第七章

微分方程

§1 微分方程的基本概念

§2 可分离变量的微分方程

§3 齐次方程

§4 一阶线性微分方程

§6 高阶线性微分方程

§7 常系数齐次线性微分方程

§8 常系数非齐次线性微分方程

第七章

第2-4节

一阶微分方程

内容

一 可分离变量的微分方程

二 齐次方程

三 一阶线性微分方程

一 可分离变量的微分方程

形如 $f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y$ ①

假定$f(x)$,$g(y)$连续,设$y=\varphi(x)$是方程①的解,则有恒等式

$$f(x)\,\mathrm{d}x = g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$

$$F(x)=G(y)+C=G(\varphi(x))+C \quad ②$$

说明方程①的解满足关系式②

反之 由这个关系式 $F(x)=G(y)+C \Rightarrow y=\Phi(x)$

是方程的解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\Phi'(x)=-\frac{F'(x)}{-G'(y)}=\frac{f(x)}{g(y)} \quad (g(y)\neq 0)$$

说明关系式②确定的隐函数是方程①的解

解法 **分离变量** $f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y$

两边积分 $\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(y)\mathrm{d}y$

$$F(x) = G(y) + C$$

例1 求下述微分方程的通解: ① $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$

解 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\mathrm{d}x$

$$\ln|y| = x^2 + \ln C_1 \quad (C_1 > 0)$$

$$|y| = C_1 e^{x^2}$$

$$y = \pm C_1 e^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2} \quad (C \neq 0)$$

或 $\ln y = x^2 + \ln C \quad (C \neq 0)$

$$y = Ce^{x^2}$$

$$y = 0 \quad (C\text{为任意常数})$$

$y = 0$也是解 (C允许为0) (C为任意常数)

② $(x^2+1)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$

解 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ $(y \neq 0)$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$\ln|y| = \arctan x + \ln C_1 \quad (C_1 > 0)$

$|y| = C_1 e^{\arctan x}$

$y = \pm C_1 e^{\arctan x} \Rightarrow y = Ce^{\arctan x} \quad (C \neq 0)$

$y = 0$也是解 $(C$为任意常数$)$

或 $\ln y = \arctan x + \ln C$

$y = Ce^{\arctan x}$ $(C \neq 0)$

$y = 0$也是解

$(C$为任意常数$)$

③ $xy' - y\ln y = 0$

解 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\ln\ln y = \ln x + \ln C \qquad (C \neq 0)$$

$$\ln y = Cx \Rightarrow y = e^{Cx}$$

另外$\ln y=0$ 得特解$y=1, C=0$

(C为任意常数)

④ $y\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0$

解 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{4x - x^2}$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4x - x^2}$

$$\int \frac{4}{y}\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$4\ln y = \ln x - \ln(4-x) + \ln C$$

$$\ln y^4 = \ln\left(\frac{Cx}{4-x}\right)$$

整理得 $y^4(4-x) = Cx$

$y = 0$也是解 (C为任意常数)

⑤ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2\sin x$

解 分离变量 $-\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\sin x\mathrm{d}x$

两边积分 $\displaystyle\int-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int\sin x\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{y}=-\cos x+C$$

从而通解为 $y=\dfrac{1}{-\cos x+C}$

$y=0$也是解(不能用通解表示)

全部解为

$$y=\frac{1}{-\cos x+C}\text{和}y=0$$

总结

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int x\mathrm{d}x$$

$$\ln y=\tfrac{1}{2}x^2+\ln C$$

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln y=\ln x+\ln C$$

$$\int y\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\tfrac{1}{2}y^2=\ln|x|+C$$

例2. 求方程满足所给初始条件的特解

$$y'\sin x = y\ln y \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$$

解: 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

两边积分得 $\ln\ln y = \ln(\csc x - \cot x) + \ln C$

$$\ln y = C(\csc x - \cot x) = C\tan\frac{x}{2}$$

$$y = e^{C\tan\frac{x}{2}}$$

代入 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 得$C=1$ 特解为 $y = e^{\tan\frac{x}{2}}$

$$(\csc x - \cot x) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

变量代换 使得变换后的方程是熟知的方程类型

i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$ 作变换$u=ax+by+c$

用u换y,求出$u=u(x)$,最后代回给出$y=y(x)$

ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 当$a_1x+b_1y=\lambda(a_2x+b_2y)$

作变换$u=a_1x+b_1y$,后面步骤同上

iii) $[P(x)+Q(x+y+c)]\mathrm{d}x+Q(x+y+c)\mathrm{d}y=0$ 令$u=x+y+C$

$$[P(x)+Q(u)]\mathrm{d}x+Q(u)(\mathrm{d}u-\mathrm{d}x)=0 \quad \Rightarrow P(x)\mathrm{d}x+Q(u)\mathrm{d}u=0$$

iv) $x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(xy)$ 作变换$v=xy$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$x\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-y\right)=f(v)\Rightarrow x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-v=f(v)$$

例3 用适当变量代换化简下列方程, 并求出通解

① $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$

解 $y' = (y + \sin x - 1)^2 - \cos x$

令 $v = y + \sin x - 1$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \cancel{\cos x} = v^2 - \cancel{\cos x}$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2} = \mathrm{d}x$

两边积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int \mathrm{d}x$

$$-\frac{1}{v} = x + C$$

$$v = -\frac{1}{x + C}$$

$$y + \sin x - 1 = -\frac{1}{x + C}$$

$$y = 1 - \sin x - \frac{1}{x + C}$$

例3 用适当变量代换化简下列方程，并求出通解

② $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{1}{2y}\tan\dfrac{y^2}{x}$

解 令$u=\dfrac{y^2}{x}\Rightarrow y^2=xu$

$$\Rightarrow 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$$

$$\cancel{u}-\tan u=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\cancel{u}$$

分离变量$\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\ln\sin u=-\ln x+\ln C$$

$$\sin u=\frac{C}{x}$$

$$\sin\frac{y^2}{x}=\frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow y^2=x\cdot\arcsin\frac{C}{x}$$

(C为任意常数)

二 齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$

特点 每一个单项式 $x^l y^m$ 的次数和 $l+m$ 都是相同的

步骤 令 $u=\dfrac{y}{x}\ \Rightarrow y=xu$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u)$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\quad (\varphi(u)\neq u)$

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

求出积分后,再以 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u,便得通解

注: 如果 $\varphi(u)-u=0\Rightarrow u=a$ 则 $y=ax$ 也是方程的解

例1. 解微分方程 $y^2 + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1}$

令 $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$

代入原方程得 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{u-1}$

分离变量 $(1 - \frac{1}{u})\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分 $u - \ln u = \ln x + \ln C \Rightarrow u = \ln Cxu$

代入 $u = \frac{y}{x}$ 故原方程的通解为 $\frac{y}{x} = \ln Cy \quad (C \neq 0)$

例2 求微分方程$(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$的通解

解: 将方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-2xy-3x^2}{x^2-2xy}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2-2\frac{y}{x}-3}{1-2\frac{y}{x}}$

令 $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=xu\ \Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$

代入原方程得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\dfrac{u^2-2u-3}{1-2u}\Rightarrow\dfrac{1-2u}{3(u^2-u-1)}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分 $-\frac{1}{3}\ln(u^2-u-1)=\ln x+\ln C$

$\Rightarrow\ln(u^2-u-1)=\ln(Cx)^{-3}$

故原方程的通解为 $\dfrac{y^2-xy-x^2}{x^2}=C^{-3}x^{-3}$

例3. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 满足 $y|_{x=1} = 2$ 的特解

解: 令 $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$

代入原方程得 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \cancel{u} = \cancel{u} + \frac{1}{u}$

分离变量 $u\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

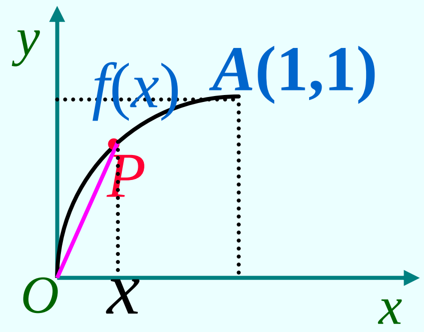
两边积分 $\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

得 $\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C \Rightarrow u^2 = 2(\ln|x| + C) \Rightarrow y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$

由 $y|_{x=1} = 2$ 得$2C=4$, $\therefore C = 2$

特解为 $y^2 = 2x^2(\ln|x| + 2)$

例4. 设有连结$O(0,0)$和$A(1,1)$的一段向上凸的曲线段$\overset{\frown}{OA}$，对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点$P(x,y)$，曲线弧$\overset{\frown}{OP}$与直线$\overline{OP}$围成的图形面积为x^2，求曲线弧的方程



解： 设曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程为$y=f(x)$

由题意 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xf(x)=x^2$ 且$f(1)=1$

两边求导 $f(x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}xf'(x)=2x$

得 $y-xy'=4x \Rightarrow y'=\frac{y-4x}{x}=\frac{y}{x}-4$

令$u=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$

代入 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\cancel{u}=\cancel{u}-4$

$$\mathrm{d}u=\frac{-4}{x}\mathrm{d}x$$

积分 $u=-4\ln x+C$　　$x>0$

$$\frac{y}{x}=-4\ln x+C$$

$$f(1)=1 \Rightarrow C=1$$

故特解 $y=x(1-4\ln x)$

三 一阶线性微分方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ $\begin{cases}\text{若}Q(x)\equiv 0 & \text{齐次}\\ \text{若}Q(x)\not\equiv 0 & \text{非齐次}\end{cases}$

注意 一定要化为标准形式,即 y' 的系数为1

求一阶线性微分方程的解一般有两种方法:

第一种方法是常数变易法:

①先求齐次 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的通解

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \ln y=\int -P(x)\mathrm{d}x+\ln C \Rightarrow y=C\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

②再将常数C变易成函数$C(x)$,即 $y=C(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

代入非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 求出$C(x)$即可

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - \cancel{C(x)P(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} + \cancel{P(x)C(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} = Q(x)$$

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C \quad \text{则}$$

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) \longrightarrow \text{通解公式}$$

第二种方法是公式法:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \quad y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)}$$

②再将常数C变易成函数$C(x)$,即 $y = C(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

代入非齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$求出$C(x)$即可

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-C(x)P(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)C(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\Rightarrow C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C \quad \text{则}$$

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\longrightarrow \text{通解公式}$$

第二种方法是公式法:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \qquad y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y) \qquad x=e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\cdot\left(\int Q(y)e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)}$$

例1. 利用常数变易法求解方程 $y' + \frac{2x}{x^2-1} y = \frac{\cos x}{x^2-1}$

解: 先解 $y' + \frac{2x}{x^2-1} y = 0$ 的通解 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2-1}$

积分得 $\ln y = -\ln(x^2-1) + \ln C$, 即 $y = \frac{C}{x^2-1}$

常数变易法　令 $y = \frac{C(x)}{x^2-1}$

则 $\frac{C'(x)\cdot(x^2-1) - C(x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} + \frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{C(x)}{x^2-1} = \frac{\cos x}{x^2-1}$

$\Rightarrow C'(x) = \cos x \Rightarrow C(x) = \sin x + C$

故原方程通解为 $y = \frac{\sin x + C}{x^2-1}$

例1. 利用常数变易法求解方程 $y'+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$

解法二

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}\left(\int\frac{\cos x}{\cancel{x^2-1}}\cdot \cancel{e^{\ln(x^2-1)}}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left(\sin x+C\right)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)\qquad y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)}$$

例2. $(x-2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$

解 可写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$

公式法 $y=e^{\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\left(\int 2(x-2)^2\cdot e^{-\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$

$$=e^{\ln(x-2)}\left(\int 2(x-2)^{\cancel{2}}\cdot e^{\cancel{-\ln(x-2)}}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=(x-2)\,[(x-2)^2+C]$$

$$=(x-2)^3+C(x-2)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)\qquad y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)}$$

例3. $(y^2-6x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$

分析 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2y}{y^2-6x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{y^2-6x}{2y}=\dfrac{3}{y}x-\dfrac{y}{2}$

解 化成标准方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{3}{y}x=-\dfrac{y}{2}$

$$x=e^{\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\left(\int-\frac{y}{2}\cdot e^{-\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=e^{3\ln y}\left(\int-\frac{y}{2}\cdot e^{-3\ln y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=y^3\left(\int-\frac{y}{2}\cdot y^{-3}\mathrm{d}y+C\right)=y^3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}+C\right)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y)\qquad y=e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\cdot\left(\int Q(y)e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)}$$

例4. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^4}$ 的通解

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x+y^4}{y}=\dfrac{1}{y}x+y^3$ 化成标准方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}x=y^3$

$$x=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int y^3\cdot e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=e^{\ln y}\left(\int y^3\cdot e^{-\ln y}\,\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=y\left(\int y^2\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=y\left(\frac{1}{3}y^3+C\right)=\frac{1}{3}y^4+Cy$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y)\qquad x=e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\cdot\left(\int Q(y)e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)}$$

*四 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

$$\begin{cases}\text{若}n=0 & \text{一阶线性微分方程}\\ \text{若}n=1 & \text{可分离变量}\end{cases}$$

解法: 以y^n除方程两端 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

利用变量代换令 $z=y^{1-n} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

代入得 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$

一阶线性

求出通解后,以y^{1-n}代z便得通解

解法关键: $\boxed{\text{记住 } z=y^{1-n}}$

$\times(-3y^{-4})$

例. 求方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$ 的通解.

解: 令 $z=y^{1-4}=y^{-3}$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=-3y^{-4}\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}-z=2x-1$$

其通解为 $z=e^{\int dx}\left[\int(2x-1)\cdot e^{-\int dx}\,dx+C\right]$

$$=(-2x-1)+Ce^{x}$$

将 $z=y^{-3}$ 代入, 得原方程通解:

$$y^{-3}=(-2x-1)+Ce^{x}$$

伯努利(1654 – 1705)

(雅各布第一·伯努利)


雅各布第一·伯努利

瑞士数学家, 他家祖孙三代出过十多位数学家. 1694年他首次给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式, 1695年提出了著名的伯努利方程, 1713年出版了他的巨著《猜度术》, 这是组合数学与概率论史上的一件大事, 书中给出的伯努利数在很多地方有用, 而伯努利定理则是大数定律的最早形式. 此外, 他对双纽线, 悬链线和对数螺线都有深入的研究 .