

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	得分
得分									

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%；本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%。

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $y' = \frac{1}{2x + e^{2y}}$ 的通解为 $x = e^{2y}(y + C)$

2. 设 L 为连接 $(1, 0)$ 及 $(0, 1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x + y) ds = \sqrt{2}$

3. 两平行平面 $x - 2y + 2z - 15 = 0, x - 2y + 2z + 18 = 0$ 间的距离为 11

4. 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$ ，单位向量 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$ ，则

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{(1, 2, 3)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. 将 $\int_0^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy$ 化为极坐标系下的二次积分为

$$\int_{\arctan 1}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{2} \sin 2\theta}} \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 利用变量代换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ ，可以把方程 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ 化简为 (B)

(A) $v \frac{\partial z}{\partial v} = z$

(B) $u \frac{\partial z}{\partial u} = z$

(C) $u \frac{\partial z}{\partial v} = z$

(D) $v \frac{\partial z}{\partial u} = z$

2. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ， Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分，则下列等式正确的是 (C)

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 2 \iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(D) $\iint_{\Sigma} dS = 3 \iint_{\Sigma_1} dS$

3. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[0, 2\pi]$ 上 $f(x) = x^2$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在

$x = 3\pi$ 处收敛于 (D)

(A) $4\pi^2$

(B) $2\pi^2$

(C) 0

(D) π^2

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =$ (A)

(A) $\ln 2$

(B) $\ln 3$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=4$ 处 (D)

(A) 敛散性不定

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 发散

三、(8分) 设 $z = f(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解: 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z} \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z^2}{y(x+z)} \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x+z} \right) = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} (x+z) - z \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{(x+z)^2} \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

四、计算下列各题 (每题8分, 共16分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{(x+z)^2} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

1. 计算二重积分 $I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy$, $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

解: 将积分区域 D 两部分: $D_1: y > x$, $D_2: y < x$ 2 分

$$I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy = \iint_{D_1} dx dy - \iint_{D_2} dx dy \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy - \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= 0 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

2. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转

一周形成的曲面与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成的区域

订 解: Ω 空间区域为: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ 1 \leq z \leq 4 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_1^4 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_1^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho$$

$$= 42\pi \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

五、计算下列各题 (每题 8 分, 共 16 分)

1. 计算 $\oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的正向.

解: $L: (x-1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$, 包含了 $(1, 0)$ 点.

$$P(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 则}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial P}{\partial y} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

取以 (1, 0) 为圆心, r ($r < 1$) 为半径的圆,

$$\text{则圆的参数方程 } \begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi), \text{ 方向取顺}$$

时针方向. 2 分

所以由格林公式

$$\begin{aligned} & \oint_L \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \oint_{L_1 \cup L_2} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L_1} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$= 0 - \oint_{L_2} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \oint_{L_2} \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} d\theta = -2\pi \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

2. 计算 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上

侧.

解 作辅助平面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 则平面 Σ_1 与曲面 Σ 围成空间有界闭区域

Ω , 则

$$\iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy,$$

$$= \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy = - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dx dy dz \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} dr \int_0^{1-r^2} r(z + r^2) dr$$

选课序号

专业班级

姓名

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{(x+z)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$$

重为图 1. 计算二重积分 $I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy$, $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

解:

将积分区域 D 两部分: $D_1: y > x, D_2: y < x$ 2 分

$$I = \iint_D \operatorname{sgn}(y-x) dx dy = \iint_{D_1} dx dy - \iint_{D_2} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 dy - \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x dy$$

$$= 0$$

重 2. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 所围成的区域

解: Ω 空间区域为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2z \\ 1 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$$

$$= \int_1^4 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_1^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho = 42\pi$$

五、计算下列各题 (每题 8 分, 共 16 分).

1. 计算 $\oint_L \frac{yx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的正向.

解: $L: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 包含了 $(1, 0)$ 点.

$$P(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{-(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 则}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 + y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$$

取以 $(1, 0)$ 为圆心, $r=1$ 为半径的圆.

$$\text{则圆的参数方程 } L_1: \begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi), \text{ 方向取顺}$$

时针方向.

所以由格林公式

$$\oint_{L_1} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} &= \oint_{L_1} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} - \oint_{L_1} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \oint_{L_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{L_1} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$= 0 - \oint_{L_1} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \oint_{L_1} \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} = 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} d\theta = -\int_0^{2\pi} 1 d\theta = -2\pi$$

2. 计算 $I = \iiint_{\Sigma} 2x^2 dy dz + 2y^2 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上.

解.

解 作辅助平面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, 则平面 Σ_1 与曲面 Σ 围成空间有界闭区域

Ω , 则

$$\iiint_{\Sigma} 2x^2 dy dz + 2y^2 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy,$$

$$= \iiint_{\Sigma_1} 2x^2 dy dz + 2y^2 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy - \iiint_{\Sigma} 2x^2 dy dz + 2y^2 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy \dots 2 \text{ 分}$$

由高斯公式得

$$\iiint_{\Sigma_1} 2x^2 dy dz + 2y^2 dx dz + 3(z^2 - 1) dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dx dy dz$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} r(z + r^2) dr$$

教务处试卷编号

课程编号 13029762 考核方式: 闭卷 考试时间: 2 小时 试卷 A 不允许使用计算器

证明: $f'(x, y)$ 在 D 的内部取最值. 2 分

不妨设 $f(x_0, y_0) = M = \max_{(x, y) \in D} f(x, y), (x_0, y_0) \in D$ 内;

则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值, 所以 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$,

$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0. \text{ 所以}$$

$AC - B^2 = -A^2 - B^2 \leq 0$ 与 $f(x_0, y_0)$ 为极大值矛盾,

故 $f(x, y)$ 在 D 的边界上取最大值和最小值. 2 分

选课序号

专业班级

姓名

学号