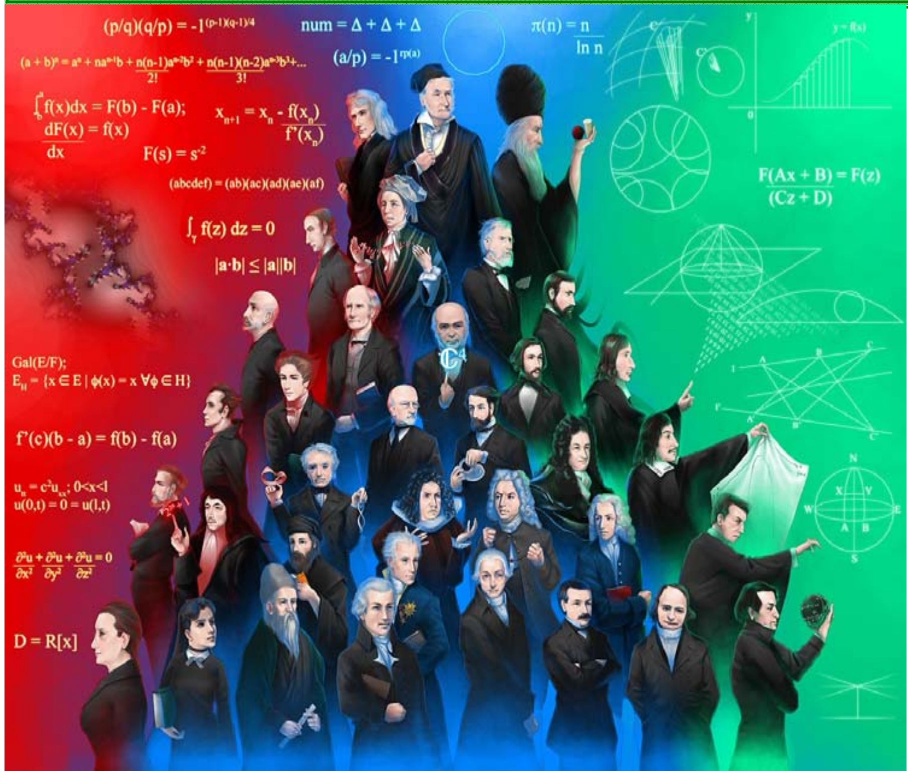
第十二章　无穷级数

- 无穷级数
  - 数项级数
    - §1 概念和性质
    - §2 如何判定
  - 幂级数
    - §3 收敛半径,和函数
    - §4 函数展开成幂级数
  - 傅里叶级数　§7,8函数展开成Fourier级数

第二节

常数项级数的审敛法



内容

一正项级数 比较,比值,根值

二 交错级数 莱布尼兹

三一般项级数 条件收敛

绝对收敛

一、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$

1.收敛准则　正项级数收敛$\Leftrightarrow$部分和数列有界

即 $\exists M, S_n \leq M$

证: $\Rightarrow$ $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\therefore \{S_n\}$收敛

收敛的数列必有界

$\therefore S_n \leq M$

$\Leftarrow$ $\because S_n \leq M$

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$

$\{S_n\} \nearrow$ 有上界

$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n$ 存在

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

2 比较法 (A)

$0 \le u_n \le v_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛　大收 小收

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散　小发 大发

关键: 需要适当选取一个已知敛散性的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 作为比较的基准

证: $T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$　　$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow T_n \le M$　$\therefore S_n \le T_n \le M$　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

反之,设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 由前面讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛　矛盾

2 比较法 (A)

$0 \le u_n \le v_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛　　大收 小收

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散　　小发 大发

关键: 需要适当选取一个已知敛散性的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 作为比较的基准

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\exists N$, 当 $n \ge N, u_n \le k v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $\exists N$, 当 $n \ge N, u_n \ge k v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

常用典型级数

p级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \begin{cases} \text{发散} & p\le 1 \\ \text{收敛} & p>1 \end{cases}$

解: 设 $p\le 1$, $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散

若 $p>1$, $\boxed{\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}\,\mathrm{d}x\le\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x}$

$$S_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\le 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

$$=1+\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^n=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

数列$\{s_n\}$有界,单调增,级数收敛

例1. 判定级数敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ $\quad \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$ $\quad \because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散 $\quad \therefore$ 原级数发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

$$\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$$ $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\quad \therefore$ 原级数发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\geq\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 发散

$\therefore$ 原级数发散

例2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$，当$a\in$ $\underline{(1,+\infty)}$ 时收敛

当$a\in$ $\underline{(0,1]}$ 时发散

解 $\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$

当$a>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛

当$a<1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$ 发散，

当$a=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散

2 比较法的极限形式(B)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n (v_n \geq 0) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

i) $0 < l < +\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同收敛同发散

ii) $l = 0$ $\frac{小}{大}$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \end{cases}$$

iii) $l = +\infty$ $\frac{大}{小}$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \end{cases}$$

说明: 比较法应熟练掌握极限形式,常用来比较的已知敛散性的级数为**等比级数与p级数**

例3 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1$ 故发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$ 故发散

$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\cdots$ $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=1$

故收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n-2^n}\Big/\frac{1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$ 故收敛

等比级数

复习等价无穷小

$x\to0,\quad x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

p级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\begin{cases}发散 & p\le1\\ 收敛 & p>1\end{cases}$

例4 问下面结论是否正确,若正确,给出证明;若不正确,举出反例

(1)若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2,\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛

(2)若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 均收敛

(3)若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n>0)$发散,则有$u_n\geq\frac{1}{n}$

(4)若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,且$u_n\leq v_n$,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

解:(1)结论成立 $(u_n+v_n)^2=u_n^2+v_n^2+2u_nv_n$ $\quad 2|u_nv_n|\leq u_n^2+v_n^2$

$$(u_n+v_n)^2\leq 2u_n^2+2v_n^2 \quad 收敛$$

(2)不一定成立

如$u_n=0,\ v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

(3)不一定成立

如$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$

(4)不一定成立

如$v_n=0, u_n=-1$

3 比值法(达朗贝尔判别法)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

i) $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛　ii) $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散　iii) $\rho = 1 \Rightarrow$ 待定

证: (i) 当 $\rho < 1$ 时, 取 ε 使 $\rho + \varepsilon = r < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < \rho + \varepsilon = r < 1$$

$\exists N$, 当 $n > N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < r$ 即 $u_{n+1} < r u_n$

$$u_{n+2} < r^2 u_n$$

$$\vdots$$

$$u_{n+k} < r^k u_n$$

$\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_n$ 收敛

$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ 收敛

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

复习保号性 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > b \Rightarrow \exists N$, 当 $n > N$, $a_n > b$

3 比值法(达朗贝尔判别法)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \ge 0) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

$$\text{i)}\ \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \qquad \text{ii)}\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \qquad \text{iii)}\ \rho = 1 \Rightarrow \text{待定}$$

证: (ii) 当 $\rho > 1$ 时, 取 ε 使 $\rho - \varepsilon > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > \rho - \varepsilon > 1$

$\exists N$, 当 $n > N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ge u_N \ne 0$, 所以级数发散.

(iii) 当 $\rho = 1$ 时,

p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1 \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \le 1, & \text{发散} \end{cases}$

说明: 适用于具体给出表达式的级数的判别,如果u_n中含$(n+1)!$或$n!$或n次幂时一般用比值审敛法

例5: 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty \quad \text{发散}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^n} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cancel{\tan}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\cancel{\tan}\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1 \quad \text{收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n} \qquad \lim_{n\to\infty}2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\frac{\pi}{2^n}=\pi\neq 0 \quad \text{发散}$$

例6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$

解 构造级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$ 级数收敛

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$

利用级数收敛
的必要条件求
极限是求极限
的一种方法

4 根值法(柯西判别法)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

$$\text{i)}\ \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \qquad \text{ii)}\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \qquad \text{iii)}\ \rho = 1 \Rightarrow \text{待定}$$

说明：适用于一般项为具体表达式的级数的判别，

如果u_n中含n次幂n^n, a^n时一般用根值审敛法

例7：判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (2-\frac{1}{n}) \ln \frac{n}{3n-1}}$$

$$= e^{2\ln\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} < 1 \quad \text{收敛}$$

例8: 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln n}}\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}}=\frac{2}{3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}}=2>1\ \text{发散}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{a^n}(a>2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+1}{a^n}}=\frac{2}{a}<1\ \text{收敛}$$

$$2=\sqrt[n]{2^n}<\sqrt[n]{2^n+1}<\sqrt[n]{2^n+2^n}=2\cdot\sqrt[n]{2}\nearrow 1$$

复习 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1\neq 0$$

发散

5 极限审敛法　说明:适用于根值法,比值法$\rho=1$的情况

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0) \quad \lim_{n\to\infty} n u_n = l\ (0 < l \leq +\infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

$$\text{如果}p>1, \quad \lim_{n\to\infty} n^p u_n = l\ (0 \leq l < +\infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

证明: (1) 取$v_n = \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n u_n = l > 0 \text{ 发散}$$

$l = +\infty$ 大/小 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

(2) 取$v_n = \dfrac{1}{n^p}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} n^p u_n = l < +\infty \quad \text{收敛}$$

$l = 0$ 小/大 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

5 极限审敛法 说明:适用于根值法,比值法$\rho=1$的情况

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ $\lim_{n\to\infty} n u_n = l\ (0 < l \leq +\infty)$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

如果$p>1$, $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l\ (0 \leq l < +\infty)$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

例9: 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2}) \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 \ln(1+\frac{1}{n^2}) = 1 \quad \text{收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\,(1-\cos\frac{\pi}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n+1}(1-\cos\frac{\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi^2 \quad \text{收敛}$$

判别正项级数敛散性的方法与步骤

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow[\text{不满足}]{}$ 发　散

满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ 待定 $\xrightarrow[\text{用它法判别}]{}$ $\begin{cases} \text{比较法A/B} \\ \text{收敛准则} \end{cases}$

$\rho < 1$ $\downarrow$ 收　敛

$\rho > 1$ $\downarrow$ 发　散

二、交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \quad u_1, u_2, \cdots \text{都是正数}$$

莱布尼兹定理 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n \geq 0)$

若满足 1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$; 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项 r_n 满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

证 $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$$

$\therefore \{S_{2n}\}$是单调递增有界数列, 故 $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$

莱布尼兹定理 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n \ge 0)$

若满足 1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $S \le u_1$, 其余项 r_n 满足 $|r_n| \le u_{n+1}$.

证 $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \ge 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \le u_1$$

$\therefore \{S_{2n}\}$是单调递增有界数列, 故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le u_1}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S}$ 故级数收敛于 S

S_n 的余项: $r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \le u_{n+1}$$

莱布尼兹定理 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n \geq 0)$

若满足 1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$; 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项 r_n 满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

说明 用莱布尼兹定理时,要计算 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 是否为0

可用**数列求极限**,也可用 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 计算

判别 $\boldsymbol{u_n}$ **单调性**,可用 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ 或 $u_{n+1} - u_n \leq 0$ 或 $f'(x) \leq 0$

莱布尼兹判别法仅是收敛的充分条件,

不满足条件的未必发散

例10： 判别级数

①$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ ②$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ ③$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ ④$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$

---

① $u_n = \sin\frac{1}{n} > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$ $\sin\frac{1}{n+1} < \sin\frac{1}{n}$ 收敛

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}$ 收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ 收敛 故收敛

③ $u_n = \frac{1}{n-\ln n} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-\frac{\ln x}{x})} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x-\ln x} \qquad f'(x) = \frac{-1}{(x-\ln x)^2}\cdot(1-\frac{1}{x}) \le 0\ (x \ge 1)$$

单调下降故收敛

例10: 判别级数

① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ ④ $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$

---

④ 设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{从而} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\le 0\,(x\ge 3) \quad \frac{\ln n}{n}\text{单调下降 故收敛}$$

$$\text{但}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \qquad \frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n} \qquad \therefore\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\text{ 发散}$$

三、绝对收敛与条件收敛

一般项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots \quad (u_n\text{可能大于}0,\text{可能小于}0)$$

判定准则

$$\text{判定}\{S_n\}\text{是否收敛}\begin{cases} S_n \nearrow \ \text{有上界} \\ S_n \searrow \ \text{有下界} \end{cases}$$

定义：若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

定理 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛

证: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $v_n \geq 0$, 且 $v_n \leq |u_n|$, 根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2v_n - |u_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

说明:

级数 $\begin{cases} \text{收敛} \begin{cases} \text{绝对收敛} \\ \text{条件收敛} \end{cases} \\ \text{发散} \end{cases}$

判定一般项级数敛散性的一般步骤:

先判定 $u_n \overset{?}{\to} 0$, 若 $u_n \not\to 0$ 则发散

若 $u_n \to 0$,则判别 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 是否收敛?

若收敛,则原级数绝对收敛;

若发散,对于交错级数,利用莱布尼兹判别法判别 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

是否条件收敛或利用定义求 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 或利用判定准则 $\{S_n\}$

但若是用正项级数的比值(根值)法来判出 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散

则可断定原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散,不会是条件收敛

$\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$ $\quad |u_n| \not\to 0 (n \to \infty)$ $\quad u_n \not\to 0 (n \to \infty)$

原级数发散

例11: 判别级数

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

---

① 由于 $|\frac{\sin n\alpha}{n^2}|\le\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛 $\therefore$ 原级数收敛

② $|u_n|=\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{2}>1$ 发散 $\therefore$ 原级数发散

例11: 判别级数

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

---

③ $|u_n|=\frac{1}{\ln(n+1)}\geq\frac{1}{n+1}$

$\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散 故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散

$$\left.\begin{array}{l}\text{由于}|u_n|=\dfrac{1}{\ln(n+1)}\to 0(n\to\infty),\\ |u_n|>|u_{n+1}|\end{array}\right\}\text{原级数收敛}$$

故原级数条件收敛

例12: 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散,则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散

$|a_n|+|b_n| \geq |a_n|$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$发散