第七章

微分方程

§1　微分方程的基本概念

§2　可分离变量的微分方程

§3　齐次方程

§4　一阶线性微分方程

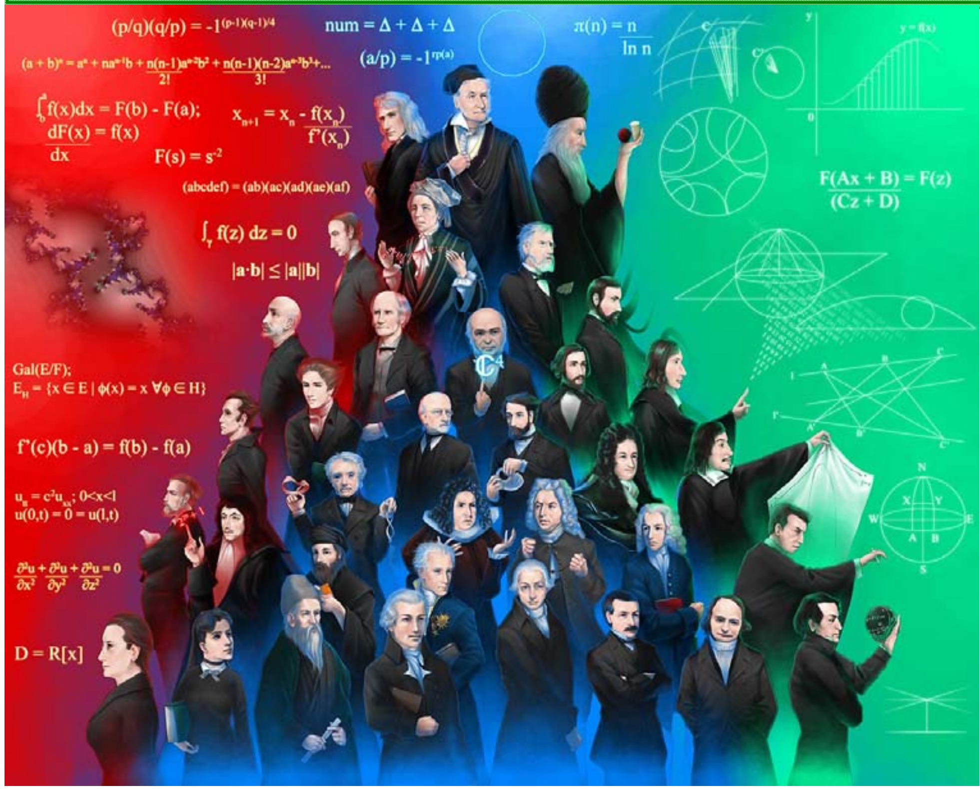
§6　高阶线性微分方程

§7　常系数齐次线性微分方程

§8　常系数非齐次线性微分方程

第六节

高阶线性微分方程



内容

一、 高阶线性微分方程

二、线性齐次方程解的结构

三 、线性非齐次方程解的结构

一 高阶线性微分方程

定义1 形如 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 称为二阶齐次线性方程

定义2 形如 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

称为二阶非齐次线性方程

定义3 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0,\quad x\in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**, 否则称为**线性无关**.

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1-\cos^2 x-\sin^2 x\equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关;

一 高阶线性微分方程

定义1 形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 称为二阶齐次线性方程

定义2 形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

称为二阶非齐次线性方程

定义3 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**, 否则称为**线性无关**.

又如, $1, x, x^2$, 若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$, 则根据二次多项式至多只有两个零点, 可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0, 故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都线性无关.

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的**充要条件**:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\rightleftarrows$ 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1} \quad (\text{设} k_1 \neq 0)$$

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\rightleftarrows \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

例 (1) $\ln x, x\ln x$ (线性无关)　　(2) $\sin 2x, \sin x\cos x$ (线性相关)

定义4 二阶**齐次**线性方程组的任意两个线性无关的解

$y_1(x), y_2(x)$ 称为它的基本解组

二、线性齐次方程解的结构

定理1. (叠加原理1) 若$y_1(x), y_2(x)$是二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是该方程的解. (C_1, C_2为任意常数)

证: 将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$[C_1y_1'' + C_2y_2''] + P(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] + Q(x)[C_1y_1 + C_2y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0$$

说明: 若令 $y_2(x) = 2y_1(x)$

不是方程的通解

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = (C_1 + 2C_2)y_1(x) = Cy_1(x)$$

定理 2.(通解结构1) 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的基本解组,则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程的通解

(C_1, C_2 为任意常数)

例 方程 $y'' + y = 0$

验证 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ 是解,且线性无关

因此,通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x$

推广. 若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x) \quad (C_k\text{为任意常数})$$

三、线性非齐次方程解的结构

定理3. (通解结构2) 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是与其相应齐次线性方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \qquad ②$$

非齐通= 齐通+非齐特

是二阶非齐次线性方程的通解.

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$(Y'' + \underline{y^{*\prime\prime}}) + P(x)(Y' + \underline{y^{*\prime}}) + Q(x)(Y + \underline{y^*})$$

$$= (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y) + (y^{*\prime\prime} + P(x)y^{*\prime} + Q(x)y^*)$$

$$= 0 + f(x) = f(x)$$

由于 Y 中含有两个独立任意常数, 因而②也是通解.

定理4.(叠加原理2) 设非齐次线性方程的右端是n个函数的和,如$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$

而$y_1^*(x)$与$y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与 $$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$ 的特解

那么$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是原方程的特解

证: 将$y=y_1^*+y_2^*$代入方程左边,得

$$[(y_1^*)''+(y_2^*)'']+P(x)[(y_1^*)'+(y_2^*)']+Q(x)(y_1^*+y_2^*)$$

$$=[(y_1^*)''+P(x)(y_1^*)'+Q(x)y_1^*]+[(y_2^*)''+P(x)(y_2^*)'+Q(x)y_2^*]$$

$$=f_1(x)+f_2(x)$$

定理4.(叠加原理2) 设非齐次线性方程的右端是n个函数和,如 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$

而 $y_1^*(x)$与$y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与 $$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$ 的特解

那么 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是原方程的特解

结论: 非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

任意两个解的差是对应的齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的解

例1. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

$\cancel{(A)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

$\cancel{(B)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

提示: (C) $C_1(y_1 + y_3) + C_2(y_2 + y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,

二者线性无关 . (反证法可证)

例2. 已知微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 有三个解

$y_1 = x,\ y_2 = \mathrm{e}^x,\ y_3 = \mathrm{e}^{2x}$，求此方程满足初始条件

$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ 的特解 .

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(\mathrm{e}^x - x) + C_2(\mathrm{e}^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$, 得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2$,

故所求特解为 $y = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$.