第八章

空间解析几何与向量代数

第八章

第四节

空间直线及其方程

内容

一、直线方程

二、两直线的夹角

三、直线与平面的夹角

四、杂例

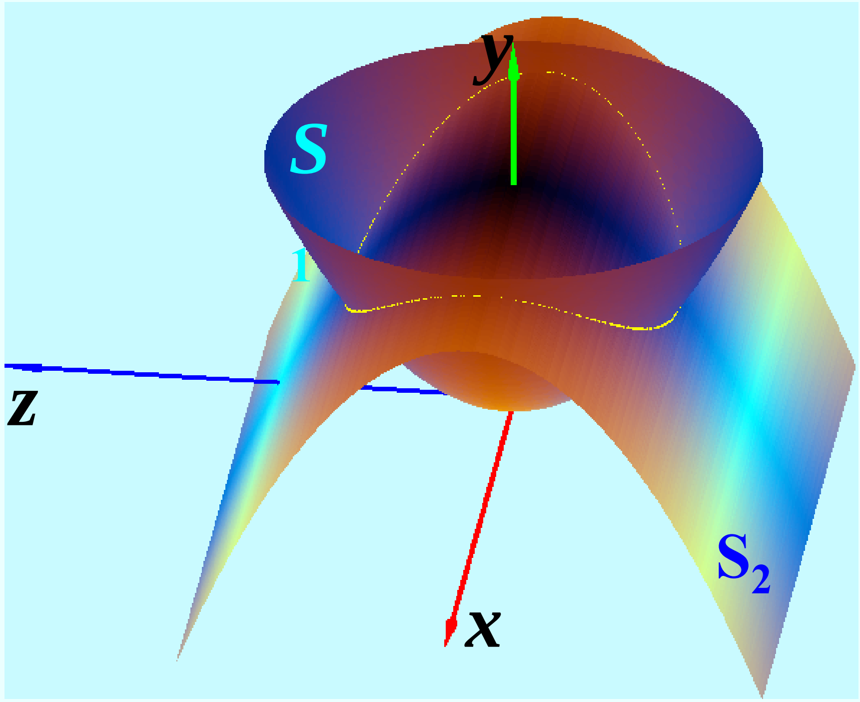
一、直线方程

空间曲线方程的定义

设曲面S_1，S_2的方程分别为

$$S_1 : F(x, y, z) = 0 ,$$

$$S_2 : G(x, y, z) = 0 ,$$



则它们的交线方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 , \\ G(x, y, z) = 0 , \end{cases}$$

称之为空间曲线的一般方程.

最简单的曲线——直线

一、直线方程

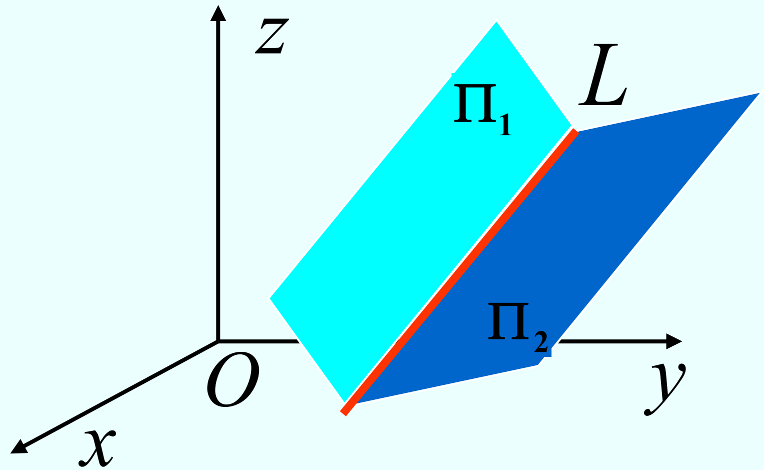
确定直线的方法 $\begin{cases} (1)\ \text{两平面的交线;} \\ (2)\ \text{一个点和一非零向量;} \\ (3)\ \text{两个点.} \end{cases}$

1. 空间直线的一般式方程（交线式方程）

由两个相交的平面 $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 确定的相交直线L的方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



注意：一般式方程不唯一.

2. 空间直线的对称式方程（点向式方程）

定义：如果一个非零向量平行于一条已知直线，

这个向量叫做这条直线的方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$

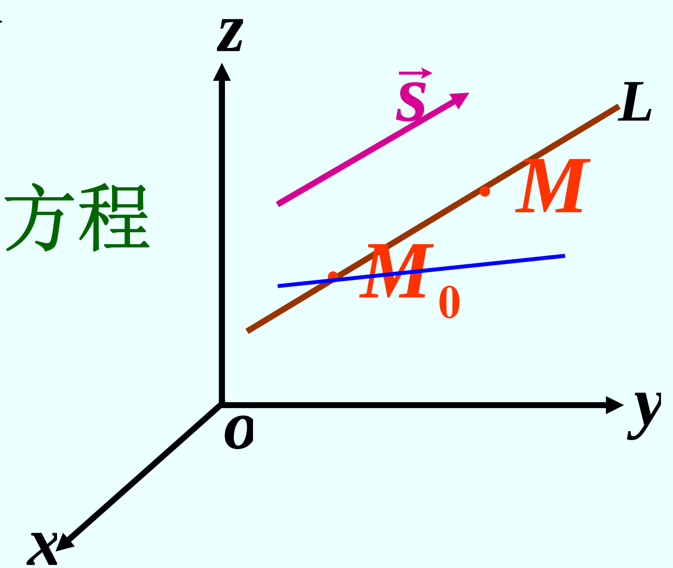
分析 过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线，所以当直线L上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$和它的一方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$为已知时，直线L的位置完全确定

设$M(x,y,z)$是L上任一点，则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

故有 $\boxed{\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}}$ 对称式方程

反过来 $M \notin L$, $\overrightarrow{M_0M} \nparallel \vec{s}$

对应坐标不成比例



过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$的直线L的方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

对称式方程

点向式方程

名称要求掌握

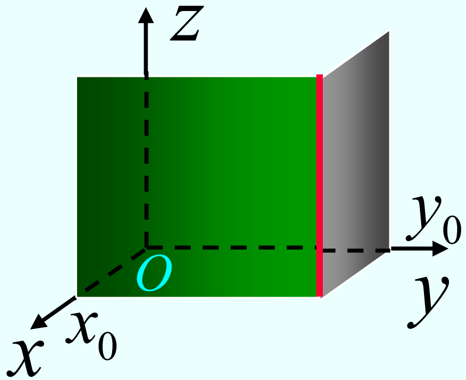
说明 (1) $\vec{s}$的坐标m,n,p称为直线的一组方向数(不唯一)

$\vec{s}$的方向余弦 $\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\dfrac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

称为直线的方向余弦

(2)**若分母为0,仍有意义**； 例 $m=n=0,\ p\neq 0$ 时, $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

(3)可以化为一般式方程 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$



过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$的直线L的方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

3. 参数式方程

过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$直线L的参数式方程

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$（t为参数）

用于求交点时

4. 两点式方程

过$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

三种方程之间的转换

一般方程
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

取点、求方向向量 $\downarrow$ $\uparrow$ 把连等式直接写成方程组

对称式方程
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

令比值等于参数t $\downarrow$ $\uparrow$ 消去参数t

参数式方程
$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

例1. 用对称式及参数式方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$

解题思路: 先找直线上一点;
再找直线的方向向量.

解: 先在直线上找一点.

令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases} y+z=-2 \\ y-3z=6 \end{cases}$ 得 $y=0,\ z=-2$

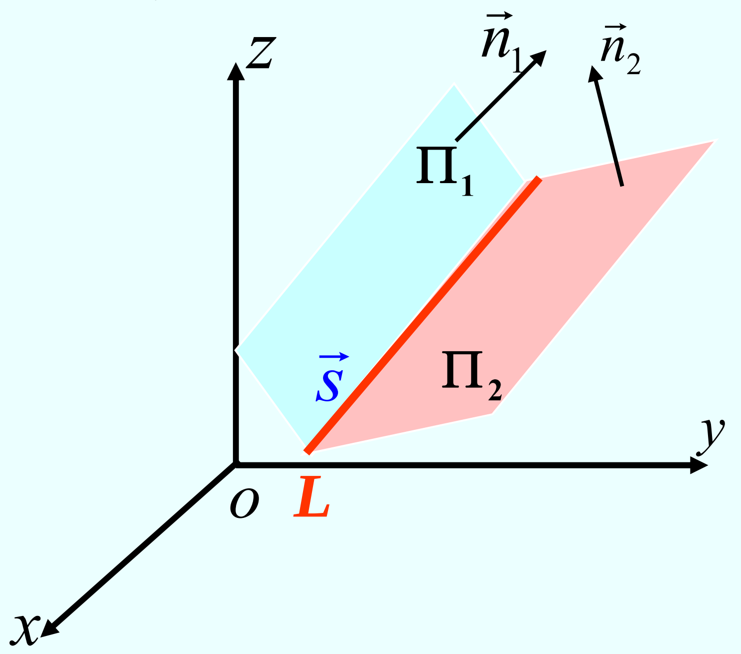
故 $(1,0,-2)$ 是直线上一点.

再求直线的方向向量 $\vec{s}$

$\vec{n}_1=(1,1,1),\ \vec{n}_2=(2,-1,3)$

$\because\quad \vec{s}\perp\vec{n}_1,\ \vec{s}\perp\vec{n}_2$

$\therefore\quad \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$



例1.用对称式及参数式方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$

解题思路: 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

解:先在直线上找一点. 故$(1,0,-2)$是直线上一点.

再求直线的方向向量 $\vec{s}$ $\vec{n}_1=(1,1,1)$, $\vec{n}_2=(2,-1,3)$

$$\therefore \quad \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4,-1,-3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$

参数式方程为 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$

例2. 求过点$(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+y-2z-4=0 \end{cases}$垂直的平面方程

解:

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(5,7,11)$$

平面的法向量 $\vec{n}=(5,7,11)$

点法式方程 $5(x-1)+7(y-2)+11(z+1)=0$

二、两直线的夹角

定义： 两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角

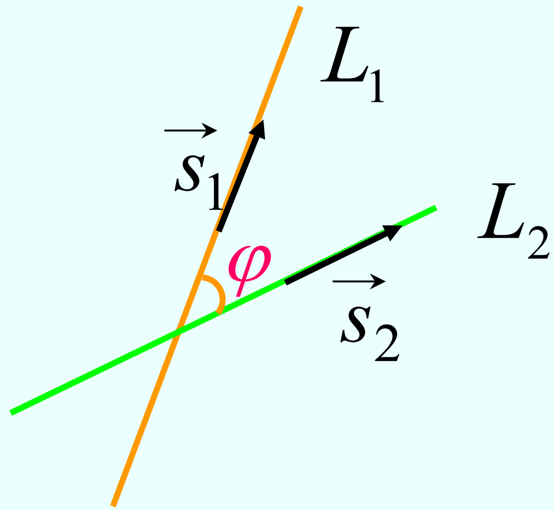
设直线 L_1, L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1,\ n_1,\ p_1),\ \vec{s}_2 = (m_2,\ n_2,\ p_2)$$

则 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$ 和 $\pi - (\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$ 两者中的锐角

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

$$= \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



说明:

设 $L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}; L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

两直线不共面	混合积 $[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2] \neq 0$
不共面但垂直	$[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2] \neq 0$ 但 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
垂直相交	$[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0$ 且 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
平行	$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
重合	$\overrightarrow{M_1M_2} // \vec{s}_1 // \vec{s}_2$

例3 求直线L_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和L_2: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$的夹角

解 直线L_1的方向向量为$\vec{s}_1=(1,-4,1)$

直线L_2的方向向量为$\vec{s}_2=(2,-2,-1)$

设直线L_1和L_2的夹角为φ

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

三 直线与平面的夹角

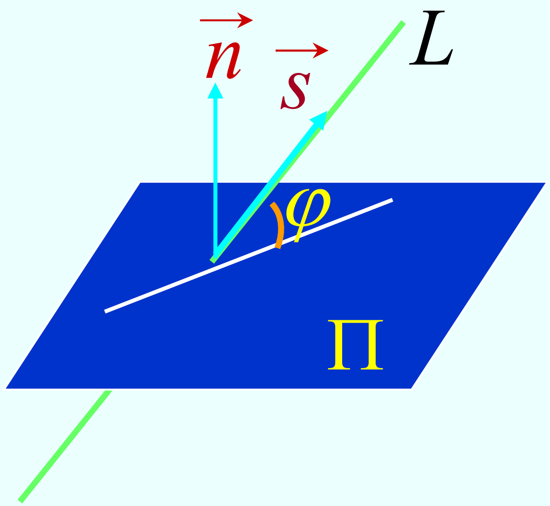
当直线$\not\perp$平面, 直线和它在平面上的投影直线的夹角φ

$(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2})$ 称为直线与平面的夹角

当直线$\perp$平面, 规定直线与平面的夹角为$\frac{\pi}{2}$

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$



则直线与平面夹角 $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \widehat{(\vec{s}, \vec{n})} \right|$

$$\sin\varphi = \left| \cos\widehat{(\vec{s}, \vec{n})} \right| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

说明： 设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

直线⊥平面	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$
直线//平面	$Am+Bn+Cp=0$
直线与平面斜交	$Am+Bn+Cp\neq 0$
重合	$Am+Bn+Cp=0,\ \ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线L上一点

例4 确定下列各方程组所表示的直线或直线与平面间的位置关系：

(1) $L_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ 和 $L_1': \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{6}$;

(2) $L_2: \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ 和 $L_2': \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z+1}{-5}$;

(3) $L_3: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{6}$ 和 $\pi_1: 3x-4y+z+2=0$;

(4) $L_4: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 $\pi_2: x+3y-9z-28=0$;

(5) $L_5: \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$ 和 $\pi_3: 8x+4y-6z+11=0$;

解 (1) $L_1 // L_1'$; (2) $L_2 \perp L_2'$; (3)直线 $L_3 //$ 平面 π_1;

(4)直线 L_4 在平面 π_2 上; (5)直线 $L_5 \perp$ 平面 π_3.

例5 求过点(1, -2 , 4) 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程.

解 取法向量 $\vec{n}=(2,-3,1)$

可得所求直线的方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$.

一般地,求直线方程,关键找一点及方向向量 $\vec{s}$

若求过已知点 M_0 且

与一直线 L_1 平行的直线方程,可取 $\vec{s}=\vec{s}_1$

与一平面垂直的直线方程,可取 $\vec{s}=\vec{n}$

与两直线 L_1,L_2 垂直的直线方程,可取 $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2$

与一直线 L_1 垂直,与一平面Π平行,可取 $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}$

例6 过原点且与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 和 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$

都平行的平面方程

解 可得所求直线的方程为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$ 过点(0,0,0)

平面方程为 $x-y+z=0$

四 杂例

1.相交情况(关键求交点)

例7 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点

解 用参数方程 $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=4+2t \end{cases}$ 代入平面方程中,得 $t=-1$

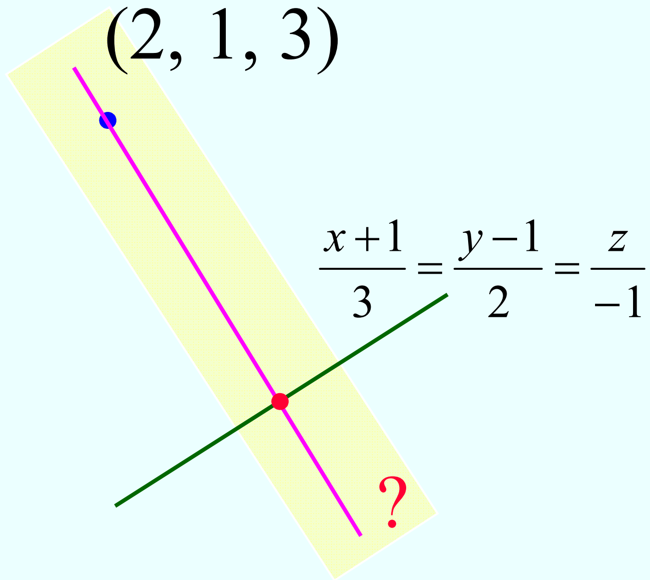
求得交点(1,2,2)

例8 求过点(2, 1, 3)且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线的方程.

解 先求交点，过点(2, 1, 3)作垂直已知直线的平面

平面方程应为$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$.

已知直线的参数式$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$



代入平面求得$t=\dfrac{3}{7}$,

从而求得交点为$\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$.

所求直线方程为$\dfrac{x-2}{\dfrac{2}{7}-2}=\dfrac{y-1}{\dfrac{13}{7}-1}=\dfrac{z-3}{-\dfrac{3}{7}-3}$，即$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

点到直线的距离公式

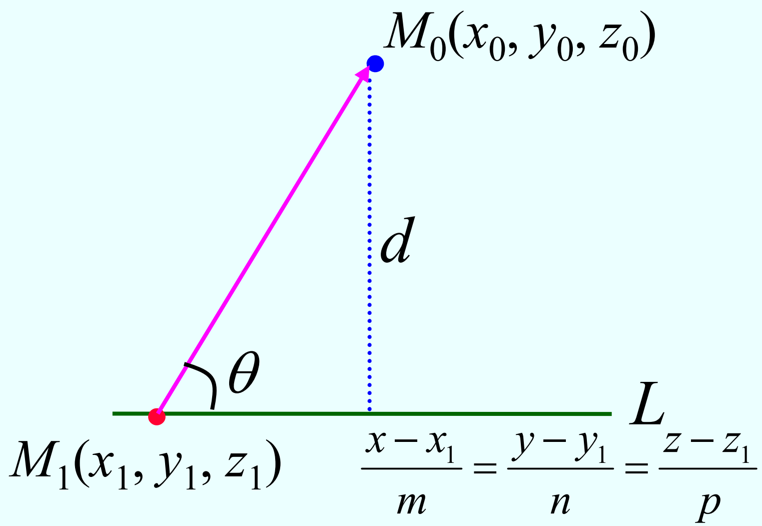
空间点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到直线 $L:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 的距离公式

取 $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$

$$d=|\overrightarrow{M_1M_0}|\cdot\sin\theta$$

$$=\cancel{|\overrightarrow{M_1M_0}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{s}|}{\cancel{|\overrightarrow{M_1M_0}|}\times|\vec{s}|}$$

$$=\frac{1}{|\vec{s}|}\cdot|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{s}|$$



上例8 求过点(2, 1, 3)且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线的方程.

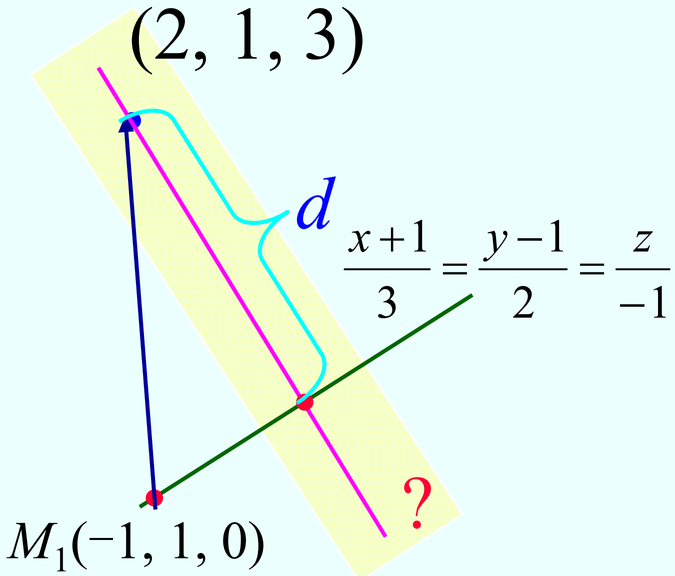
解 取$M_1(-1, 1, 0)$ $\overrightarrow{M_1M_0}=(3,0,3)$ $\vec{s}=(3,2,-1)$

$$d=\frac{1}{|\vec{s}|}\cdot|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{s}|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9+4+1}}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot|-6\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}|$$

$$=\frac{\sqrt{36+144+36}}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{14}}$$



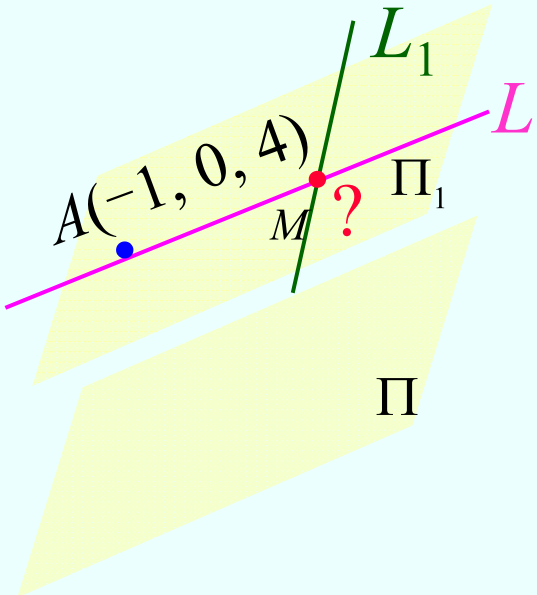
例9 求过点$A(-1, 0, 4)$且平行于平面$\Pi: 3x-4y+z-10=0$

又与直线$L_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线$L$的方程

解法一 过点A作平行已知平面的平面Π_1方程为

$$3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0.$$

即$3x-4y+z-1=0$



又直线L_1: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2t \end{cases}$ 代入平面Π_1

得$t=16$ 所以$M(15, 19, 32)$

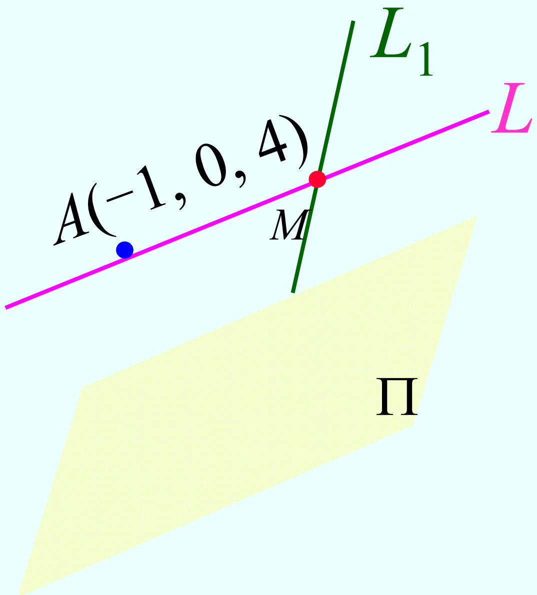
$\vec{s}=(16 \quad 19 \quad 28)$ 则L: $\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$

例9 求过点$A(-1, 0, 4)$且平行于平面$\Pi: 3x-4y+z-10=0$

又与直线$L_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线$L$的方程

解法二 设直线L的方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$

方程为$\begin{cases} x=-1+mt \\ y=nt \\ z=pt+4 \end{cases}$



$$\begin{cases} 3m-4n+p=0 \quad \Rightarrow p=-3m+4n \\ \boxed{\dfrac{-1+mt+1}{1}}=\boxed{\dfrac{nt-3}{1}}=\boxed{\dfrac{pt+4}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mt=nt-3 \\ nt-3=\dfrac{(-3m+4n)t+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{16}{t} \\ n=\dfrac{19}{t} \\ p=\dfrac{28}{t} \end{cases}$$

则L：$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$

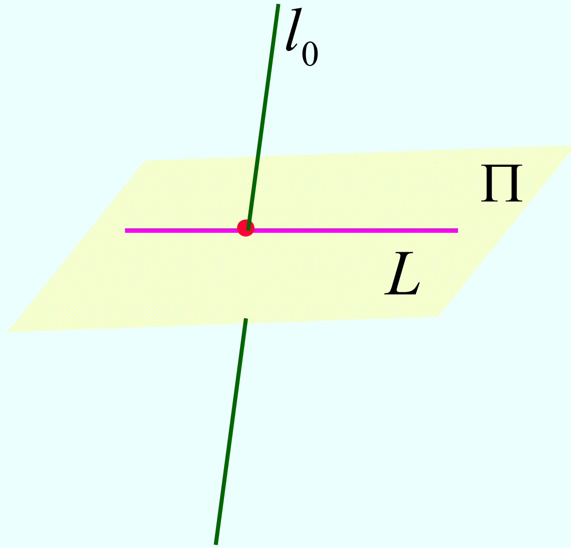
例10 已知直线L在平面$\Pi: x+y+z-1=0$上,并且与直线

$$l_0:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$$ 垂直相交,求L的方程

解 先求交点 $t=-1$ 交点$(0,2,-1)$

$\vec{s}\perp l_0$, $\vec{s}\perp\vec{n}$

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2,0,2)$$



直线方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+1}{-1}$

例11 一直线过点 $A(1,2,1)$ 且垂直于直线 $L_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$,

又和直线 $L_2: \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{-1}$ 相交,求此直线方程 .

解 设所求直线与 L_2 的交点 $B(x_0, y_0, z_0)$

则有 $\dfrac{x_0}{2} = y_0 = \dfrac{z_0}{-1}$ 即 $\boxed{x_0 = 2y_0,\ z_0 = -y_0}$

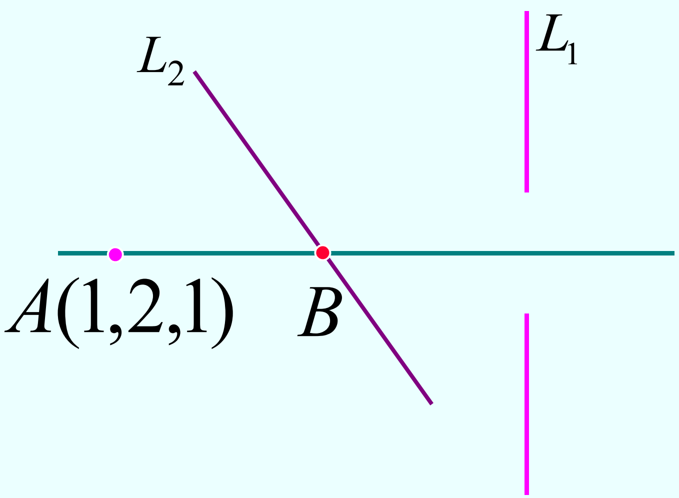
而 $\overrightarrow{AB} = (x_0 - 1, y_0 - 2, z_0 - 1) \perp L_1$

$\therefore \quad 3(x_0 - 1) + 2(y_0 - 2) + (z_0 - 1) = 0$

代入得 $y_0 = \dfrac{8}{7},\ x_0 = \dfrac{16}{7},\ z_0 = -\dfrac{8}{7}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = (\dfrac{9}{7}, \dfrac{-6}{7}, -\dfrac{15}{7}) = \dfrac{3}{7}(3, -2, -5)$

求得直线方程 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-5}$



2.平面束

设直线L由方程组$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$

所确定，其中系数A_1、B_1、C_1与A_2、B_2、C_2不成比例.

建立三元一次方程：

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (3) λ为任意常数

$A_1+\lambda A_2, B_1+\lambda B_2, C_1+\lambda C_2$ 不全为零，从而 (3)表示一个平面

若一点在直线L上，则点的坐标必同时满足方程(1)和(2)，因而也满足方程(3)，故方程(3)表示通过直线L的平面，且对应不同的λ值,**方程(3)表示通过直线L的不同的平面**

反之，通过直线L的任何平面(**除平面(2)外**)都包含在方程(3)所表示的一族平面. **通过定直线的所有平面的全体称为平面束**，而**方程(3)就作为通过直线L的平面束方程**

例12 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线的方程.

解 过直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$

其中λ为待定常数. 这平面与$x+y+z=0$垂直

即 $(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$ 由此得$\lambda=-1$

代入平面束，得投影平面的方程为$2y-2z-2=0$

所以投影直线的方程为$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

例13 过两平面$x+5y+z=0$与$x-z+4=0$的交线,作平面与已知平面$x-4y-8z+12=0$成45°角，试求这平面的方程

解 设平面束方程为$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$

即$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$

这平面与$x-4y-8z+12=0$成45°角

$$\cos 45^\circ=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{(1+\lambda)-20-8(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+25+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+16+64}}$$

即$\dfrac{\lambda-3}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 解得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$

当$\lambda=-\dfrac{3}{4}$时，所得平面$\boldsymbol{x+20y+7z-12=0}$

另外 $\boldsymbol{x-z+4=0}$ 也满足条件 $\dfrac{1+8}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+16+64}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$