第七章

微分方程

§1 微分方程的基本概念

§2 可分离变量的微分方程

§3 齐次方程

§4 一阶线性微分方程

§6 高阶线性微分方程

§7 常系数齐次线性微分方程

§8 常系数非齐次线性微分方程

第七章

第八节

常系数非齐次线性微分方程

内容

二阶常系数非齐次线性
　　微分方程

$$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

定义1 形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ (p, q是常数)

的方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

非齐通　齐通　非齐特

上节　本节

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^*的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

考虑 $f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$

$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$ 型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式 .

设特解为 $y^* = \mathrm{e}^{\lambda x} \underline{Q(x)}$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime} = \mathrm{e}^{\lambda x}[\underline{\lambda Q(x)} + \underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*\prime\prime} = \mathrm{e}^{\lambda x}[\underline{\lambda^2 Q(x)} + \underline{2\lambda Q'(x)} + \underline{Q''(x)}]$$

代入原方程，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$$

$$\mathrm{e}^{\lambda x}[Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x)]$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$$

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1)若λ不是特征方程的根,即$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$,则取

$Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$,从而得到特解

形式为 $y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$.

$$\text{确定}Q_m(x)\text{系数}\begin{cases}\text{第二种 将}Q_m(x)\text{代入}\\ \text{第一种 将}\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)\text{代入}\end{cases}$$

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x) \qquad y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$$

$$\mathrm{e}^{\lambda x}[Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)]$$

$$=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$$

$$\boxed{Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)}+\cancel{(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)}=P_m(x)$$

(2) 若λ是特征方程的**单根**，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\qquad 2\lambda+p\neq 0,$$

则$Q'(x)$为m次多项式，故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

确定$xQ_m(x)$系数 $\begin{cases}\text{第二种 将}xQ_m(x)=Q(x)\text{代入}\\ \text{第一种 将}xQ_m(x)e^{\lambda x}\text{代入}\end{cases}$

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)\qquad\qquad y^*=e^{\lambda x}Q(x)$$

$$e^{\lambda x}[Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)]$$
$$=e^{\lambda x}P_m(x)$$

$$\boxed{Q''(x)}\cancel{+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)}=P_m(x)$$

(3) 若 λ 是特征方程的**重根**，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\qquad 2\lambda+p=0,$$

则 $Q''(x)$ 是 m 次多项式，故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$

$$\text{确定}x^2Q_m(x)\text{系数}\begin{cases}\text{第二种 将}x^2Q_m(x)=Q(x)\text{代入}\\ \text{第一种 将}x^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\text{代入}\end{cases}$$

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)\qquad y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$$

$$\mathrm{e}^{\lambda x}[Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)]$$
$$=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$$

求 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 特解

i)先分析出 λ ? m ? 特征根 r ?

iii)确定待定系数

ii)设特解形式

三部分

$$y^*=\underbrace{x^kQ_m(x)e^{\lambda x}}_{Q(x)}=\begin{cases} k=0 \quad \lambda\text{不是特征根} \quad \text{将}Q(x)\text{代入} \\ Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \\ k=1 \quad \lambda\text{是单根} \quad \text{将}Q(x)\text{代入} \\ Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_m(x) \\ k=2 \quad \lambda\text{是重根} \quad \text{将}Q(x)\text{代入} \end{cases}$$

$$Q''(x)=P_m(x)$$

或将 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程确定待定系数

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda = 0, m = 1$ 而特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

$\lambda = 0$ 不是特征方程的根. $\Rightarrow r_{1,2} = 3, -1$

设所求特解为 $y^* = b_0 x + b_1$, 代入方程:

$$-3b_0 x - 3b_1 - 2b_0 = 3x + 1$$

比较系数, 得 $\begin{cases} -3b_0 = 3 \\ -3b_1 - 2b_0 = 1 \end{cases} \longrightarrow b_0 = -1,\ b_1 = \dfrac{1}{3}$

于是所求特解为 $y^* = -x + \dfrac{1}{3}$.

若 $f(x) = e^{-x}$ $\quad \lambda = -1, m = 0$ $\quad$ 设 $y^* = x \cdot A \cdot e^{-x}$

例2. 求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda=2, m=1$ 特征方程为 $r^2-5r+6=0$,

其根为 $r_1=2,\quad r_2=3$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$ $\qquad b_0x^2+b_1x$

代入方程得 $2b_0-(2b_0x+b_1)=x$

比较系数, 得 $\begin{cases}-2b_0=1\\2b_0-b_1=0\end{cases} \longrightarrow b_0=-\frac{1}{2}, b_1=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$.

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_m(x)$$

例3. 求方程 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-2x}$ 的特解.

①　②

解: 特征方程为 $r^2-2r+1=0$, $r_{1,2}=1$

① 的特解 $\lambda=1$ 　$y_1{}^*=\underline{x^2\cdot a}\cdot\mathrm{e}^{x}$ 代入 $Q''(x)=1$

即 $2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

② 的特解 $\lambda=-2$ 　$y_2{}^*=\underline{b}\cdot\mathrm{e}^{-2x}$ 代入

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=1$$

即 $b\cdot(4+4+1)=1\Rightarrow b=\frac{1}{9}$

所以特解为 $y^*=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2x}$

例4. 写出微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x - 2\mathrm{e}^{x}$ 的特解形式

①　　②

解: 特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, $r_1 = 1, r_2 = 2$

① 的特解形式　$\lambda = 0$　$y_1{}^* = ax + b$

② 的特解形式　$\lambda = 1$　$y_2{}^* = x \cdot c \cdot \mathrm{e}^{x}$

所以特解形式为　$y^* = ax + b + cx\mathrm{e}^{x}$

* $y'' + py' + q = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + \mathrm{i}\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例1 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, \widetilde{P}_n(x) = 0,$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$

$\lambda \pm \mathrm{i}\omega = \pm 2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (a\,x + b)\cos 2x + (c\,x + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(\underline{-3a\,x} \underline{-3b + 4c})\cos 2x - \underline{(3c\,x + 3d + 4a)}\sin 2x = \underline{x}\cos 2x$$

比较系数 , 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ 3d + 4a = 0 \end{cases}$ $\therefore\ a = \frac{-1}{3},\ d = \frac{4}{9}$

$b = c = 0$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$.

例2. 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

$\pm 3\mathrm{i}$ 为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a\cos 3x + b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x \underline{-6a}\sin 3x = \underline{18}\cos 3x \underline{-30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a = 5$, $b = 3$,

因此特解为 $y^* = x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$$

* $y'' + py' + q = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型 ①

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2} + \tilde{P}_n(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}\right]$$

$$= \left[\frac{P_l(x)}{2} + \frac{\tilde{P}_n(x)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \left[\frac{P_l(x)}{2} - \frac{\tilde{P}_n(x)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

令 $m = \max\{n, l\}$,则

$$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \overline{P_m(x)}\,\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

$$= P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}} \qquad ③$$

设$\lambda+\mathrm{i}\omega$是特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$), 则 ② 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x} \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $$(y_1^*)'' + p\,(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)x}$$

等式两边取共轭 :

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

这说明$\overline{y_1^*}$为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程 $y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$$= P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解 :

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}\left[Q_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \overline{Q_m}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]$$

$$= x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}\left[\,Q_m(\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x)\right.$$

$$\left.+ \overline{Q_m}(\cos\omega x - \mathrm{i}\sin\omega x)\,\right]$$

$$= x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x\,\right]$$

其中 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次多项式 .

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2(\ln y - x)}$$