

# 2021年初赛试题及参考解答

## 第十三届全国大学生数学竞赛初赛补赛试题 参考答案及评分标准 (非数学类, 2021年)

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

1、设  $x_0 = 1$ ,  $x_n = \ln(1 + x_{n-1})$  ( $n \geq 1$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \underline{\quad}$ .

【解】 $x_n \in (0,1)$  单调减少且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。由 Stolz 定理, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - \ln(1 + x_n)}{x_n \ln(1 + x_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - [x_n - \frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2)]}{x_n^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2、积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})}$ .

【解】作变换  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cot t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cot x} dx$ .

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cot x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x + \frac{\pi}{4}) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x + \frac{\pi}{4}) d(x + \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln[\csc(x + \frac{\pi}{4}) - \cot(x + \frac{\pi}{4})] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

2021年初赛试题及参考解答

3、已知直线  $L: \begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 9 \end{cases}$  和平面  $\pi: 4x - y + z = 1$ ,

则直线  $L$  在平面  $\pi$  上的投影直线方程为  $\begin{cases} 17x + 31y - 37z = 117 \\ 4x - y + z = 1 \end{cases}$ .

【解】所求投影直线为过 $L$ 且垂直于 $\pi$ 的平面 $\pi_1$ 与 $\pi$ 的交线，因此需要先求出过 $L$ 且垂直于 $\pi$ 的平面 $\pi_1$ 的方程.

过 $L$ 的平面束方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0,$$

四

$$(2\lambda + 3\mu)x - (4\lambda + \mu)y + (\lambda - 2\mu)z - 9\mu = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

平面 $\pi$ 的法向量为

$$\vec{n} = (4, -1, 1) .$$

因平面 $\pi_1$ 与平面 $\pi$ 垂直，则必须有

$$4(2\lambda + 3\mu) + (-1)(-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu) = 0$$

解之，得

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{11}{13},$$

由(1), 得到平面 $\pi_1$ 的方程

$$17x + 31y - 37z - 117 = 0.$$

故所求投影直线为

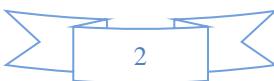
$$\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0 \\ 4x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4、 \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2.$$

【解】由 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ 及 $\frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{(2n+2) - 2n}{1 + 2n(2n+2)}$ , 得

$$\arctan \frac{2}{4n^2+4n+1} = \arctan(2n+2) - \arctan(2n).$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N [\arctan(2n+2) - \arctan(2n)]$$



# 2021年初赛试题及参考解答

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} [\arctan(2N+2) - \arctan 2] = \frac{\pi}{2} - \arctan 2.$$

5、微分方程  $\begin{cases} (x+1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$  的解是  $\ln \frac{2x+1}{x+1}$ .

【解】方程变形为:  $e^y \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+1} e^y + \frac{2}{x+1}$ ,

$$\text{即, } \frac{de^y}{dx} = -\frac{1}{x+1} e^y + \frac{2}{x+1},$$

$$e^y = e^{\int -\frac{1}{x+1} dx} \left[ \int \frac{2}{x+1} e^{-\int -\frac{1}{x+1} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x+1} \left[ \int \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) dx + C \right]$$

$$= \frac{1}{x+1} [2x + C]$$

由  $y(0) = 0$ , 得到,  $C = 1$ ,

$$\text{所以 } e^y = \frac{2x+1}{x+1}, \text{ 故, } y = \ln \frac{2x+1}{x+1}.$$

## 二、(本题满分 14 分)

设  $f(x) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) + \int_{-1}^1 |x-t| e^{-t^2} dt$ . 证明: 在区间  $(-1, 1)$  内,  $f(x)$  有且仅有两个实根.

$$\begin{aligned} \text{【证】 } f(x) &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) + \int_{-1}^1 |x-t| e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) + \int_{-1}^x (x-t) e^{-t^2} dt + \int_x^1 (t-x) e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) + x \int_{-1}^x e^{-t^2} dt - \int_{-1}^x t e^{-t^2} dt \\ &\quad + \int_x^1 t e^{-t^2} dt - x \int_x^1 e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) + x \int_{-1}^0 e^{-t^2} dt + x \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-1}^x \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_x^1 + x \int_1^0 e^{-t^2} dt + x \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-1} + e^{-x^2} + x \int_{-1}^0 e^{-t^2} dt \\ &\quad + x \int_1^0 e^{-t^2} dt + 2x \int_0^x e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

## 2021年初赛试题及参考解答

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} + e^{-x^2} + 2x \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

..... 6 分

显然,  $f(x)$  是偶函数, 所以我们只需考察  $f(x)$  在  $(0,1)$  内的零点。由于

$$f(0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{e-3}{2e} < 0,$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} + e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

$$> -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}\right) + 2 \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}e^{-1} > 0,$$

又  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 由闭区间上连续函数的零点定理, 一定存在  $\xi \in (0,1)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

由于  $\forall x \in (0,1)$ ,  $f'(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0,1)$  内严格单调递增,

所以  $f(x)$  在  $(0,1)$  内仅有一个实根。 ..... 6 分

因为  $f(x)$  是偶函数, 它在  $(-1,0)$  内也仅有一个实根。因此  $f(x)$  在  $(-1,1)$  内仅有两个实根。 ..... 2 分

### 三、(本题满分 14 分)

设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  上具有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + y^2, \text{ 求 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan r - \sin r)^2}.$$

【解】对  $\forall 0 < r \leq 1$ , 设  $D_r := \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ , 由 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy &= -\frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D_r} -\left( x^2 + y^2 \right) \frac{\partial f}{\partial y} dx + \left( x^2 + y^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x} dy \\ &= \frac{r^2}{2} \iint_{D_r} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

2021年初赛试题及参考解答

$$= \pi r^2 \int_0^r s^3 ds - \pi \int_0^r s^5 ds = \frac{\pi}{4} r^6 - \frac{\pi}{6} r^6 = \frac{\pi}{12} r^6. \quad \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

因此, 由 Taylor 公式, 得

四、(本题满分 14 分)

若对于  $R^3$  中半空间  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x > 0\}$  内的任意有向光滑封闭曲面  $S$ ，都有：

$$\iint_S xf'(x)dydz + y(xf(x) - f'(x))dzdx - xz(\sin x + f'(x))dxdy = 0,$$

其中  $f$  在  $(0, +\infty)$  上二阶导数连续且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ ，求  $f(x)$ 。

**【解】**任取定一点  $P(x, y, z) \in \{(x, y, z) \in R^3 \mid x > 0\}$ , 对任意充分小  $\varepsilon > 0$ , 以  $P$  点为心半径为  $2\varepsilon$  的有向球面  $S_{2\varepsilon}(P)$  仍位于此半空间中。记  $B_\varepsilon(P)$  为球面  $S_\varepsilon(P)$  (取外侧) 所围内部开球域。

由题设条件及 Gauss 公式, 得:

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{S_\varepsilon(P)} x f'(x) dy dz + y(xf(x) - f'(x)) dz dx - xz(\sin x + f'(x)) dx dy = \\
&\iiint_{B_\varepsilon(P)} [f'(x) + xf''(x) + xf(x) - f'(x) - x \sin x - xf'(x)] dx dy dz = \\
&\iiint_{B_\varepsilon(P)} [xf''(x) - xf'(x) + xf(x) - x \sin x] dx dy dz = \rho [f''(\rho) - f'(\rho) + f(\rho) - \\
&\quad \sin \rho] \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3, \quad \text{其中 } |\rho - x| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\text{由此可得} \quad f''(\rho) - f'(\rho) + f(\rho) - \sin \rho = 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 由 $f$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶导数连续得

$$f''(x) - f'(x) + f(x) - \sin x = 0 \quad (\forall x > 0),$$

即

求解此二阶方程，齐次方程通解为  $e^{\frac{x}{2}} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$ ，非齐次方程

2021年初赛试题及参考解答

特解为 $\cos x$ , 故可得:

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \cos x, \quad \forall x > 0.$$

由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  可得:  $c_1 = -1$ .

再由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ , 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\frac{x}{2}}{2} \left( (c_1 + \sqrt{3}c_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (c_2 - \sqrt{3}c_1) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - \sin x \right] = \frac{c_1 + \sqrt{3}c_2}{2} = 0,$$

$$\text{可得: } c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因此,  $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \cos x, \quad \forall x > 0.$  ..... 7 分

五、(本题满分 14 分)

设  $f(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{[u]}{u}\right) du$ ，其中  $[x]$  表示小于等于  $x$  的最大整数。试讨论

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$  的敛散性, 其中  $p > 0$ .

**【解】**  $\forall x \geq 1,$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{[u]}{u}\right) du = \int_0^{[x]} \left(1 - \frac{[u]}{u}\right) du + \int_{[x]}^x \frac{u - [u]}{u} du \\
&= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} \left(1 - \frac{k}{u}\right) du + \int_{[x]}^x \frac{u - [x]}{u} du = [x] - \sum_{k=1}^{[x]-1} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= [x] - \sum_{k=1}^{[x]-1} k \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \right] + O\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{1}{k} + O(1) \\
&= \frac{1}{2} \ln[x] + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{k} - \ln[x] \right) + O(1) = \frac{1}{2} \ln x + O(1).
\end{aligned}$$

故存在  $0 < C_1 \leq C_2$ , 使得

$$C_1\sqrt{x} \leq e^{f(x)} \leq C_2\sqrt{x}, \quad \forall x \geq 1. \quad \dots \dots \dots \text{4分}$$

若  $p > \frac{3}{2}$ ,  $\left| \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \right| \leq \frac{c_2}{x^{p-\frac{1}{2}}}$ , 故原积分绝对收敛. .... 3 分

再考慮  $0 < p \leq \frac{3}{2}$ . 首先，注意到

# 2021年初赛试题及参考解答

$$\frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{f(x)}x^{3-p}}{2(x^4+1)} 2\left(x + \frac{1}{x^3}\right) \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right),$$

且对任意  $1 \leq A < B < +\infty$ , 成立

$$\left| \int_A^B 2\left(x + \frac{1}{x^3}\right) \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = \left| \sin\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \Big|_A^B \right| \leq 2.$$

其次,  $\frac{e^{f(x)}x^{3-p}}{x^4+1}$  单调递减(对  $x$  充分大)且趋于0(当  $x \rightarrow +\infty$ )。事实上,  $\frac{x^{4-p}}{x^4+1}$  单调递减(对  $x$  充分大),  $\frac{e^{f(x)}}{x} = e^{\int_0^x (1-\frac{[u]}{u}) du - \ln x} = e^{\int_1^x (1-\frac{[u]+1}{u}) du + 1}$  在  $[1, +\infty]$  上单调递减. 由 Dirichlet 判别法, 原积分收敛。注意到 ..... 4 分

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \right| &\geq \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos^2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{e^{f(x)}}{2x^p} \left( \cos\left[2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right] + 1 \right). \end{aligned}$$

类似地可证  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left[2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right] dx$  收敛, 但由于  $\frac{e^{f(x)}}{x^p} \geq \frac{c_1}{x}$ , 故  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^p} dx$  发散. 因此, 原积分当  $0 < p \leq \frac{3}{2}$  时条件收敛。 ..... 3 分

## 六、(本题满分 14 分)

设正数列  $\{a_n\}$  单调减少且趋于零,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^n x^n$ . 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散, 则

积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx$  也发散。

**【证】** 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$  的收敛半径  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ .

所以函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。 ..... 2 分

若  $x \in [\frac{e}{a_p}, \frac{e}{a_{p+1}}]$ , 则当  $k \leq p$  时,  $a_k x \geq a_p x \geq e$  (因为  $a_n$  单调减少)。

因此,  $f(x) \geq \sum_{k=1}^p (a_k x)^k \geq \sum_{k=1}^p e^k \geq e^p$ .

于是,  $\ln f(x) \geq p$ , ( $x \in [\frac{e}{a_p}, \frac{e}{a_{p+1}}]$ )。 ..... 6 分

# 2021年初赛试题及参考解答

又因为当  $x \geq 1$  时，  $f(x) \geq f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n > 0$ .

对于固定的  $n$ ，当  $X > \frac{e}{a_n}$  时，

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx &= \int_1^{\frac{e}{a_1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx + \sum_{p=1}^{n-1} \int_{\frac{e}{a_p}}^{\frac{e}{a_{p+1}}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx + \int_{\frac{e}{a_n}}^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \\ &\geq \sum_{p=1}^{n-1} p \int_{\frac{e}{a_p}}^{\frac{e}{a_{p+1}}} \frac{1}{x^2} dx + n \int_{\frac{e}{a_n}}^X \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{e} \sum_{p=1}^n a_p - \frac{n}{X}.\end{aligned}$$

于是当  $X > \max\{n, \frac{e}{a_n}\}$  时，  $\int_1^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq \frac{1}{e} \sum_{p=1}^n a_p - 1$ .

因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散，所以  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx = +\infty$ . ..... 6 分