

第八章

空间解析几何与向量代数

- § 1 向量及其线性运算
- § 2 数量积 向量积 混合积
- § 3 平面及其方程
- § 4 空间直线及其方程
- § 5 曲面及其方程
- § 6 空间曲线及其方程

第一节

向量及其线性运算



内容

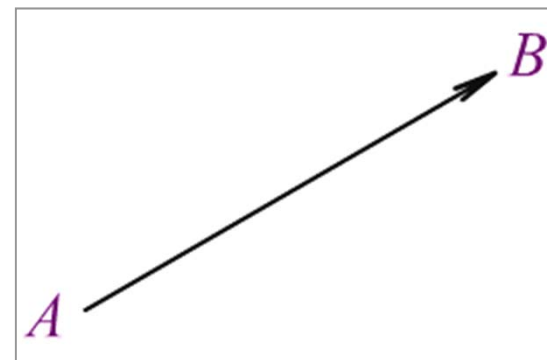
一、空间直角坐标系

二、向量

一、向量概念

❖ 向量

既有大小, 又有方向的量叫做向量.



❖ 向量的表示法

- 向量用一条有方向的线段(称为有向线段)表示.
- 以A为起点、**B**为终点的有向线段所表示的向量, 记作 \overrightarrow{AB} .
- 向量可用粗体字母、或加箭头的书写体字母表示.

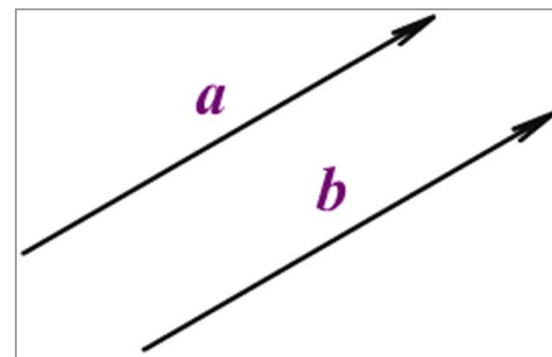
例如, \boldsymbol{a} 、 \boldsymbol{r} 、 \boldsymbol{v} 、 \boldsymbol{F} 或 \vec{a} 、 \vec{r} 、 \vec{v} 、 \vec{F} .

• 自由向量

与起点无关的向量, 称为自由向量, 简称向量.

• 向量的相等

如果向量 a 和 b 的大小相等, 且方向相同, 则说向量 a 和 b 是相等的, 记为 $a=b$.



相等的向量经过平移后可以完全重合.

•向量的模

向量的大小叫做向量的模.

向量 a 、 \vec{a} 、 \vec{AB} 的模分别记为 $|a|$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{AB}|$.

•单位向量

模等于1的向量叫做单位向量.

•零向量

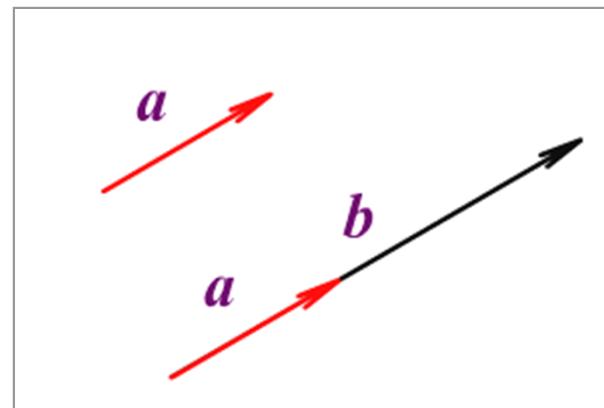
模等于 0 的向量叫做零向量, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.

零向量的起点与终点重合, 它的方向可以看作是任意的.

•向量的平行

两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行.

向量 a 与 b 平行,记作 $a//b$.



零向量认为是与任何向量都平行.

•共线向量与共面向量

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此, 两向量平行又称两向量共线.

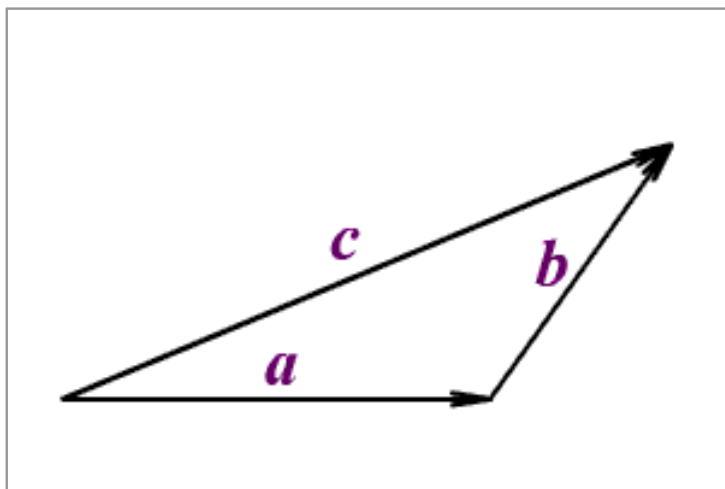
设有 $k(k \geq 3)$ 个向量, 当把它们的起点放在同一点时, 如果 k 个终点和公共起点在一个平面上, 就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

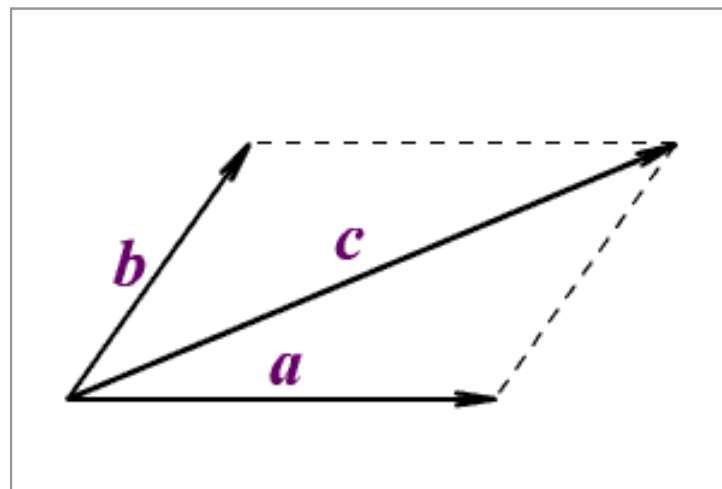
设有两个向量 a 与 b , 平移向量, 使 b 的起点与 a 的终点重合, 则从 a 的起点到 b 的终点的向量 c 称为向量 a 与 b 的和, 记作 $a+b$, 即 $c=a+b$.

三角形法则



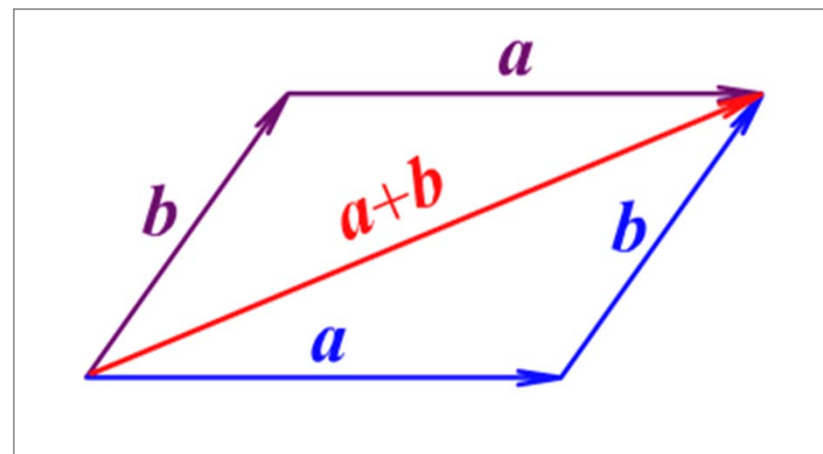
$$c=a+b$$

平行四边形法则

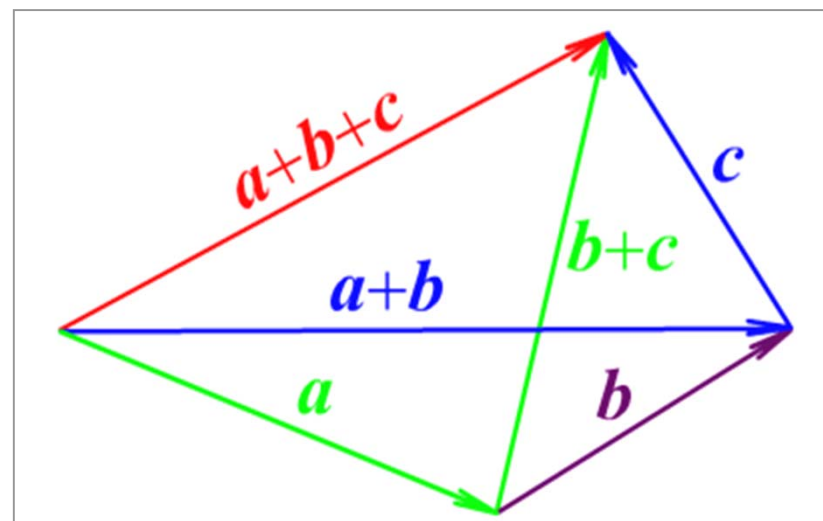


•向量的加法的运算规律

(1)交换律 $a+b=b+a$;

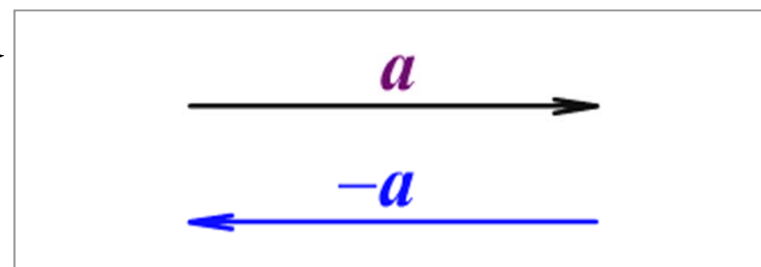


(2)结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.



•负向量

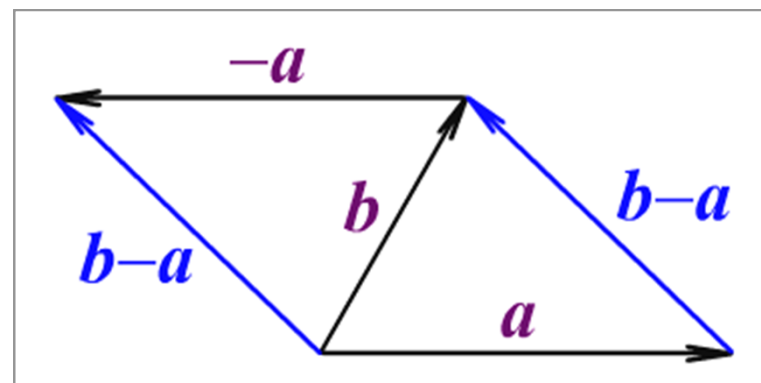
与向量 a 的模相同而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记为 $-a$.



•向量的减法

向量 b 与 a 的差规定为

$$b-a=b+(-a).$$

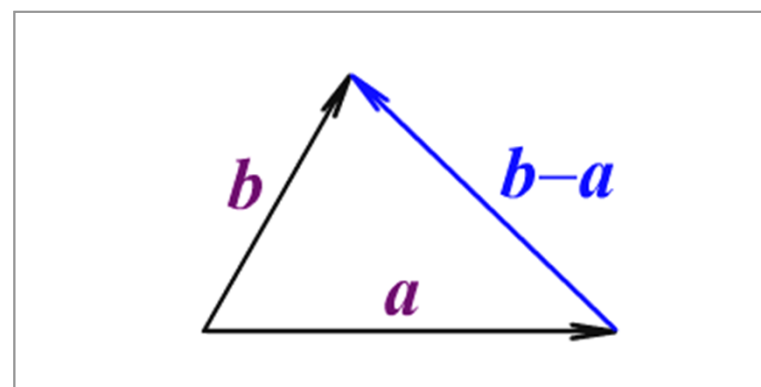


•三角不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a-b| \leq |a| + |b|,$$

等号在 b 与 a 同向或反向时成立.



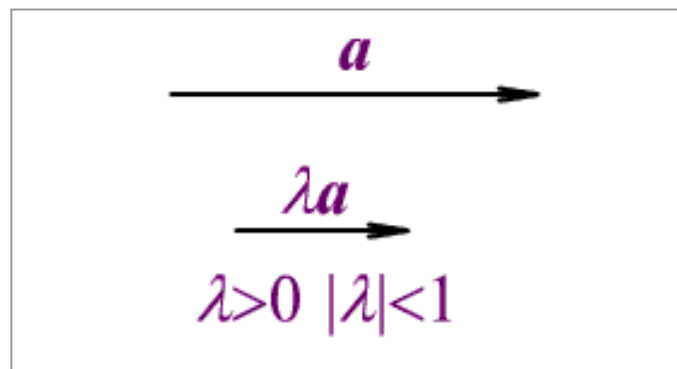
2. 向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积记作 λa , 规定 λa 是一个向量, 它的模 $|\lambda a| = |\lambda||a|$, 它的方向,

当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反.

当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 λa 为零向量.

当 $\lambda = 1$ 时, 有 $1a = a$; 当 $\lambda = -1$ 时, 有 $(-1)a = -a$.



• 向量与数的乘积的运算规律

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$;

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

• 向量的单位化

设 $a \neq 0$, 则向量 $\frac{a}{|a|}$ 是与 a 同方向的单位向量,
记为 e_a

于是 $a = |a|e_a$.



定理1. 设 \vec{a} 为非零向量, 则

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证: “ \longrightarrow ”. 设 $\vec{a} // \vec{b}$, 取 $\lambda = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, \vec{a}, \vec{b} 同向时取正号, 反向时取负号, 则 \vec{b} 与 $\lambda \vec{a}$ 同向, 且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$, 则 $(\lambda - \mu) \vec{a} = \vec{0}$ 而 $|\vec{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.



“ \longleftarrow ” 已知 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 则

当 $\lambda = 0$ 时, $\vec{b} = \vec{0}$

当 $\lambda > 0$ 时, \vec{a}, \vec{b} 同向

当 $\lambda < 0$ 时, \vec{a}, \vec{b} 反向

$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时, } \vec{b} = \vec{0} \\ \text{当 } \lambda > 0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 同向} \\ \text{当 } \lambda < 0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 反向} \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{a} // \vec{b}$

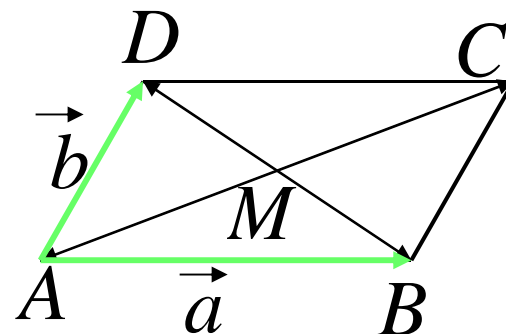
例1. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 试用 \vec{a} 与 \vec{b} 表示 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

解: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA}$

$$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD} = -2\overrightarrow{MB}$$

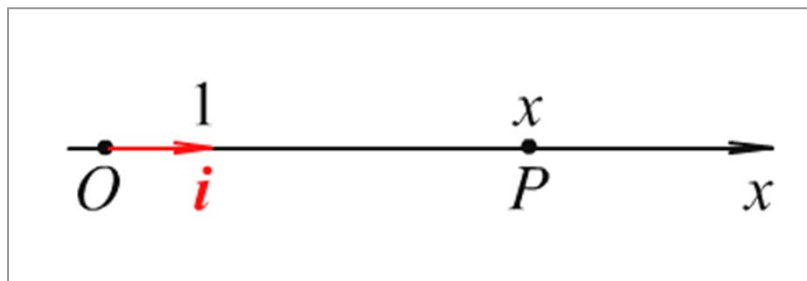
$$\therefore \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$



❖ 数轴与点的坐标

给定原点 O 、正方向及单位长度（单位向量 i ）就确定了一条数轴 Ox .



对于轴上任一点 P ，必有唯一的实数 x ，使 $\overrightarrow{OP} = xi$ ，并且轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系：

点 $P \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x i \leftrightarrow$ 实数 x .

实数 x 称为轴上点 P (向量 \overrightarrow{OP}) 的坐标.

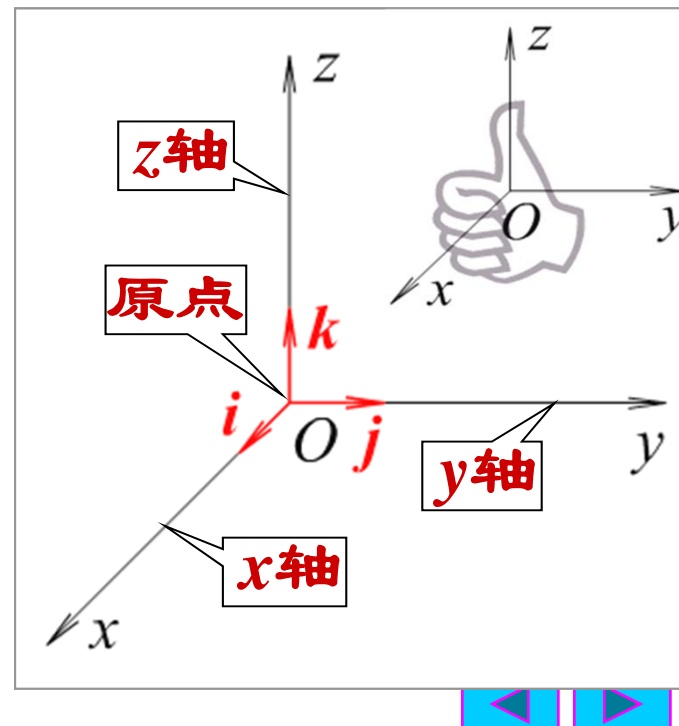
三、空间直角坐标系

❖ 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 i 、 j 、 k ，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系.

说明：

- (1) 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；
- (2) 数轴的正向通常符合右手规则.



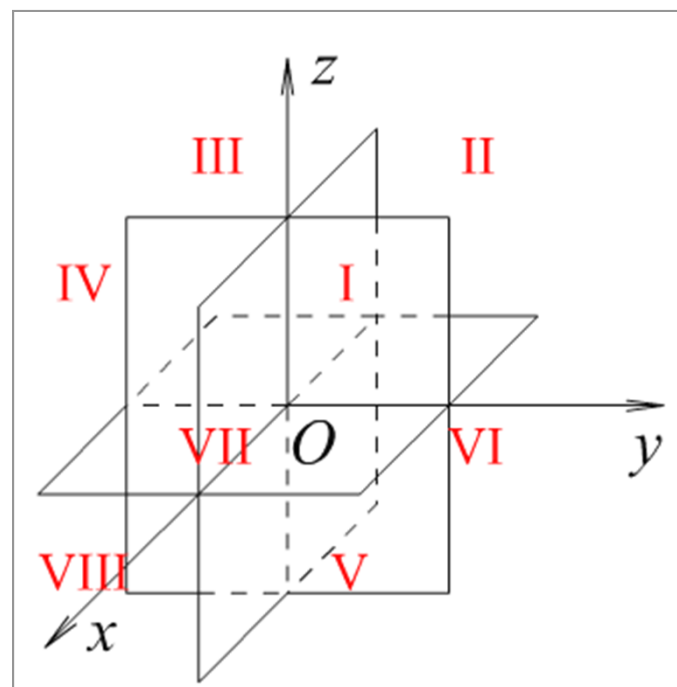
•坐标面

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为坐标面。

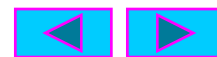
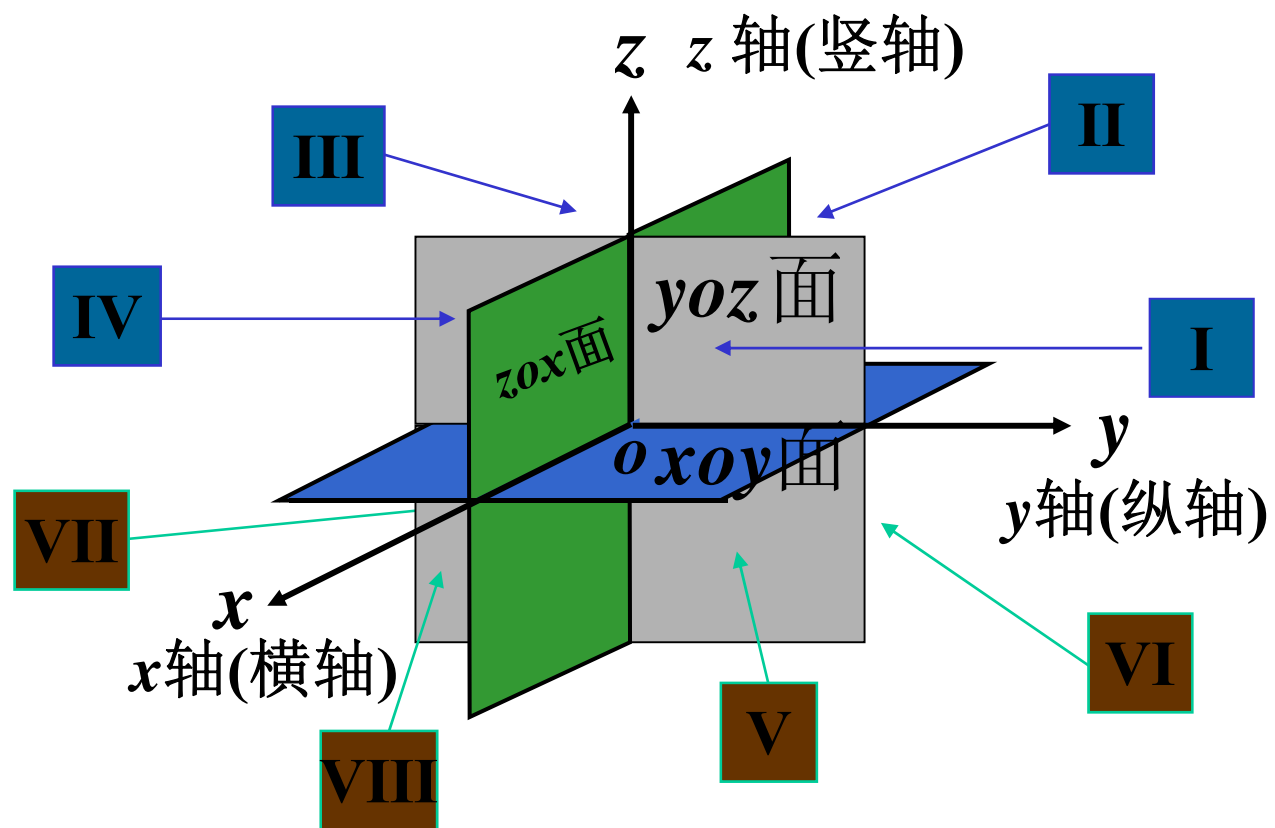
三个坐标面分别称为 xOy 面， yOz 面和 zOx 面。

•卦限

坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限，分别用字母I、II、III、IV等表示。



空间直角坐标系



❖ 向量的坐标分解式

在空间直角坐标系下, 任意向量 \vec{r} 可用向径 \overrightarrow{OM} 表示.

以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量, 设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$, 则

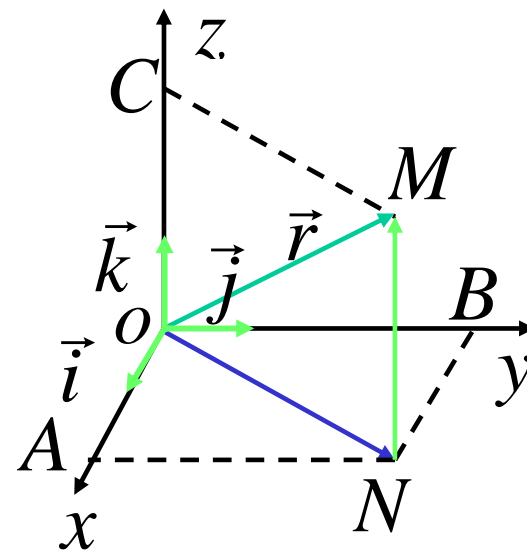
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\downarrow \quad \overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

此式称为向量 \vec{r} 的坐标分解式,

$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 \vec{r} 沿三个坐标轴方向的分向量.



任给向量 \boldsymbol{r} , 存在点 M 及 $x\boldsymbol{i}$ 、 $y\boldsymbol{j}$ 、 $z\boldsymbol{k}$, 使

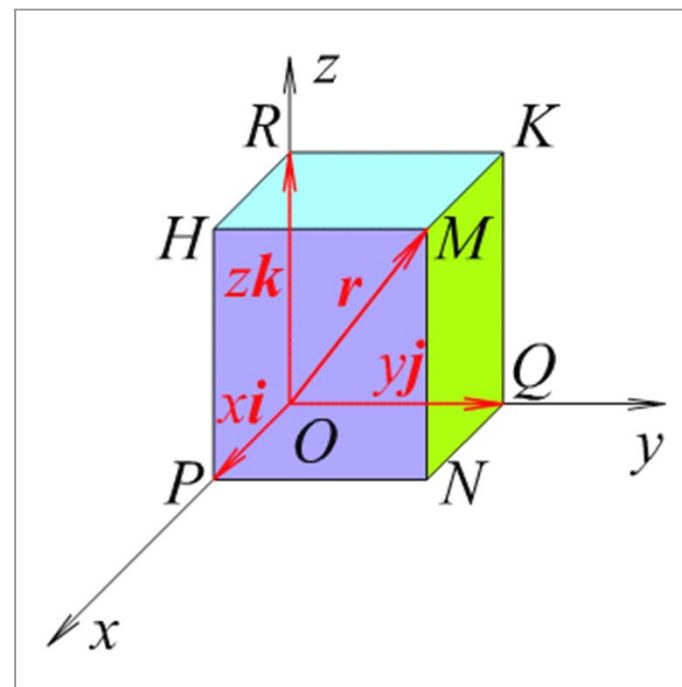
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} .$$

点 M 、向量 \boldsymbol{r} 与三个有序 x 、 y 、 z 之间有一一对应的关系

$$M \leftrightarrow \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \leftrightarrow (x, y, z) .$$

- 有序数 x 、 y 、 z 称为向量 \boldsymbol{r} 的坐标, 记作 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$;
- 有序数 x 、 y 、 z 也称为点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$.
- 向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$



❖ 坐标轴上及坐标面上点的特征

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如:

- 点 M 在 yOz 面上, 则 $x=0$;
点 M 在 zOx 面上的点, $y=0$;
点 M 在 xOy 面上的点, $z=0$.
- 点 M 在 x 轴上, 则 $y=z=0$;
点 M 在 y 轴上, 有 $z=x=0$;
点 M 在 z 轴上的点, 有 $x=y=0$.
- 点 M 为原点, 则 $x=y=z=0$.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数, 则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时,

$$\begin{aligned} \vec{b} // \vec{a} &\iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \\ &\iff \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x &= \lambda a_x \\ b_y &= \lambda a_y \\ b_z &= \lambda a_z \end{aligned}$$

例2 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases} 5x-3y=a \\ 3x-2y=b \end{cases}$,
其中 $a=(2, 1, 2)$, $b=(-1, 1, -2)$.

解 如同解二元一次线性方程组, 可得

$$x=2a-3b, \quad y=3a-5b.$$

以 a 、 b 的坐标表示式代入, 即得

$$x=2(2, 1, 2)-3(-1, 1, -2)=(7, -1, 10),$$

$$y=3(2, 1, 2)-5(-1, 1, -2)=(11, -2, 16).$$

例3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$,
在直线 AB 上求一点 M , 使 $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$.

解 由于

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA},$$

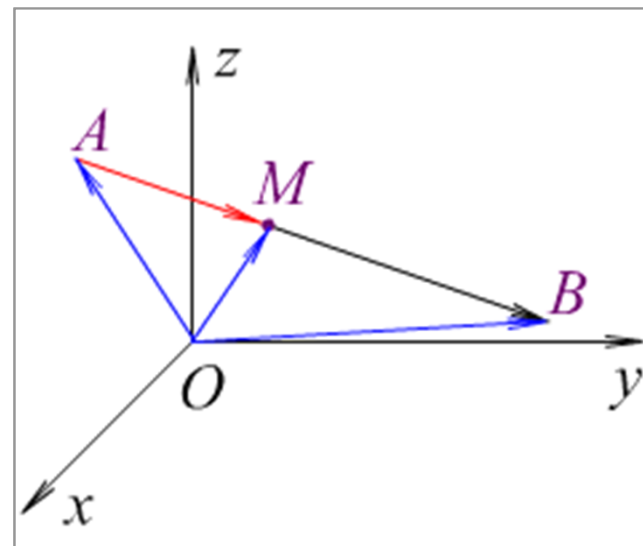
$$\vec{MB} = \vec{OB} - \vec{OM},$$

因此
$$\vec{OM} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OB} - \vec{OM}),$$

从而
$$\vec{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{OA} + \lambda \vec{OB})$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right),$$

这就是点 M 的坐标.



说明: 由

$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda} (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

得定比分点公式:

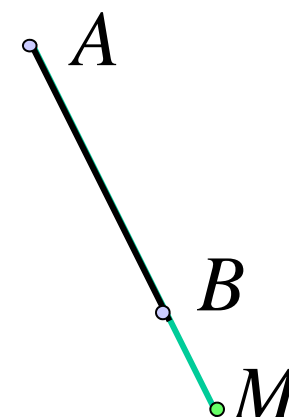
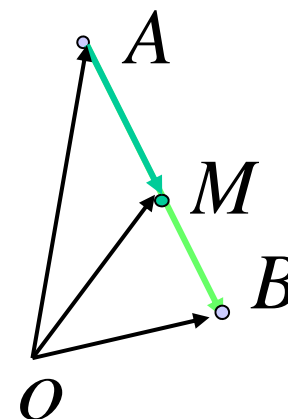
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 为 AB 的中点, 于是得

中点公式:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设 $\vec{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, 则有

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

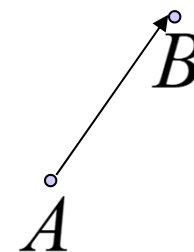
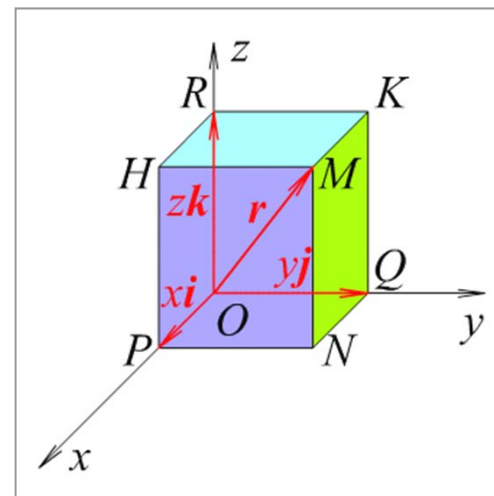
$$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

对两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



例4. 求证以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证:

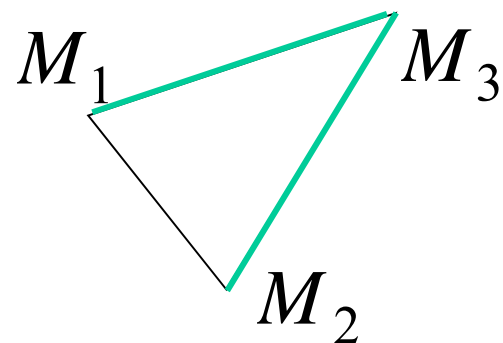
$$\therefore |M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(5-4)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore |M_2M_3| = |M_1M_3|$$

即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.



例5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 及 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解: 设该点为 $M(0, 0, z)$, 因为 $|MA| = |MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7 - z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2}$$

解得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0, 0, \frac{14}{9})$.

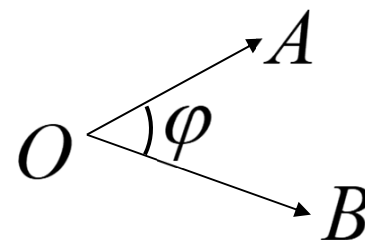
例6. 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求 \vec{e}_{AB}

$$\begin{aligned} \text{解: } \vec{e}_{AB} &= \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2) \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right) \end{aligned}$$



2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量 \vec{a}, \vec{b} , 任取空间一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 称 $\varphi = \angle AOB$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) 为向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角. 记作 $(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$ 或 $(\vec{b}, \vec{a}) = \varphi$

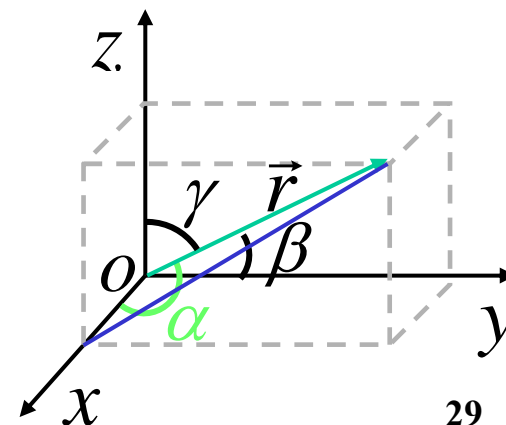


类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角.

给定 $\vec{r} = (x, y, z) \neq \vec{0}$, 称 \vec{r} 与三坐标轴的夹角 α, β, γ 为其方向角.

方向角的余弦称为其方向余弦.

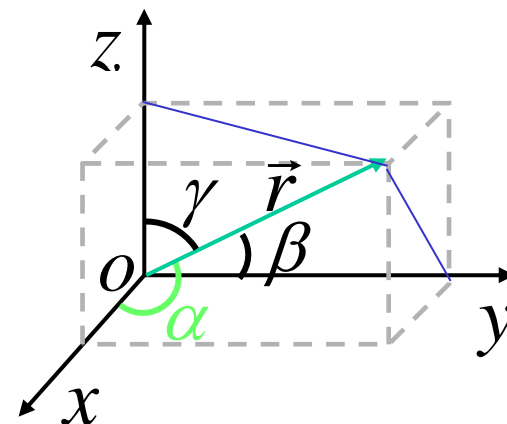
$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



方向余弦的性质: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

向量 \vec{r} 的单位向量:

$$\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

例7. 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) \\ &= (-1, 1, -\sqrt{2})\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}$$

例8. 设点 A 位于第一卦限, 向径 \overrightarrow{OA} 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标.

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限, 故 $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \overrightarrow{OA}^\circ = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.



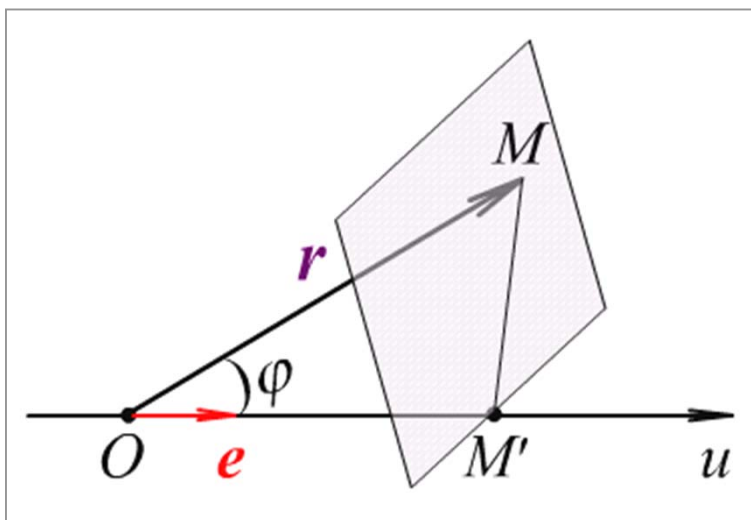
3. 向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 e 确定 u 轴.

任给向量 r , 作 $\vec{OM} = r$,

再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M' , 则向量 $\vec{OM'}$ 称为向量 r 在 u 轴上的分向量.

设 $\vec{OM'} = \lambda e$, 则数 λ 称为向量 r 在 u 轴上的投影, 记作 $\text{Prj}_u r$ 或 $(r)_u$.



向量 a 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 就是 a 在三条坐标轴上的投影, 即

$$a_x = \text{Prj}_x a, \quad a_y = \text{Prj}_y a, \quad a_z = \text{Prj}_z a.$$

❖ 投影的性质

• 性质1

$(a)_u = |a| \cos \varphi$ (即 $\text{Prj}_u a = |a| \cos \varphi$), 其中 φ 为向量与 u 轴的夹角;

• 性质2

$(a+b)_u = (a)_u + (b)_u$ (即 $\text{Prj}_u(a+b) = \text{Prj}_u a + \text{Prj}_u b$);

• 性质3

$(\lambda a)_u = \lambda(a)_u$ (即 $\text{Prj}_u(\lambda a) = \lambda \text{Prj}_u a$).

例. 设 $\vec{m} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{p} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$
求向量 $\vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解: 因
$$\begin{aligned}\vec{a} &= 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p} \\ &= 4(3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}) + 3(2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}) - (5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= 13\vec{i} + 7\vec{j} + 15\vec{k}\end{aligned}$$

故在 x 轴上的投影为 $a_x = 13$

在 y 轴上的分向量为 $a_y \vec{j} = 7\vec{j}$