物质世界的运动大致

可以分为渐变与突变两种不同形态，

反映在数学上就是函数的连续与间断的问题。

连续函数是高等数学讨论的最主要的一类函数。

连续性反映的是渐变过程

渐变过程的特点：

若自变量的变化很小，则相应的函数值变化就很小

只要自变量的改变量 $\to 0$，则相应的函数值改变量 $\to 0$

第一章

第八节

函数的连续性与间断点

内容

一、函数的连续性

二、 函数的间断点

三、 典型题

一、 函数的连续性

增量： 设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义, 当x在此邻域内由x_0变到x_1,相应函数值由$f(x_0)$变到$f(x_1)$,则

$\Delta x = x_1 - x_0$ 为自变量x在x_0处的**增量**

$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ 为函数的相应增量

由渐变过程的特点有 当$\Delta x \to 0$时, 相应的$\Delta y \to 0$

连续： ①设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ x \to x_0}}[f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x}) - f(x_0)] = 0$$

称函数$y=f(x)$在x_0**连续**,并称x_0是$f(x)$的连续点

否则是**间断点**

一、 函数的连续性

连续：①设函数y=$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ x\to x_0}}[f(\underbrace{x_0+\Delta x}_{x})-f(x_0)]=0$$

称函数y=$f(x)$在x_0**连续**,并称x_0是$f(x)$的连续点

否则是**间断点**

一、 函数的连续性

连续：①设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\underset{x\to x_0}{\underline{\lim_{\Delta x\to 0}}}[f(\underset{x}{\underline{x_0+\Delta x}})-f(x_0)]=0$$

称函数$y=f(x)$在x_0连续，并称x_0是$f(x)$的连续点

否则是间断点

②设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如果

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 称$y=f(x)$在x_0连续。

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}|x-x_0|<\delta\text{时，有}|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

说明：i)在x_0点连续$|x-x_0|<\delta$　　要求x_0点有定义且为极限值

在x_0点极限存在 $0<|x-x_0|<\delta$　极限是否存在与定义无关

一、 函数的连续性

②设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义, 如果

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$称$y=f(x)$在$x_0$连续。

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$当$|x - x_0| < \delta$时,有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

说明：i)在x_0点连续$|x - x_0| < \delta$ 要求x_0点有定义且为极限值

在x_0点极限存在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 极限是否存在与定义无关

一、 函数的连续性

②设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义, 如果

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$称$y=f(x)$在$x_0$连续。

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

说明：i)在x_0点连续$|x-x_0|<\delta$ 要求x_0点有定义且为极限值

在x_0点极限存在 $0<|x-x_0|<\delta$ 极限是否存在与定义无关

在x_0点连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 在x_0点极限存在

连续的三个要素：有定义,有极限,极限值=函数值

左连续$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$(或$f(x_0^-)$)存在且等于$f(x_0)$即 $f(x_0^-)=f(x_0)$

右连续$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$(或$f(x_0^+)$)存在且等于$f(x_0)$即 $f(x_0^+)=f(x_0)$

一、 函数的连续性

连续的三个要素：有定义,有极限,极限值=函数值

左连续 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$（或$f(x_0^-)$）存在且等于$f(x_0)$即 $f(x_0^-)=f(x_0)$

右连续 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$（或$f(x_0^+)$）存在且等于$f(x_0)$即 $f(x_0^+)=f(x_0)$

$f(x)$在x_0点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0点处既左连续又右连续

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$$

注 分段函数讨论分段点处的连续性需要考虑左右连续

典型题（分段函数在分段点处的连续性）

例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ k & x=1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$ 问当k为何值时$f(x)$在$x=1$处连续

一、 函数的连续性

$f(x)$在x_0点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0点处既左连续又右连续

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$$

注 分段函数讨论分段点处的连续性需要考虑左右连续

典型题（分段函数在分段点处的连续性）

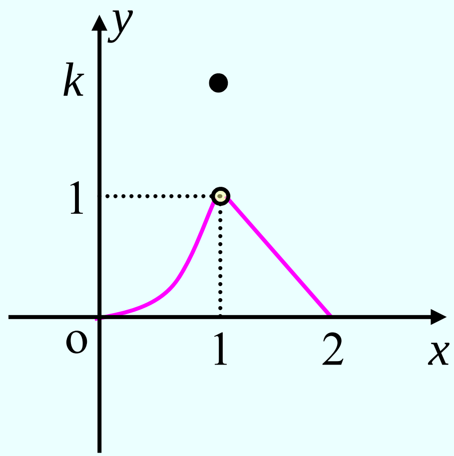
例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ k & x=1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$ 问当k为何值时$f(x)$在$x=1$处连续

解 $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$

$f(1)=k$

$k=1$时$f(x)$在$x=1$处连续



一、 函数的连续性

说明：ii)若$f(x)$在(a,b)上每一点都连续，则称$f(x)$在(a,b)内连续或称$f(x)$是(a,b)上的**连续函数**；若$f(x)$在(a,b)内连续且在$x=a$处右连续，在$x=b$左连续，称$f(x)$在$[a,b]$上连续

几何图形 连续函数的图形是一条没有缝隙的连续曲线

例 $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ 多项式函数在$(-\infty, +\infty)$上连续

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ 有理分式函数在其定义域内连续

例 证明函数 $y = \sin x$在$(-\infty, +\infty)$内连续 .

例 证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

证: $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$0\le|\Delta y|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|$$

$$\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1=|\Delta x|\to 0\ (\Delta x\to 0)$$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

这说明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

同样可证: 函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

二、 函数的间断点

定义：若$f(x)$在x_0处出现如下三种情况

(1) $f(x)$在x_0处无定义

(2)有定义,但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在

(3)有定义,极限存在,但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

称$f(x)$在点x_0不连续，或x_0是$f(x)$的间断点

间断点x_0的类型

第一类间断点$\triangleq$ $f(x)$在点x_0左右极限都存在

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$或无定义　x_0是可去间断点

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$　x_0是跳跃间断点

二、 函数的间断点

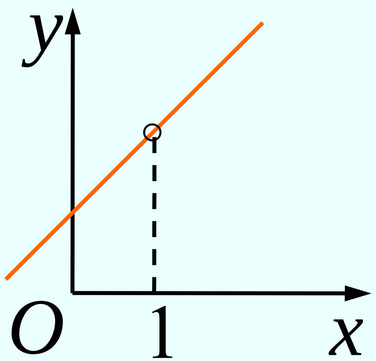
第一类间断点 $\triangleq$ $f(x)$在点x_0左右极限都存在

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$或无定义 x_0是可去间断点

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$ x_0是跳跃间断点

例 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

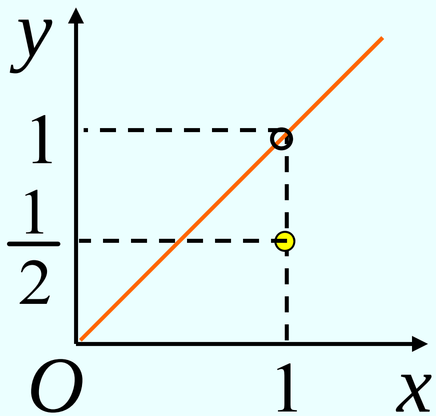
$x=1$为可去间断点



例 $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1\neq f(1)$

$x=1$为可去间断点



二、 函数的间断点

第一类间断点 $\triangleq$ $f(x)$在点x_0左右极限都存在

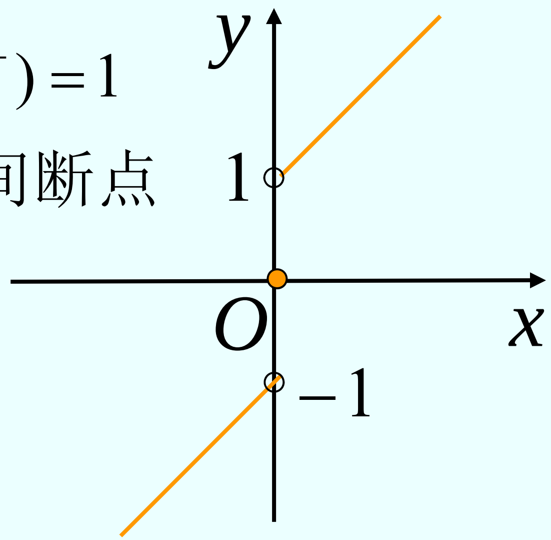
若 $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$或无定义　x_0是可去间断点

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$　x_0是跳跃间断点

例 $y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

$f(0^-) = -1,\ f(0^+) = 1$

$x=0$ 为其跳跃间断点



例 $g(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

$g(0^-) = -1$

$g(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = 1$

$x=0$跳跃间断点

二、 函数的间断点

第一类间断点 $\triangleq$ $f(x)$在点x_0左右极限都存在

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$或无定义　　x_0是可去间断点

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$　　x_0是跳跃间断点

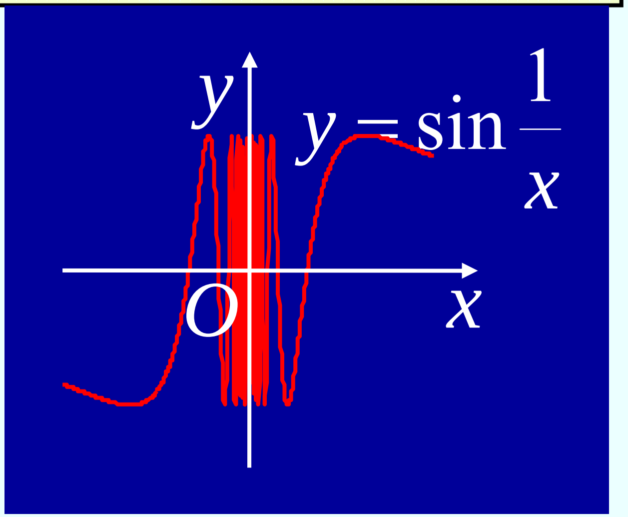
第二类间断点 $\triangleq$ $f(x)$在点x_0左右极限至少有一个不存在

若$f(x_0^-), f(x_0^+)$有一个为∞　　x_0是无穷间断点

若其中有一个为振荡　　x_0是振荡间断点

例　$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,　$x=0$无穷间断点

例　$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,　$x=0$振荡间断点



三、典型题(间断点)

例1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e}$ 的间断点,并判别间断点的类型

典型题

解: $x_1=1, x_2=0$ 为间断点

找间断点的办法:
找不在定义区间
里的点

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty,\quad x=1$第二类无穷间断点

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\dfrac{1}{e},\quad x=0$第一类跳跃间断点

三、典型题(间断点)

例2 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的连续性,并判别间断点的类型

> **讨论函数的连续性即求出连续范围；讨论函数在$x=x_0$的连续性即判定该点是否连续**

解： $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-$

$f(x)$在其定义域内是连续的，$x_1=$

① $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x}{-x(x^2-1)}$　　$x=-1$第二类无穷间断点

② $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}$　　$x=1$第一类可去间断点

③ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-x}{-x(x^2-1)}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-x}{x(x^2-1)}$　　$x=0$第一类跳跃间断点