第五章

定积分

§1　定积分的概念与性质

§2　微积分基本公式

§3　定积分的换元法和分部积分法

§4　反常积分

第五章

第四节

反常积分

内容

一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分

一、无穷限的反常积分

定义1. 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$连续,$t>a$,若

收敛
发散

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

极限存在
极限不存在

称此极限为$f(x)$在$[a,+\infty)$上的反常积分

类似地，设 $f(x)$在$(-\infty,b]$连续,若

收敛
发散

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

极限存在
极限不存在

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,定义

收敛
发散

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

都存在
有一个不存在

(c 为任意取定的常数)

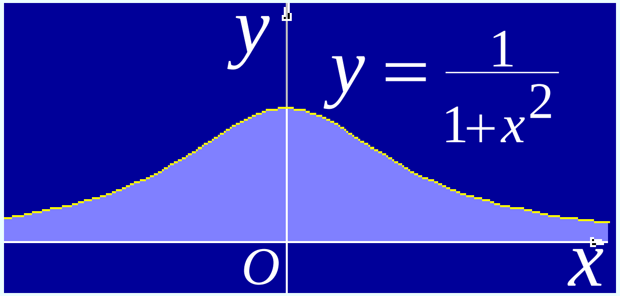
说明: (i)设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,为方便,引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)\,;\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

收敛	$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big\vert_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)$	极限存在
发散	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big\vert_{-\infty}^{b} = F(b)-F(-\infty)$	极限不存在
	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big\vert_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty)-F(-\infty)$	有一个不存在

(ii)在讨论反常积分时，有关积分法诸如换元法和分部积分法都是适用的

例1. 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$



解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

例2. 计算反常积分 $\int_{0}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\ (p>0).$

解: 原式 $= -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}e^{-pt} = -\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{p}\cancel{\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}}} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p^2}\left(\cancel{\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}} - 1\right) = \frac{1}{p^2}$$

例3. 证明反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；$p\le 1$ 时发散.

重要结论

证 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\big[\ln|x|\big]_a^{+\infty}=+\infty \quad 发散$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1 \quad 发散\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \quad 收敛\end{cases}$$

>0

<0

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}=0-\frac{a^{1-p}}{1-p}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 收敛, 其值为 $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$; 当 $p\le 1$ 时, 发散.

例4. $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x$

与自然数n有关的定积分常用分部积分法

解: 原式$=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}e^{-x}$

$$=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}+nI_{n-1}$$

$$=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n!\,I_0$$

$$I_0=\int_0^{+\infty}x^0e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1 \qquad \therefore I_n=n!$$

例5. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

反常积分如定积分一样可以进行换元

解: 令 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int_{+\infty}^{0} \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{1}{t}(\frac{1}{t}+1)^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t)^3}}$$

$$=\left[\frac{1}{1-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} = \left[-2(1+t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2$$

二、无界函数的反常积分（瑕积分）

定义2 若$f(x)$在点a附近无界,称a是$f(x)$的瑕点($\text{即}\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$)

定义3 设$f(x)$在$(a,\mathrm{b}]$上连续,a是瑕点, 取$t>a$,若

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛 ← → 极限存在

发散 ← → 极限不存在

例. 判定 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$是否属于反常积分

解: 不属于，$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$在$[0,1]$上有界

类似地 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

二、无界函数的反常积分（瑕积分）

定义2 若$f(x)$在点a附近无界,称a是$f(x)$的瑕点$\left(\text{即}\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\right)$

定义3 设$f(x)$在$(a,\mathrm{b}]$上连续,a是瑕点, 取$t>a$,若

收敛 ← → 极限存在

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

发散 ← → 极限不存在

类似地 , 设$f(x)$在$[a,b)$连续, b 是瑕点,取$t<b$,若

收敛 ← → 极限存在

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

发散 ← → 极限不存在

若 $f(x)$在$[a,b]$上除点$c\,(a<c<b)$外连续, c 是瑕点

收敛 ← → 都存在

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

发散 ← → 有一个不存在

说明:(i)设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,

收敛

发散

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

极限存在

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a)$$

极限不存在

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= F(x)\Big|_a^{c^-} + F(x)\Big|_{c^+}^{b}$$

$$= F(c^-) - F(a) + F(b) - F(c^+)$$

有一个不存在

(ii)定积分的换元法和分部积分法同样适用

(iii)由于瑕积分的记号与定积分相同,所以更具“欺骗性”

计算 $\int_a^b f(x)dx$ 时,首先要判定是瑕积分还是定积分,再计算

例1. 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1}=\infty$

所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例2. 计算反常积分 $\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解: 显然瑕点为 a , 所以

$$\text{原式}=\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_{0}^{a^-}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

例3. 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geq 1$ 时发散 .

重要结论

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b}$

$$= \ln|b-a| - \lim_{x\to a^+} \ln|x-a| = +\infty \quad \text{发散}$$

当 $q\neq 1$ 时

<0

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} +\infty, & q>1 \quad \text{发散} \\ \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \quad \text{收敛} \end{cases}$$

>0

$$\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q} - \lim_{x\to a^+} \frac{(x-a)^{1-q}}{1-q} \quad 0$$

所以当 $q<1$ 时, 收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$; $q\geq 1$ 时, 发散 .