第一章

第二节

数列的极限

内容

一、数列极限的定义

二、收敛数列的性质

引例

截丈问题：“一尺之锤，日取其半，万世不竭”

若用 $x_1, x_2, \cdots$ 表示每次截取之后剩余的棒长

第一天截下后的棒长为 $x_1 = \frac{1}{2}$

第二天截下后的棒长为 $x_2 = \frac{1}{2^2}$

…… ……

第n天截下后的棒长为 $x_n = \frac{1}{2^n}$ 无限接近于零

无限增加

这个例子描述了无穷多个数变化趋势

一 数列极限的定义

数列：

按一定规律排列的无穷多个实数 $x_1, x_2, \cdots$ 称为**数列**，

简记 $\{x_n\}$ 其中每一个数称为 数列的**项**，x_n 称为**第*n*项**

例 ① $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 随着n无限增大，无限接近常数1 记作 $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$

② $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}$ 随着n无限增大，$\frac{1}{n}$无限接近常数0 记作 $x_n = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$

①② 收敛

③ $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}$ $x_n = (-1)^{n-1}$ 趋势不定

④ $1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1$ $x_n = 2n-1 \to \infty \ (n \to \infty)$

③④ 发散

思考：如何理解x_n无限接近a？什么又是n无限增大？

所谓 $n\to\infty$时，x_n无限接近1

只要**n**充分大，就可使 $|x_n-1|=\dfrac{1}{n}$ 充分小

比如要使 $\dfrac{1}{n}<0.001$ 只要 $n>10^3$

① $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$

?

任意给定一个正数 $\varepsilon>0$ $\boxed{\text{总能找到}N}$ 当 $n>N$时

就可使 $|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 解不等式取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$

思考：如何理解x_n无限接近**a**?什么又是**n**无限增大?

数列的极限 若数列$\{x_n\}$及常数 a 有下列关系：

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists 正数 N, 当 n > N 时, 总有 |x_n - a| < \varepsilon}$$

则称该数列$\{x_n\}$的极限为 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\ (n\to\infty)$$

此时也称数列**收敛**，否则称数列**发散**.

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (n > N)$

即 $x_n \in U(a, \varepsilon) \quad (n > N)$

说明

① $\varepsilon > 0$必须任意给定，反映了x_n与a的接近程度

② N不是唯一的， ε越小N越大

③ $\{x_n\}$落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内的有无穷多项，

落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外的至多有有限项

④ 数列极限存在与否与前有限项无关

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$

$a-\varepsilon \quad x_{N+1} \quad a \quad x_{N+2} \quad a+\varepsilon$

典型题　利用极限定义求或证明极限

解题关键　对于 $\forall\varepsilon>0$ 要能够找到N，但没有必要去求最小的N

技巧 为了便于找N,常将不等式适当放大后再令其小于ε

例：证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$

证　$\forall\varepsilon>0$ 找N，使得$n>N$时，$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$　即 $\boxed{\dfrac{1}{4n+2}<\varepsilon}$

解得 $n>\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{\varepsilon}-2)$　取 $N=\left[\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{\varepsilon}-2)\right]$

$\forall\varepsilon>0$　取$N=\left[\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{\varepsilon}-2)\right]$　当 $n>N$　有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$

放大法　$\dfrac{1}{4n+2}<\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$　只要$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$

典型题 利用极限定义求或证明极限

解题关键 对于 $\forall \varepsilon > 0$ 要能够找到N，但没有必要去求最小的N

技巧 为了便于找N ,常将不等式适当放大后再令其小于ε

例： 已知 $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n}$ 证明数列$\{x_n\}$的极限是1

证 $\forall \varepsilon > 0$ 找N，使得$n>N$时，

$$\left|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1\right| = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} < \frac{a^2}{n^2} < \varepsilon \quad \text{只要 } n > \sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{取} N = \sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon}} \ \text{必有} \left|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

二、收敛数列的性质

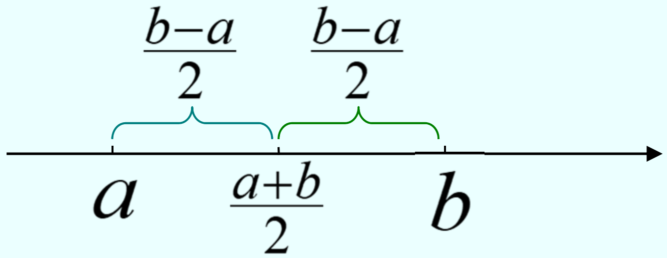
Th1(唯一性) 收敛数列的极限唯一

可用来证极限不存在

如果 $n \to \infty$ 数列趋于不同的两个数，则极限不存在

例 $x_n = (-1)^{n-1}$

二、收敛数列的性质 巧用ε



Th1(唯一性) 收敛数列的极限唯一

证: 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在 N_1, 使当 $n > N_1$ 时,

$\left| x_n - a \right| < \frac{b-a}{2}$, 从而 $\boxed{x_n < \frac{a+b}{2}}$

同理, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 故存在 N_2, 使当 $n > N_2$ 时, 有

$\left| x_n - b \right| < \frac{b-a}{2}$, 从而 $\boxed{x_n > \frac{a+b}{2}}$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, x_n 不等式矛盾

$-\frac{b-a}{2} < x_n - a < \frac{b-a}{2} \Longrightarrow \frac{3a-b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}$

$\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{3b-a}{2}$

因此收敛数列的极限必唯一.

有界性 对于$\{x_n\}$,如果存在$M>0$,使得一切x_n都满足

$|x_n| \le M$ 称数列有界.如果M不存在,称$\{x_n\}$无界

Th2(有界性) 收敛的数列一定有界

等价地 如果数列$\{x_n\}$无界，那么$\{x_n\}$一定发散

如果数列$\{x_n\}$有界，未必有数列一定收敛

例 $x_n = (-1)^{n-1}$

有界性 对于$\{x_n\}$,如果存在$M>0$,使得一切x_n都满足 $|x_n| \le M$ 称数列有界.如果M不存在,称$\{x_n\}$无界

Th2(有界性) 收敛的数列一定有界

证: 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 则$\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < 1$, 从而有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|\}$

则有 $|x_n| \le M \ (n = 1, 2, \cdots)$.

由此证明收敛数列必有界.

Th3(保号性) i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0 \Rightarrow \exists N>0$当$n>N$时，有 $x_n>0$

$<$ $<$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > b \Rightarrow \exists N>0$当$n>N$时，有 $x_n>b$

$<$ $<$

iii) 若从某项起$x_n \geq 0$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a \geq 0$

$\leq$ $\leq$

证： i)对 $a>0$,取$\varepsilon=\frac{a}{2}$, (不唯一) 则$\exists N>0$ 当 $n>N$时,

$$|x_n - a| < \frac{a}{2} \Longrightarrow x_n > a - \frac{a}{2} > 0$$

对 $a<0$, 取$\varepsilon=-\frac{a}{2}$,则$\exists N>0$ 当 $n>N$时,

$$|x_n - a| < -\frac{a}{2} \Longrightarrow x_n < a - \frac{a}{2} < 0$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - b = a - b > 0$

iii) 用反证法证明

子数列 在$\{x_n\}$中任意抽取**无限多项**并保持这些项在原数列中的先后次序，得到的新数列

x_4 x_7 x_8 x_{12} x_{17} x_{19} x_{20} $\{x_n\}$

* ………

x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3} x_{n_4} x_{n_5} x_{n_6} x_{n_7} $\{x_{n_k}\}$

Th4(收敛数列与其子数列间的关系)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{x_{n_k}\} \to a(k \to \infty)$$

可用来证明不收敛 如果数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛不同的极限，则该数列发散

例 $x_n = (-1)^{n-1}$

Th4(收敛数列与其子数列间的关系)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{x_{n_k}\} \to a(k \to \infty)$$

Th4(收敛数列与其子数列间的关系)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{x_{n_k}\} \to a(k \to \infty)$$

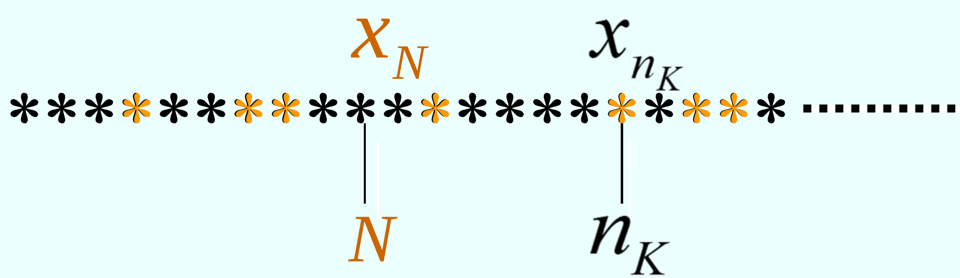
证：设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列．

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

现取正整数 K，使 $n_K \geq N$，于是当 $k > K$ 时，有

$n_k > n_K \geq N$



从而有 $\left| x_{n_k} - a \right| < \varepsilon$，由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$．