第十一章

第六节

高斯公式

内容

一、高斯公式

二、典型题

三、六类积分总结

一、高斯公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

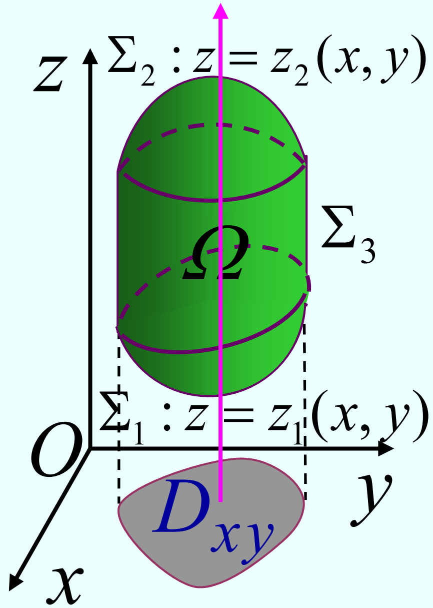
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(Gauss 公式)

证明: 先证 $\displaystyle\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



一、高斯公式

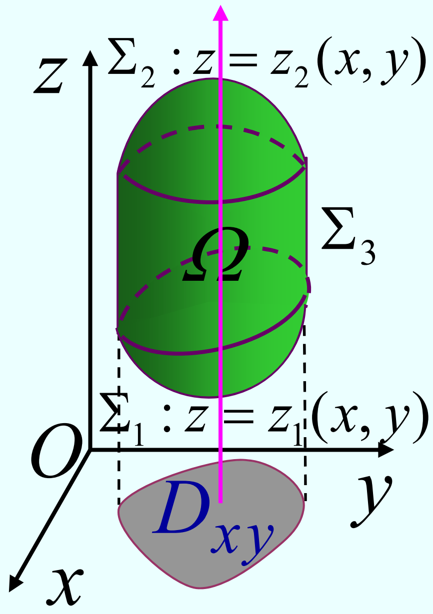
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(外侧)

证明: 先证 $\boxed{\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ 同理其他可得

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\{R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\left.\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\iint_{\Sigma_3}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad \oiint_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}
\end{aligned}\right\}\Bigg\Vert$$



一、高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

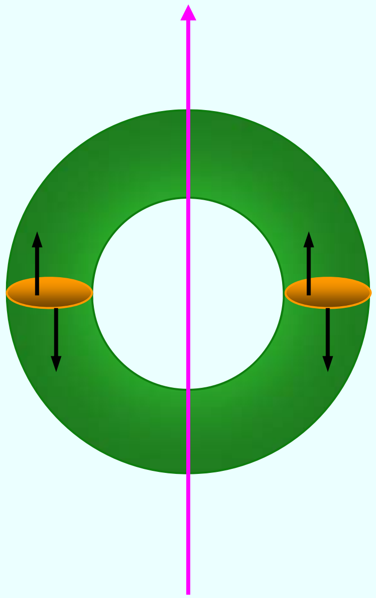
(外侧)

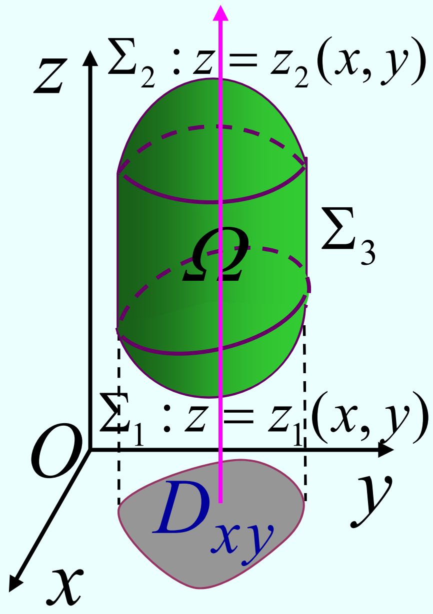
若作箭头平行z轴，交点不只两个

可以引进几张辅助曲面把Ω分为有限个闭区域

由于沿辅助面相反两侧的两个曲面积分值相等，符号相反

相加时正好抵消,因此公式仍成立





一、高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(外侧)

注 i) Σ封闭曲面,取外侧;若Σ不是封闭曲面,可引入辅助曲面Σ_1使$\Sigma+\Sigma_1$成为封闭外侧或内侧,再采用高斯公式;

辅助面Σ_1通常选取平行坐标面的平面,

例如取z=常数,则$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$,只需计算$\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(直接法)

ii)应用高斯公式时,要注意$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$内**要有连续的一阶偏导数**,否则高斯公式不能用

iii)对坐标的曲面积分在没变成三重积分之前能将**积分域方程代入被积函数**, 变成三重积分后,就不能代入

二、典型题

①三个条件都满足,直接用高斯公式

(**封闭,外侧,偏导连续**)

步骤:

分清P,Q,R → 求$\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$ →

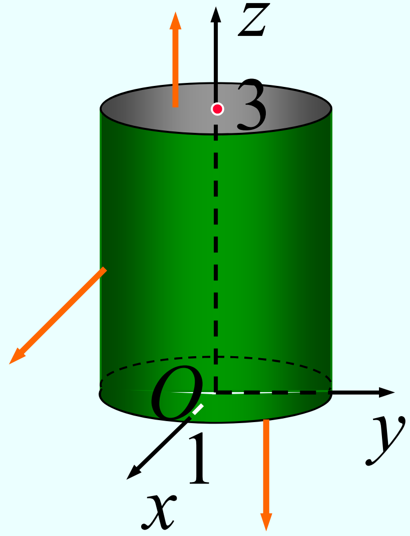
$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

例1:求 $\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$外侧

解 原式$=\iiint_{\Omega}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$=0$

例2. 计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$及平面$z=0$, $z=3$所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解: $P=(y-z)x,\ \ Q=0,\ \ R=x-y$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=0$$

利用高斯公式,

对称性

$$原式=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

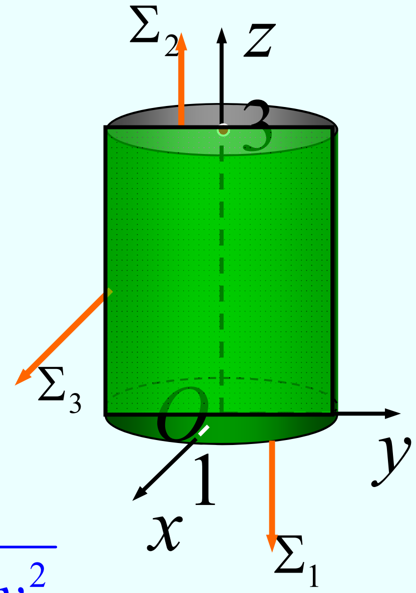
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^3-z\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

思考: 若Σ改为内侧, 结果有何变化?

若Σ为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例2. 计算 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$及平面$z=0$, $z=3$所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解法二: $\Sigma_1: z=0,\ \Sigma_2: z=3,\ \Sigma_3: x^2+y^2=1$



$$\iint_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\cancel{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=-\iint_{x^2+y^2\le 1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

对称性

$$\iint_{\Sigma_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\cancel{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

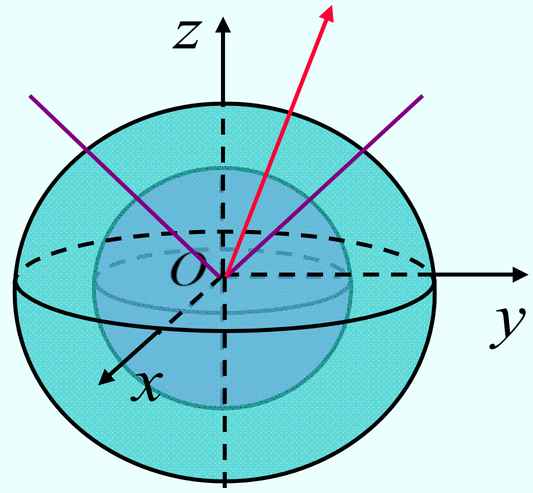
$$\iint_{\Sigma_3}(x-y)\cancel{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad x^2+y^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}$$

$$=+\iint_{D_{yz}}(y-z)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[-\iint_{D_{yz}}(y-z)(-\sqrt{1-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$$

$$=2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_0^3(y-z)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

例3. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\underbrace{x^3}_{P}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\underbrace{[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3]}_{Q}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\underbrace{[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3]}_{R}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中$f(u)$一阶连续可导, Σ为$z>0$的锥面$y^2+x^2-z^2=0$与球面 $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体表面的外侧



解 $$I=\iiint\limits_{\Omega}[3x^2+\cancel{\frac{1}{z}f'(\frac{y}{z})\cdot\frac{1}{z}}+3y^2+\cancel{\frac{1}{y}f'(\frac{y}{z})}(-\frac{y}{z^2})+3z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{93\pi}{5}(2-\sqrt{2})$$

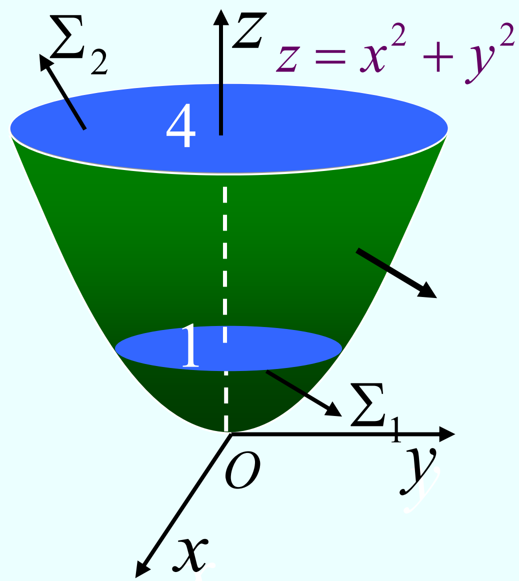
二、典型题

②P,Q,R一阶偏导连续, Σ不封闭, 补Σ', 使$\Sigma+\Sigma'$封闭

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma'}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v-\iint\limits_{\Sigma'}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例4 $I=\iint\limits_{\Sigma}\underbrace{x^3}_{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\underbrace{y^3}_{Q}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\underbrace{z^3}_{R}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ Σ: 由$z=y^2$绕z轴旋转一周所成旋转曲面在$z=1$, $z=4$外侧



解 补辅助面 $\Sigma_1: z=1$下侧, $\Sigma_2: z=4$上侧

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$$

例4 $I=\iint\limits_{\Sigma}\underset{P}{x^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\underset{Q}{y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\underset{R}{z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ Σ:由$z=y^2$绕z轴旋转一周所成旋转曲面在$z=1,z=4$外侧

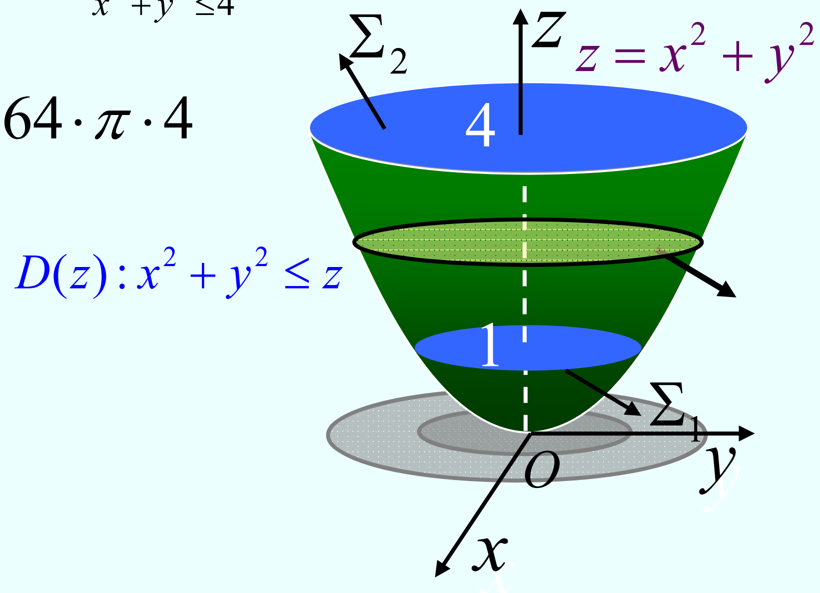
解 补辅助面 $\Sigma_1: z=1$下侧, $\Sigma_2: z=4$上侧

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}\cancel{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z}+\cancel{y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z}+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_2}\cancel{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z}+\cancel{y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z}+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}v-\Big(-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}1^3\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}4^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}(\rho^2+z^2)\,\rho\mathrm{d}\rho+\pi-64\cdot\pi\cdot 4$$

$$=-\frac{129}{4}\pi$$



注:若在旋转曲面内侧

补$\Sigma_1: z=1$上侧, $\Sigma_2: z=4$下侧

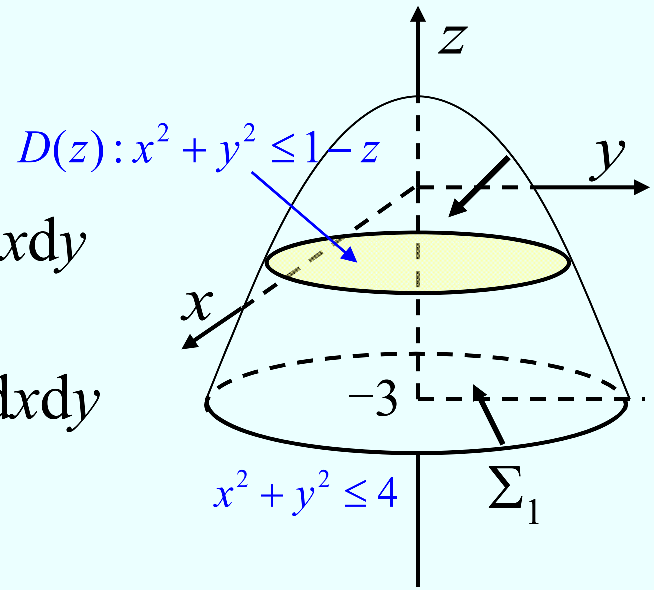
高斯公式时加负号

例5 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^4)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+z^4)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad P \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad Q \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad R$

其中Σ为有向曲面$z=1-x^2-y^2$ $(-3\le z\le 1)$ 其法向量与z轴正向夹角为钝角

解 补辅助面 $\Sigma_1: z=-3$上侧,



$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2+y^4)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+z^4)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_1}(x^2+\cancel{y^4})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+\cancel{z^4})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}(\cancel{2x}+\cancel{2y}+1)\mathrm{d}v-\left(+\iint_{x^2+y^2\le 4}(\cancel{x}-3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

对称性

$$=-\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v+3\iint_{x^2+y^2\le 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-3}^{1}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}\rho\mathrm{d}\rho+3\cdot\pi\cdot 2^2=4\pi$$

二、典型题

③P,Q,R一阶偏导不连续

i)代入法 积分域方程的形式与被积函数分母形式一样

将积分域方程代入到被积函数中,消去导致不连续的项,然后考虑用高斯公式,

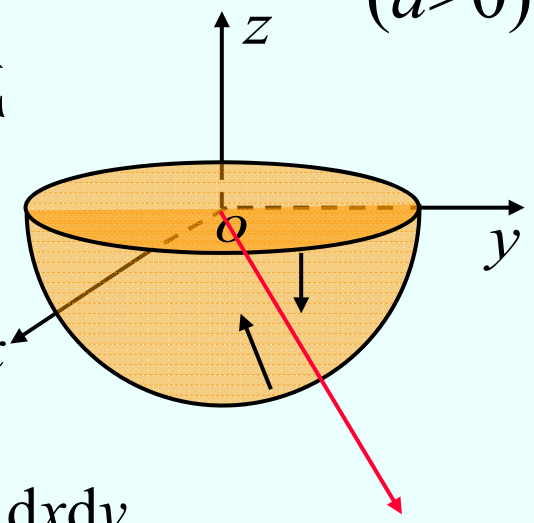
例6 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$外侧

解:
$$I=\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,\mathrm{d}v$$
$$=3\cdot\frac{4}{3}\pi=4\pi$$

例7 求 $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧

$(a>0)$

解： 先将被积函数变形,再利用高斯公式



$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{(z+a)^2}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

补充曲面 $\Sigma_1: z=0$ 下侧,

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{(z+a)^2}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}\cancel{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}+\frac{(z+a)^2}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}\left(1+\frac{2(z+a)}{a}\right)\mathrm{d}v-\left(-\iint_{x^2+y^2\le a^2} a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$$

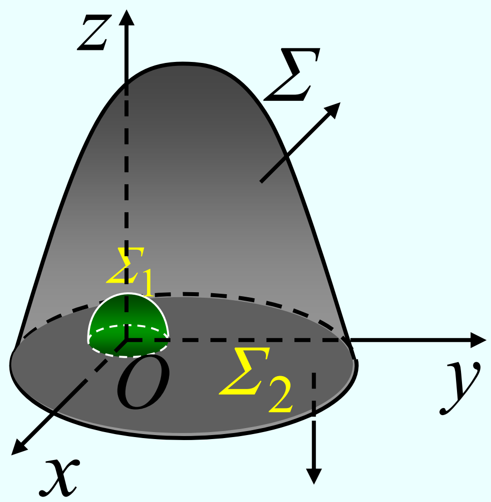
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(3+\frac{2}{a}\cdot r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+a\cdot\pi a^2=-\frac{\pi}{2}a^3$$

或 $$=-\int_{-a}^{0}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\left(3+\frac{2z}{a}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho+a\cdot\pi a^2$$

ii)不能代入,也不能用高斯公式

例8 设Σ是曲面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\ (z\ge 0)$,取上侧,

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$



解: 取足够小的正数 ε, 作曲面

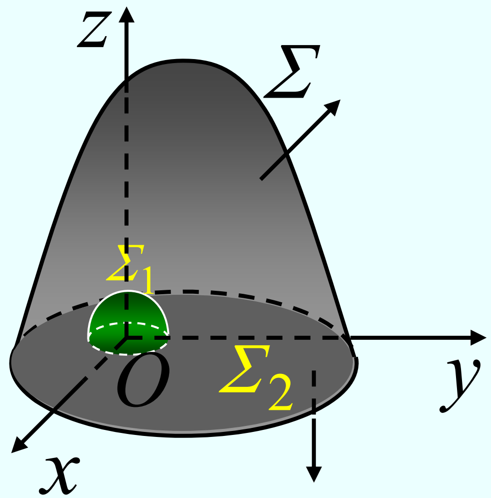
$\Sigma_1: z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ 取下侧使其包在Σ内,

Σ_2为 xOy平面上夹于Σ与Σ_1之间的部分, 且取下侧 ,

则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}v-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

解: 取足够小的正数 ε, 作曲面



$\Sigma_1: z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ **取下侧**使其包在Σ内,

Σ_2为 xOy平面上夹于Σ与Σ_1

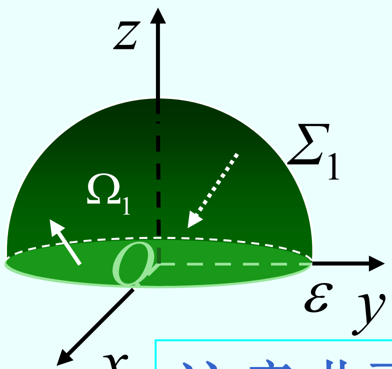
之间的部分, 且取下侧 ,

则 $I=\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}v-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

第二项添加辅助面, 再用高斯公式,

由于辅助面部分仍为0(**垂直性,z=0**)



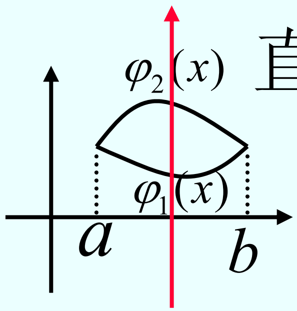
$$I=-\frac{1}{\varepsilon^3}\Big(-\iiint\limits_{\Omega_1}3\mathrm{d}v\Big)=-\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot(-3)\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\cdot\frac{1}{2}=2\pi$$

注意曲面的方向！

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ **对称性** $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$

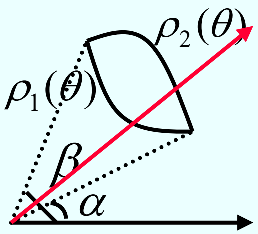
$z=f(x,y)$为顶,D为底的曲顶柱体体积或平面薄片质量

方法：化二次积分



直角坐标/极坐标

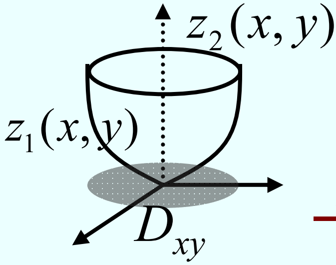
$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$



$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

空间物体质量

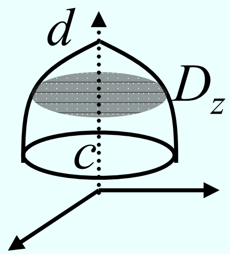
①投影法：先一后二



$$\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

极坐标 ⇒ 柱面坐标

②截面法：先二后一



$$\int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

③球面坐标 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

φ:体与z轴正向夹角范围

θ:投影域内与x轴夹角范围

r:过原点射线经过的曲面

$$\int \mathrm{d}\varphi\int \mathrm{d}\theta\int r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$

对称性+积分曲线/面方程可代入被积函数

$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$

曲棍质量→化定积分

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

大

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

小

$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$

$$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta \\ z=w(t) \end{cases}$$

大

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),w(t)) \cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[w'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

小

曲面质量→化二重积分

通常 $\Sigma: z=z(x,y)$

口诀: 一投二代三替换
化成二重积分

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \cdot\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

特别地 曲面$z=z(x,y)$的面积

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注：不构成区域的如柱面
向其他坐标面投影

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

变力沿曲线所作的功

积分曲线方程可代入被积函数

①化定积分

i) $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad t:\overset{起}{\alpha}\to\overset{终}{\beta}$

$$=\int_{\alpha\,(起)}^{\beta\,(终)}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t$$

ii) 当 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与路径无关,

可取折线路径化定积分;

当与路径有关,曲线参数方程难求或复杂时

②化二重积分(格林公式)

i)不封闭 顺L补线L'使之封闭

通常$L'//x$轴或y轴

$$\int_L=\oint_{L+L'}-\int_{L'}$$

$$=\pm\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma-\int_{起}^{终}$$

正向+
负向−

在D内连续

利用垂直性化定积分

ii)封闭 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\pm\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$

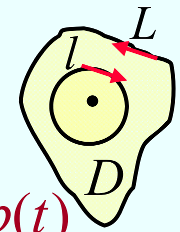
通常$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$不连续,**挖洞法**

$$\oint_L=\oint_{L+l}-\oint_l$$

$$=\underbrace{\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma}_{=0}-\oint_l$$

$l:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$

化定积分



$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

流向曲面一侧的流量

①直接法 → 二重积分

口诀: 一投二代三替换
化成二重积分

$$\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$\Sigma : x = x(y,z)$

$$+(\pm\iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x)$$

$\Sigma : y = y(x,z)$

$$+(\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$\Sigma : z = z(x,y)$

积分曲面方程可代入被积函数

②点矢法 → 二重积分

前提: Σ在xoy面上有投影域

$$\pm\iint_{D_{xy}} [P(x,y,z(x,y)),Q,R]\bullet(-z_x,-z_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\Sigma : z = z(x,y)$

③高斯公式 → 三重积分

补平面Σ'使之成为封闭外侧或内侧

通常Σ'//坐标面

$$\iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma'} - \iint_{\Sigma'}$$

$$= \pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma'}$$

外+
内−

先垂直性再直接法
化二重积分

高斯(1777 – 1855)


高斯，C.F.

德国数学家、天文学家和物理学家, 是与阿基米德, 牛顿并列的伟大数学家, 他的数学成就遍及各个领域，在数论、代数、非欧几何、 微分几何、 超几何级数、复变函数及椭圆函数论等方面均有一系列开创性的贡献, 他还十分重视数学的应用, 在对天文学、大地测量学和磁学的研究中发明和发展了最小二乘法、曲面论和位势论等. 他在学术上十分谨慎, 恪守这样的原则:“问题在思想上没有弄通之前决不动笔”.