第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理
(第1节)

- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式 (第3节)
- 柯西中值定理

洛必达法则求极限 (第2节)

导数应用 研究曲线的性态包括单调性，极值，最值，
(第4-7节) 凹凸性，拐点，曲率等

第三节

泰勒公式

内容

一、泰勒定理

二、常用函数的麦克劳林公式

三、泰勒公式的应用

一、泰勒定理

1. 问题的提出

在实际问题中，我们总希望用一个较简单的函数来近似表示一个较复杂的函数.多项式就是一个很理想的函数，它的运算简单，并在实数域上处处连续，且有任意阶的连续导数.

如何从$f(x)$本身得出多项式$p(x)$使得 $f(x) \approx p(x)$

且可估计 $|f(x) - p(x)|$ 的大小显然重要

泰勒公式正好解决了上述问题。

2. 泰勒公式的建立

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间内具有直到 $(n+1)$阶导数

试找出一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达 $f(x)$， 要求

$$f(x)-p_n(x)=o((x-x_0)^n),$$

为了使 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 在数值与性质方面吻合得更好，

进一步地要求 $p_n(x)$ 还满足：

$$p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

按要求:

$$p_n(x_0)=\boxed{f(x_0),}\ p_n'(x_0)=f'(x_0),\Lambda,p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

求 ***n*** 次近似多项式 $\boxed{p_n(x)}$,

令 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\Lambda+a_n(x-x_0)^n$

则 $p_n'(x)=\qquad a_1+2a_2(x-x_0)+\Lambda+na_n(x-x_0)^{n-1}$

$p_n''(x)=\qquad 2!a_2+\Lambda+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda \qquad \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$

$p_n^{(n)}(x)=\qquad n!a_n$

$\boxed{a_0}=p_n(x_0)=\boxed{f(x_0)},\qquad \boxed{a_1}=p_n'(x_0)=\boxed{f'(x_0),}$

$\boxed{a_2}=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\boxed{\frac{1}{2!}f''(x_0),}\Lambda,\ \boxed{a_n}=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)=\boxed{\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)}$

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

求证 $f(x) - p_n(x) = o((x-x_0)^n)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-\frac{2}{2!}f''(x_0)(x-x_0)\cdots-\frac{n}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\cdots\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

3. 泰勒(Taylor) 定理

泰勒定理 如果函数 $f(x)$ 在 x_0具有 n 阶导数,则当$x \to x_0$时

泰勒1685 – 1731

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

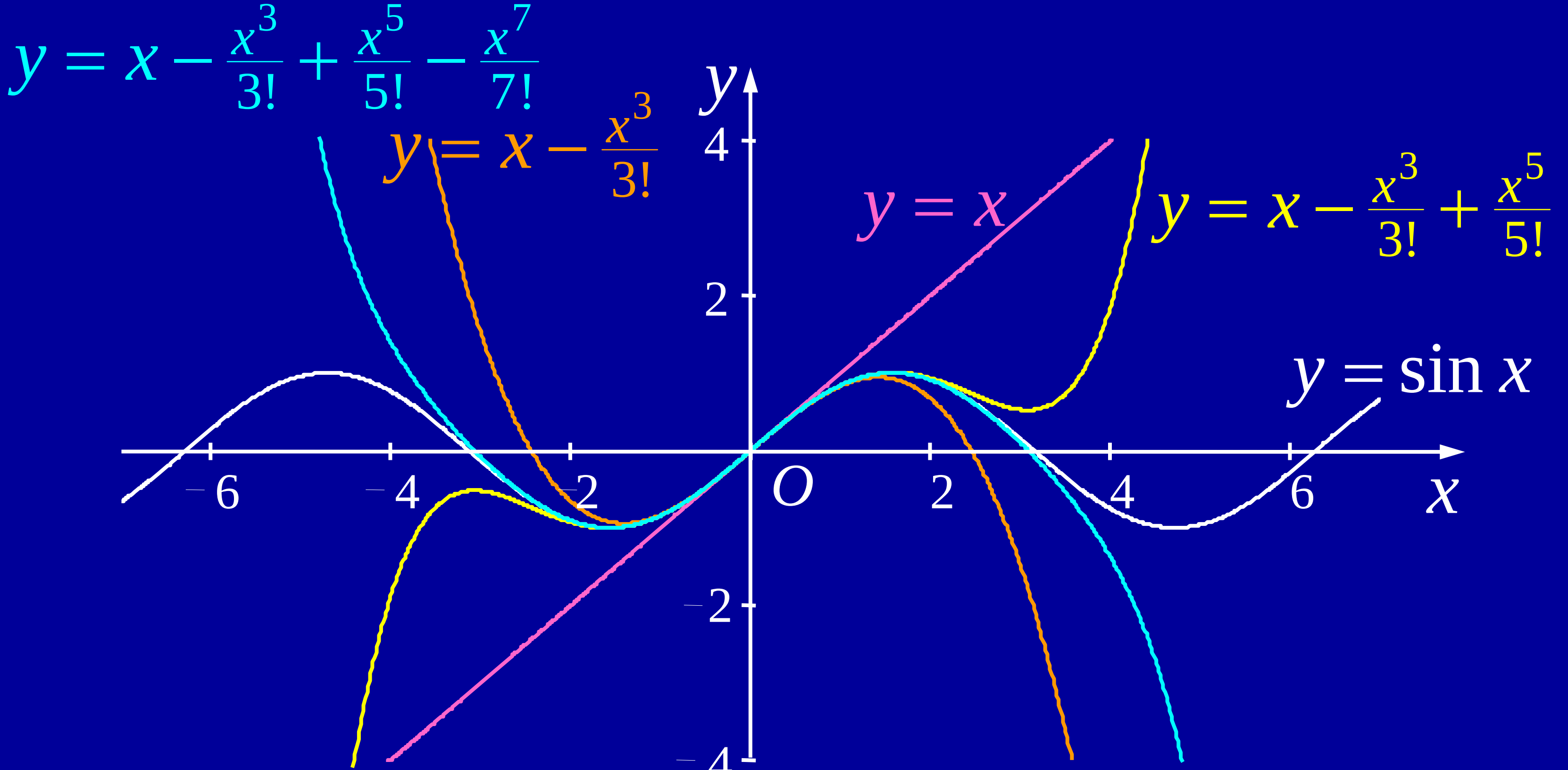
$$+ \quad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

称为$f(x)$按 $x - x_0$ 展开的带有皮亚诺余项的 $\boldsymbol{n}$ 阶泰勒公式

这个结论有重要意义,

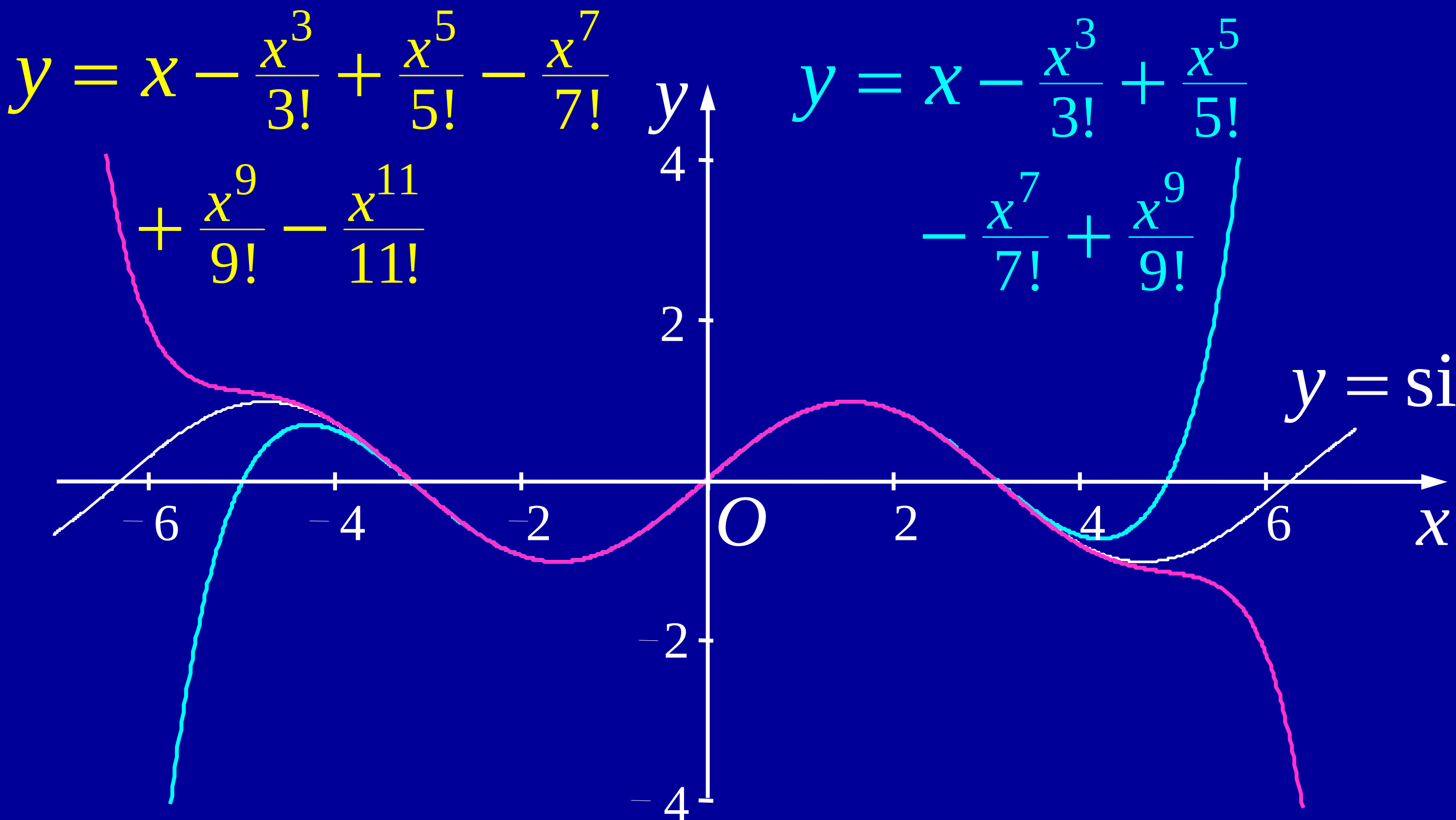
泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \Lambda + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9} + \Lambda + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



3. 泰勒(Taylor) 定理

泰勒定理 如果函数 $f(x)$ 在 x_0具有 n 阶导数,则当$x \to x_0$时

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \quad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

泰勒1685 – 1731

称为$f(x)$按 $x - x_0$ 展开的带有皮亚诺余项的 $\boldsymbol{n}$ 阶泰勒公式

这个结论有重要意义，但没有误差定量结果，

将条件加强一下

4. 泰勒(Taylor)中值定理

泰勒中值定理 如果函数 $f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\Lambda+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，

称为$f(x)$按 $x-x_0$ 展开的带有拉格朗

当$n=0$时，$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

当 $|f^{(n+1)}(\xi)|\le M$

$$|R_n(x)|\le M\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\to 0(n\to\infty)$$

只要**n**充分大，就能保证使计算达到所需的任何精度

往证 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

证 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$

柯西中值定理

则有 $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\Lambda=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$$\boxed{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$ （ξ_1在x_0与x之间）

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$ （ξ_2在x_0与ξ_1之间）

$$=\Lambda$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\Lambda 2(\xi_n-x_0)-0}$$

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$ （ξ在x_0与ξ_n之间）(因而也在x_0与x之间).

在泰勒公式中若取 $x_0=0,\ \xi=\theta x\ \ (0<\theta<1)$，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称 $f(x)$ 按 x 展开的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

称为 $f(x)$ 按 x 展开的带有皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

麦克劳林，C.

英国1698 – 1746

二、常用函数的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

(1)求出函数 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f^{(k)}(x)=e^x\ (k=0,1,2,\cdots,n)$,

所以 $f^{(k)}(0)=1(k=0,1,2,\cdots,n)$. 于是可得

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n),$$

二、常用函数的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\Lambda+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

(2)求出函数 $f(x)=\sin x$的 n 阶麦克劳林公式.

解　因为 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0$ 于是可得

所以

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\Lambda+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\Lambda+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+o(x^{2m-1}),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \Lambda + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \Lambda + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m-1}), \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \Lambda + \frac{(-1)^{m}}{(2m)!}x^{2m} + \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \Lambda + \frac{(-1)^{m}}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m}), \quad (0 < \theta < 1)$$

二、常用函数的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\Lambda+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

(3)求出函数 $f(x)=\ln(1+x)$的 n 阶麦克劳林公式.

解 $$(\ln(1+x))^{(n)}=[(1+x)^{-1}]^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\Lambda+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=[(1+x)^{-1}]^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\Lambda+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \Lambda + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \Lambda + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) \qquad (0<\theta<1)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \Lambda - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \Lambda + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \Lambda + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (0<\theta<1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \Lambda + x^{n-1} + x^n + o(x^n)$$

二、常用函数的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\Lambda+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

(4)求出函数 $f(x)=(1+x)^m$的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为$[(1+x)^m]^{(n)}=m\cdot(m-1)\Lambda\,(m-n+1)(1+x)^{m-n}$ 于是可得

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\Lambda+\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda\,(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\Lambda+\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

三、泰勒公式的应用

1. 求极限 (利用皮亚诺余项)

例1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

注：$c\cdot o(x^n)=o(x^n)$

$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$

$o(x^2)\pm o(x^2)=o(x^2)$

$o(x^2)\pm o(x^3)=o(x^2)$

$\dfrac{1}{x}\cdot o(x^2)=o(x)$

解 原极限

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

用泰勒公式将分母展到x^3项

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\Lambda+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+o(x^{2m-1}),$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\Lambda+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+o(x^{2m}),$$

说明:也可用洛必达法则,利用泰勒公式求极限,是一种很重要的方法.

三、泰勒公式的应用

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \Lambda + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \Lambda + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \Lambda - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

例2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

解 原极限

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - [\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4} + o(x^4)]}{x^2[\cancel{x} - \cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ ]}$$

用泰勒公式将分母展到x^4项

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{6}$$

三、泰勒公式的应用

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \Lambda + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m-1})$$

例3 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$

解 原极限

$$= \lim_{x\to0}\frac{6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + \overset{\to 0}{o(x^3)} + xf(x)}{x^3}$$

用泰勒公式将分母展到x^3项

$$= \lim_{x\to0}\frac{6 - 36x^2 + f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2} - 36 = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 36$$

三、泰勒公式的应用

2. 证明题 (利用拉格朗日余项)

例1 证明不等式$\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$.

证明 利用泰勒公式

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3\cdot(1+\xi)^{\frac{1}{2}-3}$$

(ξ介于$0,x$之间)

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\boxed{\frac{1}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}\cdot x^3 > 0} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\Lambda+\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

三、泰勒公式的应用

2. 证明题 (利用拉格朗日余项)

例2 设 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 且 $f''(x)>0$, 求证: $f(x)\ge x$

说明：在实际问题中，能将函数，一阶导数，二阶导数，三阶导数全部联系起来的首先是泰勒公式

证明 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0,\ f'(0)=1$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=x+\frac{\boxed{f''(\xi)}}{2!}x^2 \quad >0$$

$$\ge x$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\Lambda+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n \ (0<\theta<1)$$

三、泰勒公式的应用

2. 证明题 (利用拉格朗日余项)

例3 设$f(x)$在[-1,1]上具有三阶连续导数,且$f(-1)=0$,$f(1)=1$

$f'(0)=0$,证明在(-1,1)内至少存在一点 ξ,使$f'''(\xi)=3$

证明 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3 \quad (\eta\text{介于}0,x\text{之间})$$

$$=f(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\eta)}{6}x^3$$

说明：巧用泰勒公式很重要, x,x_0选取是关键

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\Lambda+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n \; (0<\theta<1)$$

例3 设$f(x)$在[-1,1]上具有三阶连续导数,且$f(-1)=0, f(1)=1$

$f'(0)=0$,证明在(-1,1)内至少存在一点 ξ,使$f'''(\xi)=3$

证明 $$f(x)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\eta)}{6}x^3 \quad (\eta\text{介于}0,x\text{之间})$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\eta_1)}{6} \quad \eta_1\in(-1,0)$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\eta_2)}{6} \quad \eta_2\in(0,1)$$

说明：巧用泰勒公式很重要，x, x_0选取是关键

两式相减 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$

由已知 $f'''(x)$在$[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$有最大值$M$最小值$m$

$$m\le \overbrace{\boxed{\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}}}^{=3}\le M$$

由介值定理, $\exists\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$,使$f'''(\xi)=3$

泰勒 (1685 – 1731)

英国数学家，他早期是牛顿学派最优秀的代表人物之一，重要著作有:

《正的和反的增量方法》(1715)

《线性透视论》(1719)

他在1712 年就得到了现代形式的泰勒公式 .

他是有限差分理论的奠基人 .

麦克劳林 (1698 – 1746)

英国数学家, 著作有:

《流数论》(1742)

《有机几何学》(1720)

《代数论》(1742)

麦克劳林，C.

在第一本著作中给出了后人以他的名字命名的麦克劳林级数 .