第一章

# 第三节

# 函数的极限

数列　可看作自变量取正整数的函数 $x_n = f(n)$

极限　研究 $n \to \infty$ 时，$f(n) \xrightarrow{?} a$

内容

一　函数的极限

- 自变量趋于有限值
  - $x \to x_0$
  - $x \to x_0^+$　右极限　单侧极限
  - $x \to x_0^-$　左极限　单侧极限
- 自变量趋于无穷大　水平渐近线
  - $x \to \infty$
  - $x \to +\infty$
  - $x \to -\infty$

二　函数极限的性质

- 唯一性
- 局部有界性
- 局部保号性
- 函数极限与数列极限的关系

# 一函数的极限

## 1、自变量趋于有限值时函数的极限（记作$x \to x_0$）

趋于 表示无限接近但不取$x_0$

直观定义 当$x$无限接近$x_0$过程中，$f(x)$无限接近常数$A$

就是指 只要$|x-x_0|$充分小，就可使$|f(x)-A|$充分小

即 $\forall \varepsilon > 0$，要使$|f(x)-A| < \varepsilon$总能找到$\delta > 0$，

当$0 < |x-x_0| < \delta$时，有$|f(x)-A| < \varepsilon$

**1.1定义** 设函数$f(x)$在点$x_0$的某去心邻域内有定义，若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时，有$|f(x)-A| < \varepsilon$

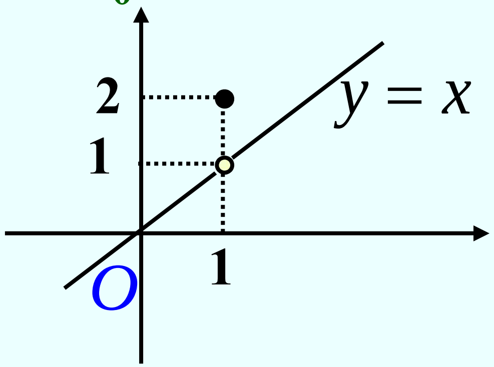
则称常数$A$为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (当x \to x_0)$$

即 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \rightleftarrows \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 当\ 0<|x-x_0|<\delta\ 时,\ 有\ |f(x)-A|<\varepsilon}$

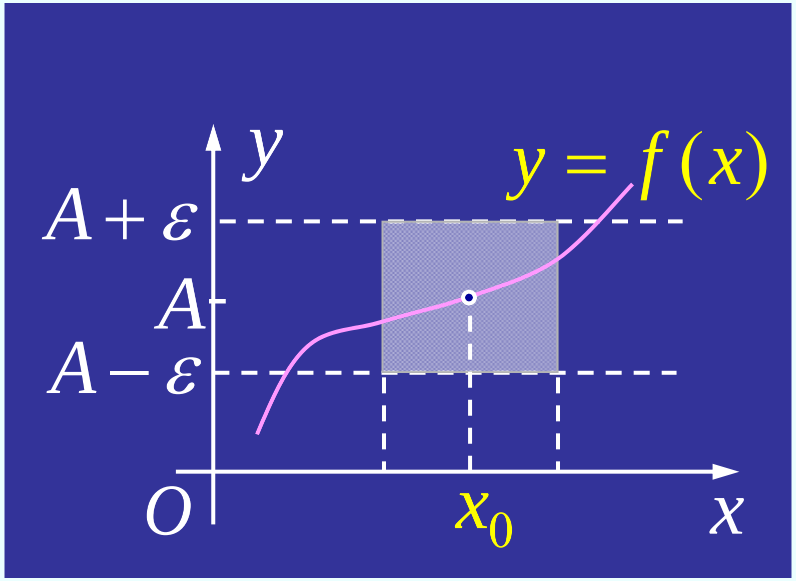
说明 i) $\boxed{0<}|x-x_0|<\delta$ **$f(x)$在点$x_0$是否极限存在与$x_0$的情况无关**

例如 $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$




$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

ii）几何解释



**典型题** 证明函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

**解题关键** $\forall \varepsilon > 0$ 解不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 求出使不等式成立的 $x - x_0$ 的范围

**技巧** 一般可将 $|f(x)-A|$ 放大且使之含有因子 $|x-x_0|$,并应尽量使得不等式简单易解，然后令其 $< \varepsilon$ 求出 $\delta$

**例1** 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$ $a,b$为常数

显然 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c, \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

**证** 欲使 $|f(x) - A| = |a(x - x_0)| < \varepsilon$, 只要 $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 必有

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 因此 $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$

**例2** 证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$

分析 $\quad |f(x)-A|=\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|<\varepsilon$

**证：** 不妨设 $\boxed{|x-3|<1}$ 即 $2<x<4$

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\frac{1}{30}|x-3|<\varepsilon \text{ 只需} \boxed{|x-3|<30\varepsilon}$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{1,30\varepsilon\}$,当 $0<|x-3|<\delta$ 时,必有

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon$$

**例3** 证明: $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

**证:** $|f(x)-A|=\left|\sqrt{x}-2\right|=\left|\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right|\le\dfrac{1}{2}|x-4|$

$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $\boxed{|x-4|<2\varepsilon}$,

另外 $x\ge 0$. 可用 $\boxed{|x-4|\le 4}$ 保证 .

取 $\delta=\min\{2\varepsilon,4\}$, 则当 $0<|x-4|<\delta$ 时,必有

$$\left|\sqrt{x}-2\right|<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

## 1.2单侧极限

**左极限**: 从$x_0$的左侧趋于$x_0$时函数极限，记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 } x\in(x_0-\delta,x_0)$$

时, 有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

**右极限**: 从$x_0$的右侧趋于$x_0$时函数极限，记作

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 } x\in(x_0,x_0+\delta)$$

时, 有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

**重要结论** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

**$f(x)$在$x_0$左右极限都存在,且相等**

**重要结论** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

**重要结论** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

用来证明极限不存在

若函数在某点处的左右极限中至少有一个不存在，或虽存在但不相等，则可断言函数在该点的极限不存在

说明

- 对于分段函数在分段点处的极限一定要讨论左右极限
- 对于某些分段函数，分段点处左右两边关系相同的可以同时得到 $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$
- 某些指数函数 $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

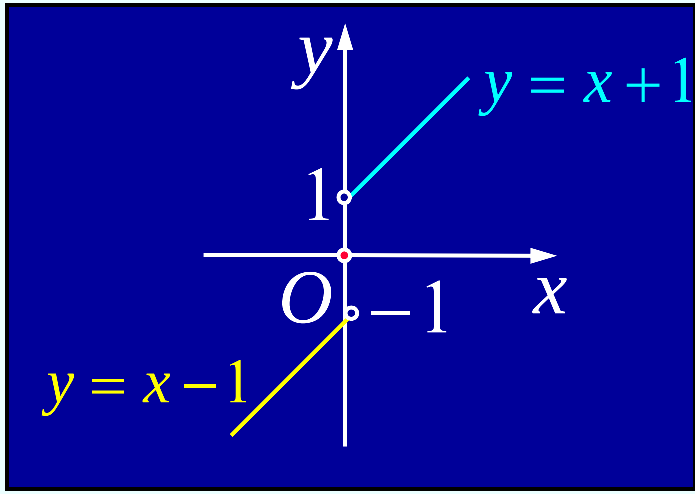
$x\to 1^+$, $+\infty$ $x\to 0^+$, $+\infty$

$x\to 1^-$, $0$ $x\to 0^-$, $0$

## 典型题

**例4.** 给定函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0\ , & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

讨论 $x\to 0$时 $f(x)$的极限是否存在




**解:** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 .

**例5.** 设 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x-1} & x>1\\ ax & x\le 1\end{cases}$ 如果 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在，求$a$

**解:** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a$ $\qquad \therefore a=\dfrac{\pi}{2}$

---

**例6.** 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

显然 $f(0^-)\ne f(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

$$x\to x_0 \begin{cases} x\to x_0^+ \\ x\to x_0^- \end{cases} \qquad x\to\infty \begin{cases} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases}$$

## 2、自变量趋于无穷大时函数的极限（记作 $x \to \infty$）

$x \to +\infty \quad x \to -\infty$

**i)** $x \to +\infty$ 类似于数列极限

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X, 有 |f(x) - A| < \varepsilon$$

例 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

**ii)** $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x < -X, 有 |f(x) - A| < \varepsilon$$

例 $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

**iii)** $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall |x| > X, 有 |f(x) - A| < \varepsilon$$

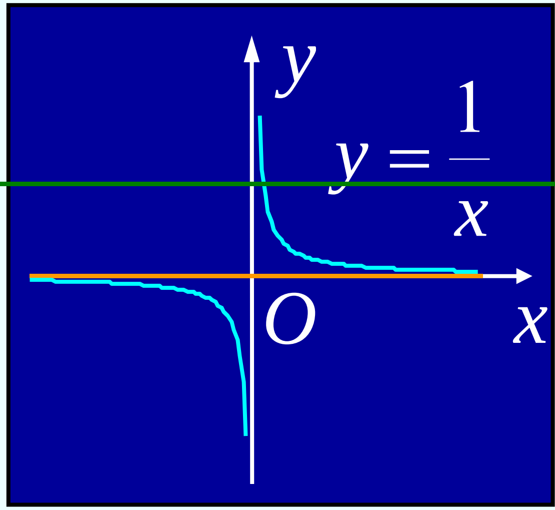
例 $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0} \qquad \lim_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在 $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

例7. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

证 $\forall\varepsilon>0$ 找**X**，使得|**x**|>$X$时，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}\varepsilon$ 只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 使得|**x**|>$X$时，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$

水平渐近线 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，则直线**y=C**是函数***f*(x)**的图形的水平渐近线




要熟记 极限不存在的几种典型例子

**i)**趋于$\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$，$\lim\limits_{x\to\infty}x$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$等

**ii)**振荡 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$，$\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x-1}$等

例 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x\text{不存在}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

**例7.** 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

证 $\forall\varepsilon>0$ 找**X**，使得|**x**|>*X*时，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\varepsilon\dfrac{1}{|x|}$ 只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0\quad\exists X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 使得|**x**|>*X*时，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$

**水平渐近线** 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，则直线***y=C***

是函数***f*(*x*)**的图形的水平渐近线




**要熟记** 极限不存在的几种典型例子

**i)趋于∞** $\lim\limits_{n\to\infty}n^2,\quad\lim\limits_{x\to\infty}x,\quad\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$ 等

**ii)振荡** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n,\quad\lim\limits_{x\to\infty}\cos x,\quad\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x-1}$ 等

**iii)左右极限不相等** $\lim\limits_{x\to\infty}a^x\ (a>1),\quad\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x,\quad\lim\limits_{x\to1}2^{\frac{1}{x-1}}$

$\begin{pmatrix}x\to+\infty & +\infty\\ x\to-\infty & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x\to1^+ & +\infty\\ x\to1^- & 0\end{pmatrix}$

## 二、函数极限的性质

6种自变量变化过程，仅以 $x \to x_0$

**Th1(函数极限的唯一性)**

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,那么这极限唯一

**Th2(局部有界性)** 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 那么 $\exists M > 0$,

存在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$,使当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$时,有 $|f(x)| \le M$

证: 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists \delta$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$,

从而有 $|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$

取 $M = 1 + |A|$ 则在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 上$f(x)$是有界的

**Th3(局部保号性)** 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ , $(A < 0)$

则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 使当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$. $(f(x) < 0)$

证 若 $\boxed{A>0}$ 取 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$, $\exists\, \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时,

有 $| f(x) - A| < \dfrac{A}{2}$ 即 $-\dfrac{A}{2} < f(x) - A < \dfrac{A}{2}$ $\Rightarrow \boxed{f(x) > \dfrac{A}{2} > 0}$

若 $\boxed{A<0}$ 取 $\varepsilon = -\dfrac{A}{2} > 0$, $\exists\, \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时,

有 $| f(x) - A| < -\dfrac{A}{2}$ 即 $\dfrac{A}{2} < f(x) - A < -\dfrac{A}{2}$ $\Rightarrow \boxed{f(x) < \dfrac{A}{2} < 0}$

**Th3'** 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A\,(A \neq 0)$ 则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$,

使当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $| f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$ 不唯一

**Th3(局部保号性)** 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ , $(A < 0)$

则存在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$,使当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时, $f(x) > 0.(f(x) < 0)$

**推论** 若在$x_0$的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$(或$\leq 0$)

且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 那么$A \geq 0$(或$A \leq 0$)

**Th3'** 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A(A \neq 0)$ 则存在$\mathring{U}(x_0, \delta)$,

使当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时,$|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$ 不唯一

**Th4**(函数极限与数列极限的关系)

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数定义域内任一收敛于 $x_0$ 的数列，且满足：$x_n \neq x_0$ ( $n \in \mathbf{N}^+$)，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

用来证明极限不存在

i)若找到$\{x_n\},\{y_n\} \to x_0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$, 且$A \neq B$

则说明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

ii)找一个数列$\{x_n\} \to x_0$, 对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$为无穷大

仍说明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

**Th4**(函数极限与数列极限的关系)

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数定义域内任一收敛于 $x_0$ 的数列，且满足：$x_n \neq x_0$ ( $n \in \mathbf{N}^+$)，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

证：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 则 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$, 当 $\underline{0 < |x - x_0| < \delta}$ 时,

有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 　而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 对上述 $\delta > 0\ \exists N$

当 $n > N$ 时 $|x_n - x_0| < \delta$ 由假设 $x_n \neq x_0$ ( $n \in \mathbf{N}^+$)，$\underline{0 < |x_n - x_0| < \delta}$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$ 对上述 $N$ 当 $n > N$ 时 $0 < |x_n - x_0| < \delta$ 从而 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$