

2021 年初赛试题及参考解答

第十三届全国大学生数学竞赛初赛补赛试题

参考答案及评分标准

(非数学类, 2021 年)

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

1、设 $x_0 = 1$, $x_n = \ln(1 + x_{n-1})$ ($n \geq 1$), 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \underline{\quad}$.

【解】 $x_n \in (0, 1)$ 单调减少且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 。由 Stolz 定理, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - \ln(1 + x_n)}{x_n \ln(1 + x_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - [x_n - \frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2)]}{x_n^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2、积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})}$.

【解】 作变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cot t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cot x} dx$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \tan x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cot x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x + \frac{\pi}{4}) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x + \frac{\pi}{4}) d(x + \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left[\csc(x + \frac{\pi}{4}) - \cot(x + \frac{\pi}{4}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

3、已知直线 $L: \begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 9 \end{cases}$ 和平面 $\pi: 4x - y + z = 1$,

则直线 L 在平面 π 上的投影直线方程为 $\begin{cases} 17x + 31y - 37z = 117 \\ 4x - y + z = 1 \end{cases}$.

【解】所求投影直线为过 L 且垂直于 π 的平面 π_1 与 π 的交线，因此需要先求出过 L 且垂直于 π 的平面 π_1 的方程.

过 L 的平面束方程为

$$\lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - y - 2z - 9) = 0,$$

即

$$(2\lambda + 3\mu)x - (4\lambda + \mu)y + (\lambda - 2\mu)z - 9\mu = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

平面 π 的法向量为

$$\vec{n} = (4, -1, 1).$$

因平面 π_1 与平面 π 垂直，则必须有

$$4(2\lambda + 3\mu) + (-1)(-4\lambda - \mu) + 1 \cdot (\lambda - 2\mu) = 0$$

解之，得

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{11}{13},$$

由(1)，得到平面 π_1 的方程

$$17x + 31y - 37z - 117 = 0.$$

故所求投影直线为

$$\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0 \\ 4x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

4、 $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2.$

【解】由 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ 及 $\frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{(2n+2) - 2n}{1 + 2n(2n+2)}$ ，得

$$\arctan \frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \arctan(2n + 2) - \arctan(2n).$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4n^2 + 4n + 1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N [\arctan(2n + 2) - \arctan(2n)]$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} [\arctan(2N+2) - \arctan 2] = \frac{\pi}{2} - \arctan 2.$$

5、微分方程 $\begin{cases} (x+1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解是 $\ln \frac{2x+1}{x+1}$.

【解】方程变形为： $e^y \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+1}e^y + \frac{2}{x+1}$,

即, $\frac{de^y}{dx} = -\frac{1}{x+1}e^y + \frac{2}{x+1}$,

$$e^y = e^{\int -\frac{1}{x+1} dx} \left[\int \frac{2}{x+1} e^{-\int -\frac{1}{x+1} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x+1} \left[\int \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) dx + C \right]$$

$$= \frac{1}{x+1} [2x + C]$$

由 $y(0) = 0$, 得到, $C = 1$,

所以 $e^y = \frac{2x+1}{x+1}$, 故, $y = \ln \frac{2x+1}{x+1}$.

二、(本题满分 14 分)

设 $f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \int_{-1}^1 |x-t| e^{-t^2} dt$. 证明: 在区间 $(-1, 1)$ 内, $f(x)$ 有且仅有两个实根.

【证】 $f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \int_{-1}^1 |x-t| e^{-t^2} dt$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \int_{-1}^x (x-t)e^{-t^2} dt + \int_x^1 (t-x)e^{-t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) + x \int_{-1}^x e^{-t^2} dt - \int_{-1}^x t e^{-t^2} dt$$

$$+ \int_x^1 t e^{-t^2} dt - x \int_x^1 e^{-t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) + x \int_{-1}^0 e^{-t^2} dt + x \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-1}^x$$

$$- \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_x^1 + x \int_1^0 e^{-t^2} dt + x \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-1} + e^{-x^2} + x \int_{-1}^0 e^{-t^2} dt$$

$$+ x \int_1^0 e^{-t^2} dt + 2x \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2021 年初赛试题及参考解答

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} + e^{-x^2} + 2x \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

..... 6 分

显然, $f(x)$ 是偶函数, 所以我们只需考察 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的零点。由于

$$f(0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{e-3}{2e} < 0,$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} + e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

$$> -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}\right) + 2 \int_0^1 e^{-t^2} dt = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}e^{-1} > 0,$$

又 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由闭区间上连续函数的零点定理, 一定存在 $\xi \in (0,1)$,

使 $f(\xi) = 0$.

由于 $\forall x \in (0,1), f'(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个实根。

..... 6 分

因为 $f(x)$ 是偶函数, 它在 $(-1,0)$ 内也仅有一个实根。因此 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内仅

有两个实根。

..... 2 分

三、(本题满分 14 分)

设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上具有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + y^2, \quad \text{求 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan r - \sin r)^2}.$$

【解】 对 $\forall 0 < r \leq 1$, 设 $D_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, 由 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy &= -\frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial D_r} -(x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} dx + (x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial x} dy \\ &= \frac{r^2}{2} \iint_{D_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy - \frac{1}{2} \iint_{D_r} (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

2021 年初赛试题及参考解答

$$= \pi r^2 \int_0^r s^3 ds - \pi \int_0^r s^5 ds = \frac{\pi}{4} r^6 - \frac{\pi}{6} r^6 = \frac{\pi}{12} r^6. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因此, 由 Taylor 公式, 得

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{D_r} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy}{(\tan r - \sin r)^2} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{12} r^6}{\left[\left(r + \frac{r^3}{3} + o(r^3) \right) - \left(r - \frac{r^3}{3!} + o(r^3) \right) \right]^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{12} r^6}{\frac{r^6}{4} + o(r^6)} = \frac{1}{3} \pi. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

四、(本题满分 14 分)

若对于 R^3 中半空间 $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x > 0\}$ 内的任意有向光滑封闭曲面 S , 都有:

$$\iint_S x f'(x) dy dz + y (x f(x) - f'(x)) dz dx - x z (\sin x + f'(x)) dx dy = 0,$$

其中 f 在 $(0, +\infty)$ 上二阶导数连续且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, 求 $f(x)$.

【解】 任取定一点 $P(x, y, z) \in \{(x, y, z) \in R^3 \mid x > 0\}$, 对任意充分小 $\varepsilon > 0$, 以 P 点为心半径为 2ε 的有向球面 $S_{2\varepsilon}(P)$ 仍位于此半空间中. 记 $B_\varepsilon(P)$ 为球面 $S_\varepsilon(P)$ (取外侧)所围内部开球域.

由题设条件及 Gauss 公式, 得:

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_{S_\varepsilon(P)} x f'(x) dy dz + y (x f(x) - f'(x)) dz dx - x z (\sin x + f'(x)) dx dy = \\ &= \iiint_{B_\varepsilon(P)} [f'(x) + x f''(x) + x f(x) - f'(x) - x \sin x - x f'(x)] dx dy dz = \\ &= \iiint_{B_\varepsilon(P)} [x f''(x) - x f'(x) + x f(x) - x \sin x] dx dy dz = \rho [f''(\rho) - f'(\rho) + f(\rho) - \sin \rho] \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3, \end{aligned}$$

其中 $|\rho - x| \leq \varepsilon$.

由此可得 $f''(\rho) - f'(\rho) + f(\rho) - \sin \rho = 0$.

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 由 f 在 $(0, +\infty)$ 上二阶导数连续得

$$f''(x) - f'(x) + f(x) - \sin x = 0 \quad (\forall x > 0),$$

即

$$f''(x) - f'(x) + f(x) = \sin x \quad (\forall x > 0). \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(以上方程也可通过反证法得到).

求解此二阶方程, 齐次方程通解为 $e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$, 非齐次方程

2021 年初赛试题及参考解答

特解为 $\cos x$ ，故可得：

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \cos x, \quad \forall x > 0.$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 可得： $c_1 = -1$.

再由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ ，得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \left((c_1 + \sqrt{3}c_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (c_2 - \sqrt{3}c_1) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - \sin x \right] = \frac{c_1 + \sqrt{3}c_2}{2} = 0,$$

可得： $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

因此， $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \cos x, \quad \forall x > 0.$ 7 分

五、(本题满分 14 分)

设 $f(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{[u]}{u} \right) du$ ，其中 $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数。试讨论

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx$ 的敛散性，其中 $p > 0$ 。

【解】 $\forall x \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{[u]}{u} \right) du = \int_0^{[x]} \left(1 - \frac{[u]}{u} \right) du + \int_{[x]}^x \frac{u - [u]}{u} du \\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} \left(1 - \frac{k}{u} \right) du + \int_{[x]}^x \frac{u - [x]}{u} du = [x] - \sum_{k=1}^{[x]-1} k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= [x] - \sum_{k=1}^{[x]-1} k \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \right] + O\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{1}{k} + O(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln [x] + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{k} - \ln [x] \right) + O(1) = \frac{1}{2} \ln x + O(1). \end{aligned}$$

故存在 $0 < C_1 \leq C_2$ ，使得

$$C_1 \sqrt{x} \leq e^{f(x)} \leq C_2 \sqrt{x}, \quad \forall x \geq 1. \quad \text{..... 4 分}$$

若 $p > \frac{3}{2}$ ， $\left| \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right| \leq \frac{C_2}{x^{p-\frac{1}{2}}}$ ，故原积分绝对收敛。 3 分

再考虑 $0 < p \leq \frac{3}{2}$ 。首先，注意到

2021 年初赛试题及参考解答

$$\frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{f(x)} x^{3-p}}{2(x^4 + 1)} 2\left(x + \frac{1}{x^3}\right) \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right),$$

且对任意 $1 \leq A < B < +\infty$, 成立

$$\left| \int_A^B 2\left(x + \frac{1}{x^3}\right) \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = \left| \sin\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \right|_A^B \leq 2.$$

其次, $\frac{e^{f(x)} x^{3-p}}{x^4+1}$ 单调递减(对 x 充分大)且趋于 0 (当 $x \rightarrow +\infty$). 事实上, $\frac{x^{4-p}}{x^4+1}$ 单调递减(对 x 充分大), $\frac{e^{f(x)}}{x} = e^{\int_0^x (1-\frac{[u]}{u}) du - \ln x} = e^{\int_1^x (1-\frac{[u]+1}{u}) du + 1}$ 在 $[1, +\infty]$ 上单调递减. 由 Dirichlet 判别法, 原积分收敛.4 分
注意到

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \right| &\geq \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos^2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{e^{f(x)}}{2x^p} \left(\cos\left[2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right] + 1 \right). \end{aligned}$$

类似地可证 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^p} \cos\left[2\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right] dx$ 收敛, 但由于 $\frac{e^{f(x)}}{x^p} \geq \frac{c_1}{x}$, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^p} dx$ 发散. 因此, 原积分当 $0 < p \leq \frac{3}{2}$ 时条件收敛.3 分

六、(本题满分 14 分)

设正数列 $\{a_n\}$ 单调减少且趋于零, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^n x^n$. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx$ 也发散.

【证】因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$2 分

若 $x \in [\frac{e}{a_p}, \frac{e}{a_{p+1}}]$, 则当 $k \leq p$ 时, $a_k x \geq a_p x \geq e$ (因为 a_n 单调减少).

因此, $f(x) \geq \sum_{k=1}^p (a_k x)^k \geq \sum_{k=1}^p e^k \geq e^p$.

于是, $\ln f(x) \geq p, (x \in [\frac{e}{a_p}, \frac{e}{a_{p+1}}])$6 分

2021 年初赛试题及参考解答

又因为当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n > 0$.

对于固定的 n , 当 $X > \frac{e}{a_n}$ 时,

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx &= \int_1^{\frac{e}{a_1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx + \sum_{p=1}^{n-1} \int_{\frac{e}{a_p}}^{\frac{e}{a_{p+1}}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx + \int_{\frac{e}{a_n}}^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \\ &\geq \sum_{p=1}^{n-1} p \int_{\frac{e}{a_p}}^{\frac{e}{a_{p+1}}} \frac{1}{x^2} dx + n \int_{\frac{e}{a_n}}^X \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{e} \sum_{p=1}^n a_p - \frac{n}{X}. \end{aligned}$$

于是当 $X > \max\{n, \frac{e}{a_n}\}$ 时, $\int_1^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geq \frac{1}{e} \sum_{p=1}^n a_p - 1$.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以 $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\ln f(x)}{x^2} dx = +\infty$6 分