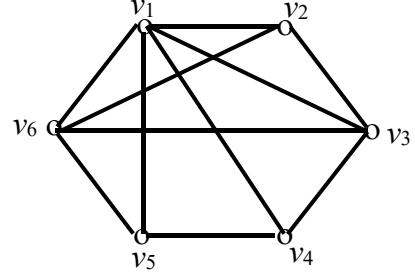
(2) 若是欧拉图，请写出一条欧拉回路.

图 G₁图 G₂

图七

3. 判别图 G (如图八所示)是不是平面图，并说明理由.

4. 设 G 是一个有 6 个结点 14 条边的连通图，则 G 为平面图.



图八

四、计算题

1. 设图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,

$$E = \{\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_4 \rangle, \langle a_3, a_1 \rangle, \langle a_4, a_5 \rangle, \langle a_5, a_2 \rangle\}$$

(1) 试给出 G 的图形表示;

(2) 求 G 的邻接矩阵;

(3) 判断图 G 是强连通图、单侧连通图还是弱连通图?

2. 设图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$, 试

(1) 画出 G 的图形表示;

(2) 写出其邻接矩阵;

(2) 求出每个结点的度数;

(4) 画出图 G 的补图的图形.

3. 设 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$, 试

(1) 给出 G 的图形表示;

(2) 写出其邻接矩阵;

(3) 求出每个结点的度数;

(4) 画出其补图的图形.

4. 图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (b, e), (c, e), (c, d), (d, e)\}$, 对应边的权值依次为 2、1、2、3、6、1、4 及 5, 试

(1) 画出 G 的图形;

(2) 写出 G 的邻接矩阵;

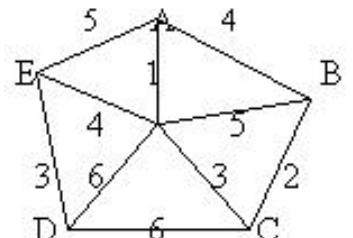
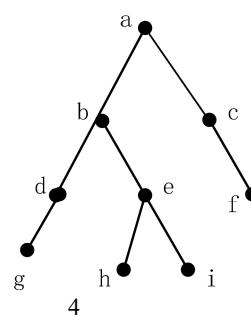
(3) 求出 G 权最小的生成树及其权值.

5. 用 Dijkstra 算法求右图中 A 点到其它各点的最短路径。

6. 设有一组权为 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 试

(1) 画出相应的最优二元树; (2) 计算它们的权值.

7. 给出右边所示二元有序树的三种遍历结果.



五、证明题

1. 若无向图 G 中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定是连通的.
2. 设 G 是一个 n 阶无向简单图， n 是大于等于 2 的奇数. 证明图 G 与它的补图 \bar{G} 中的奇数度顶点个数相等.
3. 设连通图 G 有 k 个奇数度的结点，证明在图 G 中至少要添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使其成为欧拉图.

参考解答

一、单项选择题

1. B 2. D 3. C 4. C 5. A 6. D 7. D 8. C
9. A 10. D 11. A 12. A

二、填空题

1. 15 2. $\{f\}, \{c, e\}$ 3. $W \leq |S|$
4. 所有结点的度数全为偶数 5. 等于出度
6. n 为奇数 7. $v-e+r=2$ 8. 3
9. $e=v-1$ 10. 4 11. 5
12. 3 13. 0

三、判断说明题

1. 解：正确.

因为图 G 为连通的，且其中每个顶点的度数为偶数.

2. 解：(1) 图 G_1 是欧拉图.

因为图 G_1 中每个结点的度数都是偶数.

图 G_2 是汉密尔顿图.

因为图 G_2 存在一条汉密尔顿回路（不惟一）：

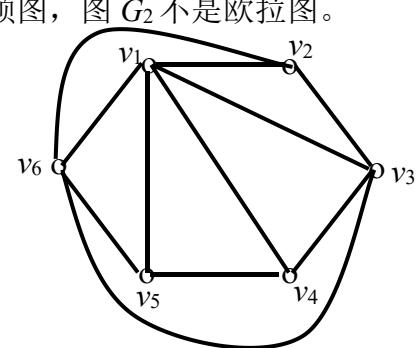
$$a(a, b)b(b, e)e(e, f)f(f, g)g(g, d)d(d, c)c(c, a)a$$

问题：请大家想一想，为什么图 G_1 不是汉密尔顿图，图 G_2 不是欧拉图。

(2) 图 G_1 的欧拉回路为：(不惟一)：

$$v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_3)v_3(v_3, v_4)v_4(v_4, v_5)v_5$$

$$(v_5, v_2)v_2(v_2, v_6)v_6(v_6, v_4)v_4(v_4, v_1)v_1$$



3. 解: 图 G 是平面图.

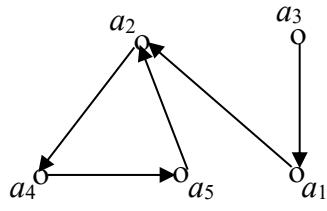
因为只要把结点 v_2 与 v_6 的连线 (v_2, v_6) 拽到结点 v_1 的外面, 把结点 v_3 与 v_6 的连线 (v_3, v_6) 拽到结点 v_4, v_5 的外面, 就得到一个平面图, 如图九所示.

4. 解: 错误.

不满足“设 G 是一个有 v 个结点 e 条边的连通简单平面图, 若 $v \geq 3$, 则 $e \leq 3v - 6$.”

四、计算题

1. 解: (1) 图 G 是有向图:

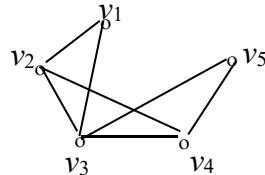


(2) 邻接矩阵如下:

$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(3) 图 G 是单侧连通图, 也是弱连通图.

2. 解: (1) 图 G 如图十



(2) 邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

图十

(3) $\deg(v_1)=2$

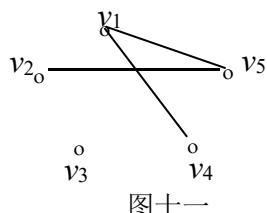
$\deg(v_2)=3$

$\deg(v_3)=4$

$\deg(v_4)=3$

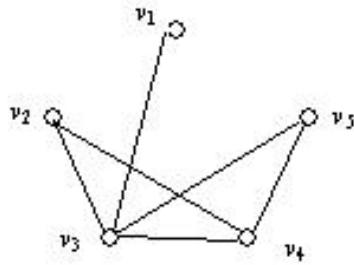
$\deg(v_5)=2$

(4) 补图如图十一



图十一

3. 解: (1) G 的图形如图十二



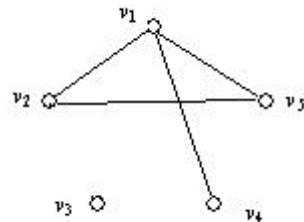
(2) 邻接矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

图十二

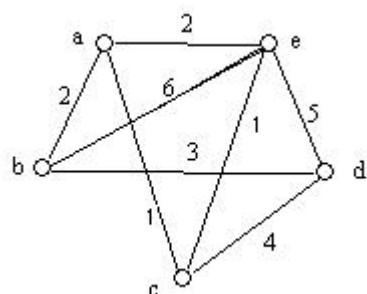
(3) v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 结点的度数依次为 1, 2, 4, 3, 2

(4) 补图如图十三:



图十三

4. 解: (1) G 的图形表示如图十四:

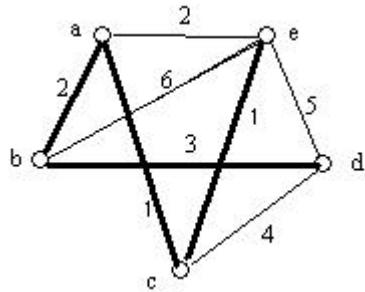


图十四

(2) 邻接矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 粗线表示最小的生成树, 如图十五



如图十五

最小的生成树的权为 $1+1+2+3=7$:

5. 解: 注意算法执行过程的数据要完整的表示。

6. 解: (1) 最优二叉树如图十六所示:

方法 (Huffman): 从 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ 中选 $2, 3$ 为最低层结点, 并从权数中删去, 再添上他们的和数, 即 $5, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$;

再从 $5, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ 中选 $5, 5$ 为倒数第 2 层结点, 并从上述数列中删去, 再添上他们的和数, 即 $7, 10, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$;

然后, 从 $7, 10, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ 中选 $7, 10$ 和 $11, 13$ 为倒数第 3 层结点, 并从上述数列中删去, 再添上他们的和数, 即 $17, 17, 24, 19, 23, 29, 31$;

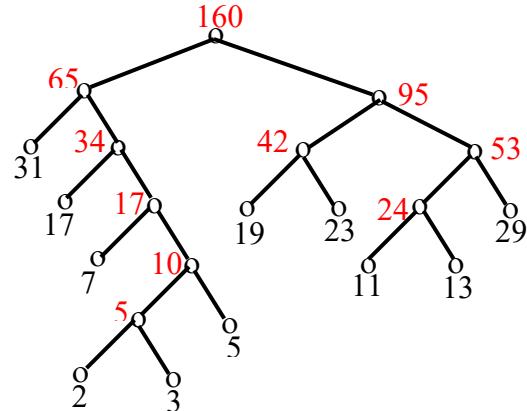
.....

$$(2) \text{ 权值为: } 2 \times 6 + 3 \times 6 + 5 \times 5 + 7 \times 4 + 11 \times 4 + 13 \times 4 + 17 \times 3 + 19 \times 3 + 23 \times 3 + 29 \times 3 + 31 \times 2 \\ = 12 + 18 + 25 + 28 + 44 + 52 + 51 + 57 + 69 + 87 + 62 = 505$$

7. 解: a) 前根: a, b, d, g, e, h, i, c, f

b) 中根: g, d, b, h, e, i, a, c, f

c) 后根: g, d, h, i, e, b, f, c, a



如图十六

五、证明题

1. 证明: 用反证法. 设 G 中的两个奇数度结点分别为 u 和 v . 假设 u 和 v 不连通, 即它们之间无任何通路, 则 G 至少有两个连通分支 G_1, G_2 , 且 u 和 v 分别属于 G_1 和 G_2 , 于是 G_1 和 G_2 各含有一个奇数度结点. 这与定理 3.1.2 的推论矛盾. 因而 u 和 v 一定是连通的.

2. 证明: 设 $G = \langle V, E \rangle$, $\bar{G} = \langle V, E' \rangle$. 则 E' 是由 n 阶无向完全图 K_n 的边删去 E 所得到的. 所以对于任意结点 $u \in V$, u 在 G 和 \bar{G} 中的度数之和等于 u 在 K_n 中的度数. 由于 n 是大于等于 2 的奇数, 从而 K_n 的每个结点都是偶数度的 ($n-1 (\geq 2)$ 度), 于是若 $u \in V$ 在 G 中是奇数度结点, 则它在 \bar{G} 中也是奇数度结点. 故图 G 与它的补图 \bar{G} 中的奇数度结点个数相等.

3. 证明: 由定理 3.1.2, 任何图中度数为奇数的结点必是偶数, 可知 k 是偶数. 又根据定理 4.1.1 的推论, 图 G 是欧拉图的充分必要条件是图 G 不含奇数度结点. 因此只要在每对奇数度结点之间各加一条边, 使图 G 的所有结点的度数变为偶数, 成为欧拉图.

故最少要加 $\frac{k}{2}$ 条边到图 G 才能使其成为欧拉图.