# 第二章 导数与微分

- §1 导数概念
- §2 函数的求导法则
- §3 高阶导数
- §4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
- §5 函数的微分

微分是高数中另一个基本概念，

与导数密切相关，又有本质差别，

导数反映函数在某一点变化快慢的程度

而微分则表述函数在某点的增量的近似程度

第二章

# 第五节

# 函数的微分


内容

一、微分的定义

二、微分的几何意义

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

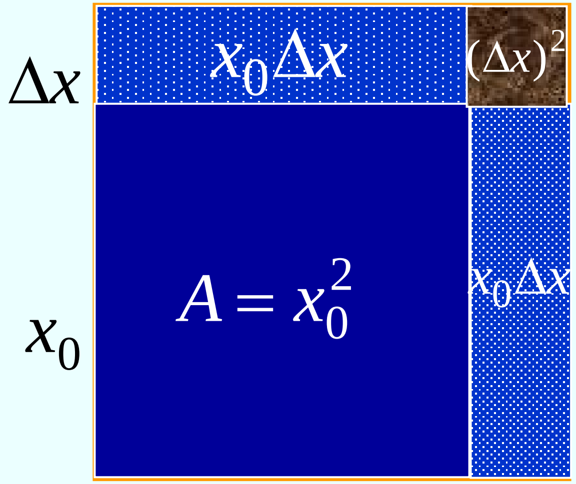
## 一、微分的概念

**引例：** 一块正方形金属薄片受温度变化的影响,其边长由$x_0$变到$x_0+\Delta x$, 问此薄片面积改变了多少?

设薄片边长为 $x_0$, 面积为 $A$, 则$A=x_0^2$, 当 $x$ 在 $x_0$ 取得增量$\Delta x$ 时,面积的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^{\;2}$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\triangle x\text{ 的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{ 时为高阶无穷小}}$$




故 $\Delta A\approx\underline{2x_0\Delta x}$

称为函数在 $x_0$ 的微分

1定义：若函数$y = f(x)$在点$x_0$的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \overset{?}{A}\Delta x + o(\Delta x)$$

( $A$ 为不依赖于△$x$ 的常数)

则称函数 $y = f(x)$在点 $x_0$ **可微**, 而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$在点 $x_0$相应于自变量增量 $\Delta x$ 的**微分**, 记作 $\mathrm{d}y = A\Delta x$

**两个问题**：① 若$f(x)$可微, 如何确定$A$?

② $f(x)$满足什么条件,就一定可微?

## 2可导与可微的关系

**可微$\Rightarrow$可导**

已知$y=f(x)$在点 $x_0$ 可微,则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x})=A=f'(x_0)$$

故 $y=f(x)$在点 $x_0$ 可导, 且 $f'(x_0)=A$

**重要结论** $f(x)$在点$x_0$可微 $\Rightarrow f(x)$在点$x_0$可导

且微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

## 2可导与可微的关系

**可导 $\Rightarrow$ 可微**

设$y = f(x)$在$x_0$可导，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad (\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0)$$

故 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

不依赖于$\Delta x$　$\Delta x$的高阶无穷小

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = 0$$

$\therefore y = f(x)$在$x_0$可微

---

**重要结论** $f(x)$在点$x_0$可微$\Leftrightarrow f(x)$在点$x_0$可导

且微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$

例 求函数$y=x^2$当$x=1$, $\Delta x=0.01$时的微分

解 $\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=(x^2)'\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=0.02$

## 3函数的微分

函数$y=f(x)$在任意$x$可微,称为函数的微分,记作$\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}f(x)$

即$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$

例 $\mathrm{d}x^2=2x\Delta x$

$\mathrm{d}x=\Delta x$

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

导数看成函数微分与自变量微分之商,故导数又称为**微商**

---

**重要结论** $f(x)$在点$x_0$可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在点$x_0$可导

且微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

## 3函数的微分

函数$y=f(x)$在任意$x$可微,称为函数的微分,记作$dy$或$df(x)$

即$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$

例 $\mathrm{d}x^2 = 2x\Delta x$

$\mathrm{d}x = \Delta x$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

导数看成函数微分与自变量微分之商,故导数又称为**微商**

---

例 设函数$y=f(x)$由方程$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t^2 \end{cases}$确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

原先 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1} = 2t$

现在 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}(1+t)} = \dfrac{2t\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 2t$

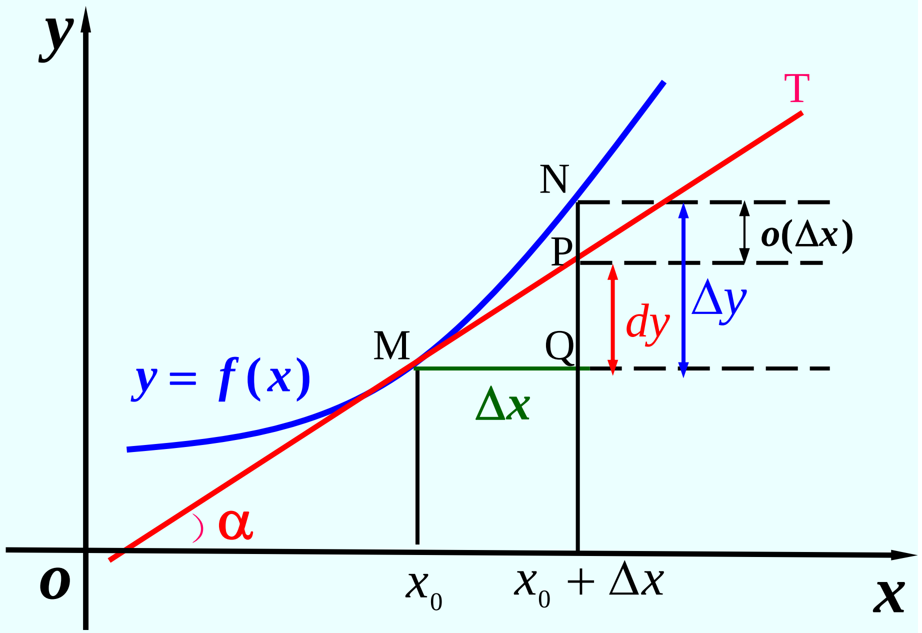
## 二、微分的几何意义

如图所示，设 $M(x_0, y_0)$ , $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的两点，且函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处可微，则曲线在 $M$ 处有切线，设为$MT$.

于是有 $MQ=\Delta x, QN=\Delta y$ .

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0),$$

即 $\mathrm{d}y=QP$ .




微分**是$y=f(x)$在$x$处切线,纵坐标当横坐标增加$\Delta x$时的增量.**

当$|\Delta x|$很小时,$|\Delta y-\mathrm{d}y|$比$|\Delta x|$更小

## 三、微分的运算法则

函数的微分的表达式 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

求法: 计算函数的导数,乘以自变量的微分.

### 1. 基本初等函数的微分公式

$\mathrm{d}(C) = 0$ $\quad$ $\mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$ $\quad$ $\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$ $\quad$ $\mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\sec x) = \sec x\tan x\mathrm{d}x$ $\quad$ $\mathrm{d}(\csc x) = -\csc x\cot x\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(e^x) = e^x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\operatorname{arc\,cot} x) = -\frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

## 2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$= (u'v + uv')\mathrm{d}x$$

## 3. 复合函数的微分法则

设函数 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 都是可导函数，则

$$y' = [f(g(x))]' = f'(u) \cdot g'(x),$$

于是有微分公式

$$\mathrm{d}y = f'(u) \cdot \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = \underline{f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}.$$

$$\mathrm{d}y = \underline{f'(u)\mathrm{d}u}.$$

上式说明无论是$u$自变量还是中间变量其微分形式不变，这一性质称为**微分形式不变性**.

## 典型题 ①具体函数求微分

例 设 $y=\ln(1+3^{-x})$, 求$\mathrm{d}y$.

**解法1：** 利用$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$, $\quad y'=\dfrac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}$

$$\therefore \mathrm{d}y=\frac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}\mathrm{d}x$$

**解法2：** 利用微分形式不变性

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\ln(1+3^{-x})=\frac{1}{1+3^{-x}}\mathrm{d}(1+3^{-x})$$

$$=\frac{\ln 3}{1+3^{-x}}\cdot 3^{-x}\mathrm{d}(-x)=\frac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}\mathrm{d}x$$

## ②抽象函数求微分

**例** 设 $y = f[\cot(x^2)]$,其中 $f$ 可导求 $\mathrm{d}y$

**解** 利用微分形式不变性

$$\mathrm{d}y = f'[\cot(x^2)]\mathrm{d}[\cot(x^2)]$$

$$= f'[\cot(x^2)]\cdot[-\csc^2(x^2)]\mathrm{d}(x^2)$$

$$= f'[\cot(x^2)]\cdot[-\csc^2(x^2)]\cdot 2x\mathrm{d}x$$

## ③利用微分形式不变性求导数

例 $y = f[f^2(x^2)]$, (其中$f$可导) 利用微分形式不变性求导数

解 $\mathrm{d}y = f'[f^2(x^2)]\mathrm{d}(f^2(x^2))$

$= f'[f^2(x^2)]\cdot 2f(x^2)\mathrm{d}f(x^2)$

$= f'[f^2(x^2)]\cdot 2f(x^2)\cdot f'(x^2)\mathrm{d}x^2$

$= f'[f^2(x^2)]\cdot 2f(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'[f^2(x^2)]\cdot 2f(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot 2x$$

或 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'[f^2(x^2)]\cdot 2f(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot 2x$$

## ④对隐函数求微分

**例** 计算由方程 $e^{x+y}+xy=0$ 确定的函数$y=y(x)$的微分

**解法1：** 利用$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x,$

两边对$x$求导 $e^{x+y}(1+y')+y+xy'=0$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{e^{x+y}+y}{e^{x+y}+x} \qquad \therefore \mathrm{d}y=-\frac{e^{x+y}+y}{e^{x+y}+x}\mathrm{d}x$$

**解法2：** $\mathrm{d}(e^{x+y})+\mathrm{d}(xy)=0$

$$e^{x+y}\mathrm{d}(x+y)+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$$

$$e^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$$

$$\therefore \mathrm{d}y=-\frac{e^{x+y}+y}{e^{x+y}+x}\mathrm{d}x$$

例 在下列等式左端的括号中填入适当的函数,

使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\frac{1}{2}e^{2x}) = e^{2x}\mathrm{d}x$

(2) $\mathrm{d}(\ \frac{1}{\omega}\sin\omega t\ ) = \cos\omega t\mathrm{d}t$