A 卷
参考答案与评分标准

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%，本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%.

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}$，则（ A ）.

   A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点； B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点；
   C. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点； D. $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；

2. 设 $\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$（ C ）.

   A. $x\cos x+\sin x+C$； B. $x\sin x+\cos x+C$；
   C. $x\cos x-\sin x+C$； D. $x\sin x-\cos x+C$；

3. 下列反常积分中，收敛的是（ B ）.

   A. $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$； B. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$；
   C. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$； D. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2025}+\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x=$（ C ）.

   A. 0； B. $\dfrac{1}{3}$；
   C. $\dfrac{2}{3}$； D. 1；

5. 设 $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right)^{\sin x}-1$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的（ D ）.

   A. 等价无穷小； B. 同阶但非等价无穷小；
   C. 2 阶无穷小； D. 3 阶无穷小；

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-b\sin^2 x}-a}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a+b=$ $\underline{\quad -3 \quad}$.

2. 设函数 $y=x^2(x-1)^3(x+1)$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=-1}=$ $\underline{\quad \text{-8d}x \quad}$.

3. 曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 的拐点为 $\underline{\quad \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right) \quad}$.

4. 设函数 $f(x)=(x^2+x+2)\sin x$，则 $f^{(10)}(0)=$ $\underline{\quad 10 \quad}$.

5. 心形线 $\rho=1+\cos\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ 所围平面区域的面积为 $\underline{\quad \dfrac{3}{2}\pi \quad}$.

装 订 线

三.（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-\sin x}}{x\ln(1+x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,1]\\ a, & x=0\end{cases}$ 是连续函数，求常数 a.

解： $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$（1 分） $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x-(1-\sin x)}{x\ln(1+x^2)(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-\sin x})}$ (2分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ (2分) $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$ (3分)

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{12}$ （2 分）

四.（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 确定，求 $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$.

解： 代入 $x=0$ 得 $y(0)=1$.(2 分)

方程两边分别关于 x 求导，得 $e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$, (2 分)

将 $x=0$， $y(0)=1$ 代入得 $y'(0)=-2$.(2 分)

两边分别关于 x 求导，得 $e^{2x+y}(2+y')^2+e^{2x+y}y''+\cos(xy)(y+xy')^2+\sin(xy)(2y'+xy'')=0$,(2 分)

将 $x=0$， $y(0)=1$， $y'(0)=-2$ 代入得 $y''(0)=-\mathrm{e}^{-1}$.(2 分)

五.（12 分）设函数 $f(x)$ 连续， $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{A}$ ， A 为常数，

(1) 求 $g'(x)$.

(2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解： (1)由题设，知 $f(0)=0,g(0)=0$ ，（2 分）

令 $u=xt$ ，得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x},x\neq 0.\text{（2 分）}$$

而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2},x\neq 0.\text{（3 分）}$$

由导数的定义有 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{\mathrm{A}}{2}$.（2 分）

综上所述 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{\mathrm{A}}{2}, & x=0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\mathrm{A}-\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{\mathrm{A}}{2}=g'(0).$$

从而得知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.（3 分）

六.（10 分）设 $f(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 内可导，且 $f(0)=0$，又 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ \sqrt{x}, & x>1\end{cases}$，求 $f(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 的表达式.

解：令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$， $f'(t)=\begin{cases}1, & t\le 0\\ e^{\frac{t}{2}}, & t>0\end{cases}$ （3 分）

两边同时取不定积分，得 $f(t)=\begin{cases}t+C_1, & t\le 0\\ 2e^{\frac{t}{2}}+C_2, & t>0\end{cases}$ （3 分）

而 $f(t)$ 可导，故连续，所以，$\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=\lim\limits_{t\to 0^-}f(t)=f(0)=0$，从而

$C_1=2+C_2=0$，（2 分）故 $f(t)=\begin{cases}t, & t\le 0\\ 2e^{\frac{t}{2}}-2, & t>0\end{cases}$ （2 分）

装

七.（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0\end{cases}$，计算 $\int_1^4 f(x-2)\,dx$.

解：设 $x-2=t$，则 $\int_1^4 f(x-2)\,dx=\int_{-1}^2 f(t)\,dt$（2 分）$=\int_{-1}^0 f(t)\,dt+\int_0^2 f(t)\,dt$（2 分）

$=\int_{-1}^0\dfrac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}\,dt=\tan\dfrac{t}{2}\Big|_{-1}^0-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^2$（2 分+2 分）$=\tan\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-4}+\dfrac{1}{2}$（2 分）

八.（12 分）已知 $0<k<1$，将直线 $y=kx$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成平面图形面积记为

订

$D_1(k)$；将直线 $y=kx$ 与曲线 $y=x^2$ 及直线 $x=1$ 所围成的曲边三角形面积记为 $D_2(k)$

(1) 求 k，使 $D_1(k)+D_2(k)$ 取得最小值；

(2) 求在该最小值下，$D_1(k)+D_2(k)$ 所对应的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解：(1)直线 $y=kx$ 与曲线 $y=x^2$ 的交点 (k,k^2)

$D_1(k)=\int_0^k(kx-x^2)\,dx=\left[\dfrac{1}{2}kx^2-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^k=\dfrac{1}{6}k^3$

$D_2(k)=\int_k^1(x^2-kx)dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}kx^2\right]_k^1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{6}k^3$

线

令 $D(k)=D_1(k)+D_2(k)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{3}k^3$ 则 $D'(k)=-\dfrac{1}{2}+k^2$，解 $D'(k)=0$ 得唯一驻点 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即当 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$D_1(k)+D_2(k)$ 取得最小值；

(2) $V=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi(\dfrac{1}{2}x^2-x^4)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\pi(x^4-\dfrac{1}{2}x^2)\,dx=\dfrac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$ 3 分

九.（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且满足 $f(2)+f(3)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$．

证明：因为 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，

于是 $2m\le f(2)+f(3)\le 2M$， $m\le\dfrac{f(2)+f(3)}{2}\le M$，由介值定理知，存在 $\xi_1\in[2,3]$，使得 $f(\xi_1)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$． (2 分)

再由积分中值定理，存在 $\xi_2\in[0,1]$，使得 $f(\xi_2)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$. (2 分)

$f(\xi_1)=f(\xi_2)$，由 $f(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]\subset[0,3]$ 上连续，在 (ξ_2,ξ_1) 内可导，

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.(2 分)