第5节

可降阶高阶微分方程

内容

一、$y^{(n)} = f(x)$型微分方程

二、$y'' = f(x, y')$ 型微分方程

三、$y'' = f(y, y')$型微分方程

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

解题步骤:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $y^{(n-2)} = \int [\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\,]\mathrm{d}x + C_2$

$$= \int [\int f(x)\,\mathrm{d}x\,]\mathrm{d}x\ + C_1 x + C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解 .

例1. 求解 $y''' = \mathrm{e}^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(\mathrm{e}^{2x} - \cos x \right) \mathrm{d}x + C_1'$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2}C_1'$）

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

特点: 缺y

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例2. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1, \quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解: 设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$(1+x^2)p'=2xp$ 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$

积分得 $\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1$, 即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 于是有 $y'=3(1+x^2)$

两端再积分得 $y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

特点：缺x

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例3. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0\,,\ y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$p\,dp = e^{2y}dy$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{dy}{dx} = p = e^{y}$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$