积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区 间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

第十一章 曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分 → 化定积分

第二节 对坐标的曲线积分 → 化定积分；化二重积分

第三节 格林公式 ← 利用（化二重积分）

第四节 对面积的曲面积分 → 化二重积分

第五节 对坐标的曲面积分 → 化二重积分；化三重积分

第六节 高斯公式 ← 利用（化三重积分）

第四节

对面积的曲面积分

内容

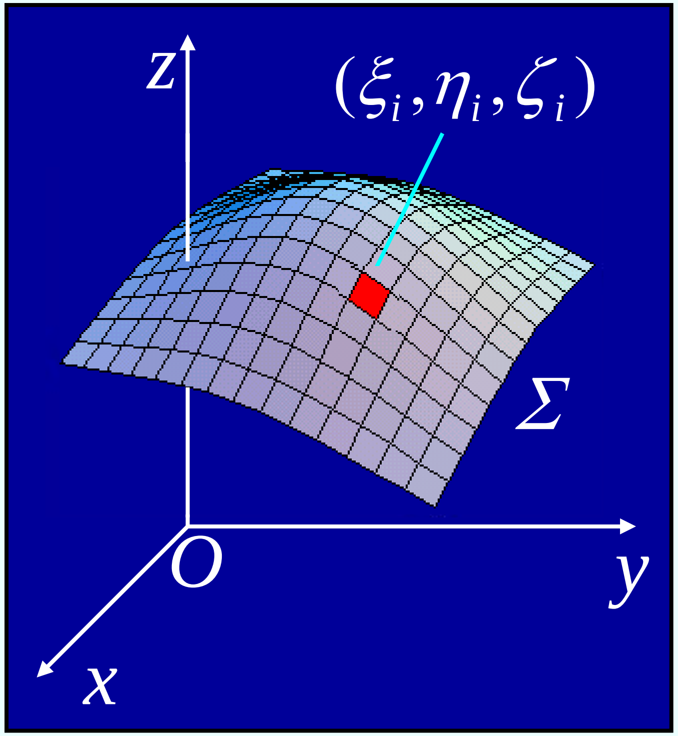
一、对面积的曲面积分的定义、物理意义及性质

二、对面积的曲面积分的计算

一、对面积的曲面积分定义、意义及性质

背景

曲棍质量	曲面质量
曲线	曲面
线密度 $\mu(x,y)$	面密度 $\mu(x,y,z)$
小段曲线的弧长 Δs_i	小块曲面的面积 ΔS_i
第i段取 (ξ_i,η_i)	第i块取 (ξ_i,η_i,ζ_i)
$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$	$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\cdot\Delta S_i$
λ表示n个弧段直径最大值	λ表示n小块曲面直径最大值



一、对面积的曲面积分定义、意义及性质

定义: 设Σ为光滑曲面, $f(x,y,z)$在Σ上有界,

任意分割$\Sigma:\Delta S_i(i=1,\cdots,n)$, **任意取点**$(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\in\Delta S_i$,

$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i\text{直径}\}$, 若极限

被积函数

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\cdot\Delta S_i \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

存在,则称此极限为函数$f(x,y,z)$在Σ上**对面积的曲面积分**或**第一类曲面积分**.

积分曲面

注: ① 所谓**曲面光滑**即曲面上各点处都有切平面,且当点在曲面上连续移动时,切平面也连续转动

② 当$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续时, $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$是存在的

今后总假定连续

一、对面积的曲面积分定义、意义及性质

定义: 设Σ为光滑曲面, $f(x,y,z)$在Σ上有界,

任意分割$\Sigma: \Delta S_i (i=1,\cdots,n)$, 任意取点$(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\in\Delta S_i$,

$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i$直径$\}$, 若极限

被积函数

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\cdot\Delta S_i \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

存在,则称此极限为函数f(x,y,z)在Σ上**对面积的曲面积分**

或**第一类曲面积分**.

积分曲面

注: ③注意区别 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$

积分域	**平面区域*D***	**空间曲面Σ**
积分变量	**二元函数**	**三元函数**

④与曲面的方向无关

物理意义

当$f(x,y,z)>0$,曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 可以看成是以$f(x,y,z)$为面密度的曲面构件Σ的质量

特别地,$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

性质

①可加性 若$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

②线性性 设α,β为常数,则

$$\iint\limits_{\Sigma}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}S=\alpha\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\beta\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S$$

③对称性

a.奇偶对称性

$$\begin{cases}\Sigma(-x,y,z)=\Sigma(x,y,z)\\ f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}\Rightarrow \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$$

其他情形类似

$$\begin{cases}\Sigma(-x,y,z)=\Sigma(x,y,z)\\ f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}\Rightarrow \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma(x\geq 0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

例 判断

$$0=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}(x+y)\mathrm{d}S=8\iint_{x^2+y^2+z^2=1} z\mathrm{d}S=0 \quad \surd$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2+z^2=1\\ z\geq 0}} z\mathrm{d}S=4\iint_{\substack{x^2+y^2+z^2=1\\ x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0}} z\mathrm{d}S=4\iint_{\substack{x^2+y^2+z^2=1\\ x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0}} x\mathrm{d}S \quad \surd$$

$$0=\iint_{x^2+y^2+z^2=1} xyz\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}(x+y+z)\mathrm{d}S=0 \quad \surd$$

③对称性

b.轮换对称性

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] & & y \arrow[dl] \\ & z \arrow[ul] & \end{tikzcd} \quad \Sigma\text{不变} \Rightarrow \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(y,z,x)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(z,x,y)\mathrm{d}S$$

例 $$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} \frac{f(x)}{f(x)+f(y)+f(z)}\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} \mathrm{d}S = \frac{1}{3}\cdot 4\pi$$

④利用曲面方程简化被积函数

曲面积分与曲线积分,积分区域是由积分变量的等式给出的,因而可将曲线/曲面方程代入被积函数

例 $$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} x^2\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} \mathrm{d}S = \frac{1}{3}\cdot 4\pi$$

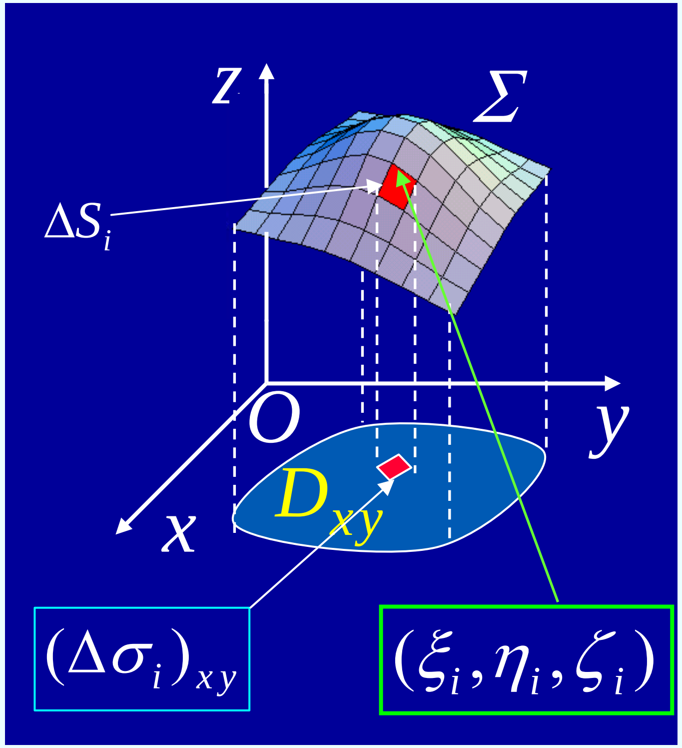
二、对面积的曲面积分的计算法

设有光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$

在xoy面上投影 D_{xy}

Σ上第i块曲面 ΔS_i

在xoy面上的投影 $(\Delta\sigma_i)_{xy}$



$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \underline{\zeta_i})\Delta S_i$$

$$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$$

而 $\Delta S_i = \iint\limits_{(\Delta\sigma_i)_{xy}} \sqrt{1 + z_x{}^2(x, y) + z_y{}^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\,y$

$$\overset{\text{积分中}}{\underset{\text{值定理}}{=}} \sqrt{1 + z_x{}^2(\xi_i', \eta_i') + z_y{}^2(\xi_i', \eta_i')}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\underline{\zeta_i})\Delta S_i$$

$$\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$$

$$而\,\Delta S_i = \iint\limits_{(\Delta\sigma_i)_{xy}} \sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[\text{值定理}]{\text{积分中}} \sqrt{1+z_x^{\,2}(\xi_i',\eta_i')+z_y^{\,2}(\xi_i',\eta_i')}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$\boxed{\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\underline{\zeta_i})\Delta S_i$$

$$\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$$

而 $\Delta S_i = \iint\limits_{(\Delta\sigma_i)_{xy}} \sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\underset{\text{值定理}}{\overset{\text{积分中}}{=\!=}} \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_i',\eta_i')+z_y{}^2(\xi_i',\eta_i')}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\underline{z(\xi_i,\eta_i)})$$
$$\sqrt{1+z_x{}^2\underline{(\xi_i',\eta_i')}+z_y{}^2\underline{(\xi_i',\eta_i')}}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

(Σ 光滑)

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1+z_x{}^2(\xi_i,\eta_i)+z_y{}^2(\xi_i,\eta_i)}\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

求$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$的一般步骤

① 如果Σ在xoy面有投影区域,将Σ写成 $z = z(x,y)$

②将Σ在xoy面上投影得D_{xy}

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,\underline{z(x,y)})\underline{\sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

口诀 一投 二代 三替换

$\Sigma: y = y(x,z)$ 将Σ在xoz面上投影得D_{xz}

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^{\ 2}(x,z)+y_z^{\ 2}(x,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$\Sigma: x = x(y,z)$ 将Σ在yoz面上投影得D_{yz}

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^{\ 2}(y,z)+x_z^{\ 2}(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

求$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$的一般步骤

① 如果Σ在xoy面有投影区域,将Σ写成 $z=z(x,y)$

②将Σ在xoy面上投影得D_{xy}

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,\underline{z(x,y)})\underline{\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

口诀 一投 二代 三替换

注: 区别曲面的面积公式

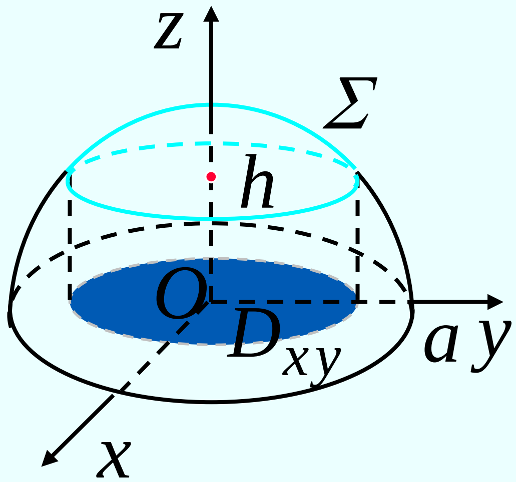
设曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出,

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$



$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-h^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

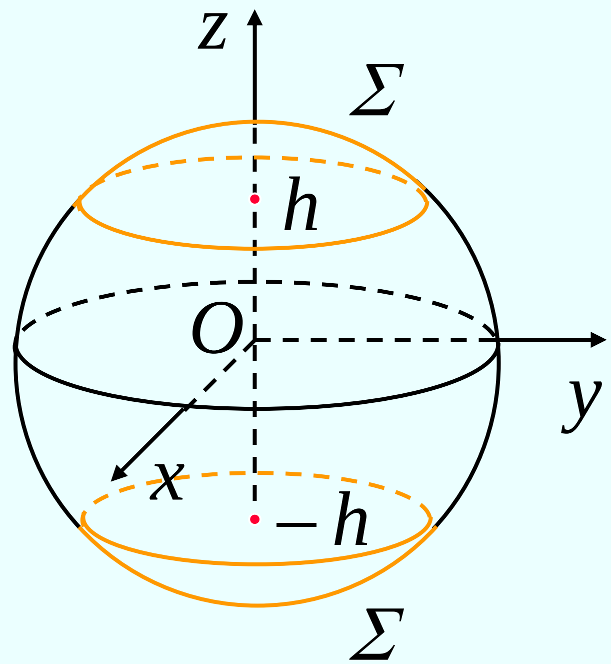
$$=\underline{a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta}\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\overset{-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(a^2-\rho^2)}{\cancel{\rho\mathrm{d}\rho}}}{a^2-\rho^2}=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

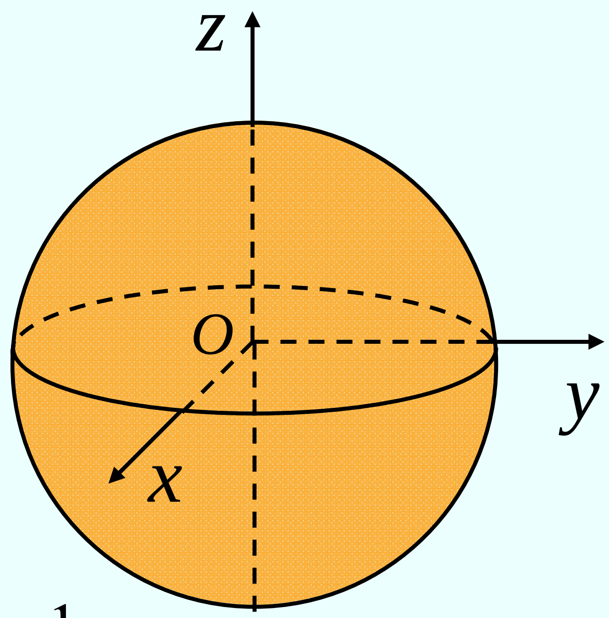
$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{h}\quad)$$



例2. 设曲面Σ为半球面$x^2+y^2+z^2=1, x\geq 0$

试求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$



解: 由于Σ关于xoz面及xoy面对称，故

$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S=0$ $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=0$ 只需计算$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$

投影域D_{yz}: $y^2+z^2\leq 1$

$$\Sigma: x=\sqrt{1-y^2-z^2}, \quad \sqrt{1+{x_y}^2+{x_z}^2}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}$$

$$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{y^2+z^2\leq 1}\sqrt{1-y^2-z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\pi$$

例3. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S \quad \Sigma: x^2+y^2=1$与$z=1, z=2$所围成表面

解: Σ分为 $\Sigma_1: z=1;\ \Sigma_2: z=2;\ \underline{\Sigma_3: x^2+y^2=1}$

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_3}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+1)\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+2)\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

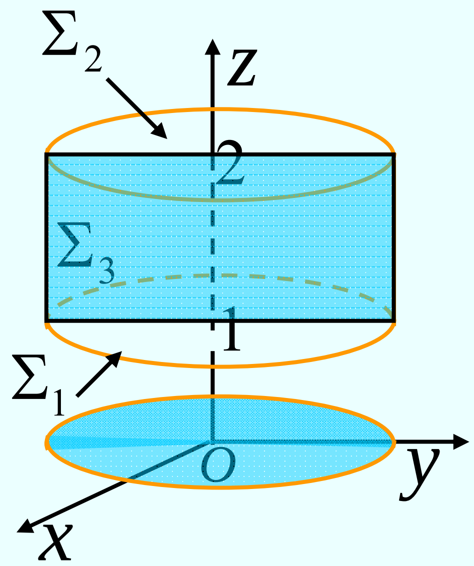
$$+2\iint\limits_{\substack{-1\le y\le 1\\ 1\le z\le 2}}(1+z)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\Sigma_3: x=\sqrt{1-y^2}$$

$$x_y=\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$x_z=0$$

$$\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



例3. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S\quad \Sigma: x^2+y^2=1$与$z=1, z=2$所围成表面

解: Σ分为 $\Sigma_1: z=1;\ \Sigma_2: z=2;\ \Sigma_3: x^2+y^2=1$

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_3}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+1)\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+2)\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\iint\limits_{\substack{-1\le y\le 1\\ 1\le z\le 2}}(1+z)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2+1)\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2+2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$+2\int_1^2(1+z)\mathrm{d}z\cdot\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=9\pi$$

注 i) $\Sigma=\Sigma_1+\cdots+\Sigma_n$

ii) $x^2+y^2=R^2$**投影到**xoz**或**yoz**面上**

iii)利用对称性简化计算

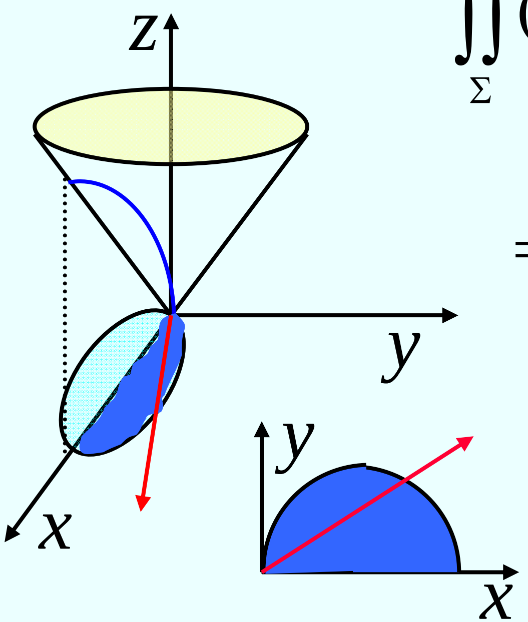
例4. $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$ 其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的有限部分

解: $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S \xlongequal{\text{对称性}} \iint\limits_{\Sigma}(zx)\mathrm{d}S$

投影域D_{xy}: $x^2+y^2\le 2ax$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\sqrt{2}$

$$\iint\limits_{\Sigma}(zx)\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{D_{xy}(y\ge 0)}\sqrt{x^2+y^2}\cdot x\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cdot\rho\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

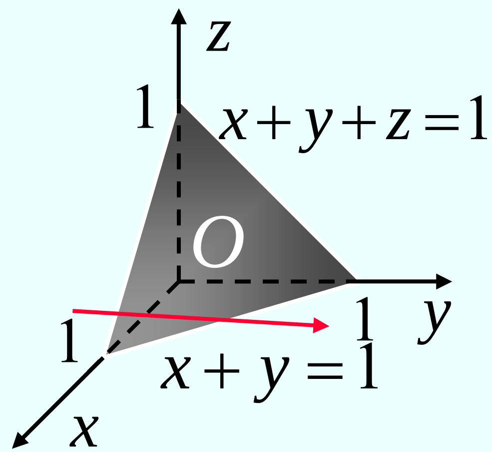


$x^2+y^2=2ax$

$\rho^2=2a\rho\cos\theta$

$\Rightarrow \rho=2a\cos\theta$

例5. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是由平面$x+y+z=1$与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示Σ在平面 $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=1$上的部分, 则

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_3} xyz\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_4} xyz\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S \qquad \Sigma_4: z=1-x-y,\ D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot(1-x-y)\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\big/120$$