生产实践和科学研究中，

不仅要了解变量之间的函数关系

更要考虑以下两问题：

（1）因变量相对于自变量变化的快慢程度

即函数对自变量的变化率

（2）自变量的微小变化导致函数值变化的多少

这就是本章将讨论的两个重点内容

微分学
- **导数**——描述函数变化快慢
- **微分**——描述函数变化程度

第二章 导数与微分

- §1 导数概念
- §2 函数的求导法则
- §3 高阶导数
- §4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率
- §5 函数的微分

第二章

第一节

导数概念

一、引例

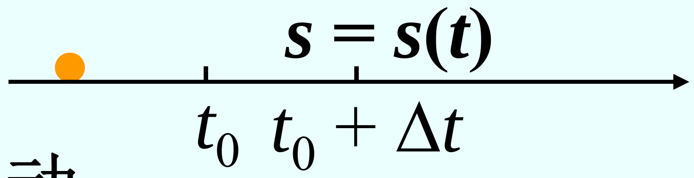
二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数可导性与连续性的关系

一、引例

1. 变速直线运动的瞬时速度



设一质点在数轴上作变速直线运动，
在时刻t质点所在点的坐标记为s，得到路程函数

问题 怎样求t_0时刻的瞬时速度

考虑时刻t_0到$t_0+\Delta t$的时间间隔内它的平均速度为

$$\overline{v(t)} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

$\bar{v}$与t_0, Δt有关，当t_0给定后，$|\Delta t|$越小，$\bar{v}$越接近t_0时刻的瞬时速度

令$\Delta t \to 0, \bar{v} \to v(t_0)$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

t_0时刻的瞬时速度/$s(t)$对t的瞬时变化率

2. 曲线切线的斜率

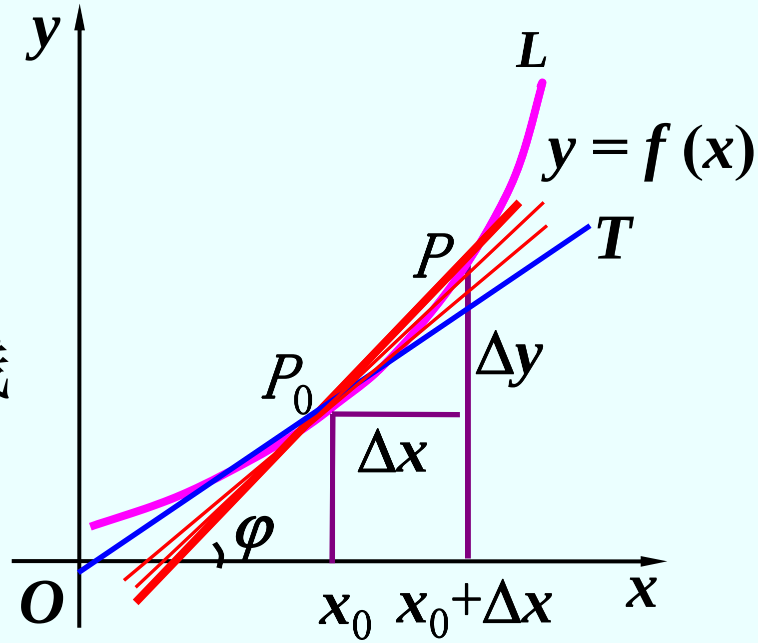
在$y=f(x)$的图形上取一点 $P_0(x_0, y_0)$

问题 **怎样求P_0点的切线斜率**

在P_0点的邻近取点 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

那么割线P_0P的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



当P越靠近P_0割线越接近P_0的切线

当$\Delta x \to 0$时

割线的极限位置P_0T就是P_0的切线

P_0点的切线斜率 $k = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

瞬时速度 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$,

切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

两个问题的**共性:**

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

………

变化率问题

二、导数的定义

1. 导数 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称此极限为 $f(x)$ 在点 x_0 的**导数**. 记作

令 $x=x_0+\Delta x$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

常用记号　　用于证明　　用于计算

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\qquad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}\qquad f'(x_0)=y'(x_0)$$

若极限不存在，称 $f(x)$ 在 x_0 点不可导/没有导数/导数不存在

若极限为无穷大，也称 $f(x)$ 在 x_0 点的导数为无穷大

例 1 求函数 $f(x)=x^2$ 在 $x_0=1$ 处的导数，即 $f'(1)$.

解 第一步求Δy：

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2.$$

第二步求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x\quad(\Delta x\neq 0).$$

第三步求极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

所以， $f'(1)=2.$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

说明： i) $f'(x_0)$取决于f, x_0与Δx无关在求极限的表达式中

Δx是无穷小量与具体形式无关

即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$

例1 设$f'(3)=2$，求$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}$

解 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}f'(3)=-1$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

说明： i) $f'(x_0)$取决于f, x_0与Δx无关在求极限的表达式中

Δx是无穷小量与具体形式无关

即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\blacksquare)-f(x_0)}{\blacksquare}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$

例2 若$f(x)$满足$f(x+1)=2f(x)$且$f'(0)=2$，求$f'(1)$

解 $$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-2f(0)}{x-0}=2f'(0)=4$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

说明： i) $f'(x_0)$取决于f,x_0与Δx无关在求极限的表达式中

Δx是无穷小量与具体形式无关

即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\blacksquare)-f(x_0)}{\blacksquare}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$

例3 若$f(0)=0$，且$f'(0)$存在，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

说明： ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{g(x)\to x_0}\dfrac{f(g(x))-f(x_0)}{g(x)-x_0}$

例1 设函数$F(x)$在$x=0$处可导，又$F(0)=0, F'(0)=6$，

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\tan x^2}$$

$$=\frac{1}{2}F'(0)=3$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

说明： iii) 如果函数$y=f(x)$在开区间I内的每点处都可导，称函数$f(x)$在I内可导. $\forall x\in I$ 都对应一个导数值，形成一个新函数叫做函数的**导函数**，简称导数，记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Δx是变量，

x是常量

例 求函数 $y=x^2$ 的导数 $\quad y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$

求$f'(x_0)$可以有两种方法

一种是先求出 $f'(x)$，然后将x_0代入表达式的x

另一种是直接按定义计算 $f'(x_0)$

二、导数的定义

2. 求导数举例

①求函数$\boldsymbol{f(x)=C}$($\boldsymbol{C}$为常数)的导数

解：$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}$$

$$=0$$

即 $\boxed{(C)'=0}$

注意区别：$f'(x_0),[f(x_0)]'$

②求函数 $f(x)=x^n\ (n\in\mathbf{N}^+)$在 $x=a$ 处的导数.

解: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})=n\,a^{n-1}$$

说明 对一般幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数)

$$\boxed{(x^\mu)'=\mu\,x^{\mu-1}}$$

例如， $(x)'=1$

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-1-1}=\frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=(x^{-\frac{3}{4}})'=\frac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

③求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解: 令 $h=\Delta x$, 则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

即 $(\sin x)'=\cos x$

类似可证得 $(\cos x)'=-\sin x$

④求函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$的导数.

解: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{h \ln a}{h} = a^x \ln a$$

即 $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$

特别地 $\boxed{(e^x)' = e^x}$

⑤求函数 $f(x)=\log_a x$ 的导数.

解: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$=\log_a \lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}=\log_a e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

即 $\boxed{(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}}$

特别地 $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

例 设$f(x)=x^3$,求$\dfrac{df(x)}{dx}, f'(2), \dfrac{df(2)}{dx}, \dfrac{df(x^2)}{dx}, f'(x^2)$

解: $\dfrac{df(x)}{dx}=(x^3)'=3x^2$

$$f'(2)=f'(x)|_{x=2}=3x^2|_{x=2}=12$$

$$\frac{df(2)}{dx}=\frac{d8}{dx}=0$$

$$\frac{df(x^2)}{dx}=[f(x^2)]'=(x^6)'=6x^5$$

$$f'(x^2)=f'(x)|_{x=x^2}=3x^2|_{x=x^2}=3x^4$$

注意到: $[f(x^2)]'\neq f'(x^2)$

3. 单侧导数

左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f(x)$在x_0点可导$\Leftrightarrow$

$f'_-(x_0),\ f'_+(x_0)$都存在且相等，$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

说明： i)注意区别

$$\begin{cases} f'(x_0^-)=f'(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x) \\ f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x_0^+)=f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x) \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{cases}$$

意义不同

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & x\ge 0 \end{cases},\ f'_-(0)=0,\ f'(0^-)\text{不存在}$$

3. 单侧导数

说明: ii)分段函数在分段点的导数一般都要先计算左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$,只有当 $f'_-(x_0)$和 $f'_+(x_0)$都存在且相等时, $f'(x_0)$ 才存在; 至于分段函数区间内函数可按常规求导

例 已知$f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$, 求$f'(x)$

解 $x<0$时$f'(x)=\cos x$

$x>0$时$f'(x)=1$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x-0}=1$$

$$\Rightarrow f'(0)=1$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\cos x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

iii)如果函数$f(x)$在(a,b)可导,在 $f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在,称$f(x)$在$[a,b]$上可导

三、导数的几何意义

曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 表示

曲线在点 $M(x_0\,,f(x_0))$ 处的切线斜率即 $f'(x_0)=\tan\alpha$

α 是 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾角

特别地, 当 $f'(x_0)=\infty=\tan\dfrac{\pi}{2}$, 此时 M 处切线垂直于 x 轴

若 $f'(x_0)\neq\infty$ 时, 曲线在点 $(x_0\,,y_0)$ 处的

切线方程: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad(f'(x_0)\neq0)$

说明: 凡是涉及切线、法线的问题关键在于寻找切点和切线斜率

例 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有铅直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行? 写出其切线方程.

解 $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\therefore\ y'\big|_{x=0}=\infty$,

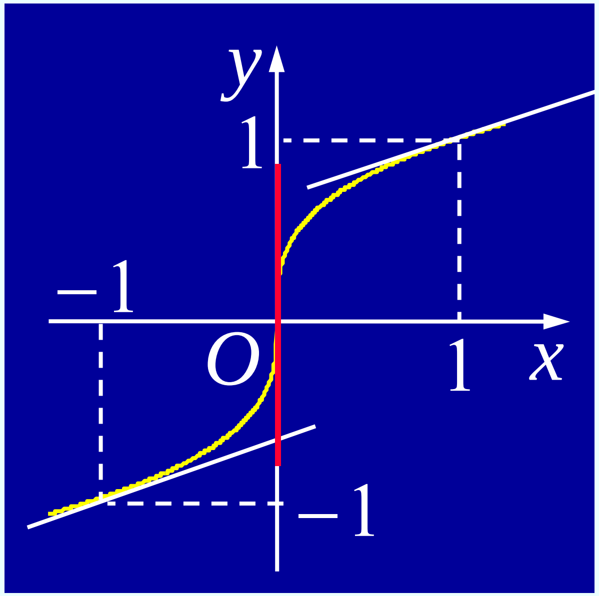
故在原点 (0 , 0) 有铅直切线 $x=0$

令 $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{3}$, 得 $x=\pm1$, 对应 $y=\pm1$,

则在点(1,1) , (–1,–1) 处与直线$y=\frac{1}{3}x-1$

平行的切线方程分别为

$$y-1=\tfrac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\tfrac{1}{3}(x+1)$$



例 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与曲线y=sin$x$相切

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$

解 $f(0)=0,\quad f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n\cdot f(\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}\cdot 2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}\cdot 2}$$

$$=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}$$

四、函数的可导性与连续性的关系

$f(x)$在点x处可导 $\begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ $f(x)$在点x处连续

证 可导必连续

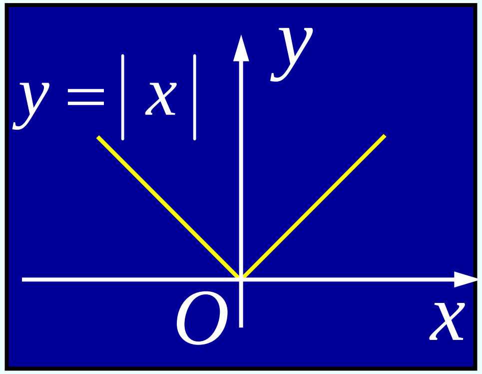
设$y=f(x)$在点x处可导, 即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha\text{, 其中}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

于是$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x=0$$

所以函数$y=f(x)$在点x连续 .



连续未必可导

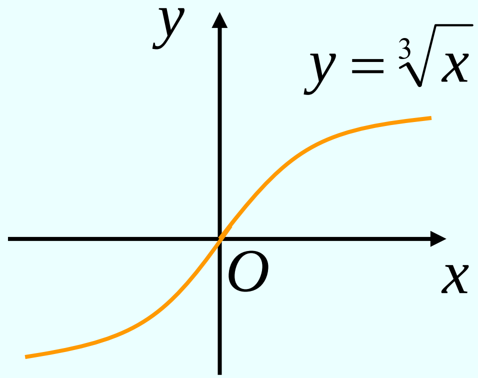
反例: $y=|x|$ 在$x=0$处连续但不可导.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1$$

再如: $y=\sqrt[3]{x}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,但在$x=0$点不可导

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$



说明:

i)从图像看,连续函数的图像不间断,但可能有折痕或尖点

可导函数的曲线称为光滑曲线,一般说,$f(x)$在某点存在导数阶数越高,该点越光滑

ii)注意区别

$$f(x)\text{在}x_0\text{处连续}\Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0^+)=f(x_0^-)$$

$$f(x)\text{在}x_0\text{处可导}\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0),\ f(x_0)=f(x_0^-)=f(x_0^+)$$

例 确定常数a,b使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ x^2 & x\le 1 \end{cases}$ 处处可导,

并求 $f'(x)$

解 $f(x)$在$x=1$连续

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1 \qquad \therefore a+b=1$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+} ax+b=a+b$$

$f(x)$在$x=1$可导

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \qquad \therefore a=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2 & x>1 \\ 2x & x\le 1 \end{cases}$$

例 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\le 0\end{cases}$ 其中$g(x)$为有界函数,

则$f(x)$在$x=0$处（D）

A 极限不存在　　　　B 极限存在不连续

C 连续但不可导　　　D 可导

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2g(x)=0$　　$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0$

$f(0)=0$　　极限存在且连续

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g(x)-0}{x-0}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x-0}=0$$

$\therefore f'(0)=0$

导数存在