第二节

偏导数

内容

一偏导数的定义及其计算法

二高阶偏导数

一、偏导数的定义及其计算法

偏导数 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$ 存在，

则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处**对 x 的偏导数**，

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$f_x(x_0,y_0)$，$\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$f'_x(x_0,y_0)$，$f'_1(x_0,y_0)$

即
$$\boxed{f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}$$

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处**对 y 的偏导数**定义为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $f_y(x_0,y_0)$, $\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $f'_y(x_0,y_0)$, $f'_2(x_0,y_0)$

若函数$z=f(x,y)$在域D内每一点(x,y)处对x或y偏导数存在

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$ 为$f(x,y)$**对x的偏导函数**

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$ 为$f(x,y)$**对y的偏导函数**

还可记为 $\frac{\partial f}{\partial x}$, z_x , $f_x(x,y)$, $f'_1(x,y)$ / $\frac{\partial f}{\partial y}$, z_y , $f_y(x,y)$, $f'_2(x,y)$

说明： ①偏导数的计算

求 $f_x(x, y)$时， 把$z=f(x, y)$中的 y 看做常数，
把$z=f(x, y)$看成关于 x 的一元函数，
利用一元函数的求导法则， 求其导数

求 $f_y(x, y)$时， 把$z=f(x, y)$中的 x 看做常数， 对y求导

求 $f_x(x_0, y_0)$ $\begin{cases} 先求\ f_x(x, y)，再代入(x_0, y_0) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \end{cases}$ 求 $f_y(x_0, y_0)$类似

例1 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$ 处的偏导数.

解法1 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

先求后代

$\therefore\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot1 + 3\cdot2 = 8,\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot1 + 2\cdot2 = 7$

说明：①偏导数的计算

例1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

先求后代

解法1 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

解法2 $f(x,2) = x^2 + 6x + 4$

先代后求

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\ 2)} = \frac{\mathrm{d}f(x,2)}{\mathrm{d}x} = \left.(2x+6)\right|_{x=1} = 8$$

$$f(1,y) = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\ 2)} = \frac{\mathrm{d}f(1,y)}{\mathrm{d}y} = \left.(3+2y)\right|_{y=2} = 7$$

说明：①偏导数的计算

例2 当 $f(x,y)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\ln(x^2+y^2)$ 求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0)}$

解 固定$y=0$，$f(x,0)=2\ln x$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\left.\frac{2}{x}\right|_{x=1}=2$$

②推广：三元函数$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处的偏导数为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

求法是将y,z暂时看作常量而对x求导

$f_y(x,y,z)$ 将x,z暂时看作常量而对y求导

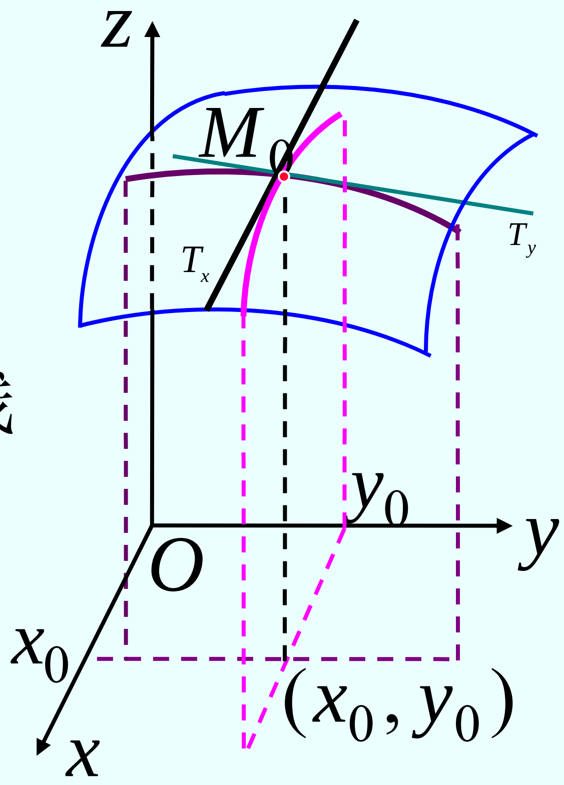
$f_z(x,y,z)$ 将x,y暂时看作常量而对z求导

③偏导数几何意义：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线

M_0T_x 对 x 轴的斜率.

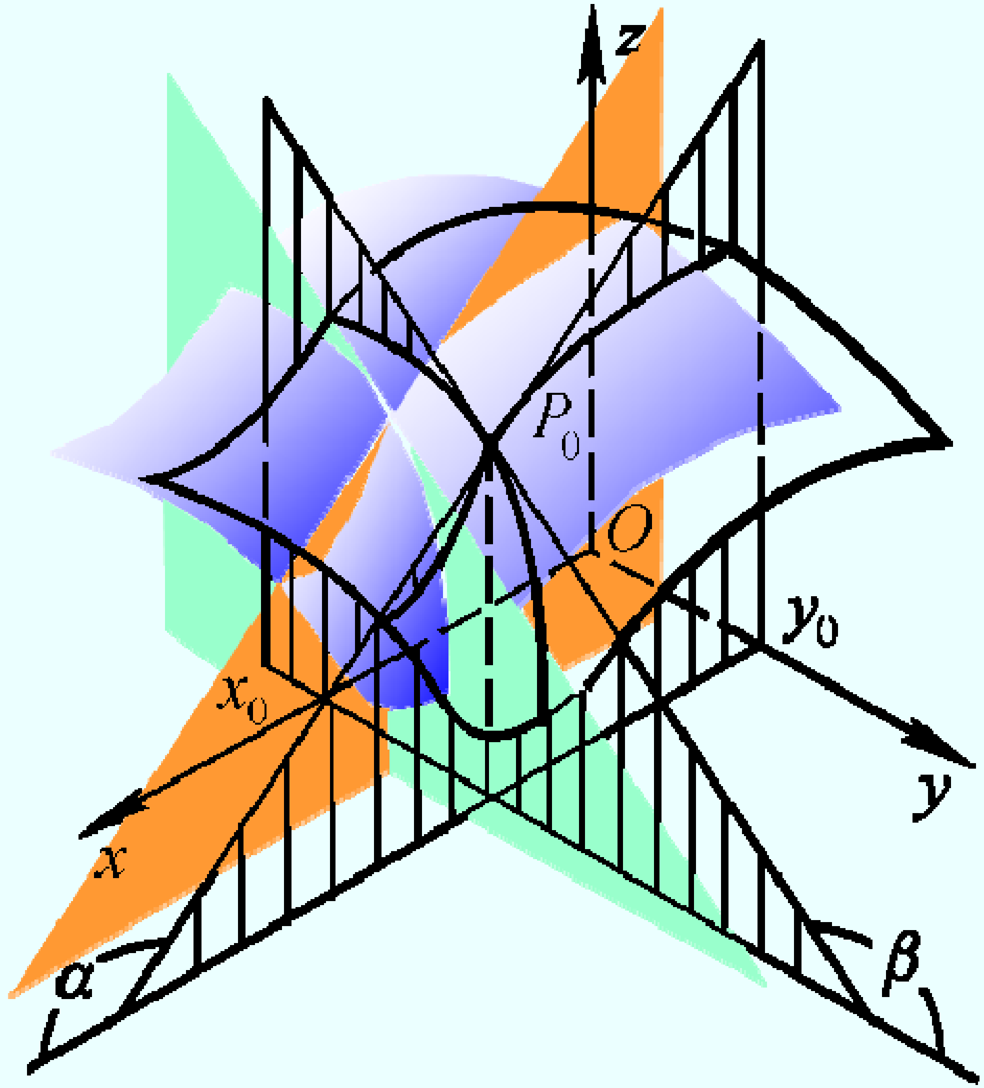


$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点M_0 处的切线

M_0T_y 对 y 轴的斜率.

切线与x轴夹角的正切值



z
P_0
O
y_0
x_0
y
x
α
β

④偏导数存在与连续的关系：

对于一元函数　可导一定连续

对于多元函数　各偏导数存在 $\not\rightleftarrows$ 连续

$f_x(x_0,y_0)$存在是指将y固定在y_0，$f(x,y_0)$在x_0处可导

一元函数$f(x,y_0)$在x_0处连续, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$　只能

保证$f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿$y=y_0$方向连续,其它方向无法保证

即各偏导数存在只能保证点P沿着平行于坐标轴的方向趋于P_0时，函数值$f(P)$趋于$f(P_0)$，但不能保证点P按任何方式趋于P_0时，函数值$f(P)$都趋于$f(P_0)$.

④偏导数存在与连续的关系：

对于多元函数 各偏导数存在 $\not\rightleftarrows$ 连续

例3二元函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点(0,0)处(C)

A 连续,偏导数存在

B 连续,偏导数不存在

C不连续,偏导数存在

D不连续,偏导数不存在

证：$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$

$\boxed{\text{偏导数存在}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

极限不存在，$\boxed{\text{不连续}}$

④偏导数存在与连续的关系:

对于多元函数　各偏导数存在 $\not\rightleftarrows$ 连续

例4 证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 (0,0)点连续,

但$f_x(0,0)$不存在

证:先证连续性

$$0\le\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=|x|\cdot\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|x| \quad 且 \lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 由于$f(0,0)=0$ 从而$f(x,y)$在(0,0)$\boxed{连续}$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}=1\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}=-1\end{cases}$$

故$\boxed{f_x(0,0)不存在}$

例5. 设 $z = x^y\ (x > 0,$ 且 $x \neq 1)$，求证 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$

证： $\because\ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore\ \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例6. 设 $z = (1+xy)^y$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1+xy)^{y-1}$

$$z = e^{y\ln(1+xy)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y\ln(1+xy)}[\ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy}]$$

二、高阶偏导数

高阶偏导数 设 $z=f(x,y)$在域 D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数,则称它们是$z=f(x,y)$的二阶偏导数 . 按求导顺序不同, 有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

混合偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数

例7 设 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \qquad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1;}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1,} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2$$

这不是偶然的，事实上有下述定理.

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域D内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关

更高阶混合偏导数在连续的条件下也与求导次序无关

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}\right)=\frac{\partial^{n+m+1} f}{\partial x^n \partial y^m \partial x}=\frac{\partial^{n+m+1} f}{\partial x^{n+1} \partial y^m}$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数, 而初等函数在其定义区域内是连续的, 故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序. （存在不相等的例子）

例如 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 求$f(x,y)$在（0,0）点的二阶混合偏导数

解 $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^5-4x^3y^2-y^4x}{(x^2+y^2)^2}$$

在$(0,0)$点

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

二者不等

例8 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

由函数关于自变量的对称性

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

易得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

例9 验证函数 $u=\frac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证: $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2r}=-\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由对称性 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$

易得 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0$$

多元函数的偏导数常常用于建立某些偏微分方程.

偏微分方程是描述自然现象、反映自然规律的一种重要手段. 例如方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(a是常数)称为波动方程，它可用来描述各类波的运动.

方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 称为拉普拉斯(Laplace)方程，满足这一方程的函数称为调和函数.

拉普拉斯方程是电磁学,天文学,流体力学领域经常遇到的一类重要数学问题,拉普拉斯被誉为法国的牛顿,与拉格朗日与勒让德称为法国3L.