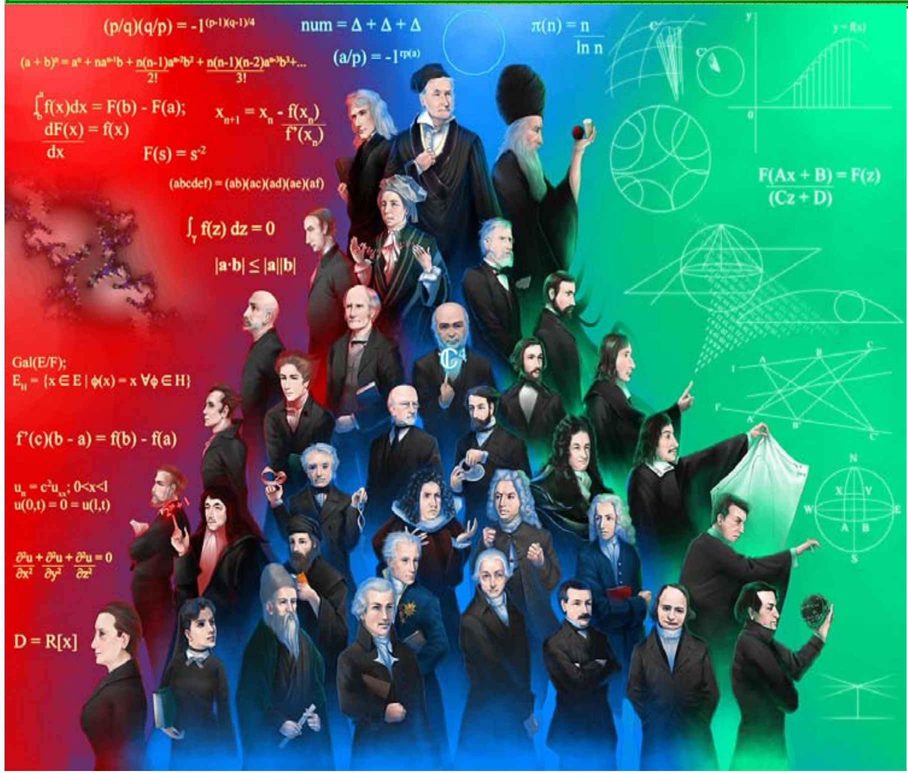
第十二章　无穷级数

无穷级数

- 数项级数
  - §1 概念和性质
  - §2 如何判定
- 幂级数
  - §3 收敛半径,和函数
  - §4 函数展开成幂级数
- 傅里叶级数
  - §7,8函数展开成Fourier级数

第一节

常数项级数的概念和性质



内容

一基本概念

二 级数收敛的必要条件
和基本性质

三常用典型级数
几何级数 调和级数

一、基本概念

级数 由数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

称为(常数项)无穷级数, 简称(常数项) 级数

部分和 前 n 项和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 称为级数的部分和

级数收敛 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

和 若 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, 称 S 为级数的和, 此时 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

级数发散 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在(或∞) 称级数发散 如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

常用典型级数　等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \begin{cases} 收敛 & |q| < 1 \\ 发散 & |q| \ge 1 \end{cases}$$

解：$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = a \dfrac{1-q^n}{1-q}$

$$\begin{cases} 当|q|<1时,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q},\ 级数收敛,其和为\dfrac{a}{1-q}; \\ 当|q|>1时,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty,\ 因此级数发散; \\ 当\ q=1时,\ S_n = n a \to \infty,\ 因此级数发散. \\ 当\ q=-1时,级数成为\ a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots \end{cases}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,因此级数发散.

判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是否收敛(用定义)

计算部分和 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ → 判定 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是否存在

例1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+1}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

解: (1) $S_n = \ln\dfrac{2}{1} + \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{3} + \cdots + \ln\dfrac{n+1}{n}$

$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cdots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n})$

$= \ln(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$

所以级数 (1) 发散;

技巧

“裂项法”

例1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

(2) $$S_n=\underline{\frac{1}{1\cdot 2}}+\underline{\frac{1}{2\cdot 3}}+\underline{\frac{1}{3\cdot 4}}+\cdots+\underline{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cancel{\cdots}+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

例2. 设数列$\{na_n\}$收敛, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,

试证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛

证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 的部分和为 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0 + 2(a_2 - a_1) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})$$

$$= -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n$$

$$= na_n - S_n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$存在, **由于**$\{na_n\}$收敛, 即$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$存在

故$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在, 故级数收敛

二、级数收敛的必要条件和基本性质

①级数收敛的必要条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ 其逆不成立}$$

但若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散

证明: 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n, 且 $s_n \to s(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

注: i) $u_n \to 0$ 不能说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而要求 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 存在

ii)判别一个级数收敛与否,往往第一步考虑通项 $u_n \overset{?}{\to} 0$

iii)利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,可以求极限

例.判断级数的敛散性:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0 \quad 发散$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{\ln(n+1)}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}n}{\ln(n+1)}\not\to 0(n\to\infty) \quad 发散$$

$$(3)\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+(-1)^{n}\frac{n}{n+1}+\cdots$$

$$(-1)^{n}\frac{n}{n+1}\not\to 0 \ (n\to\infty) \quad 发散$$

常用典型级数

调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

法一 假设调和级数收敛

$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 设 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$

则 $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$

但 $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

数列 $\{S_{2n}-S_n\}$ 每项都大于 $\frac{1}{2}$，极限不能为0

一般项趋于0,但是级数是发散的

常用典型级数

调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

法二 当 $n \le x < n+1$ 时

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\le\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x$$

所以 $\boxed{\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}\le\frac{1}{n}}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ge\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\cancel{\ln 2}-\ln 1+\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2}+\cdots+\ln(n+1)-\cancel{\ln n}$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\,(n\to\infty)$$

$\therefore \{S_n\}$无极限,级数发散

二、级数收敛的必要条件和基本性质

②线性性 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s, σ

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(ku_n \pm \lambda v_n)$ 也收敛，且其和为 $ks + \lambda\sigma$，其中 k, λ 为常数

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散

收 ± 发 = 发

收 ± 收 = 收

发 ± 发：

- 收 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \mp\frac{1}{n}$
- 发 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

二、级数收敛的必要条件和基本性质

④**有限项性** 在级数中改变(加上,去掉或改变)有限项不影响级数收敛性,但和可能改变

例 $1+2+\cdots+9^{9^9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 收敛

证 $\cancel{u_1+u_2+\cdots+u_k}+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$ 前n项和用S_n

将前k项去掉得新级数 $u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$ 前n项和用σ_n

$$\sigma_n=u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}=S_{k+n}-S_k \quad S_k\text{是常数}$$

σ_n与S_{k+n}或者同时具有极限或者同时没有极限

⑤**加括号性** 收敛级数任意加括号后所成的级数仍收敛于原级数的和, 但加括号后所成的级数收敛, 去括号后原来的级数未必收敛

$(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

证: 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n

任意加括号得**新级数**

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots+\cdots$$

新级数的部分和为 A_k

$$A_1=u_1+\cdots+u_{n_1}=S_{n_1} \qquad A_2=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})=S_{n_2}$$

$$A_k=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=S_{n_k}$$

$\{A_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子数列, **由 $\{S_n\}$ 的收敛**, 以及**收敛数列与子数列的关系**可知, $\{A_k\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

推论: 若加括号后的级数发散, 则原级数必发散

用反证法可证

例. 判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore\quad \sum_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 从而原级数发散