第三节

格林公式及其应用

内容

一 格林公式

二 平面上曲线积分与路径无关的条件

一、格林公式

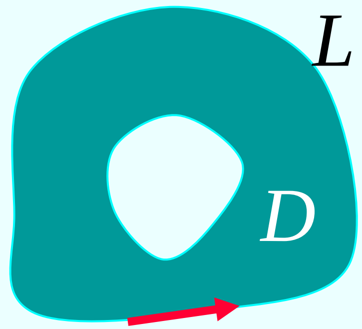
格林公式 I. 设闭区域 D 由分段光滑的正向曲线 L 围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有一阶连续的偏导数,则有

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

注 i) D内任一闭曲线所围部分都属于D,称单连通区域否则称复连通,通俗讲,单连通区域就是不含洞的区域

ii) $\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内连续 (注意区分$P,Q$)

iii) L封闭正向：当观察者沿正向走时区域D总在它的左边

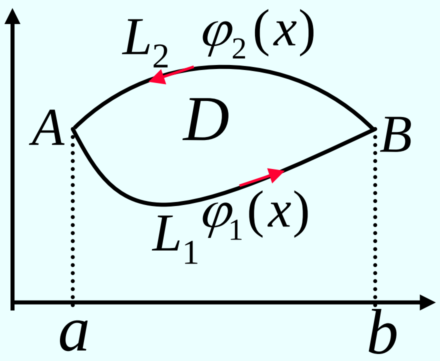


一、格林公式

格林公式 I. 设闭区域 D 由分段光滑正向曲线 L 围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有一阶连续的偏导数,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证明 D为X-型



往证 $\oint_L P\mathrm{d}x=\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\quad \oint_L Q\mathrm{d}y=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

左边 $\oint_L P\mathrm{d}x=\oint_{L_1} P\mathrm{d}x+\oint_{L_2} P\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x+\int_b^a P[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x$$

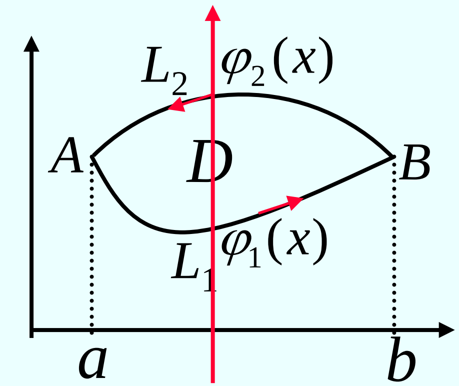
$$=\int_a^b \{P[x,\varphi_1(x)]-P[x,\varphi_2(x)]\}\mathrm{d}x$$

一、格林公式

证明 D为X-型

往证 $\oint_L P\mathrm{d}x = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\quad \oint_L Q\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

类似可证



左边 $\oint_L P\mathrm{d}x = \oint_{L_1} P\mathrm{d}x + \oint_{L_2} P\mathrm{d}x$

$$= \int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x + \int_b^a P[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \{P[x,\varphi_1(x)] - P[x,\varphi_2(x)]\}\mathrm{d}x$$

右边 $\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$

$$= -\int_a^b \{P[x,\varphi_2(x)] - P[x,\varphi_1(x)]\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \{P[x,\varphi_1(x)] - P[x,\varphi_2(x)]\}\mathrm{d}x$$

一、格林公式

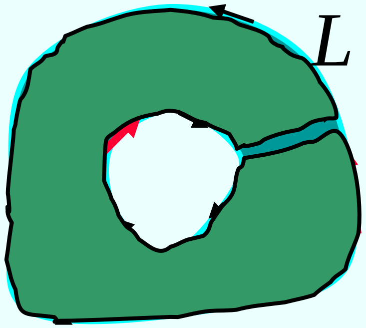
格林公式II. 设$P(x,y),Q(x,y)$在复连通区域 D 内具有一阶偏导连续,$L+l$封闭,正向

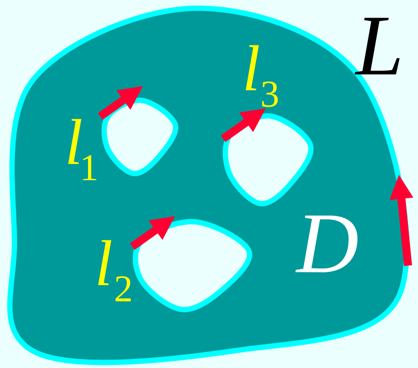
$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注 i) D复连通区域

ii) $\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$内连续

iii) L逆时针,l顺时针





$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{l_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{l_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{l_3} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

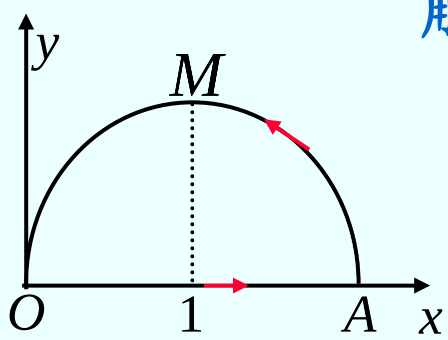
怎样用格林公式

题型 (要注意三个条件)

① 三条件满足 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$

例1 $\oint_L e^x \cos y\mathrm{d}x - (e^x \sin y + x)\mathrm{d}y$

其中 $L:(x-1)^2 + y^2 = 1$ 及 x 轴,方向正向,$y \ge 0$



解法一 利用曲线方程代入化定积分

法二 利用格林公式

$$P(x,y) = e^x \cos y \quad Q(x,y) = -e^x \sin y - x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y - 1 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\text{原式} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \iint_D -1\mathrm{d}\sigma = -\frac{\pi}{2}$$

题型 (要注意三个条件)

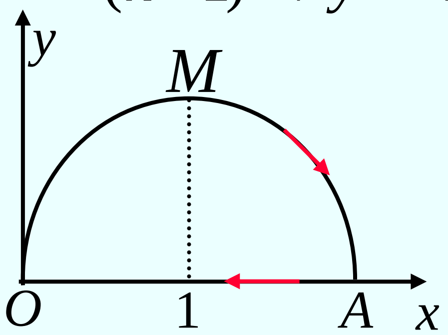
② L不封闭:引入辅助曲线,一般可取平行于x,y轴的折线

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L+l} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma-\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

上例 $L=\overset{\frown}{OMA}$

$(x-1)^2+y^2=1$



$$\int_{\overset{\frown}{OMA}} e^x\cos y\mathrm{d}x-(e^x\sin y+x)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{OMA}+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}$$

$$=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma-\int_2^0 e^x\mathrm{d}x$$

$$=\iint_D \mathrm{d}\sigma+\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+e^2-1$$

题型(要注意三个条件)

③ $P(x,y)$, $Q(x,y)$一阶偏导不连续 ($\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$在D内不连续)

I (代入法) 将积分曲线方程代入被积函数中，消去导致偏导数不连续的项

特点: 积分域方程的形式与分母一样

例2 $\displaystyle\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}, L: x^2+y^2=1$正向

解 原式$\displaystyle=\oint_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \iint_D -2\mathrm{d}\sigma = -2\pi$

II (直接法) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

解 原式$\displaystyle=\int_0^{2\pi} [\sin t \cdot(-\sin t) - \cos t \cdot \cos t]\mathrm{d}t = -2\pi$

③ $P(x,y)$, $Q(x,y)$一阶偏导不连续 ($\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$在D内不连续)

III (挖洞法) 积分曲线方程与被积函数的分母形式不一样

将不连续点(x_0,y_0)挖去

例3 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}, L: x^2+y^2=1$正向

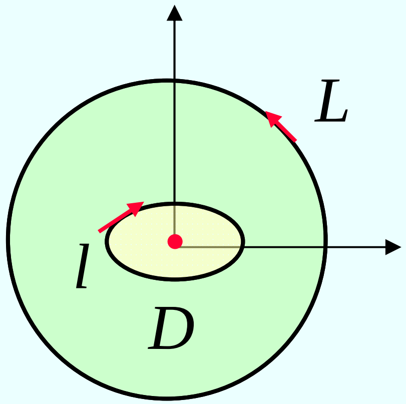
解 $\boxed{\oint_L} = \oint_{L+l} \boxed{-\oint_l}$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4x^2+y^2-y\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$= \iint_D (\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0})\mathrm{d}\sigma - \int_{2\pi}^{0} \frac{\delta\sin\theta\cdot\frac{\delta}{2}(-\sin\theta) - \frac{\delta}{2}\cos\theta\cdot\delta\cos\theta}{\delta^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = -\pi$$

$l: 4x^2+y^2=\delta^2$

$$\begin{cases} x = \frac{\delta}{2}\cos\theta \\ y = \delta\sin\theta \end{cases}$$



说明：如果曲线是封闭的,则可找另一条更简单的封闭曲线,只要两条封闭曲线不相交,且在它们之间区域内满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 则两条曲线上的积分值相等

例3 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}, L: x^2+y^2=1$ 正向

解 $\boxed{\oint_L} = \oint_{L+l} \boxed{-\oint_l}$

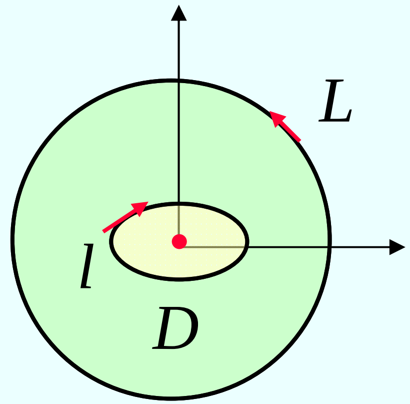
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4x^2+y^2-y\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0}\mathrm{d}\sigma - \int_{2\pi}^{0} \frac{\delta\sin\theta\cdot\frac{\delta}{2}(-\sin\theta)-\frac{\delta}{2}\cos\theta\cdot\delta\cos\theta}{\delta^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = -\pi$$

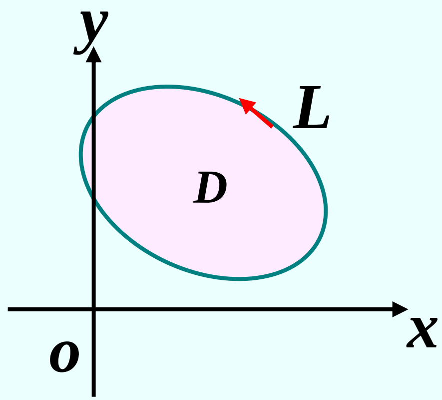
$l: 4x^2+y^2=\delta^2$

$$\begin{cases} x = \frac{\delta}{2}\cos\theta \\ y = \delta\sin\theta \end{cases}$$



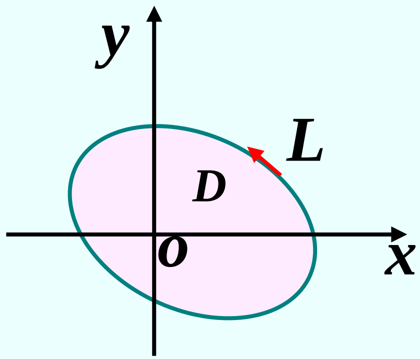
说明: 如果曲线是封闭的,则可找另一条更简单的封闭曲线,只要两条封闭曲线不相交,且在它们之间区域内满足$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$则两条曲线上的积分值相等

例4. 计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一条无重点,分段光滑且不经过原点的连续闭曲线,$L$的方向为逆时针



解: $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

则当$x^2+y^2\neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

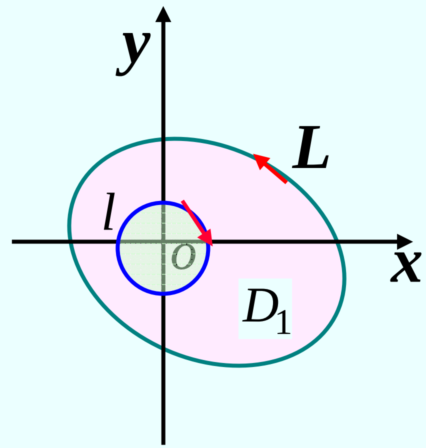


设 L 所围区域为D, 当$(0,0)\notin D$时,

由格林公式知$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=0$

说明：如果曲线是封闭的,则可找另一条更简单的封闭曲线,只要两条封闭曲线不相交,且在它们之间区域内满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 则两条曲线上的积分值相等

例4. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点,分段光滑且不经过原点的连续闭曲线,L 的方向为逆时针



解：当 $(0,0)\in D$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上不连续

在 D 内作圆周 $l: x^2+y^2=\delta^2$，取顺时针方向

记 L 和 l 所围的区域为 D_1

$$\oint_L=\oint_{L+l}-\oint_l=\iint_{D_1}0d\sigma-\int_{2\pi}^{0}\frac{\delta\cos\theta\cdot\delta\cos\theta-\delta\sin\theta\cdot(-\delta\sin\theta)}{\delta^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi$$

$$\begin{cases}x=\delta\cos\theta\\ y=\delta\sin\theta\end{cases}$$

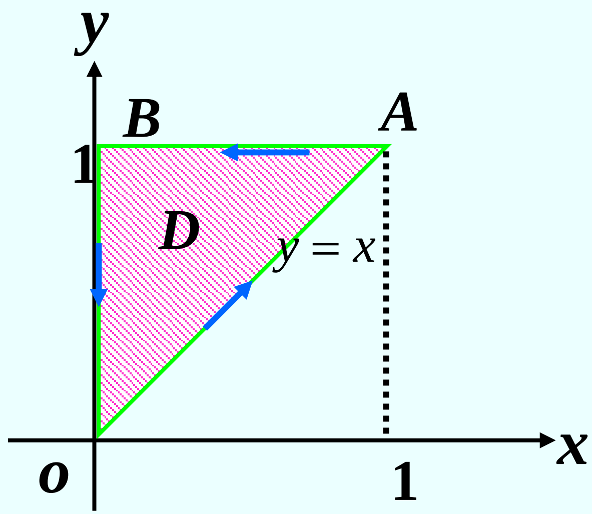
④ 利用线积分二重积分

例5 $\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$为顶点的三角形闭区域

解 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2} \Rightarrow P = 0,\quad Q = xe^{-y^2}$$

$$\oint_{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}} xe^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\overrightarrow{AB}} xe^{-y^2}\mathrm{d}y + \int_{\overrightarrow{BO}} xe^{-y^2}\mathrm{d}y$$

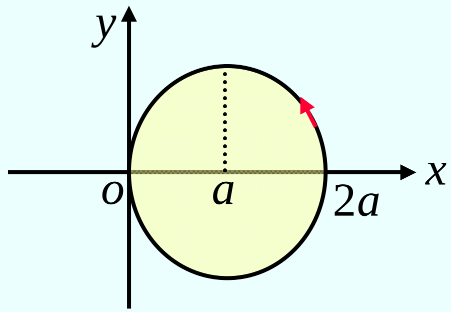
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

⑤ 利用曲线积分求平面图形面积的公式

设闭区域D由分段光滑的正向曲线L围成,则D的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{d}y=-\oint_L y\mathrm{d}x$$

例6 求圆$x^2+y^2=2ax$的面积



解 $\begin{cases} x=a(1+\cos\theta) \\ y=a\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0\le\theta\le 2\pi$

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos\theta)\cdot a\cos\theta-a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi a^2$$

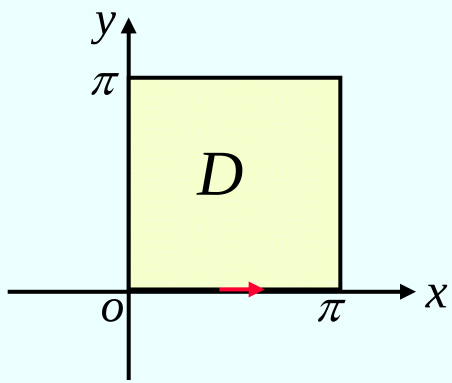
⑥ 曲线积分证明题

例7 证明:已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$

L 为 D 的边界,求证

$$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge 2\pi^2$$

解 $P=-ye^{-\sin x}, Q=xe^{\sin y}$



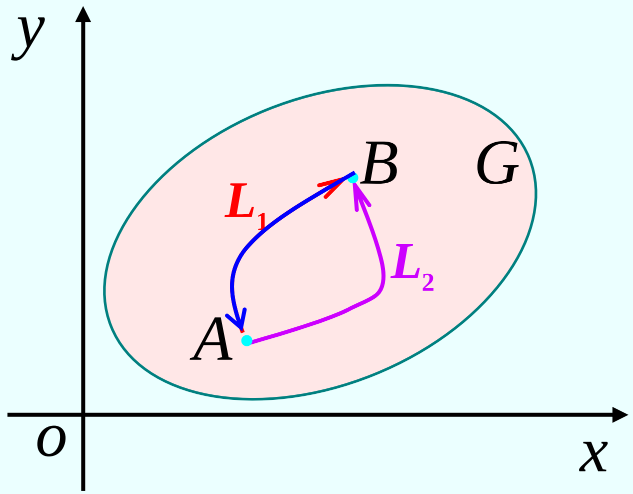
$$\text{左边}=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D e^{\sin y}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D e^{-\sin x}\mathrm{d}\sigma$$

$$\overset{\text{轮换性}}{=}\iint\limits_D\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma\ge\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma=2\pi^2$$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

分析 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关



(1)
$\Leftrightarrow \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

(2)
$\Leftrightarrow \oint_{L_2+L_1^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 沿任闭曲线积分为0

(3)
$\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

(4)
$\Leftrightarrow$ 存在$u(x,y)$,使$\mathrm{d}u(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$

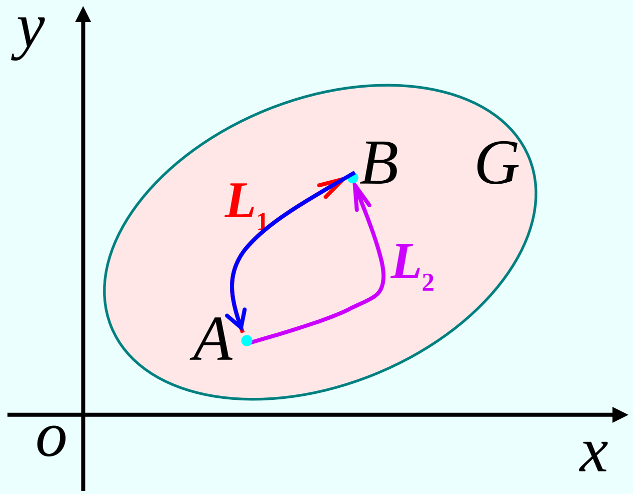
(3) $\Leftarrow$ (4)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

P,Q在D内一阶偏导连续

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

分析 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关



(1) $\Leftrightarrow \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

(2) $\Leftrightarrow \oint_{L_2+L_1^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 沿任闭曲线积分为0

(3) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

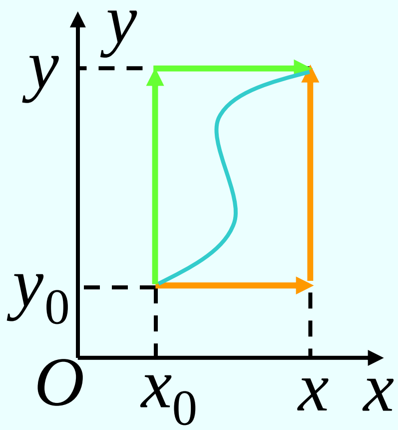
(4) $\Leftrightarrow$ 存在$u(x,y)$，使$\mathrm{d}u(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

(3) $\Rightarrow$ (4)

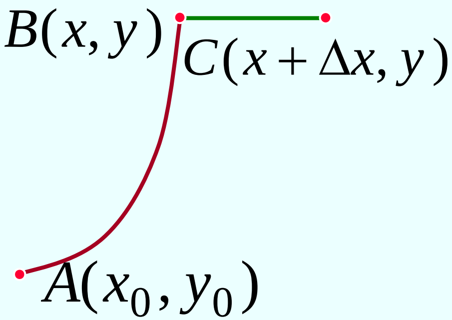
$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

或 $$= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$



$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}$$



$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\theta\Delta x,y)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=P(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$，因此有 $\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

注：起点$M_0(x_0,y_0)$可换,通常取(0,0),故$u(x,y)$不是唯一的

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)}=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_0,y_0)}+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=u(x,y)-u(x_1,y_1)$$

$$\boxed{\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y}=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)=\boxed{u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}}$$

	与路径无关的四个等价命题
条件	在单连通开区域D上, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数,则以下四个命题等价.
等价命题	(1)$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关 (2)$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$, L是D任意闭回路 (3)在D内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (4)在D内存在$u(x,y)$,使$\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

	与路径无关的四个等价命题
条件	在单连通开区域D上, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数,则以下四个命题成立.
等价命题	(1) $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在D内与路径无关 (2) $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, L是D任意闭回路 (3) 在D内, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (4) 在D内存在$u(x,y)$, 使$\mathrm{d}u(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

对坐标曲线积分

①化定积分

②补线,格林公式

③若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 可取折线

	与路径无关的四个等价命题
条件	在单连通开区域D上, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数,则以下四个命题成立.
等价命题	(1) $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在D内与路径无关 (2) $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$, L是D任意闭回路 (3) 在D内, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (4) 在D内存在$u(x,y)$, 使$\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}$ $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q($

封闭曲线积分

①化定积分

②格林公式

③若D内有不可导点

挖洞法 若 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\oint_L=\oint_l$ L和l同向

	与路径无关的四个等价命题
条件	在单连通开区域D上, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数,则以下四个命题成立.
等价命题	(1) $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在D内与路径无关 (2) $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$, L是D任意闭回路 (3) 在D内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (4) 在D内存在$u(x,y)$, 使$\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

① 由$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 求原函数$u(x,y)$

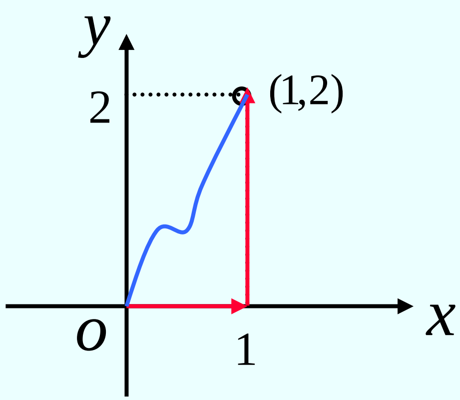
② $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$

题型 ①与路径无关

例1 计算 $\int_L (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$ 其中 L 是曲线

$y = \dfrac{8x^3}{\pi} e^{\sin \pi x} \arctan x$ 上从(0,0)到点(1,2)的一段弧

解 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$



曲线积分与积分路径无关

取路径(0,0)到(1,2)的折线段

原式 $= \int_0^1 3\mathrm{d}x + \int_0^2 (1 - 4y^3)\mathrm{d}y$

$= -11$

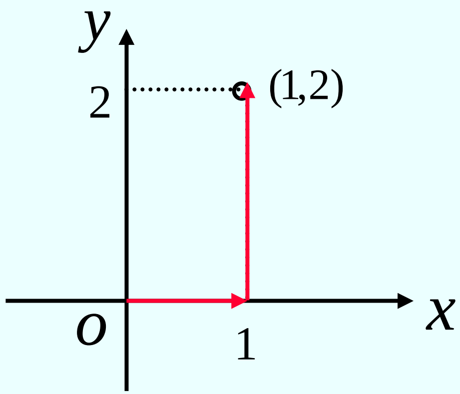
题型 ①与路径无关

例2 若f可微,则 $\int_{(0,0)}^{(1,2)} f(x+y)\mathrm{d}x + f(x+y)\mathrm{d}y$

解 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = f'(x+y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

曲线积分与积分路径无关

取路径(0,0)到(1,2)的折线段



$$\text{原式} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(1+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(\overset{x}{u})\,\mathrm{d}\overset{x}{u}$$

$$= \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$

题型 ②与参数有关 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关,求参数

例 已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分,则a=?

或 $\displaystyle\int_L \frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 与积分路径无关,则a=?

分析

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{a\cdot(x+y)^2-(x+ay)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{-2y}{(x+y)^3}$$

$$\Rightarrow a=2$$

题型 ③ 求原函数 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

例 验证在整个 xoy 面内, $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分,并求原函数

证: $P=x^2+2xy-y^2, Q=x^2-2xy-y^2$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y=\frac{\partial P}{\partial y}$$ 在整个 xoy 平面内恒成立

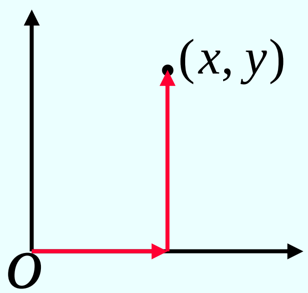
$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分

i)线积分法　　可换,如 $\int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$$



例 验证在整个xoy面内，$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分，并求原函数

ii)偏积分法

由于 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$

而 $\mathrm{d}u=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$

$\varphi(y)$里无x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+2xy-y^2\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy-y^2=x^2-2xy+\varphi'(y)\Rightarrow\varphi'(y)=-y^2$$

故 $\varphi(y)=-\dfrac{1}{3}y^3+C$

所以 $u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\dfrac{1}{3}y^3+C$

例 验证在整个xoy面内，$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分，并求原函数

iii)凑全微分法

$$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3)+(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)-(y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)$$

$$=\mathrm{d}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3+x^2y-xy^2)$$

所以$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3+x^2y-xy^2+C$

例 计算$I=\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$

解 **凑全微分法**

$$(\underline{x^4}+\underline{4xy^3})\mathrm{d}x+(\underline{6x^2y^2}\underline{-5y^4})\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(\frac{1}{5}x^5-y^5)+(4xy^3\mathrm{d}x+6x^2y^2\mathrm{d}y)$$

$$=\mathrm{d}(\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3)$$

则$I=\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$

$$=(\frac{1}{5}x^5-y^5+2x^2y^3)\Big|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62$$