选课序号
姓　　名
学　　号
专业班级

装　　订　　线

大连海事大学 2017—2018 学年第二学期《高等数学》试卷 A

参考答案

一、单项选择题

（将正确选项填在括号内，不填或填错都不得分，每题 3 分，共 15 分）

1. 设直线 L 为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$，平面 Π 为 $2x+y-z-2=0$，则（　C　）。

(A) 直线 L 平行于平面 Π　　(B) 直线 L 在平面 Π 上

(C) 直线 L 垂直于平面 Π　　(D) 直线 L 斜交于平面 Π

2. 设 $u=\left(\dfrac{x}{z}\right)^{y}$，则 $du\big|_{(1,1,1)}=$（　D　）。

(A) $-dx+dy$　　(B) $dx-dy$

(C) $dy-dz$　　(D) $dx-dz$

3. 二重积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx=$（　B　）。

(A) 1　　(B) $\dfrac{e-1}{2}$

(C) $\dfrac{e}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 的都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是（　D　）。

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$的敛散性是（ B ）。 **试卷 A**

(A) 发散的 (B) 条件收敛的

(C) 绝对收敛的 (D) 敛散性不能确定

二、填空题（将正确答案填在括号内，不填或填错都不得分，每题 3 分，共 15 分）

1. 曲线$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$在坐标面 xoy 面上的投影方程为($\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$)。

2. 设Ω由球面$x^2+y^2+z^2=a^2$围成，则$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2dv=$（ $\frac{8}{15}\pi a^5$ ）。

3. 设曲面Σ为圆柱面$x^2+y^2=4$介于平面$z=0$与$z=1$之间的部分，

则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(\sqrt{x^2+y^2}+2)dS=$（ 16π ）。

4. 函数$\frac{1}{x+2}$展开成$x-1$的幂级数是（ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$ or $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{3})^n$ ）。

5. 微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x-y)^2}$的通解是（ $\frac{1}{2}\ln\frac{x-y-1}{x-y+1}=y+C$ ）。

三、已知函数f具有二阶连续偏导数，$u=f(x^2,xy^2,xyz)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$。（10 分）

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+y^2f_2'+yzf_3'$ 3 分

$\frac{\partial u}{\partial y}=2xyf_2'+xzf_3'$ 3 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=2x^2yf_{13}''+x^2y^3f_{23}''+yf_3'+xy^2zf_{33}''$ 4 分

六、设曲面为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$a>0,c>0$（10分） **试卷A**

（1）求曲面在第一卦限部分上点$M(x_0,y_0,z_0)$的一个法向量；

（2）求曲面在该点$M(x_0,y_0,z_0)$的切平面；

（3）问该切平面在三个坐标轴上的截距分别是多少？；

（4）问该点$M(x_0,y_0,z_0)$为何值时，其切平面与三个坐标面围成的立方体体积最小？

解：（1）令$F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，则$\vec{n}=(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{a^2},\frac{z_0}{c^2})$； 2分

（2）该点切平面为：$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{a^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

化简为$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{a^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$； 2分

（3）截距分别为：$\frac{a^2}{x_0},\frac{a^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0},$； 2分

（4）$V=\frac{1}{6}\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{a^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0}$，求体积最小，即求$x_0\cdot y_0\cdot z_0$最大，

令$L=xyz+\lambda\,(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ $\begin{cases} L_x=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 & (1)\\ L_y=xz+\frac{2\lambda}{a^2}y=0 & (2)\\ L_z=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 & (3)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (4)\end{cases}$ 6分

$(1)\times x$得 $xyz+2\lambda\frac{x^2}{a^2}=0$，$(2)\times y$得 $xyz+2\lambda\frac{y^2}{a^2}=0$，$(3)\times z$得 $xyz+2\lambda\frac{z^2}{c^2}=0$

三式相加得$3xyz+2\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2})=0$ 将（4）代入得$xyz=-\frac{2\lambda}{3}$

回带得$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$，同理得$y=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$x=\frac{c}{\sqrt{3}}$

得唯一驻点（$\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}$）为所求。 2分

四、求直线$\begin{cases}2x+2y-z+2=0\\ x-y+2z+1=0\end{cases}$的对称式、参数方程（10 分）

解： $\bar{s}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(3,-3,-4)$ 3 分

令 $z=0$，$\begin{cases}2x+2y+2=0\\ x-y+1=0\end{cases}$ 得 $x=-1, y=0$ 2 分

装

直线方程为 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-4}$ 3 分

$\begin{cases}x=3t-1\\ y=-3t\\ z=-4t\end{cases}$ 2 分

五、计算 $\oint\limits_L \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+(y-1)^2=3^2$ 的逆时针方向。（10 分）

订

解：因为 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$-- 2 分

$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 2 分

作曲线 C：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$,$0\le\theta\le2\pi$ 取正向（逆时针方向），包含于 L 内， 2 分

线

则 $\oint\limits_{L+C^-}\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})d\sigma=0$ 2 分

则计算 $\oint\limits_L\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\oint\limits_C\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

$=\int_0^{2\pi}\dfrac{r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}{r^2}dr=2\pi$ 2 分

装 订 线

大连海事大学 2017—2018 学年第二学期《高等数学》试卷 A

七、计算 $\iint\limits_{\Sigma} xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 介于 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间的上侧。（10 分）

解：设曲面 $\Sigma_1 : z = 1, x^2 + y^2 \le 1$ 取下侧， 2 分

则 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy = -\iiint\limits_{\Omega}(z + z + 2z)dv$

$= -4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 zdz = -\frac{4}{3}\pi$ 5 分

$\iint\limits_{\Sigma_1} xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} 1dxdy = -\pi$ 2 分

所以 $\iint\limits_{\Sigma} xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy = -\frac{4}{3}\pi - (-\pi) = -\frac{\pi}{3}$ 1 分

八、设微分方程为 $y'' - 2y' - 3y = xe^{3x}$

（1）求对应齐次微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解；

（2）求非齐次微分方程 $y'' - 2y' - 3y = xe^{3x}$ 的通解。（10 分）

解：（1）因为 $r^2 - 2r - 3 = 0$，所以 $r_1 = -1, r_2 = 3$， 4 分

通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$； 1 分

（2）因为 $p_m = x$ 是一次式，$\lambda = 3$ 是特征方程单解，

所以设特解为 $y^* = x(ax + b)e^{3x}$ 代入方程得 $a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{16}$，

$y^* = (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16})e^{3x}$ 4 分

得非齐次方程得通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x)e^{3x}$ 1 分

、设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x-1)^n$，求（1）此幂级数的收敛半径；　　　　试卷 A

（2）此幂级数的收敛域；

（3）此幂级数在收敛域的和函数。（10）

解：（1）设$t=x-1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}t^n$，因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=1$，所以$R=1$，…（2 分）

（2）当$t=-1$时，　级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$收敛

当$t=1$时，　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散

所以，收敛域为$-1\le x-1<1$，$0\le x<2$　　　　……（2 分）

（3）当$-1\le t<1$时，设$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}t^n$

当$t=0$时，　$s(t)=0$；

当$t\ne 0$时，　$s(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}t^{n+1})'dt$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}t^n dx$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{t}{1-t}dt=-1-\frac{1}{t}\ln(1-t)$$

$$s(x)=\begin{cases}-1-\frac{1}{x-1}\ln(1-x) & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases},\quad 0\le x<2$$ ------------4 分