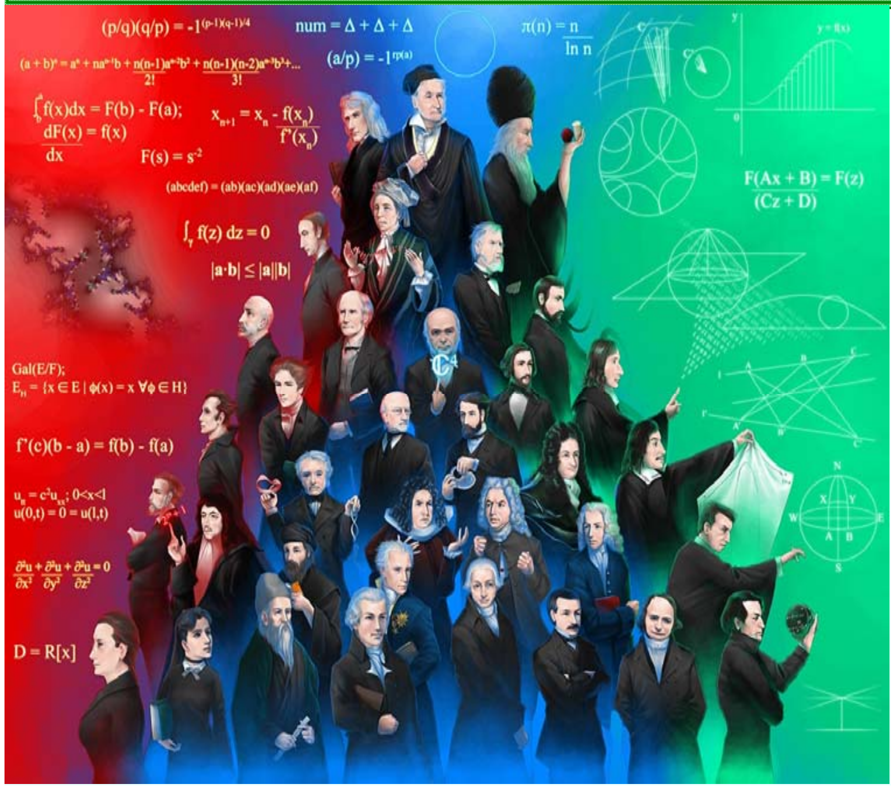
第一章

第五节

极限运算法则



内容

一 关于无穷小的运算法则

二 函数极限的四则运算法则

三 关于数列极限的运算法则

四 复合函数的极限运算法则

约定：函数极限的6种形式，以下叙述中仅针对 $x \to x_0$

一 关于无穷小的运算法则

定理1. 有限个无穷小的和还是无穷小 .

说明: 无限个无穷小之和不一定是无穷小. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1$

证: 考虑两个无穷小的和 . 设 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta = 0$,

$\forall \varepsilon > 0$, 对 $\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时 , 有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时 , 有 $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta = \min\{\delta_1 , \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha + \beta) = 0$.

定理2 . 有界函数与无穷小的乘积是无穷小

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

证: 设 $\forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1),\ |u(x)|\le M$ 局部有界

又设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, 即 $\forall\varepsilon>0$, 对 $\frac{\varepsilon}{M}$ $\exists\delta_2>0$,

当 $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_2)$ 时, 有 $|\alpha|\le\frac{\varepsilon}{M}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时, 就有

$$|u(x)\alpha|=|u(x)||\alpha|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\alpha=0$.

推论 1 . 常数与无穷小的乘积是无穷小

推论 2 . 有限个无穷小的乘积是无穷小

A,B 常数 α,β 无穷小, 则 $A\alpha+B\beta$ 为无穷小

无限个未必成立

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots\\
1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots\\
1 & 1 & 3^2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots\\
1 & 1 & 1 & 4^3 & \frac{1}{5} & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

极限为1

二 函数极限的四则运算法则

定理 3 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)$

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot \lim g(x)$

(3) 若 $B\neq 0$ 则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$

函数和差积商的极限等于极限的和差积商

证: (1) 因 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

$f(x)=A+\alpha$ ， $g(x)=B+\beta$ (其中 α, β 为无穷小)

于是 $f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)$

$$=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$$

由定理 1 可知 $\alpha\pm\beta$ 也是无穷小, 再利用极限与无穷小的关系定理 , 知定理结论成立 .

二 函数极限的四则运算法则

定理 3 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

(3) 若 $B\neq 0$ 则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$

函数和差积商的极限等于极限的和差积商

证 (3) 往证 $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}=\gamma$ 是无穷小

是无穷小

$$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha-A\beta)$$

只需证 $\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 有界

证(3) 往证 $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}=\gamma$ 是无穷小

是无穷小

$$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha-A\beta)$$

只需证 $\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 有界

$$\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|=\frac{1}{|B|}\cdot\left|\frac{1}{g(x)}\right|$$

能否找到 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$
$|g(x)|>$数

由保号性，因为 $B\neq 0,\exists\overset{\circ}{U}(x_0,\delta),|g(x)|>\dfrac{|B|}{2}$

则在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 内 $\left|\dfrac{1}{B(B+\beta)}\right|\le\dfrac{1}{|B|}\cdot\dfrac{2}{|B|}$ 有界，

故 γ 是无穷小

二 函数极限的四则运算法则

定理 3 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

(3) 若 $B\neq 0$ 则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$

函数和差积商的极限等于极限的和差积商

说明 进行极限的四则运算必须**以极限存在为前提**，否则不能进行四则运算

例 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

错误做法

$$\cancel{\lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 1} 3x=3\lim_{x\to 1} x$$

$$\lim_{x\to 1} x^3=(\lim_{x\to 1} x)^3$$

推论 1 $\lim[C f(x)]=C\lim f(x)$ （C 为常数）

推论 2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$ （n 为正整数）

二 函数极限的四则运算法则

定理 3 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

(3) 若 $B\neq 0$ 则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$

函数和差积商的极限等于极限的和差积商

定理4 如果 $\varphi(x)\geq\psi(x)$ 而 $\lim\varphi(x)=a, \lim\psi(x)=b$

那么 $a\geq b$

证明 令 $f(x)=\underline{\varphi(x)-\psi(x)\geq 0}$

一方面由定理3 $\lim f(x)=\lim\varphi(x)-\lim\psi(x)=\underline{a-b}$

另一方面由保号性 $a-b\geq 0$ 故 $a\geq b$

三 数列极限的四则运算法则

定理 5 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \pm y_n] = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$ 其中 $y_n \neq 0, B \neq 0$

数列和差积商的极限等于极限的和差积商

定理 3 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则有

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

(2) $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

(3) 若 $B \neq 0$ 则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$

四 复合函数极限运算法则

定理6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$ 变量替换法

证：$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$，当 $0<|u-a|<\eta$ 时，有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\varphi(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0,\ \exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\varphi(x)-a|<\eta$$

故 $|f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon$，因此得证.

四 复合函数极限运算法则

定理6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, $\varphi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = A$$

正用

反用

变量替换法

恰当使用变量替换, 往往可简化极限运算

例: $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{x^2+1}{x}$

令 $u=\dfrac{x^2+1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+1}{\lim\limits_{x\to 1}x}=2$

正用

$$\therefore \lim_{x\to 1}\sin\frac{x^2+1}{x}=\lim_{u\to 2}\sin u=\sin 2$$

例 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

反用

令 $t=x^{\frac{1}{6}}$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t\cancel{-}1)(t+1)}{(t\cancel{-}1)(t^2+t+1)}=\frac{2}{3}$$

典型题（求极限）

①初等函数在定义域内求极限

例 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$

解 原式$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\dfrac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+3}=-\dfrac{7}{3}$

一般地，若$f(x)$是初等函数，x_0是定义域内的点，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

设有理整函数(多项式)

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

设有理分式函数

$F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x),Q(x)$

是多项式, 如果$Q(x_0)\neq 0$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

典型题（求极限）

②利用无穷小与无穷大的互倒关系求极限

例 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-3}$

解 由于 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+3}}=0,$ 所以 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-3}=\infty$

③有理分式函数$(x\to\infty)$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-2}$

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^3}}$

$=\dfrac{3}{7}$

说明：对有理分式函数，当 $x\to\infty$时，用x的最高次幂项去除分子分母

一般有如下结果：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases} & \text{当} n=m \\ & \text{当} n>m \\ & \text{当} n<m \end{cases}$$

$(a_0b_0\neq 0, m, n$为非负常数$)$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3}$

典型题（求极限）

④分解因式法

例 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

说明：分解因式约去使分母极限为0的公因式

⑤有理化法

例 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

说明:将分子分母有理化,约去使分母极限为0的公因式

⑥变量替换法

例 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2}{3}$

典型题（求极限）

⑦无穷小的性质　　　　**说明** 无穷小•有界=无穷小

例 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{1+n}\cdot\sin n$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{1+n}=0$, $\sin n$是有界函数, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{1+n}\cdot\sin n=0$

---

⑧利用极限的概念与性质求极限

例设$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在,且$f(x)=x^3+2x+3\lim\limits_{x\to1}f(x)$, 则 $f(x)=$

解 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$ 则$f(x)=x^3+2x+3A$

两端取极限 $A=\lim\limits_{x\to1}x^3+2x+3A=3+3A\Rightarrow A=-\dfrac{3}{2}$

故$f(x)=x^3+2x-\dfrac{9}{2}$

典型题（求极限）

⑨利用函数极限存在求参数

例 已知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$ 求a,b的值

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+a(x-1)+1+a+b}{1-x}$

$$=\lim_{x\to1}(-x-1-a+\frac{1+a+b}{1-x})$$

极限存在$\begin{cases}1+a+b=0\\-2-a=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6\\a=-7\end{cases}$