第十二章　无穷级数

- 无穷级数
  - 数项级数
    - §1 概念和性质
    - §2 如何判定
  - 幂级数
    - §3 收敛半径,和函数
    - §4 函数展开成幂级数
  - 傅里叶级数 §7,8函数展开成Fourier级数

第十二章

第三节

幂级数

内容

一 函数项级数

二 幂级数及其收敛性

收敛半径 和函数

三 幂级数的运算

一、 函数项级数的概念

函数项级数 由定义在区间 I 的函数列 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$

构成的表达式 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 称为定义在 I 上的**函数项级数**.

收敛域 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛, x_0 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**,

收敛点的全体称为**收敛域**;

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散, x_0 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**发散点**,

发散点的全体称为**发散域**;

和函数 若对收敛域中的任一 x, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$

则称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**和函数** 写成 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

一、 函数项级数的概念

和函数 若对收敛域中的任一x, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于$S(x)$

则称$S(x)$为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**

写成$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $x\in$收敛域

余项 记$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 表示函数项级数前 n 项和

则 $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$,

令$r_n(x)=S(x)-S_n(x)$称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的余项

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

二、幂级数及其收敛性

$\boxed{\text{标准形式}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 称幂级数

$\boxed{\text{一般形式}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots$

令$y=x-x_0$化为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$

例如 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

收敛域 $(-1,1)$ 　　和函数 $\frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$

发散域 $(-\infty,-1]$ $[1,+\infty)$

$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ 　　收敛域 $(-\infty,+\infty)$

和函数 e^x (下节)

如何求幂级数的收敛域和发散域?

阿贝尔, N.H.

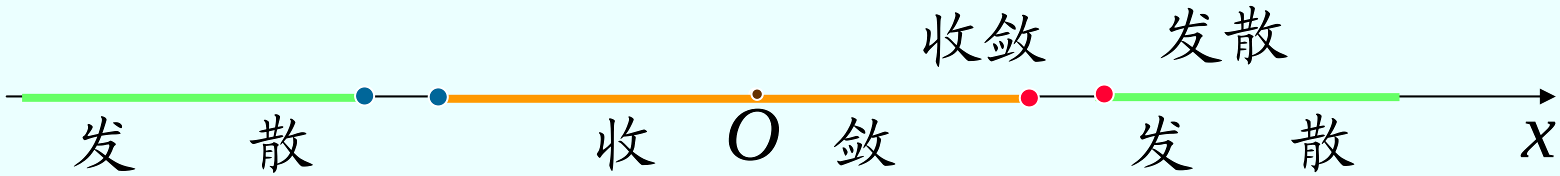
定理 1. (Abel定理) 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

i)若其在$x=x_0(\neq 0)$ 收敛,则当 $|x|<|x_0|$时,级数绝对收敛.

ii)若在$x=x_0$ 发散, 则当 $|x|>|x_0|$时,级数发散.

证: i) 设x_0是收敛点 即$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$

$\exists M$, 使得 $|a_n x_0^n| \leq M \quad (n=1,2,\cdots)$



如何求幂级数的收敛域和发散域?


阿贝尔, N.H.

定理 1. (Abel定理) 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

i)若其在$x=x_0 (\neq 0)$ 收敛,则当 $|x|<|x_0|$时,级数绝对收敛.

ii)若在$x = x_0$ 发散, 则当$|x|>|x_0|$时,级数发散.

证: i) 设x_0是收敛点 即$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛 $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$

$\exists M$, 使得$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n=1, 2, \cdots)$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n| \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \leq M \cdot |\frac{x}{x_0}|^n$$

当$|x|<|x_0|$时$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot |\frac{x}{x_0}|^n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛

即$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛

如何求幂级数的收敛域和发散域?


阿贝尔，N.H.

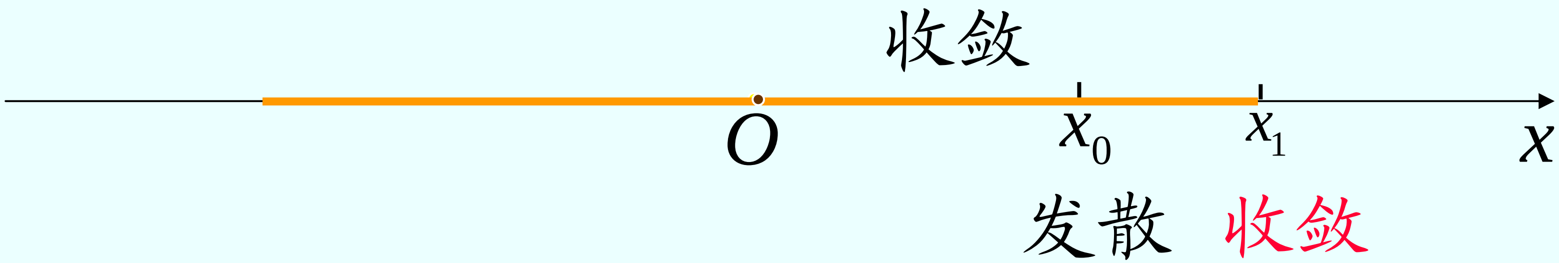
定理 1. (Abel定理) 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

i)若其在$x=x_0 (\neq 0)$ 收敛,则当 $|x| < |x_0|$ 时,级数绝对收敛.

ii)若在$x = x_0$ 发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时,级数发散.

证: ii) 反证法　若x在x_0发散时有一点x_1适合$|x_1| > x_0$

使级数收敛, 则由第一部分级数在$x=x_0$时收敛,矛盾



推论: 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛

也不是整个数轴上都收敛,则必有一个确定正数R,使得

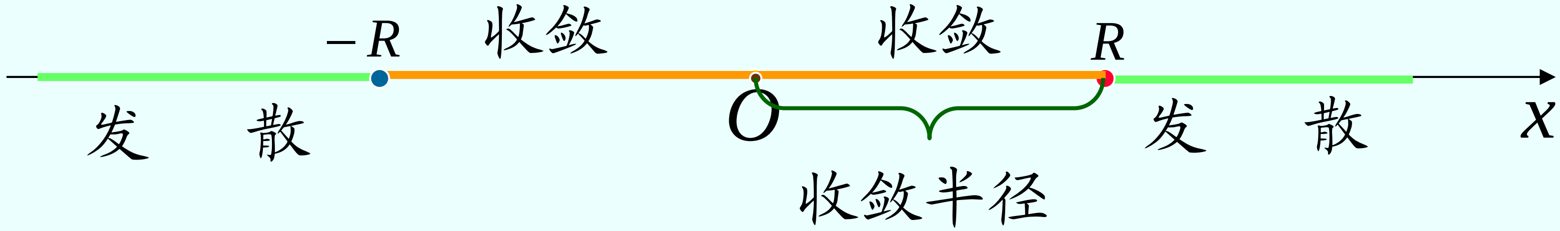
当$|x|<R$,幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$, 幂级数发散;

当$|x|=R$, 幂级数可能收敛,也可能发散;

说明 ① R 称为**收敛半径**, $(-R, R)$ 称为**收敛区间**.

$(-R,R)$ 加上收敛的端点称为**收敛域**.



推论: 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛

也不是整个数轴上都收敛,则必有一个确定正数R,使得

当$|x|<R$,幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$, 幂级数发散;

当$|x|=R$, 幂级数可能收敛,也可能发散;

说明 ②只在$x=0$收敛,规定$R=0$

一切x都收敛,规定 $R=+\infty$ 收敛域$(-\infty,+\infty)$

可能的收敛域$(-R,+R)$, $[-R,+R)$,$(-R,+R]$, $[-R,+R]$

③如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在某一点处条件收敛,则这一点

必为收敛区间的端点,由此可确定收敛半径R

例1设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在$x=-4$处收敛,则此级数在$x=1$处

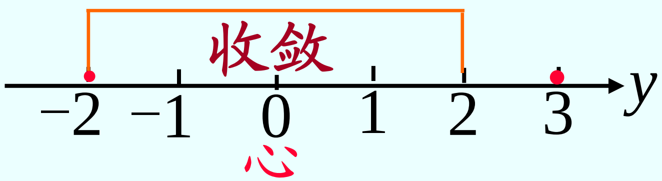
A敛散性不能确定　B条件收敛　C发散　D绝对收敛

解　法一 $y=x+2$

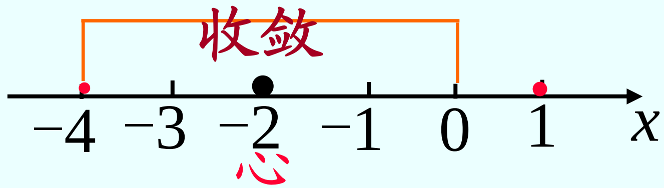
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$

$x=-4$　$y=-2$

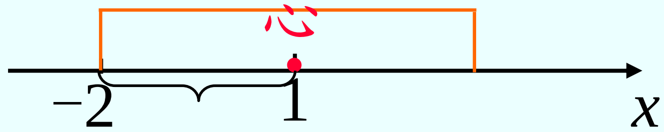
$x=1? \longrightarrow y=3?$



法二 $x=-2$为心



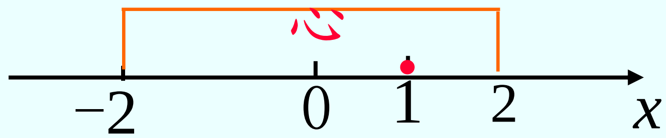
例2 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛,则该幂级数的收敛半径为 $\underline{\quad 3 \quad}$



例3 已知数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 收敛,问级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是否收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad x=-2$ 收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\quad x=1$ 收敛?



$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛

R如何求?

定理2. 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则 $R = \begin{cases} 1/\rho & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

证: 考察 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho \cdot |x|$$

1) 若 $\rho \neq 0$,

当 $\rho|x| < 1$, 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛

当 $\rho|x| > 1$, 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 发散, 从某个n开始

$|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n|$ $\therefore a_n x^n \not\to 0$ 发散 $\Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

R如何求？

定理2. 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则 $R = \begin{cases} 1/\rho & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$

证：考察 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = \rho\cdot|x|$$

2) 若 $\rho = 0$，$\forall x, \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛

3) $\rho = +\infty$ 除 $x=0$，其它点 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 必发散，否则将有点 $x \neq 0$

使级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，$\therefore R = 0$

注：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

典型题 求幂级数的收敛域一般可分为三种情况

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 型 首先利用 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $R=\frac{1}{\rho}$ 求出收敛半径得收敛区间$(-R,R)$,再讨论级数在区间端点处的敛散性,得收敛域

例4 求 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径与收敛域

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|}=1 \quad \text{半径为}1$$

$x=1$时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 级数收敛; $x=-1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$发散

收敛域 $(-1,1]$

典型题 求幂级数的收敛域一般可分为三种情况

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 型　首先利用 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $R = \frac{1}{\rho}$ 求出收敛半径得收敛区间$(-R,R)$,再讨论级数在区间端点处的敛散性,得收敛域

例5 求$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ 的收敛半径

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = +\infty \quad R=0$

即仅在$x=0$处收敛

典型题 求幂级数的收敛域一般可分为三种情况

② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n[f(x)]^n$ 型　　可先令$t=f(x)$化级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

按①求出收敛域,再利用$t=f(x)$求出原级数的收敛域

例6 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$的收敛半径与收敛域

解 令$x-5=t$　则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$

练习$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域

$[0,6)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big/\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=1 \quad R=1$$

$t=1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散　$t=-1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛

所以$-1\le t<1$

即$-1\le x-5<1$

收敛域$[4,6)$

典型题 求幂级数的收敛域一般可分为三种情况

③ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 型

一般由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| x^2 < 1$ 解出 $|x|<R$ 收敛区间 $(-R,R)$

再讨论端点处的敛散性得到收敛域

例7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径与收敛域

解 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} < 1$ $\quad |x|<2 \Rightarrow R=2$

收敛区间 $(-2,2)$

$x=2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛 $\quad x=-2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛

收敛域 $[-2,2]$

例8 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛域为$[-1,3]$,则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$的收敛域为

解 $-1 \le x \le 3 \Rightarrow -2 \le x-1 \le 2 \Rightarrow R=2$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}}\right| = \frac{1}{2}x^2 < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{2}$$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛

收敛域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

例9 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ 的收敛域

解 令$t=x+5$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot 4^n}{2(n+1)\cdot 4^{n+1}}t^2=\frac{t^2}{4}<1\Rightarrow|t|<2$$

$$|x+5|<2$$

$x+5=2$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ 发散

$x+5=-2$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{4n}$ 发散

收敛域 $-2<x+5<2$

即$(-7,-3)$

三、幂级数的运算

1.四则运算 设幂级数

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = S_1(x) \quad 收敛区间(-R_1, R_1)$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots = S_2(x) \quad 收敛区间(-R_2, R_2)$$

加法 $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots = S_1(x) + S_2(x)$

减法 $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + \cdots = S_1(x) - S_2(x)$

乘法 $a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots = S_1(x) \cdot S_2(x)$

收敛区间$(-R, R)$ 其中$R = \min\{R_1, R_2\}$

1.四则运算 设幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=S_1(x)\quad \text{收敛区间}(-R_1,R_1)$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots=S_2(x)\quad \text{收敛区间}(-R_2,R_2)$$

除法

$$\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots=\frac{S_1(x)}{S_2(x)}$$

$$\underline{a_0}+\underline{a_1}x+\cdots+a_nx^n+\cdots=\underline{b_0\boxed{c_0}}+(\underline{b_1c_0+b_0\boxed{c_1}})x+\cdots$$

不同的是:相除后所得的幂级数的收敛区间可能比原来两级数的收敛区间小得多

例

$$\left.\begin{aligned}1&=1+0\cdot x+\cdots+0\cdot x^n+\cdots\\1-x&=1-x+0\cdot x^2\cdots+0\cdot x^n+\cdots\end{aligned}\right\}\text{在整个数轴上收敛}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2\cdots+x^n+\cdots\quad \text{仅在}(-1,1)\text{上收敛}$$

2.解析运算 (下面性质证明略)

性质1 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛域$I$上连续

性质2,3 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内可积、可导,并且有

逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

逐项求导公式

$$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n a_n x^{n-1})$$

求导或积分后的幂级数和原级数具有相同的收敛半径

在区间端点$|x|=R$处的收敛性需要重新讨论

例10 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

解 ①求收敛域 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad R = 1 \quad x = \pm 1$ 发散

收敛域 $(-1,1)$

②求和函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = (\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

思考

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2} = \begin{cases} 2 & x = 0 \\ \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

例11 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots$

解 ①求收敛域 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$ $R=1$

$x=1$ 时发散 $x=-1$ 时收敛 收敛域 $[-1,1)$

②求和函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x(\frac{1}{1-x})\mathrm{d}x=\frac{-1}{x}\ln(1-x)$$

$x=0$ $S(0)=1$

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ 1 & x=0\end{cases}$$

例12 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$的和函数

解 ①求收敛域 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{(n+1)!}\Big/\frac{2n+1}{n!}\right|x^2=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n+1}=0\quad R=+\infty$

②求和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^{2n+1})'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!})'=(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!})'$$

$$=[x(e^{x^2}-1)]'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例12 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数

解 ①求收敛域 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{(n+1)!}\bigg/\frac{2n+1}{n!}\right|x^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{n+1}=0\quad R=+\infty$

②求和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^{2n+1})'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!})'=(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!})'$$

$$=[x(e^{x^2}-1)]'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-1$$

求和函数时,通常,通项形如 $\frac{x^n}{n}$ 先凑定积分,若通项形如 nx^{n-1} 或 $(2n+1)\cdot x^{2n}$ 先凑出导数, 实际问题中遇到的幂级数的形式常常不如此明显,这就要求大家能熟练地凑出来

例13.求数项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和

解: 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1},\ x\in(-1,1)$, 则

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{x}{2}\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}}-\frac{1}{2x}\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}\quad(x\neq 0)$$

$$令S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x x^{n-2}\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2})\,\mathrm{d}x=\int_0^x(\frac{1}{1-x})\,\mathrm{d}x$$

$$=-\ln(1-x)$$

$$令S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x x^{n}\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n})\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x(\frac{1}{1-x}-1-x)\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2$$

例13. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和

解: 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{x}{2}\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}}-\frac{1}{2x}\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}\quad(x\neq 0)$$

$$=-\frac{x}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2x}[\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2]$$

$$S(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}\ln(\frac{1}{2})+[\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}]=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n}=\frac{x}{2}\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}}-\frac{1}{2x}\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}\quad(x\neq 0)$$

法二 令 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$ $\quad S_1'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$

$$S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x S_1'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

令 $S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad S_2'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}-1-x$

$$S_2(x)=S_2(x)-S_2(0)=\int_0^x S_2'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2$$

$S_1(x)=x+\frac{x^2}{2}+\cdots$ $\qquad S_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$

例14 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$，其中 $a>1$.

解: 令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$

作幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$，其收敛半径为 1，设其和为 $S(x)$，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n(x)\Big|_{x=\frac{1}{a}}=S(\tfrac{1}{a})$$

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$

$$=x\cdot\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\qquad S(\tfrac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$$

阿贝尔(1802 – 1829)


阿贝尔，N.H.

挪威数学家, 近代数学发展的先驱者. 他在22岁时就解决了用根式解5 次方程的不可能性问题 , 他还研究了更广的一类代数方程, 后人发现这是一类交换群, 并称之为阿贝尔群. 在级数研究中, 他得到了一些判敛准则及幂级数求和定理. 他是椭圆函数论的奠基人之一, 他的一系列工作为椭圆函数研究开拓了道路. C. 埃尔米特曾说: 阿贝尔留下的思想可供数学家们工作150年.