第十二章　无穷级数

无穷级数
- 数项级数
  - §1 概念和性质
  - §2 如何判定
- 幂级数
  - §3 收敛半径,和函数
  - §4 函数展开成幂级数
- 傅里叶级数　§7,8函数展开成Fourier级数

在第四节中，我们讨论了将函数展开成幂级数的问题

本节，我们将讨论周期函数展开成三角级数的问题

第七八节

傅里叶级数

内容

一 傅里叶级数的有关概念定理(周期2π)

二 正弦级数和余弦级数的有关概念定理

三 周期为$2l$的周期函数的傅里叶级数

一、傅里叶级数的有关概念定理

正弦函数 $\xrightarrow{\text{描述}}$ 简单的周期运动

$$y = A\sin(\omega t+\varphi)$$

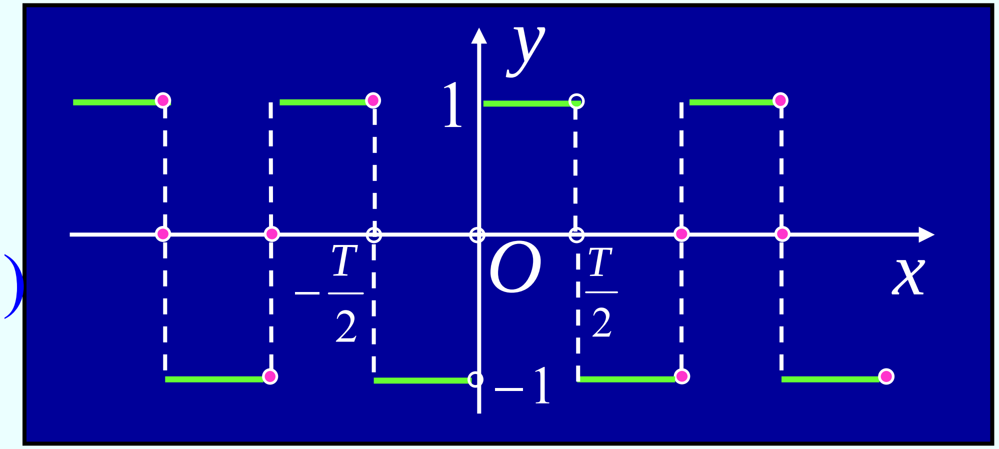
动点位置	振幅	角频率	时间	初相

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

非正弦周期函数 $\xrightarrow{\text{反映}}$ 复杂的周期运动

例：矩阵波

非正弦函数的周期函数能否用一系列以T为周期的正弦函数$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$叠加而成呢?



非正弦周期函数$y=f(t)$ 周期 $\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$ 其中$A_0, A_n, \omega, \varphi_n$都是常数

$$=\underbrace{A_0}_{\frac{a_0}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{A_n\sin\varphi_n}_{a_n}\cos\underbrace{n\omega t}_{x}+\underbrace{A_n\cos\varphi_n}_{b_n}\sin\underbrace{n\omega t}_{x}$$

令$\omega t=x$

$$f\left(\frac{x}{\omega}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$ 称为三角级数

特别地 $T=2\pi\longrightarrow\omega=1$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

下面考虑 ①给定周期为2π的周期函数如何展成三角级数

即a_n及b_n如何确定

②三角级数的收敛问题

1. 三角函数系

①函数的正交性

设$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上有定义,若$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$则称$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上是正交的

②三角函数系的正交性

$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$

在$[-\pi,\pi]$上正交,即任意两个不同函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分等于0

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

证: $\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0$

$(n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x]\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad(k\neq n)$$

②三角函数系的正交性

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

在$[-\pi, \pi]$上正交，即任意两个不同函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分等于0

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (k \neq n)$$

同理可证 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$$

但两个相同函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分不等于0

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}x = 2\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

2. a_n及b_n系数的确定 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

先求a_0

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x}+b_k\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x}\right)$$

$$=a_0\,\pi \qquad \therefore a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$$

再求a_n

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,\mathrm{d}x+b_k\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,\mathrm{d}x}\right]$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=a_n\,\pi \qquad \text{(利用正交性)}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ \ (n=1,2,\cdots)$$ n=0时恰为a_0

同理 $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$ 称为**傅里叶系数**

$f(x)$的**傅里叶级数(Fourier)**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$$


傅里叶，J.-B.-J.

周期为 2π 的函数$f(x)$,

如果它在一个周期上可积,则**可以作出$f(x)$的傅里叶级数**

但$f(x)$的傅里叶级数是否收敛？若收敛,是否收敛于$f(x)$?

$$f(x)\ \underset{\text{可以展成}}{\overset{\text{条件?}}{=\!=\!=}}\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

3. 级数的收敛性

定理 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$是周期为2π 的周期函数,并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=S(x)=\begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x \text{ 为间断点} \end{cases}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 **(证明略)**

说明: $f(x)$的傅里叶级数不一定收敛于$f(x)$,而收敛于和函数$S(x)$

狄利克雷, P.G.L.

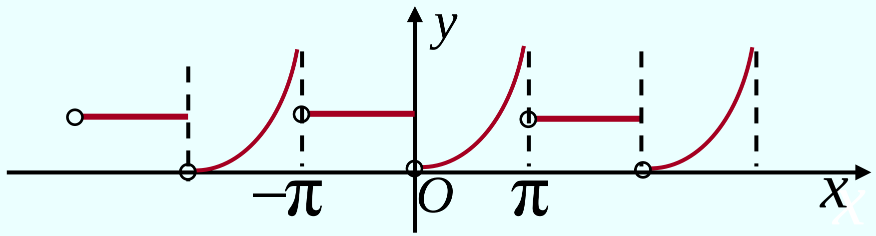
例1. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在 $(-\pi,\pi]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的Fourier级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\dfrac{2+\pi^3}{2}$

在 $x=0$ 处收敛于 1

在 $x=4\pi$ 处收敛于 1

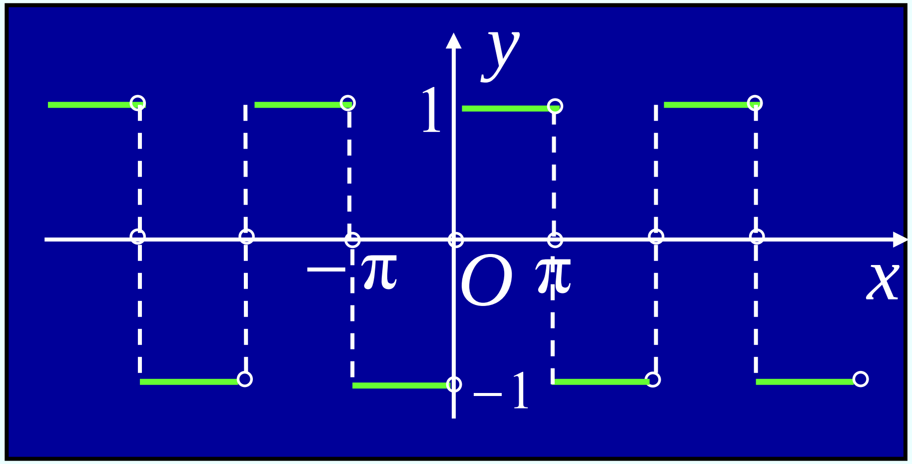


求 $S(\pi)+S(\frac{\pi}{3})=\dfrac{2+\pi^3}{2}+(\dfrac{\pi}{3})^3$

求和函数 $S(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x<0\\ 1 & x=0\\ x^3 & 0<x<\pi\\ \dfrac{2+\pi^3}{2} & x=\pi\end{cases}$

例2. 设 $f(x)$是周期为2π的周期函数, 它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解: 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots)$$

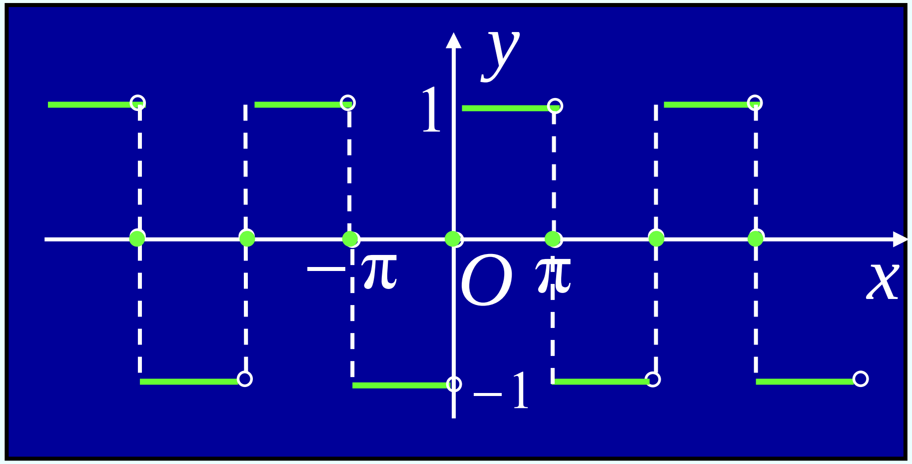
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[1 - \cos n\pi]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & 当\ n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & 当\ n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{4}{\pi}[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots]$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

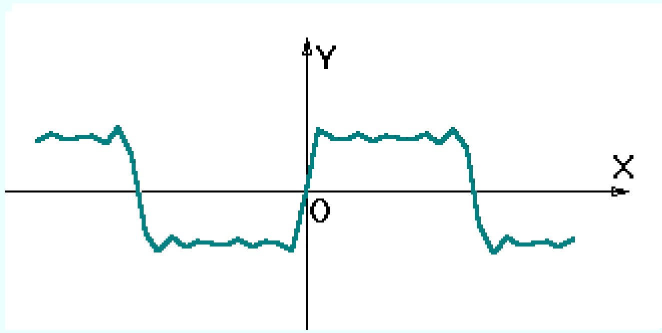
说明：1)由收敛定理，

当 $x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

时，级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2} = 0$

2)Fourier级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.



二、正弦级数和余弦级数

1. 周期为2π 的奇、偶函数$f(x)$的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

当$f(x)$为奇函数, $a_n=0, b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$

$f(x)$的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 正弦级数

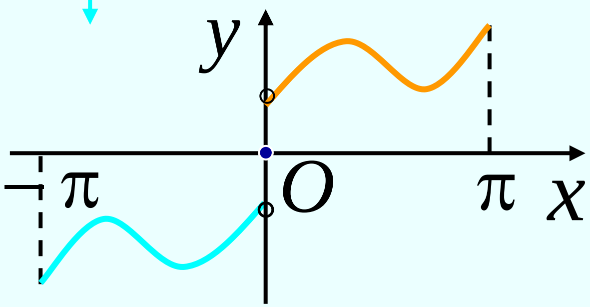
当$f(x)$为偶函数, $b_n=0,\ a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$

$f(x)$的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 余弦级数

2. 定义在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

$$f(x), x \in [0, \pi]$$

奇延拓

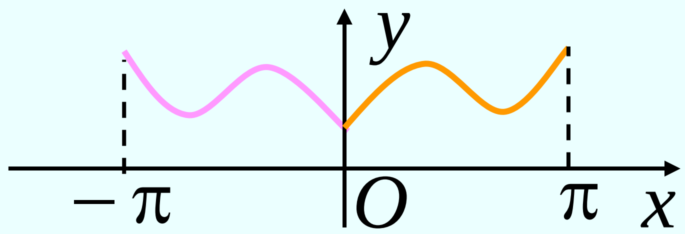


$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$在$[0, \pi]$上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

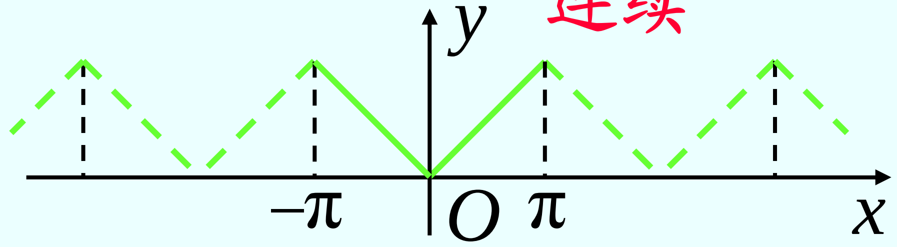
周期延拓 $F(x)$

$f(x)$在$[0, \pi]$上展成余弦级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ $\boxed{展成}$傅里叶级数.

解: 将 $f(x)$延拓成以

2π为周期的函数 $F(x)$, 则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\sin nx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1,3,\cdots\\ 0 & n=2,4,\cdots\end{cases}\qquad b_n=0$$

$f(0)=0$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$(-\pi\le x\le\pi)$

特殊级数的和

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}=\sigma_1$$

设$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}\qquad\therefore\ \sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24}$$

$$\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sigma_1-\sigma_2=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}$$

$f(0)=0$

$$\therefore\ f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$(-\pi\le x\le\pi)$

例4. 设 $f(x)=x^2\ (0\le x\le\pi)$,而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

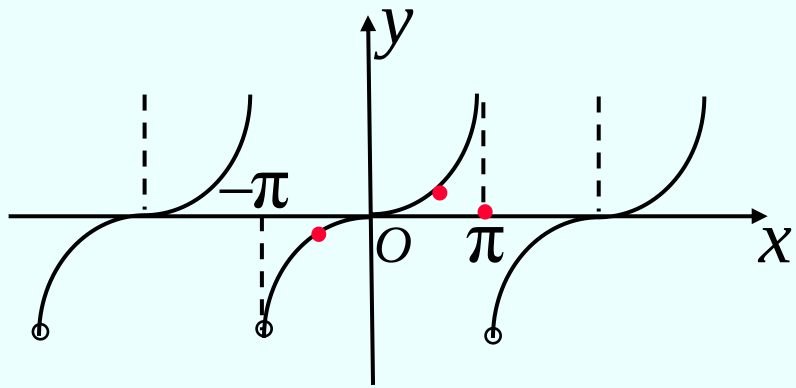
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)\quad \text{则}$$

$$S(\frac{1}{3})=\frac{1}{9}\qquad S(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{9}\qquad S(2\pi-\frac{1}{3})=-\frac{1}{9}\qquad S(\pi)=0$$

分析: $S(x)$是一个正弦级数

在$[0,\pi]$上为$f(x)$的Fourier级数

将$f(x)$进行奇延拓



$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le\pi \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

三、周期为2*l*的周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$

变量代换 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 的函数 $F(z)$

将$F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理. 设周期为$2l$ 的周期函数 $f(x)$满足收敛定理条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$ **(在 $f(x)$ 的连续点处)**

其中 $$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点

2) 在一个周期内只有有限个极值点

定理. 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$ **(在 $f(x)$ 的连续点处)**

其中 $$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

当$f(x)$为奇函数，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$ 其中 $b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$

当$f(x)$为偶函数，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$ 其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$

定理. 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的连续点处)

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

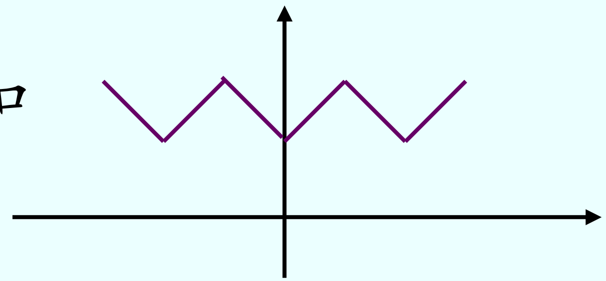
令$z=\dfrac{\pi x}{l}$

证明: 令$z=\dfrac{\pi x}{l}$，则 $x\in[-l,l]$ 变成 $z\in[-\pi,\pi]$，

令 $f(x)=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nz+b_n\sin nz\right)$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz\,\mathrm{d}z \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz\,\mathrm{d}z$$

例5. 将函数 $f(x)=2+|x|\,(-1\le x\le 1)$ 展成以2为周期的傅里叶级数,并用之求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和



解: 因为$f(x)$为偶函数 $b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(\cancel{2}+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\mathrm{d}\sin n\pi x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\sin n\pi x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2} & n=1,3,\cdots\\ 0 & n=2,4,\cdots\end{cases}$$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}[\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos5\pi x+\cdots)\quad(-1\le x\le 1)$$

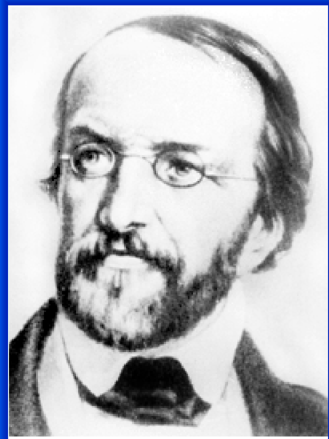
令$x=0$, $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ 同前面讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

傅里叶 (1768 – 1830)

法国数学家. 他的著作《热的解析理论》(1822) 是数学史上一部经典性文献, 书中系统的运用了三角级数和三角积分, 他的学生将它们命名为傅里叶级数和傅里叶积分. 他深信数学是解决实际问题最卓越的工具. 以后以傅里叶著作为基础发展起来的傅里叶分析对近代数学以及物理和工程技术的发展都产生了深远的影响.

傅里叶, J. -B. -J.

狄利克雷 (18 05 – 1859)



狄利克雷，P.G.L.

德国数学家. 对数论, 数学分析和数学物理有突出的贡献, 是解析数论的创始人之一, 他是最早提倡严格化方法的数学家. 1829年他得到了给定函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛的第一个充分条件; 证明了改变绝对收敛级数中项的顺序不影响级数的和, 并举例说明条件收敛级数不具有这样的性质. 他的主要论文都收在《狄利克雷论文集》(1889—1897)中.