第九章

第六节

多元函数微分学的几何应用

内容

一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

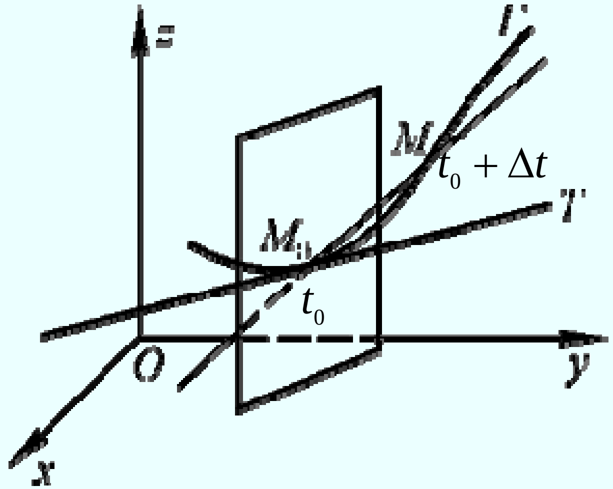
一、空间曲线的切线与法平面

1.设空间曲线 Γ 的参数方程为

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 假定$x(t)$,$y(t)$,$z(t)$在t_0可微,且 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 不同时为零. $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$, 则在$M_0(x_0,y_0,z_0)$点的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

证

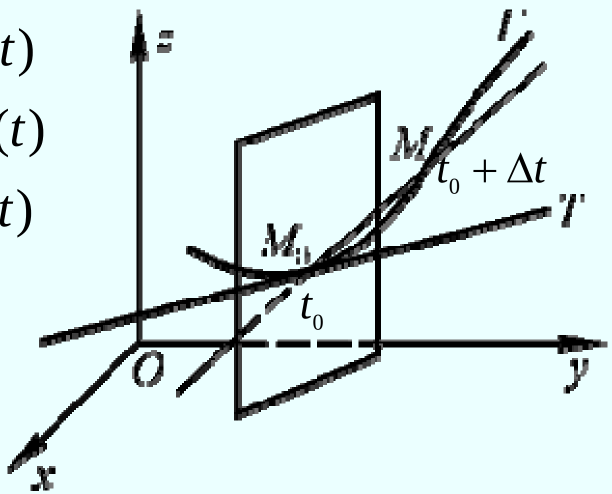


$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

割线M_0M方程

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

证 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

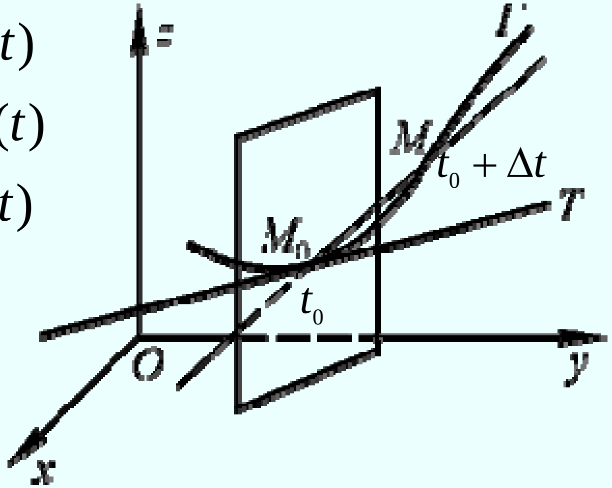


$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

割线M_0M方程

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

证 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

割线M_0M方程

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

上式中各分母除以Δt得 $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{y - y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}} = \dfrac{z - z_0}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}$,

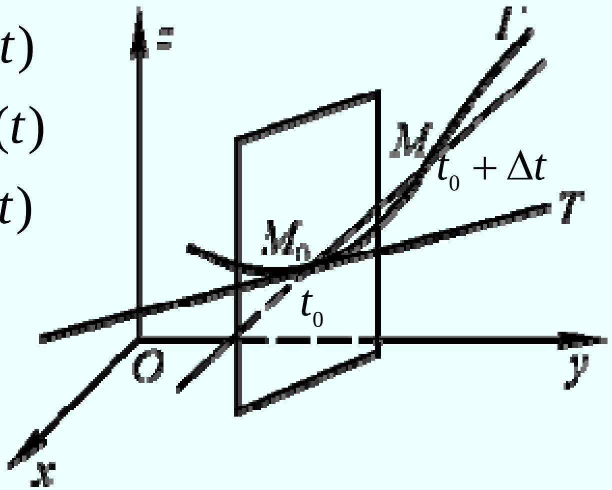
令$M \to M_0 (\Delta t \to 0)$可得**切线方程**

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}}$$

说明 ①切线的方向向量$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

称为曲线的**切向量**

证 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

割线M_0M方程

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

上式中各分母除以Δt得 $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{y - y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}} = \dfrac{z - z_0}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}$,

令$M \to M_0 (\Delta t \to 0)$可得切线方程

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}}$$

说明 ② 通过切点且与切线垂直的平面称为法平面

法平面方程 $\boxed{x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0}$

例1 求螺旋线 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线与法平面方程.

解 $(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta) = (a,0,0) \longrightarrow \theta = 0$

切向量 $(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\big|_{\theta=0} = (0, a, b)$

切线方程 $$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$$

法平面方程 $0\cdot(x-a) + a\,y + b\,z = 0$

2. 空间曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases} \text{转化为参数方程} \begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程 $x-x_0+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

平面曲线的法向量　设方程为 $F(x,y)=C$

切线方程 $y-y_0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x-x_0)$ 或 $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$

切向量 $\left(1 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ 或 $\left(1 \quad -\frac{F_x}{F_y}\right)$

或 $(F_y \quad -F_x)$

法向量 $(F_x \quad F_y)$

平面曲线一点处的法向量

下节梯度会用到

3. 空间曲线 Γ 由 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 确定, $M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲线上一点

$$\text{切向量} T=\left(1\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}$$

$$\text{确定隐函数} \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$

两边同时对x求导得

$$\begin{cases} F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ G_x+G_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G_z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}\neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

切线的方向向量(切向量)

怎么记

$$T=\left(1\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

例2 求曲线 $\begin{cases} \underline{x^2+y^2+z^2-3x=0} \\ \underline{2x-3y+5z-4=0} \end{cases}$ 在点(1,1,1)处的切线与法平面方程

解法一 关键要抓住两点:点与方向

对x求导 $\begin{cases} 2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\cdot\dfrac{dz}{dx}-3=0 \\ 2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} 3-2x & 2z \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{15-10x+4z}{10y+6z}\Bigg|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} 2y & 3-2x \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{10y+6z}=\frac{9-6x-4y}{10y+6z}\Bigg|_{(1,1,1)}=\frac{-1}{16}$$

切向量 $\left(1 \quad \dfrac{9}{16} \quad \dfrac{-1}{16}\right)$

或 $(16 \quad 9 \quad -1)$

切线方程

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面方程

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$$

或 $16x+9y-z-24=0$

例2 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1)处的切线与法平面方程

解法二 关键要抓住两点:点与方向

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x$$

$$G(x,y,z)=2x-3y+5z-4$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-3 & 2y & 2z \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\left[10y+6z,\ -(10x-15-4z),\ \ -6x+9-4y\ \right]\Big|_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix}16 & 9 & -1\end{pmatrix}$$

切线方程 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程 $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

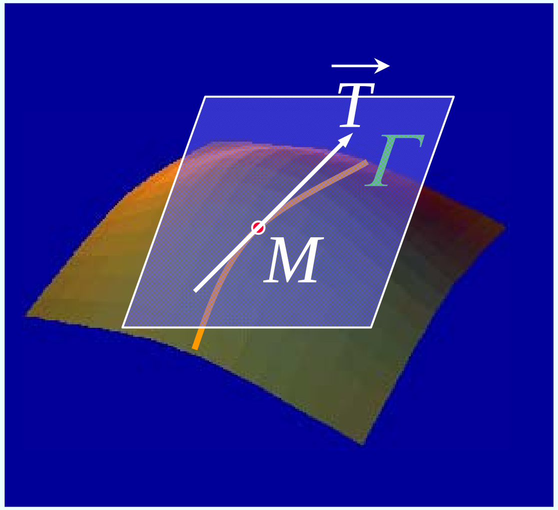
二、曲面的切平面与法线

设隐式曲面方程 $\Sigma: F(x,y,z)=0$, $M(x_0,y_0,z_0)$为Σ上的一点,
设函数$F(x,y,z)$的偏导数在该点连续且不同时为零.

往证: 任何过 M点的Σ上的曲线,

若切线存在, 则所有的切线都在

同一平面上,称为M点的**切平面.**



例 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在(0,0,0)不存在切平面

$z=\sqrt{|xy|}$ 在(0,0,0)不存在切平面

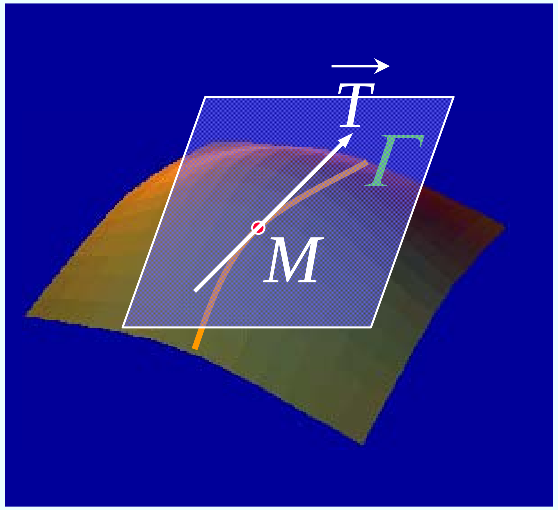
二、曲面的切平面与法线

设隐式曲面方程 Σ:$F(x,y,z)=0$, $M(x_0,y_0,z_0)$为Σ上的一点,

设函数$F(x,y,z)$的偏导数在该点连续且不同时为零.

往证: 任何过 M点的Σ上的曲线,

若切线存在, 则所有的切线都在同一平面上,称为M点的切平面.



推导: 设Γ是Σ上任一过M点的曲线

Γ的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $t=t_0$对应于点$M(x_0,y_0,z_0)$

且$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为零, 则这曲线的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

推导: 设Γ是Σ:$F(x,y,z)=0$,上任一过M点的曲线

Γ的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $t=t_0$对应于点$M(x_0,y_0,z_0)$

且$\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\omega'(t_0)$不全为零, 则这曲线的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

因为Γ完全在Σ上,所以有$\underline{F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}\equiv 0$

又因$F(x,y,z)$在M处有连续偏导数且$\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\omega'(t_0)$存在

所以左边的复合函数在$t=t_0$时有全导数,且导数等于0

$$\boxed{\begin{aligned} F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0) \\ +F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0 \end{aligned}}$$

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

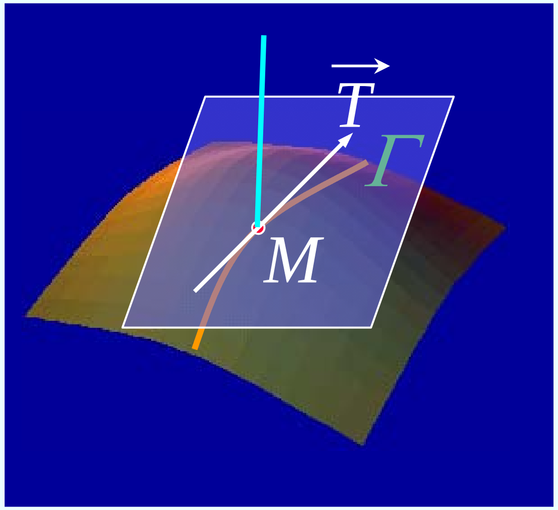
$$\boxed{\begin{aligned}F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)\\+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0\end{aligned}}$$

令 $\vec{n}=\boxed{(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))}$ 法向量

$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ 切向量 $\vec{T}\perp\vec{n}$

上式表示过M点Γ上的切向量与$\vec{n}$垂直

即任何曲线的切线都在同一点与同一直线垂直,所以切线共面



通过点$M(x_0,y_0,z_0)$而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的**法线**

1.设曲面方程$F(x,y,z)=0$,则在点$M(x_0,y_0,z_0)$处

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2.设曲面方程为$z=f(x,y)$,则在点$M(x_0,y_0,z_0)$处

切平面方程 令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

说明: ①记忆 直线L $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 作为两平面的交线

L的方向向量 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ 平面法向量的向量积

空间曲线Γ $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 作为两曲面的交线

M_0处的切向量 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}$ 曲面法向量的向量积

②如果用α,β,γ 表示曲面的法向量的方向角,并假定法向量的方向是向上的,即使得它与z轴的正向所成的角γ是锐角,则法向量的方向余弦是 令$F(x,y,z)=z-f(x,y)$

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

例1 求曲面$z = y + \ln\frac{x}{z}$在点$M(1,1,1)$处的切平面,法线方程和向上法线的方向余弦

解 令$F(x,y,z) = z - y - \ln\frac{x}{z}$

$$F_x = -\frac{z}{x}\cdot\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} \qquad F_y = -1 \qquad F_z = 1 - \frac{z}{x}\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{z}$$

代入M点坐标得法向量$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

切平面方程 $-(x-1)-(y-1)+2(z-1)=0$ 即$x+y-2z=0$

法线方程 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

所求方向余弦 $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{6}}$ $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{6}}$ $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$

例2 求 $x^2+y^2+z^2=6$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线在点 M(1, -2,1) 处的切线和法平面方程

解 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $\quad F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$

$G(x,y,z)=x+y+z$

切向量 $T=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-2y)\Big|_{(1,-2,1)}=(-6,0,6)$

或 $(1 \quad 0 \quad -1)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程 $(x-1)-(z-1)=0$

即 $x-z=0$

例3 曲面S: $\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 和平面Π : $2x+2y+z-5=0$

(1)在S上求一点使其切平面与Π平行

(2)求曲面S与Π的最短距离

解 (1)在点(x,y,z)处曲面S的法向量$(x,2y,\frac{z}{2})$与$(2,2,1)$平行

$$\boxed{\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{z/2}{1}}\quad \text{即 } x=2y=z$$

因点(x,y,z) 满足曲面方程,解得$y=\pm\frac{1}{2}$, $x=z=\pm1$

即S上的点$\boxed{(1,\frac{1}{2},1)}$和$(-1,-\frac{1}{2},-1)$ 处的切平面均与Π平行

(2)最短距离即为$(1,\frac{1}{2},1)$或$(-1,-\frac{1}{2},-1)$与Π 之间距离较小者

$$d=\frac{\left|2\cdot1+2\cdot\frac{1}{2}+1-5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{3}$$

例4 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行，其中$F(u,v)$为可微函数

解 往证曲面的法向量与某一定方向垂直即可

曲面的法向量为 $\{F_1', -mF_1'-nF_2', F_2'\}$

因为$\{m,1,n\}\bullet\{F_1', -mF_1'-nF_2', F_2'\}=0$

所以切平面与定方向$\{m,1,n\}$平行

即与以$\{m,1,n\}$为方向向量的直线平行