积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区　间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

第十一章　曲线积分与曲面积分

第一节　对弧长的曲线积分 ⟶ 化定积分

第二节　对坐标的曲线积分 ⟶ 化定积分 / 化二重积分

第三节　格林公式 ⟵ 利用（化二重积分）

第四节　对面积的曲面积分 ⟶ 化二重积分

第五节　对坐标的曲面积分 ⟶ 化二重积分 / 化三重积分

第六节　高斯公式 ⟵ 利用（化三重积分）

第一节

对弧长的曲线积分

内容

一对弧长的曲线积分定义

意义及性质

二对弧长曲线积分的计算法

一、对弧长的曲线积分定义、意义及性质

实例: 曲线形构件的质量M

密度均匀的质量 $M=\mu\cdot s$

线密度 $\mu(x,y)$

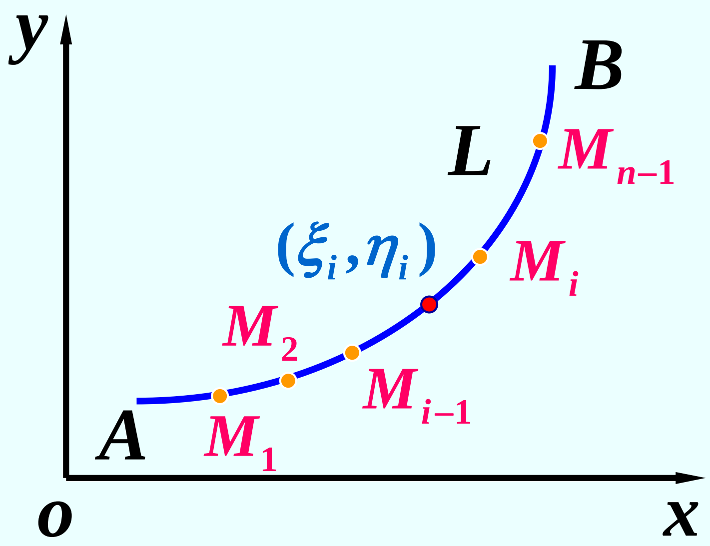
分割 $A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B,$

取点 $(\xi_i,\eta_i)\in\widehat{M_{i-1}M_i},$

作和 $\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$ 近似值

极限 $\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$ 精确值

其中$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\|\Delta s_i\|\}$



一、对弧长的曲线积分定义、意义及性质

定义 设L为xoy面内的一条光滑曲线弧, $f(x,y)$在L上有界,

任意分割 $A=M_0, M_1, \cdots, M_n=B$, 任意取点 $(\xi_i,\eta_i)\in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$,

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\|\Delta s_i\|\}$若极限

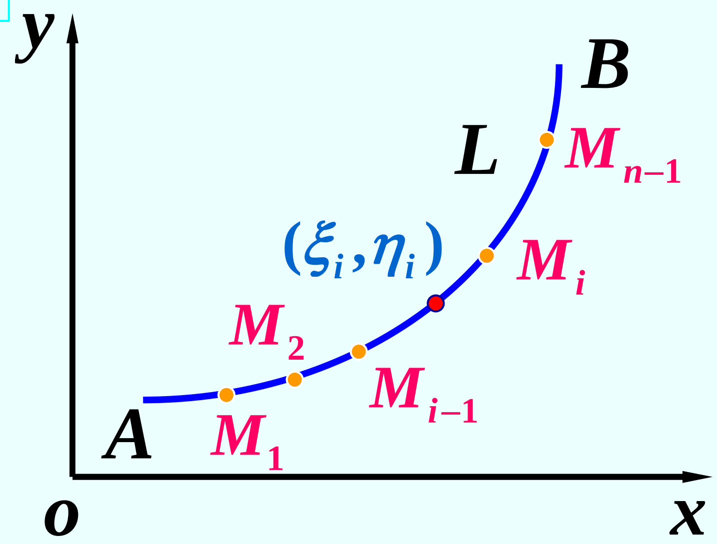
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i \overset{\text{记作}}{=} \int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

被积函数

积分弧段

都存在,则称此极限为函数$f(x,y)$在L上对弧长的曲线积分,

或第一类曲线积分.



一、对弧长的曲线积分定义、意义及性质

定义 设L为xoy面内的一条光滑曲线弧，$f(x,y)$在L上有界，**任意分割** $A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B$，**任意取点** $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\|\Delta s_i\|\}$若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i \overset{\text{记作}}{=} \int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

被积函数

都存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在L上**对弧长的曲线积分**，

或**第一类曲线积分**.

积分弧段

说明: ①**存在条件** 当$f(x,y)$在L上连续时，$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$存在

②L是闭曲线 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$

③推广到空间曲线 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

意义 $f(x,y)>0$

①物理意义

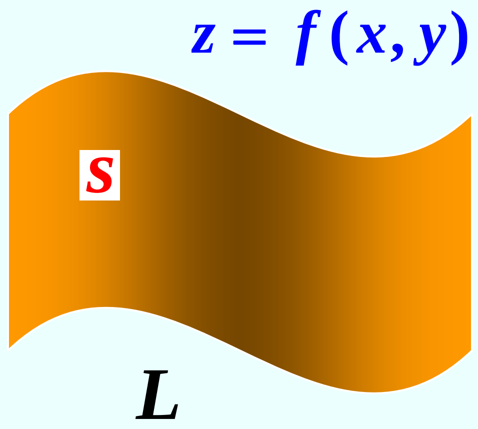
$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 线密度为$f(x,y)$的曲线形**构件L的质量**

②几何意义

$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 看成是一个**柱面的面积**

柱面是以L为准线,母线平行于z轴

母线的长度是$f(x,y)$



特别地,当 $f(x,y)\equiv 1$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L 1\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s$$ 曲线L的长度

性质

①**可加性** 若L(或Γ)是分段光滑的,$(L=L_1+L_2)$

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

②**线性性** 设α、β为常数，则

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

③**比较性**

设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$,则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\le\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$

特别地,$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right|\le\int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s$

性质

④ 曲线积分的积分区域是曲线段，因而被积分函数中的x和y满足积分曲线L的方程，故**可将曲线L方程代入被积函数化简**，**定积分，二重积分，三重积分的积分区域方程不能代入被积函数**

例 $\int_L e^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 $L: x^2+y^2=1, y\geq 0$

解 原式$=\int_L e\cdot\arctan 1\,\mathrm{d}s=\dfrac{\pi e}{4}\cdot\pi$

性质

⑤对称性

a.轮换对称性

称L(Γ)具有轮换对称性

$x \leftrightarrow y$ L不变 $\Rightarrow \int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\mathrm{d}s$

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & z & \end{array}$$

Γ不变 $\Rightarrow \int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\Gamma f(y,z,x)\mathrm{d}s = \int_\Gamma f(z,x,y)\mathrm{d}s$

例 求 $\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s$ $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解 Γ具有轮换对称性

则 $\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$= \frac{1}{3}\oint_\Gamma 1\mathrm{d}s = \frac{2\pi}{3}$$

⑤对称性 b.奇偶对称性

若L关于y轴对称，$f(-x,y)=-f(x,y)$，则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$

$f(-x,y)=f(x,y)$，则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L(x\geq 0)} f(x,y)\mathrm{d}s$

若L关于x轴对称，$f(x,-y)=-f(x,y)$，则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$

$f(x,-y)=f(x,y)$，则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L(y\geq 0)} f(x,y)\mathrm{d}s$

若Γ关于yoz平面对称，

$f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$，则$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=0$ 其他情况类似

$f(-x,y,z)=f(x,y,z)$，则$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=2\int_{\Gamma(x\geq 0)} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

例 设$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$的周长为$a$，求$\oint_L (4x^2+2xy+3y^2)\mathrm{d}s$

解：原式$=\oint_L (4x^2+3y^2)\mathrm{d}s+\oint_L 2xy\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12a$

二、对弧长的曲线积分的计算法 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分

定理 设 $f(x,y)$在曲线弧 L上有定义且连续,L的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$, 其中 $\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数,且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在,且

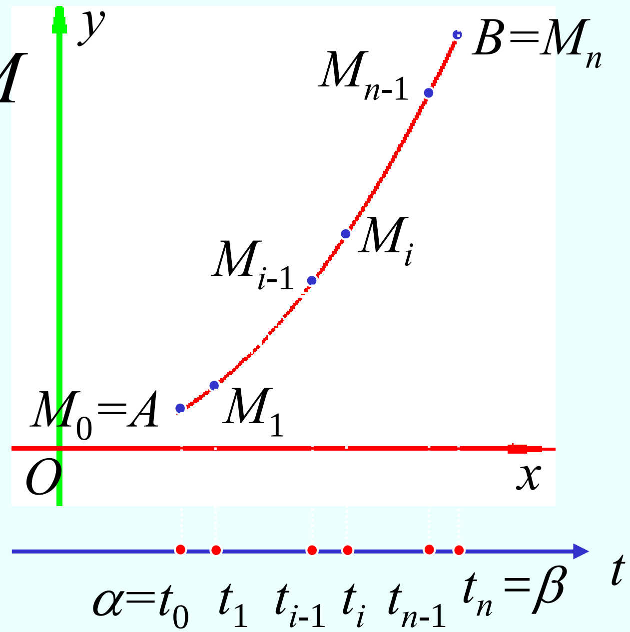
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \quad (\alpha<\beta)$$

证明 假定当参数t由α至β时,L上的点M依点 $A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_{n-1},M_n=B$,

对应于一系列单调增加的参数值

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

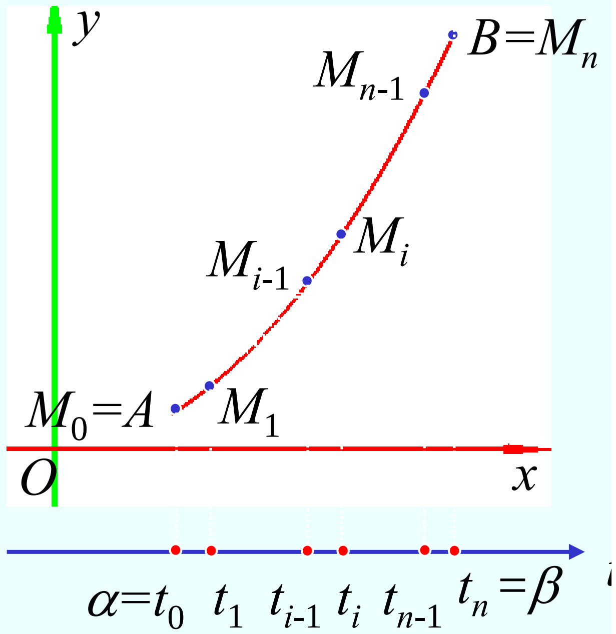
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$$



证明 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$

设点(ξ_i,η_i)对应于参数值τ_i,

$\xi_i=\varphi(\tau_i),\eta_i=\psi(\tau_i)$, $t_{i-1}\le\tau_i\le t_i$



$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

利用积分中值定理

$$=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}\,\Delta t_i \quad \tau_i'\in[t_{i-1},t_i]$$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}\,\Delta t_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,\Delta t_i$$

注意$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$连续,积分存在

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

注 对弧长的曲线积分化定积分计算时，总是把参数大的作为积分上限,参数小的作为积分下限,与曲线的方向没有关系

公式① $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$ 则有

下限<上限

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

公式② $\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=w(t), \alpha \le t \le \beta$ 则有

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

公式③ 曲线L为直角坐标形式: $y=y(x)\ (a \le x \le b), x=x$ 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

公式④ 曲线L为直角坐标形式: $x=x(y)\ (c \le y \le d), y=y$ 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y$$

公式⑤ 如果方程为极坐标形式: $L: r=r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$, 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

计算$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$的步骤

Step1 画出积分曲线图,并确定积分曲线的参数方程

Step2 将曲线积分转化为定积分

Step3 求出积分值

例1设平面曲线L为下半圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$, 求$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$

解: 化参数方程$x=\cos t, y=\sin t,\ \pi \le t \le 2\pi$

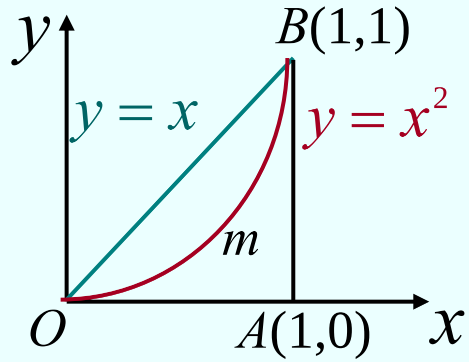
$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_{\pi}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \pi$$

或: 在L上$x^2+y^2=1$, 所以$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s = \pi$

例2 计算积分$I=\int_L xy\,\mathrm{d}s$其中L是i)$\overline{OAB}$ ii)$\overline{OB}$ iii)$\overset{\frown}{OmB}$

解: i) $\int_{\overline{OA}} xy\,\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}} xy\,\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}} 0\,\mathrm{d}s+\int_0^1 y\cdot\sqrt{1+0^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$

ii) $\int_{\overline{OB}} xy\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\cdot x\cdot\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{3}$



iii) $\int_{\overset{\frown}{OmB}} xy\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\cdot x^2\cdot\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)$

$=\frac{1}{32}\int_0^1 (1+4x^2-1)\cdot\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)$

$=\frac{1}{32}\int_0^1 (1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(1+4x^2)-\frac{1}{32}\int_0^1 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+4x^2)$

$=\frac{1}{80}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{48}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{80}\cdot 5^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{48}\cdot 5^{\frac{3}{2}}$

$x=1\Rightarrow\begin{cases} y=y \\ x(y)=1\end{cases}$

$y=x\Rightarrow\begin{cases} x=x \\ y=x\end{cases}$

$y=x^2\Rightarrow\begin{cases} x=x \\ y=x^2\end{cases}$

例3 设L为空间螺旋线$x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}t$上对应$0\le t\le 2\pi$的曲线弧

(1)求L的弧长

(2)若L的线密度为 $\rho=x^2+y^2+z^2$,求L的质量

解 (1) $s=\int_L \mathrm{d}s =\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+3}\mathrm{d}t =4\pi$

(2) $m=\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+3t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+3}\mathrm{d}t$$

$$=4\pi(1+4\pi^2)$$