连续点的极限等于函数值

讨论函数的连续性（连续范围）是有必要的

因为取自连续范围内的点的极限=定义值

连续函数是高等数学讨论的最主要的一类函数。

第九节

连续函数的运算与初等函数的连续性

内容

一、连续函数的和差积商的连续性

二、 反函数与复合函数的连续性

三、 初等函数的连续性

四、 典型题

一、连续函数的和差积商的连续性

定理1. 若$f(x)$,$g(x)$在x_0点连续，那么 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$在x_0点连续,当$g(x_0)\neq 0$时$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在x_0点连续

例 $\sin x$, $\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续

$$\xrightarrow[\text{连续性定义}]{\text{极限四则运算法则}} \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}, \sec x=\frac{1}{\cos x}, \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

在其定义域内也都是连续

二、反函数与复合函数的连续性

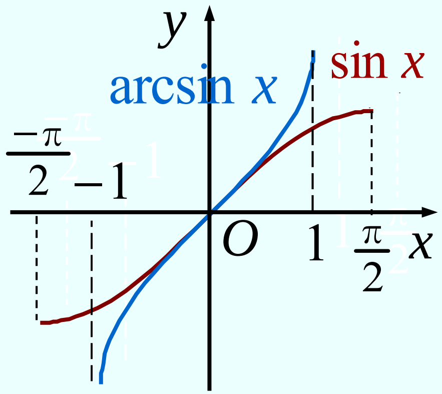
定理2. 若函数$y=f(x)$在区间I_x单调增加(减少)且连续,那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$上单调增加(减少)且连续

例 $y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加连续

所以 $y=\arcsin x$在$[-1,1]$上单调增加连续

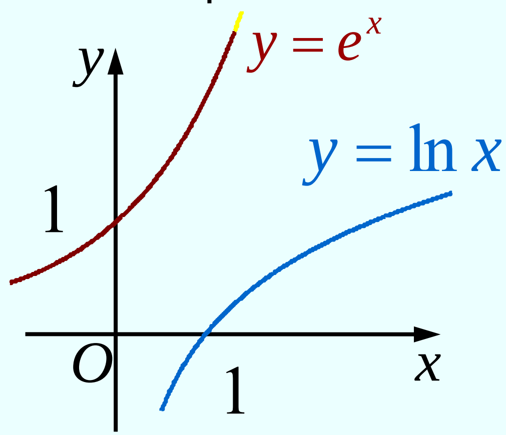
类似地 $y=\arccos x, \arctan x, arc\cot x$

在各自定义域内都是连续的



例 $y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续单调递增,

其反函数$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上也连续单调递增.



二、反函数与复合函数的连续性

定理3. 设函数$y=f(g(x))$是由$y=f(u)$，$u=g(x)$复合而成的，$\overset{\circ}{U}(x_0)\in D_{f\circ g}$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, y=f(u)$在$u=u_0$连续，则

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x))} \underset{\text{变量替换}}{=} \lim_{u\to u_0} f(u) \underset{\text{连续}}{=} f(u_0) = \boxed{f(\lim_{x\to x_0} g(x))}$$

说明 对于连续函数,极限符号与函数符号可以交换次序

例 $$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{\frac{1}{\ln a}x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$\therefore \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a$$

$$\therefore a^x - 1 \sim x\ln a$$

二、反函数与复合函数的连续性

定理4. 若$u=g(x)$在x_0连续,$u_0=g(\boldsymbol{x}_0)$,$f(u)$在u_0连续，则$f(g(x))$在x_0点处连续，

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) \overset{\text{定理3}}{=} f[\lim_{x\to x_0} g(x)] = f[g(x_0)]$$

例 讨论$y=\sin\dfrac{1}{x}$的连续性

解 $y=\sin u, u=\dfrac{1}{x}$复合，当$-\infty<u<+\infty$连续，

$\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$连续，从而$\sin\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$连续

说明 对于复合函数求极限,能代数就代数,不能代的代极限

定理4 定理3

求$g(x)=\dfrac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}$当$x\to 0$时左右极限

三、初等函数的连续性

前面证明了三角函数及反三角函数在定义域内是连续

进一步可得 $a^x(a>0, a\neq 1)$在$(-\infty,+\infty)$内单调连续

由反函数连续 $\log_a x(a>0, a\neq 1)$在$(0,+\infty)$单调连续

幂函数x^u(u不同定义域不同)在定义域内是连续的

基本初等函数在定义域内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的反函数连续

连续函数的复合函数连续

重要结论

一切初等函数在$\boxed{\text{定义区间}}$内连续

例 $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)^3}$

$x=0$孤立点

说明： i) 定义区间是包含在定义域内的区间

三、初等函数的连续性

基本初等函数在定义域内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的反函数连续

连续函数的复合函数连续

重要结论

一切初等函数在定义区间内连续

例 $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)^3}$

说明：i) 定义区间是包含在定义域内的区间　$x=0$ 孤立点

ii) 这一重要结论提供了求极限的一个方法

$f(x)$ 是初等函数, $x_0 \in$ 定义区间, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

例 $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{e^x\sin x+5}{x^2+\ln 3}=\frac{e^3\sin 3+5}{9+\ln 3}$

四、典型题

①幂指函数求极限

形如 $u(x)^{v(x)}\,(u(x)>0,\ne 1)$ 的函数,如果

$$\lim u(x)=a>0,\lim v(x)=b\neq\infty,\text{则}\lim u(x)^{v(x)}=a^{b}$$

在自变量同一变化过程

例 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

①凑重要极限 $\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to0}\boxed{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}^{\boxed{\frac{6x}{\sin x}}}=e^{6}$ (其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\sin x}=6$)

②换底公式 $\underline{\underline{a^{b}=e^{b\ln a}}}\ \lim\limits_{x\to0}e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3\cdot2x}{x}}=e^{6}$

③ 公式法,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则有

$$\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\cdot f(x)g(x)}=e^{b}\quad\text{其中}\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=b$$

四、典型题

①幂指函数求极限

例 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

①凑重要极限 $\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0}\boxed{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}^{\boxed{\frac{6x}{\sin x}}}=e^6$ (其中$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin x}=6$)

②换底公式 $\underline{\underline{a^b=e^{b\ln a}}}\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot 2x}{x}}=e^6$

③ 公式法,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则有

$$\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\cdot f(x)g(x)}=e^b \quad 其中\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=b$$

$\because \lim\limits_{x\to x_0}2x\cdot\dfrac{3}{\sin x}=6$ 原式$=e^6$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\boxed{\frac{2a}{x-a}\cdot x}}$

其中$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2a}{x-a}\cdot x=2a$，原极限$=e^{2a}$

例

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ 其中$\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x}{2}=1$, 原极限$=e$

例 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{3}}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{x}-1\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^{2}}{3x^{2}}=-\frac{1}{6}$$

四、典型题

②讨论函数连续性、间断点及其类型

例 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 连续，求a,b

解

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & |x|<1 \\ \dfrac{1}{x} & |x|>1 \\ \dfrac{1+a+b}{2} & x=1 \\ \dfrac{-1+a-b}{2} & x=-1 \end{cases}$$

$\because f(x)$连续

$\therefore f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2+bx=a+b,$

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1,$

$1=a+b=\dfrac{1+a+b}{2}$,即$\boxed{a+b=1}\cdots\cdots(1)$

$f(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x}=-1,$

$f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+} ax^2+bx=a-b,$

$-1=a-b=\dfrac{-1+a-b}{2}$,即$\boxed{a-b=-1}\cdots\cdots(2)$

故$a=0,b=1$

四、典型题

②讨论函数连续性、间断点及其类型

例 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$ $(x>0)$,试讨论$f(x)$在$(0,+\infty)$上的连续性

解

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<e\\ \ln x & x>e\\ 1 & x=e\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln e^n+\ln[1+(\frac{x}{e})^n]}{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x^n+\ln[1+(\frac{e}{x})^n]}{n}=\ln x$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2+\ln e^n}{n}=1$$

$$\lim_{x\to e^+}f(x)=\lim_{x\to e^+}\ln x=1$$

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=1$$

$$f(e)=1$$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上连续

四、典型题

②讨论函数连续性、间断点及其类型

例 设$F(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x\text{-}t}}$ $((x-1)(t-1)>0, x\neq t)$,函数$f(x)$由$f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$确定，试求函数$f(x)$的连续区间和间断点，并指出类型

解 $$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}=\lim_{t\to x}\left(\frac{t-1+x-t}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$$

其中$\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x-t}{t-1}\cdot\dfrac{t}{x\text{-}t}=\dfrac{x}{x-1}$

$\therefore\ f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$ $\quad\therefore\ f(x)$的连续区间为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$上连续

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}}=0$$

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$ $\quad\therefore x=1$为第二类无穷间断点

思考题

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)^{x^2}$$ 其中 $\lim\limits_{x\to\infty}-2\sin^2\frac{1}{2x}\cdot x^2=-\frac{1}{2}$

原极限= $e^{-\frac{1}{2}}$