选课序号
姓　名
学　号
专业班级

装　订　线

大连海事大学　第二学期《高等数学》试卷A

参考答案

一、单项选择题

(将正确选项填在括号内，不填或填错都不得分，每题3分，共15分)

1. 设直线L为$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$，平面$\Pi$为$3x-y-2z=0$，则（ C ）.

(A) 直线L平行于平面Π　(B) 直线L在平面Π上

(C) 直线L垂直于平面Π　(D) 直线L斜交于平面Π

2. 由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的隐函数$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$的全微分为（ C ）.

(A) $-dx+\sqrt{2}dy$　(B) $dx+\sqrt{2}dy$

(C) $dx-\sqrt{2}dy$　(D) $\sqrt{2}dx-dy$

3. 二重积分$\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{x}dx=$（ B ）.

(A) 1　(B) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 具有特解$y_1=e^{-x}$，$y_2=2xe^{-x}$，$y_3=e^{x}$的三阶常系数齐次线性微分方程是（ D ）.

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　(B) $y'''-y''+y'+y=0$

(C) $y'''+y''-y'+y=0$　(D) $y'''+y''-y'-y=0$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$， 试卷A

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ （ C ）。

(A) 发散　　　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不能确定

二、填空题（将正确答案填在括号内，不填或填错都不得分，每题 3 分，共 15 分）

1. yoz 平面上曲线 $z=1-2y^2$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面方程为（ $z=1-2x^2-2y^2$ ）。

2. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处收敛，在 $x=-1$ 处发散，则此幂级数的收敛半径是（ $R=2$ ）。

3. 设曲面 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y^2)dS=$（ -8π ）。

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=3\pi$ 处收敛于（ $-\dfrac{\pi}{2}$ ）。

5. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 特解是（ $y=e^{x^2}$ ）。

三、已知函数 f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x,xy,xyz)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$。（10 分）

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$　　3 分

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+xzf_3'$　　3 分

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xyf_{13}''+xy^2f_{23}''+yf_3'+xy^2zf_{33}''$　　4 分

选课序号
姓　　名
学　　号
专业班级

装 订 线

大连海事大学 第二学期《高等数学》试卷A

四、求$u=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}$，（$x>0,y>0,z>0,b>0$）下的最小值。

（10分）

解：令$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{b})$，--2分

$$\begin{cases} F'_x=yz-\frac{\lambda}{x^2}=0 \\ F'_y=xz-\frac{\lambda}{y^2}=0 \\ F'_z=xy-\frac{\lambda}{z^2}=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b} \end{cases}$$ ——————4分

解得唯一驻点为$(3b,3b,3b)$——————2分

最小值为$u_{min}=27b^3$——————2分

五、计算$I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$，其中$D$是由$y$轴，曲线$x=\sqrt{y-y^2}$围成的区域。（10分）

解：$I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho$——————6分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sin\theta}$

$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-1)d\theta$——————2分

$=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$——————2分

六、验证 $e^x(1+\sin y)dx+(e^x+2\sin y)\cos y\,dy$ 在整个 xoy 平面内为某个函数的全微分，并求出这样的一个函数 $u(x,y)$。(10分)

解：因为 $P=e^x(1+\sin y)$， 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y$ ——1分

因为 $Q=(e^x+2\sin y)\cos y$，所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$ ——1分

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，——1分

所以 $e^x(1+\sin y)dx+(e^x+2\sin y)\cos y\,dy$ 为某个函数的全微分；——2分

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,y_0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy \text{——2分}$$

$$=\int_0^x e^x dx+\int_0^y (e^x+2\sin y)\cos y\,dy$$

$$=e^x-1+e^x\sin y+\sin^2 y \text{——3分}$$

七、计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+yzdzdx-(1+z^2)dxdy$，其中Σ为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。

(10分)

解：补充曲面 $\sum_1$，$z=0$，$(x^2+y^2\le a^2)$ 的下侧，——2分

$$\iint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+yzdzdx-(1+z^2)dxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1} \text{——2分}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} zdv+\iint\limits_{D}-dxdy \text{——4分}$$

$$=\int_0^a zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-z^2}dxdy-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}dxdy$$

$$=\frac{\pi a^4}{4}-\pi a^2 \text{——2分}$$

选课序号
姓　名
学　号
专业班级

大连海事大学　　　　第二学期《高等数学》试卷A

八、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$，求 (1) 此幂级数的收敛半径；

(2) 此幂级数的收敛域；

(3) 此幂级数在收敛域的和函数。(10分)

解：(1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=1$，所以 $R=1$，　…(2分)

(2) 当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 的通项不 $\to 0$，所以发散

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ 的通项也不 $\to 0$，所以发散

所以，收敛域为 $(-1,1)$　……(2分)

订

(3) 当 $x\in(-1,1)$ 时，设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$

则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n+1})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ ---2分

当 $x=0$ 时，$s(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$s(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'dx$

线

$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^n dx$$

$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}[x+\ln(1-x)]$$

$$=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$ ————4分

九、求微分方程 $y''-2y'-3y=8xe^{3x}$ 的通解。(10 分)

试卷 A

解 对应的齐次方程为 $y''-2y'-3y=0$ ——————1 分

其特征方程为 $r^2-2r-3=0$，特征根为 $r_1=-1, r_2=3$ ——————2 分

对应齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ ——————2 分

因为 $\lambda=3$ 为特征方程的单根，

所以设特解为 $y^*=x(ax+b)e^{3x}$ 代入所给方程，——————2 分

有 $2a+4(2ax+b)=8x$，比较同幂次项系数得 $a=1, b=-\frac{1}{2}$

于是得 $y^*=(x^2-\frac{1}{2}x)e^{3x}$，——————2 分

方程的通解为

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+(x^2-\frac{1}{2}x)e^{3x}$，其中 C_1, C_2 为任意常数。——————1 分