一、选择题（每题3分,共15分）

装 1. 三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=4$,则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 4a_{11}+5a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 4a_{21}+5a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 4a_{31}+5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$（ B ）.

（A）25　　(B) 20　　(C) -20　　(D) -25

2. 设 A,B 为 n 阶方阵,则下列说法正确的是（ B ）.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $|AB|=|A||B|$

(C) $AB=BA$　　(D) $R(AB)=R(BA)$

订

3. n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是（ A ）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中任一个向量都不能由其余向量线性表示

（B）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示

（C）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

（D）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中不含零向量

线

4. 已知 3×4 矩阵 A 的行向量组线性无关, 则 $R(A^T)=$(C).

(A)1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是（ D ）.

(A) $t\le\frac{3}{5}$　　(B) $t<\frac{3}{5}$　　(C) $t\ge\frac{3}{5}$　　(D) $t>\frac{3}{5}$

二、填空题（每题 3 分,共 15 分）

1. 设 A 为 3 阶方阵,将 A 的第一列与第二列交换得到的矩阵 B,再将矩阵 B 的第二列乘以 2 加到第三列得到矩阵 C,则满足 $AQ=C$ 的矩阵 $Q=$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 设 A 为 4 阶方阵,且 $|A|=3$,则 $|A^*|=$ __27__.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$,且齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系有 2 个线性无关的解向量,则参数 $t=$ __1__.

4. 设 $\alpha_1=(1,0,0,C_1)$, $\alpha_2=(1,2,0,C_2)$, $\alpha_3=(1,2,3,C_3)$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性__无关__.

5. 三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$, 矩阵 $B=A^3-5A^2$,则 $|B|=$ __-288__.

三、（10 分） $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$, a 为何值时,方程组有解？并求出方程组的解.

解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 2 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$ （4 分）

(1)当 $a=1$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(A)=R(\overline{A})=2<3$, 方程组的通解为 $X=k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. （7 分）

(2)当 $a=2$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(A)=R(\overline{A})=3$, 方程组的唯一解为 $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. （10 分）

序号

名

号

班级

装

订

线

四、(12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$,

(1) 求 $R(A)$;

(2) 求 A 的列向量组的一个最大无关组;

(3) 将其余向量用最大无关组线性表示.

解:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{9}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(4 分)

(1) $R(A)=3$; (6 分)

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\6\\2\\3\end{pmatrix}$ 是 A 的列向量组的一个最大无关组;

(9 分)

(3)

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\\4\end{pmatrix},$$

$$\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2,$$ (12 分)

$$\alpha_5=\frac{16}{9}\alpha_1-\frac{1}{9}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_4.$$

五、（8 分）已知四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多解，且满足 $R(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是

$AX=\beta$ 的三个解向量，其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求 $AX=\beta$ 的通解.

解：齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中含一个解向量.　　（2 分）

$$\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1=\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{pmatrix}，（4 分）$$

$AX=\beta$ 的通解为 $X=k\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.（8 分）

六、（10 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,且 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，讨论向量组 β_1，β_2，β_3 的线性相关性.

解：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ （3 分）$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0,\ R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3，（8 分）$$

向量组 β_1，β_2，β_3 线性无关.（10 分）

号

名

号

级

装

订

线

七、（14 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使 $P^TAP=\Lambda$.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&2\\-2&-3-\lambda&4\\2&4&-3-\lambda\end{vmatrix}=0$（2 分）

$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-8$.（4 分）

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$(A-E)=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

特征向量 $\alpha_1=(1,0,\frac{1}{2})^T$，单位化得 $\xi_1=(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5})^T$；（6 分）

设 $\alpha_2=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\x_1+\frac{1}{2}x_3=0\end{cases}$，

特征向量 $\alpha_2=(-\frac{2}{5},1,\frac{4}{5})^T$，单位化得 $\xi_2=(-\frac{2\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3},\frac{4\sqrt5}{15})^T$；（8 分）

当 $\lambda_3=-8$ 时，$(A+8E)=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

特征向量 $\alpha_3=(-\frac{1}{2},-1,1)^T$，单位化得 $\xi_3=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$（10 分）

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$.（14 分）

八、（8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵 B，使 $A+2B=AB$ 成立.

解：

$AB-2B-A=0$,

$(A-2E)B=A$, （3 分）

$B=(A-2E)^{-1}A$.

$$(A-2E\vdots A)=\begin{pmatrix}0&2&1&\vdots&2&2&1\\1&-1&0&\vdots&1&1&0\\-1&2&1&\vdots&-1&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&\vdots&1&1&0\\0&1&1&\vdots&0&3&3\\0&0&1&\vdots&-2&4&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&3&0&-2\\0&1&0&\vdots&2&-1&-2\\0&0&1&\vdots&-2&4&5\end{pmatrix}$$

（6 分）

$B=\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&-1&-2\\-2&4&5\end{pmatrix}$ （8 分）

九、（8 分）设 n 阶方阵 A,B 满足 $2A^{-1}B=B-4E$，求证：矩阵 $A-2E$ 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$.

解：$2A^{-1}B=B-4E$

$AB-2B-4A=0$

$(A-2E)B-4A+8E=8E$ （4 分）

$(A-2E)\left[\frac{1}{8}(B-4E)\right]=E$ （6 分）

$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$ （8 分）