第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理 (第1节)
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式 (第3节)
- 柯西中值定理

洛必达法则求极限 (第2节)

导数应用 (第4-7节) 研究曲线的性态包括**单调性**，极值，**最值**，**凹凸性**，**拐点**，**曲率**等

第五节

函数的极值与最大值最小值

内容

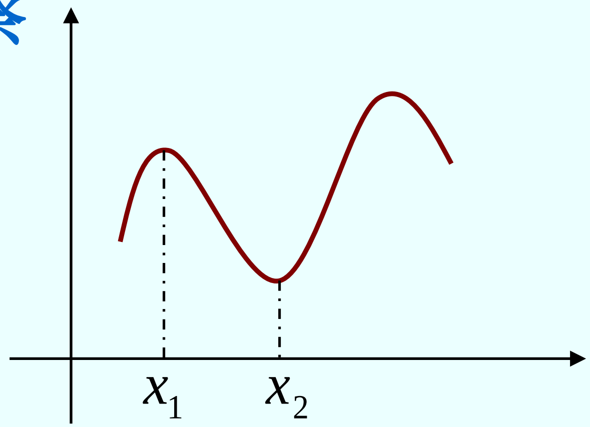
一、极值

二、极值的题型

三、最值的题型

一、极值

观察

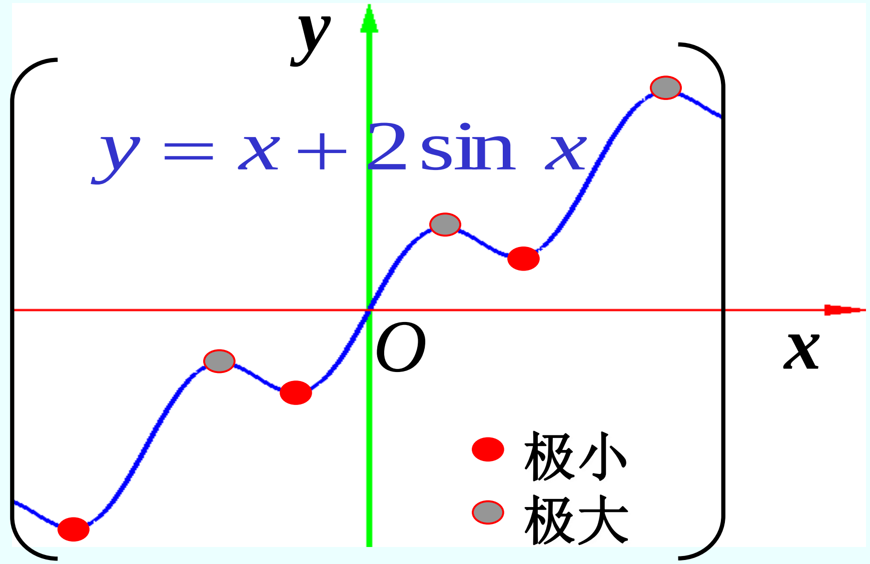


在 x_1 左右两侧 $f(x) < f(x_1)$

在 x_2 左右两侧 $f(x) > f(x_2)$

1.定义 设函数 $f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义,且对于该邻域内的任一 x $(x \neq x_0)$,有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$),称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值), x_0是极大值点(或极小值点), 函数的极大值与极小值统称为**极值**。

说明 极值与最值的关系



(1) 极值未必是最值，

最值未必是极值

(2) 极值是函数在某点小邻域内的最值。

某区间上可能有多个极值，

甚至某点极小值大于另外一点极大值。

(3) 最值是在某区间上取得的最大(小)值,它可能是极值,

也可能是边界点值,甚至于不存在最值(开区间)。

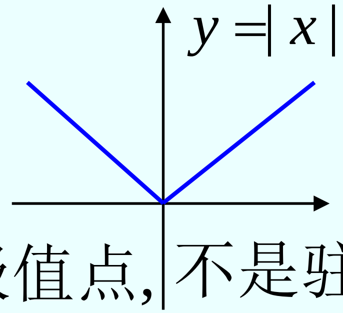
费马引理 设函数$f(x)$在点x_0的$U(x_0)$内有定义，且$f'(x_0)$存在，如果对$\forall x \in U(x_0)$有$f(x) \le f(x_0)$（或$f(x) \ge f(x_0)$），则$f'(x_0) = 0$.

2. 极值存在的条件

定理1(必要条件) 设函数$f(x)$在x_0处**可导**，且在x_0处取得**极值**，那么$f'(x_0) = 0$. 即x_0是**驻点**

说明： ①极值点与驻点的关系

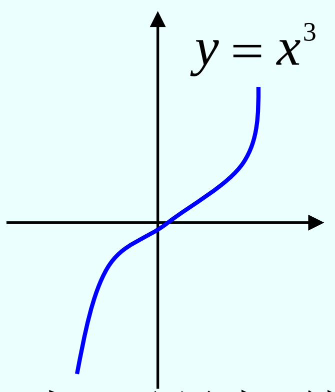
$$极值点\begin{cases}可导，是驻点\\ 不可导 \quad 例\ y = |x|\end{cases}$$



$x = 0$是极值点，不是驻点

极值点不一定是驻点.

驻点不一定是极值点. 例 $y = x^3$



$x = 0$是驻点，不是极值点

说明:②求极值问题

一般需先求出函数在该区间上的全体驻点和导数不存在的点，逐一考察它是否在小邻域上是最值

③求最值问题

一般需先求出函数在该区间上的全体驻点和导数不存在的点以及边界点，然后将这些点的函数值予以比较，找到最值，特殊情况下，求最值可以简化

i)如$f(x)$在$[a,b]$上单调,最值必在端点处达到.

ii)如$f(x)$在一个区间(有限或无限,开或闭)内可导且只有一个驻点x_0,若$f(x_0)$为极大(小)值,则$f(x_0)$为最大(小)值,

iii)对于实际问题,根据问题的背景,若能够知道$f(x)$的最大(小)值一定在(a,b)内取得,这时若$f(x)$在(a,b)内只有唯一的可疑极值点(驻点x_0),则$f(x_0)$即是所求的最大(小)值

定理2(第一充分条件)　极值第一判别法

设函数 $f(x)$在x_0连续,且在 x_0 的某去心邻域内可导.

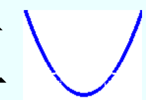
1) $x \in (x_0 - \delta, x_0)$　$(x_0, x_0 + \delta)$

$f'(x) > 0$　　$f'(x) < 0$

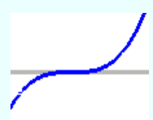
$f(x_0)$ 极大值 

2) $x \in (x_0 - \delta, x_0)$　$(x_0, x_0 + \delta)$

$f'(x) < 0$　　$f'(x) > 0$

$f(x_0)$ 极小值 

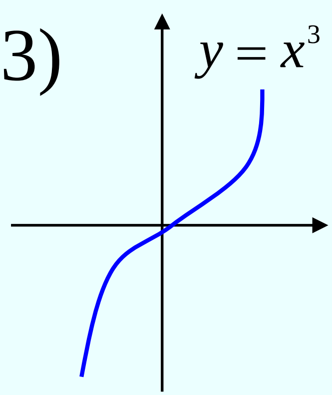
3) $x \in (x_0 - \delta, x_0)$　$(x_0, x_0 + \delta)$

$f'(x)$ 恒正或恒负 

$f(x)$在x_0处不取得极值.

证明

3)



$f'(x)$恒正

$f(x)$在x_0处没有极值.

定理3(第二充分条件) 极值第二判别法

设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数, 且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$

(1) $f''(x_0)<0 \ \overset{<}{\Rightarrow}\ f(x_0)$极大值

(2) $f''(x_0)>0 \ \overset{>}{\Rightarrow}\ f(x_0)$极小值

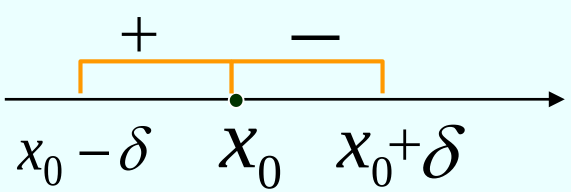
(3) $f''(x_0)=0$ 待定用第一充分条件判断

证: (1) $\quad f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$知, 存在$\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当$x_0-\delta<x<x_0$时, $f'(x)>0$;

当$x_0<x<x_0+\delta$时, $f'(x)<0$,



由第一判别法知 $f(x)$在x_0取极大值.

二、极值的题型

1. 求 $y=f(x)$的极值的步骤

i)求 $f'(x)=0$及$f'(x)$不存在的点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

ii)

	(a, x_1)	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)	$\cdots$	(x_n, b)
y'	$+$	不存在	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大	↘	不是极值	↘	极小	↗

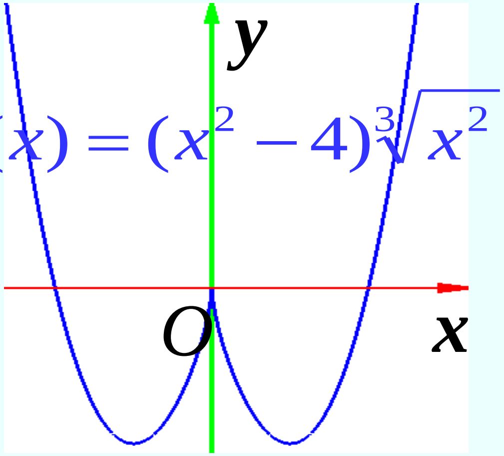
对$x_1, x_2, \ldots, x_n$逐一讨论

对x_1不可导点，利用第一充分条件

对x_2等驻点，求$f''(x_2)$，看$f''(x_2) > 0 / < 0$，极小/极大

若$f''(x_2) = 0$，利用第一充分条件

例1 求函数$f(x)=(x^2-4)\sqrt[3]{x^2}$的极值.



解 $f'(x)=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$.

由此可得驻点为 -1，1. 另外，当 $x=0$ 时，$f'(x)$不存在.

用第一充分条件判别，列表如下：

	$(-\infty,-1)$	-1	(-1, 0)	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	不∃	−	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗
		极小值		极大值		极小值	

例2. 求函数$f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2, \qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

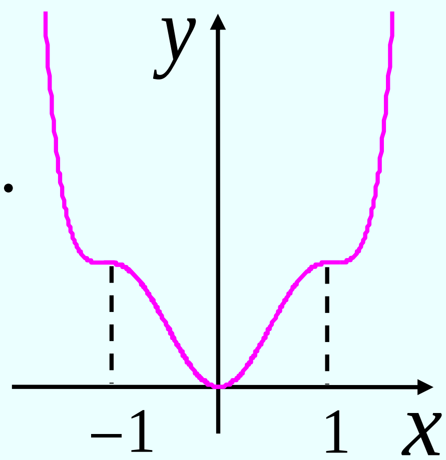
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 用第一充分条件判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.



例3. 求$f(x)=a^3x^3-a^2x^2-ax-a$在x=1处取得极小值，

则a= ？

解: $f'(x)=3a^3x^2-2a^2x-a$

$f'(1)=3a^3-2a^2-a=0 \Rightarrow a=0,1,-\frac{1}{3}$

$f''(x)=6a^3x-2a^2$

a=0时，$f(x)\equiv 0$ 排除0

$a=-\dfrac{1}{3}$，$f''(1)<0$，$x=1$为极大值，排除$-\dfrac{1}{3}$

a=1时，$f''(1)=4>0$， x=1为极小值

$\therefore a=1$

二、极值的题型

2. 讨论方程根的问题（极值法）

例. 证明方程$x\ln x+\frac{1}{e}=0$只有一个实根

证: 设$\varphi(x)=x\ln x+\frac{1}{e}\quad(x>0)$

则$\varphi'(x)=\ln x+1$

令$\varphi'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$

$\varphi''(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi''(\frac{1}{e})=e>0$

$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上$x=\frac{1}{e}$取得极小值

当$x\neq\frac{1}{e}$时,$\varphi(x)>\varphi(\frac{1}{e})=0$

$\therefore\varphi(x)$只有一个实根$x=\frac{1}{e}$

二、极值的题型

3. 判断极值点、拐点的问题

利用极限保号性,极限与无穷小关系,泰勒公式,第一、二充分条件

例1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|}=1$, $f(x)$在0的某邻域连续,问$f(0)$是极大/小?

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|}=1,\quad f(0)=0$

由保号性,在$\mathring{U}(0,\delta)$, $\dfrac{f(x)}{|x|}>0 \quad \therefore f(x)>0=f(0)$

$f(0)$为极小值

二、极值的题型

3. 判断极值点、拐点的问题

若$f(x)$二阶可导

例2. 设$f(x)$的导数在$x=a$处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,

则$x=a$是极大值、极小值？拐点？

解: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$, $f'(a)=0$

法一 由保号性，在$\mathring{U}(a,\delta)$, $\dfrac{f'(x)}{x-a}<0$

当$x<a$时$f'(x)>0$, 当$x>a$时$f'(x)<0$, 故$f(a)$为极大值

法二 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)=-1<0$

故$f(a)$为极大值

二、极值的题型

3. 判断极值点、拐点的问题

若$f(x)$二阶可导

例2. 设$f(x)$的导数在$x=a$处连续，又$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,

则$x=a$是极大值、极小值？拐点？

解: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{1}=-1$, 在$\mathring{U}(a,\delta)$, $f''(x)<0$

故$(a,f(a))$不是拐点

二、极值的题型

3. 判断极值点、拐点的问题

例3. 设$f(x)$有二阶连续导数，且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1,$

则$f(0)$是极大值、极小值、拐点？

解: 由保号性，在$\overset{\circ}{U}(0,\delta)$, $\dfrac{f''(x)}{|x|}>0 \quad \therefore f''(x)>0$

知$(0,f(0))$ 不是拐点

由于在 $\overset{\circ}{U}(0,\delta)$, $f''(x)>0$, $f'(x)$单调增加

当$x<0$时$f'(x)<f'(0)=0$ $\searrow$, 当$x>0$时$f'(x)>f'(0)=0,$ $\nearrow$

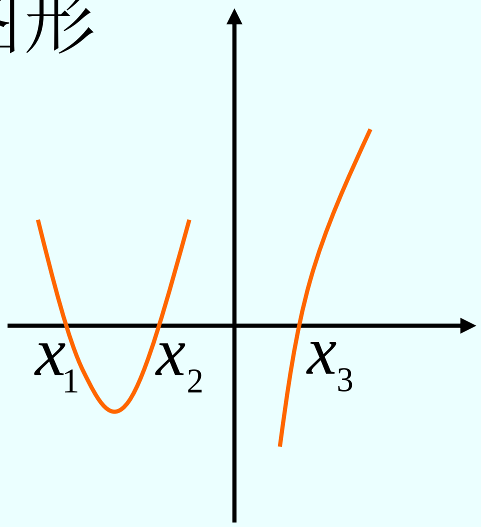
故$f(0)$为极小值

二、极值的题型

3. 判断极值点、拐点的问题

例4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形

求$f(x)$的极值点?



分析: 极值点出现在导数为零或不可导点

$f'(x)=0$的点有x_1,x_2,x_3

导数不存在的点$x=0$

在x_1左侧$f'(x)>0$,右侧$f'(x)<0$, $\therefore f(x_1)$是极大值

同理$f(x_2)$极小值，$f(x_3)$极小值

在0的左侧$f'(x)>0$,右侧$f'(x)<0$, $\therefore f(0)$是极大值

三、最值的题型

1. $y=f(x)$在$[a,b]$上的最值

求 $f'(x)=0$及$f'(x)$不存在的点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

$$\max\{f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n), f(a), f(b)\} = M$$

$$\min\{f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n), f(a), f(b)\} = m$$

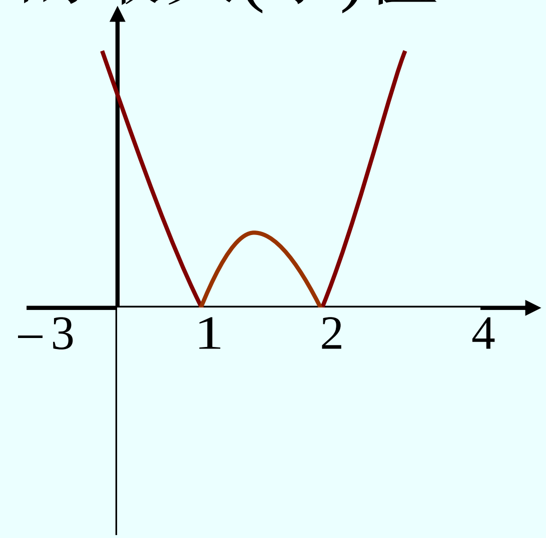
例1. 求函数$f(x)=x+2\cos x$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值最小值

解: $f'(x)=1-2\sin x=0$ 得驻点$x=\frac{\pi}{6}$

比较 $f(0)=2$, $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$,

最大值 最小值

例2. 求函数 $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ 在[-3,4]上的最大(小)值



解: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2, & x\in(1,2) \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3, & x\in(1,2) \end{cases}$$

在(-3,4)内驻点 $x=\frac{3}{2}$　　不可导点 $x=1,2$

边界点 $x=-3,4$

$$f(-3)=20,\quad f(1)=0,\quad f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4},\quad f(2)=0,\quad f(4)=6,$$

最大值 20　最小值 0

三、最值的题型

2. $y=f(x)$在(a,b)上的最值

求 $f'(x)=0$及$f'(x)$不存在的点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

$$\max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a+0), f(b-0)\} = M$$

$$\min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a+0), f(b-0)\} = m$$

注：m,M中如有在 $x=a,b$处取得，则无最值

例. $y=x^2+2x-2$在$(-1,2)$的最值

解: $y' = 2x + 2 = 0 \quad x = -1$

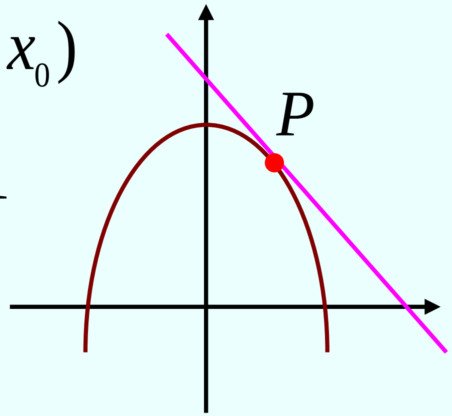
无最值

三、最值的题型

3. 最值的应用题

例1.在抛物线y=4-x^2的第一象限部分求一点P，过P点做切线，使该切线与坐标轴所围成的三角形面积最小

解： 设切点(x_0,y_0)，切线方程 $y-y_0=-2x_0(x-x_0)$



即$y-(4-x_0^2)=-2x_0x+2x_0^2$　　$\dfrac{x}{\frac{x_0^2+4}{2x_0}}+\dfrac{y}{x_0^2+4}=1$

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+4}{2x}\cdot(x^2+4)\quad=\frac{1}{4}\cdot(x^3+8x+\frac{16}{x})$$

$S'(x)=\dfrac{1}{4}(3x^2+8-\dfrac{16}{x^2})$　令$S'(x)=0, x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　$S''(x)=\dfrac{1}{4}(6x+\dfrac{32}{x^3})$

$S''(\dfrac{2}{\sqrt{3}})>0$，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$为最小值点，故所求点为$P(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{8}{3})$

例2. 求$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n}$的最大值

解: 令$f(n)=\sqrt[n]{n}$ $\quad f(x)=\sqrt[x]{x}$

$$f'(x)=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=0$$ 则$x=e$

	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

$2<e<3$ 从而数列的最大项可能在n=2或n=3取得

$f(2)=\sqrt{2},\ f(3)=\sqrt[3]{3}$ $\quad\because (\sqrt{2})^6=8,\ (\sqrt[3]{3})^6=9$

$$\therefore f(n)_{\max}=\sqrt[3]{3}$$