第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理 (第1节)
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式 (第3节)
- 柯西中值定理

洛必达法则求极限 (第2节)

导数应用 (第4-7节) 研究曲线的性态包括**单调性**，极值，**最值**，**凹凸性**，**拐点**，**曲率**等

第三章

第四节

函数的单调性与曲线的凹凸性

内容

一、单调性的定义及判别

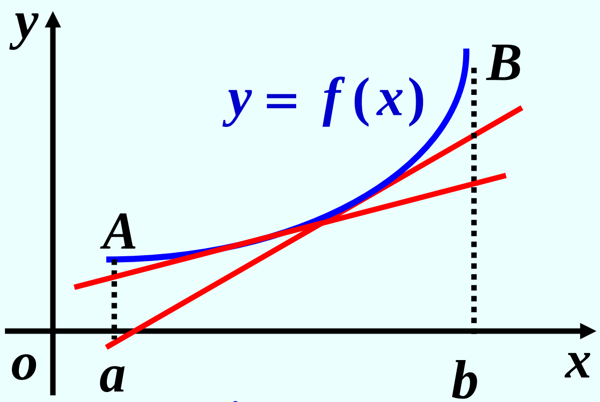
二、怎样用单调性解题

三、凹凸性的定义及判别

四、怎样用凹凸性解题

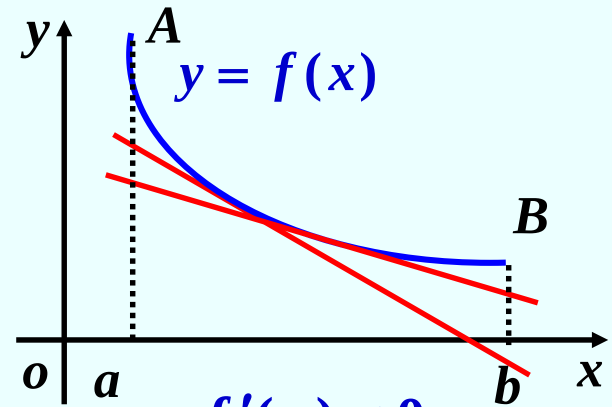
一、单调性的定义及判别

观察：函数的单调性与导数符号的关系



$f'(x) > 0$

图形上升时



$f'(x) < 0$

图形下降时

单调增加 $x_2 > x_1, f(x_2) > f(x_1)$

切线斜率大于0

$x_2 > x_1, f(x_2) < f(x_1)$ **单调减少**

切线斜率小于0

观察结果：函数单调增加时导数大于零，

函数单调减少时导数小于零。

函数单调性的判定法

定理 设函数 $y=f(x)$在 $[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导.

(1)若在(a,b)内 $f'(x)\geq 0$,且等号仅在有限个点成立

那么 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加（严格）

(2)若在(a,b)内 $f'(x)\leq 0$,且等号仅在有限个点成立

那么$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少（严格）

说明 (1)若$f'(x)$在(a,b)内满足$f'(x)\geq 0$(或≤ 0),而$f'(x)$的零点不构成区间,则$f(x)$在(a,b)严格单调递增（或递减）

(2) $\forall x\in(a,b), f'(x)>0$(或$<0$)是$f(x)$在$[a,b]$内严格单调递增（或递减）的充分条件而非必要条件

例如：$y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$是单调增，但$f'(x)\geq 0$

函数单调性的判定法

定理 设函数 $y=f(x)$在 $[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导.

(1)若在(a,b)内 $f'(x)\geq 0$,且等号仅在有限个点成立

那么 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加（严格）

(2)若在(a,b)内 $f'(x)\leq 0$,且等号仅在有限个点成立

那么$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少（严格）

证 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, 且 $x_1 < x_2$, 应用拉格朗日定理,得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

$$\begin{cases} \xlongequal{f'(x)>0} f(x_2)>f(x_1). \nearrow \\ \xlongequal{f'(x)<0} f(x_2)<f(x_1). \searrow \end{cases}$$

若$f'(c)=0$,其余各点$f'(x)>0$ ($<$)

$f(x)$在$[a,c]$,$[c,b]$均单增减

$f(x)$在$[a,b]$仍单增减

二.怎样用单调性解题

（1）求函数单调区间

求 $f(x)$单调区间的步骤:

1° 求 $f'(x)=0$及$f'(x)$不存在的点；

2° 用这些驻点及不可导点将定义域分为若干个子区间;

3° 在每个子区间上用定理判断 $f(x)$ 的单调性.

1° $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

2° $(a, x_1)\ x_1\ (x_1, x_2)\ x_2\ (x_2, x_3) \cdots (x_n, b)$

y' $\quad + \quad - \quad - \quad +$

y

注：在区间内部符号是一定的

假若$f'(\xi_1) > 0,\ f'(\xi_2) < 0$，则$\exists \xi$，$f'(\xi) = 0$,矛盾

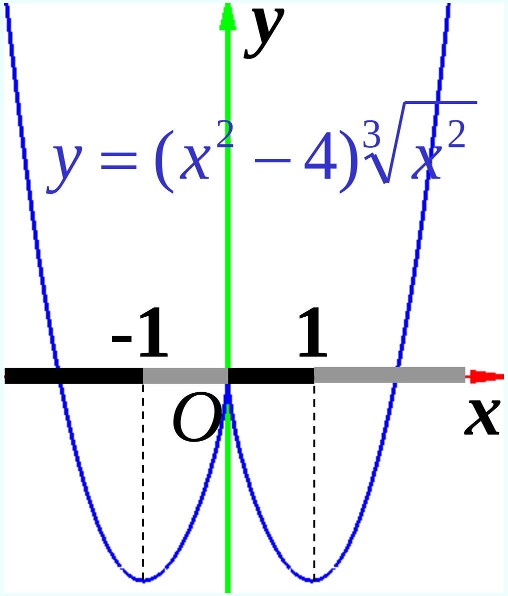
例1. 讨论函数 $y=(x^2-4)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y'=2x\cdot x^{\frac{2}{3}}+(x^2-4)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{8(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}},$$

当 $x=0$ 时，y'不存在，

驻点为 $x_1=-1$, $x_2=1$.



	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	−	0	+	不∃	−	0	+
y	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗

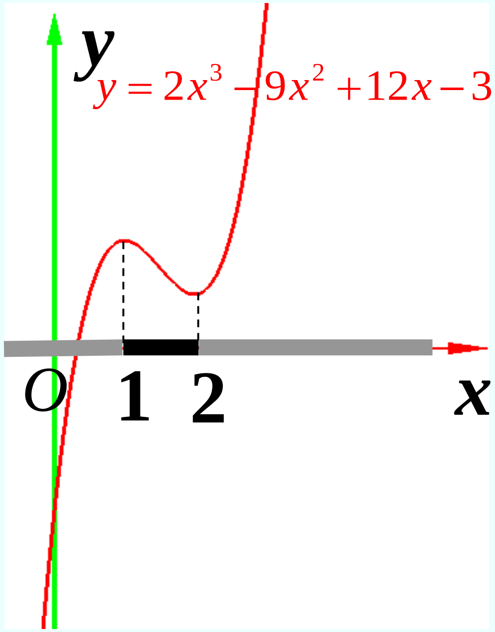
单调增区间: $[-1, 0]$,$[1, +\infty)$; 单调减区间: $(-\infty, -1]$,$[0, 1]$.

例2. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1, x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗



故 $f(x)$的**单调增**区间为$(-\infty,1],[2,+\infty)$;

$f(x)$的**单调减**区间为$(1,2)$.

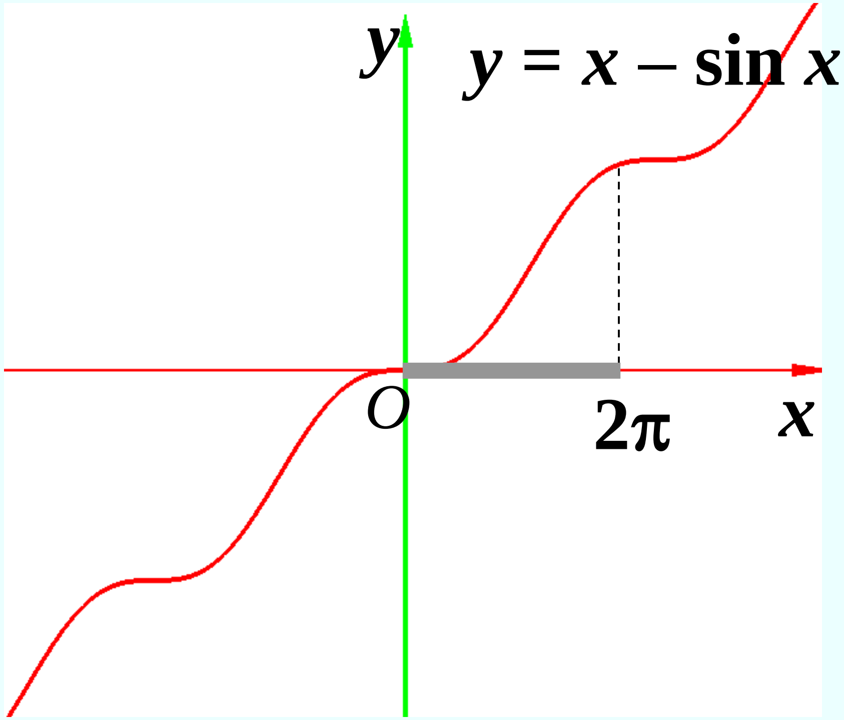
例3. 证明函数 $f(x)=x-\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加

证明: 由于$f'(x)=1-\cos x\geq 0$

且使等号成立的点 $x=2k\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$为离散点

所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加

注：定理1中是有限区间，导数等于0的点是有限个；对于无限区间，导数等于0的点要求在其任一子区间上是有限个。



二.怎样用单调性解题

（2）利用单调性证明不等式

①两边函数 $f(x) \geq g(x)\,(x \geq x_0)$

步骤：设$F(x)=f(x)-g(x)$，求$F'(x)=f'(x)-g'(x)$，

判别当$x \geq x_0$时，$F'(x)>0/<0$，若能$F(x) \geq F(x_0)=0$立得结论；

若无法判别，再次求导$F''(x)$，若$F''(x)>0/<0$，则$F'(x)\uparrow/\downarrow$，

当$x \geq x_0$时，给出$F'(x)$的范围，若能判别$F'(x)>0/<0$，立得结论；

如果仍然判别不出来，就重新设$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$F'(x)=\dfrac{G(x)}{g^2(x)}$

判别$G(x)>0/<0$，若判别不出，则求$G'(x)$，当$x \geq x_0$时，

判别$G'(x)>0/<0$，则$G(x)\uparrow/\downarrow$，从而给出$G(x)$的取值范围

若$G(x)>0/<0$，则可得$F'(x)>0/<0$得证，否则再用其它方法

例1 证明：当x>1时，$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$

证 令 $f(x) = 2\sqrt{x} - (3 - \frac{1}{x})$,

则 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1)$

当x>1时 $f'(x) > 0$ $\therefore f(x)$单调增加

当x>1时，$f(x)>f(1)=0$

即$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$

例2 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，证 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$

证明： 设 $f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x$，则 $f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x$ (无法判别正负)

$f''(x) = \sin x > 0$，$\therefore f'(x) \uparrow$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\boxed{\frac{2}{\pi} - 1} = f'(0) < f'(x) < f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ (仍无法判别 $f'(x)$的符号)

故重设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，则 $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

令 $G(x) = x\cos x - \sin x$

则 $G'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0$ $\therefore G(x) \downarrow$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$-1 = G(\frac{\pi}{2}) < G(x) < G(0) = 0$ $\quad \therefore f'(x) < 0$，$f(x) \downarrow$

当 $x < \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ $\quad \therefore \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$ $\quad$ 即 $\frac{2}{\pi}x < \sin x$

例2 当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，证$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$

证明:

故重设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

令 $G(x)=x\cos x-\sin x$

则 $G'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0 \quad \therefore G(x)\downarrow$

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$-1=G(\frac{\pi}{2})<G(x)<G(0)=0 \quad \therefore f'(x)<0,\ f(x)\downarrow$

当$x<\frac{\pi}{2}$时，$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi} \quad \therefore \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$ 即$\frac{2}{\pi}x<\sin x$

例2 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，证 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$

证明： 故重设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

令 $G(x)=x\cos x-\sin x$

则 $G'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0 \quad \therefore G(x)\downarrow$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$-1=G(\frac{\pi}{2})<G(x)<G(0)=0 \quad \therefore f'(x)<0,\ f(x)\downarrow$

当 $x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi} \quad \therefore \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$ 即 $\frac{2}{\pi}x<\sin x$

设 $F(x)=x-\sin x$，则 $F'(x)=1-\cos x\geq 0 \quad \therefore F(x)\uparrow$

当 $x>0$ 时，$F(x)>F(0)=0$，即 $\sin x<x$

例3 证明不等式当$x>1$时，$\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$

适当变型能避开对分数求导

证 等价于$(x+1)\cdot\ln x > 2(x-1)$

令$f(x)=(x+1)\cdot\ln x-2(x-1)$

则 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-2=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(x-1)>0$(当$x>1$)

$\therefore f'(x)\uparrow$ 当$x>1$, $f'(x)>f'(1)=0$

$\therefore f(x)\uparrow$ 当$x>1$, $f(x)>f(1)=0$

即$(x+1)\cdot\ln x>2(x-1)$得证

（2）利用单调性证明不等式

②两边常数 i)利用单调性

例 证明不等式: $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$

分析: 即证 $\frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1}$, 往证 $\frac{\tan x}{x} \uparrow$

证明: 令 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$,

$$\because \quad f'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{\boxed{x - \frac{1}{2}\sin 2x}}{x^2\cos^2 x}$$

令$G(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x$, $G'(x) = 1 - \cos 2x > 0\ (x > 0)$ $\therefore G(x)\uparrow$

当$x > 0, G(x) > G(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \ \therefore f(x)\uparrow$

当$x_2 > x_1$时, $f(x_2) > f(x_1)$ 即 $\frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1}$

（2）利用单调性证明不等式

②两边常数 ii) $f(\alpha,\beta)\le g(\alpha,\beta)$

步骤 若遇到含有两个参数α,β的不等式时,将其中某个参数设为变量,作辅助函数 $F(x)=f(x,\beta)-g(x,\beta)$

x的定义域就是参数α的变化范围

例1. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,在$(0,+\infty)$内二阶可导, $\boxed{f(0)=0,}$ $\boxed{f''(x)<0}$ 求证:对任意$x_1>0,x_2>0,f(x_1+x_2)< f(x_1)+ f(x_2)$

证明:

令 $F(x)=f(x)+f(x_1)-f(x+x_1)\ (x>0)$

只需证$\forall x>0$,有$F(x)>0$

$F'(x)=f'(x)-f'(x+x_1)$ 由$f''(x)<0$, $\therefore f'(x)\downarrow$

则$F'(x)>0$, 故$F(x)\uparrow$ 那么$F(x)>F(0)=0$

取$x=x_2$即得结论

（2）利用单调性证明不等式

②两边常数 ii) $f(\alpha,\beta)\le g(\alpha,\beta)$

例2 比较 π^e和 e^π的大小

解： $\ln\pi^e = e\ln\pi$, $\ln e^\pi = \pi\ln e = \pi$

设$f(x) = e\ln x - x \quad (x > e)$

$$f'(x) = \frac{e}{x} - 1 < 0 \quad \therefore f(x)\downarrow$$

当$x > e, f(x) < f(e) = 0$

取$x = \pi > e$ 则$f(\pi) < f(e) = 0$ 即$e\ln\pi - \pi < 0$

那么$\ln\pi^e < \ln e^\pi$ 故$\pi^e < e^\pi$

二.怎样用单调性解题

（3）利用单调性讨论方程的实根（单调区间法）

步骤　证明只有一个实根分两步

Step1 利用零点定理说明至少有一个实根

Step2 利用单调性说明只有一个实根

例1：证明方程$\sin x=x$只有一个实根

证明：显然$x=0$是方程的一个根

令$f(x)=\sin x-x$, $f'(x)=\cos x-1\le 0$,

而$f'(x)=0$的点是离散的, $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调下降

所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内只有一个零点

（3）利用单调性讨论方程的实根（单调区间法）

例2：方程$\ln x=ax$ ($a>0$)有几个实根?

解：令$f(x)=\ln x-ax$, $f'(x)=\frac{1}{x}-a$, $f(x)$仅有一个驻点 $x=\frac{1}{a}$

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\ln\frac{1}{a}-1$	$\searrow$

若$a=\frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{a})=0$, 方程仅有一个零点

若$a<\frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{a})>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-ax=\lim\limits_{t\to 0^+}-\ln t-\frac{a}{t}=-\infty$

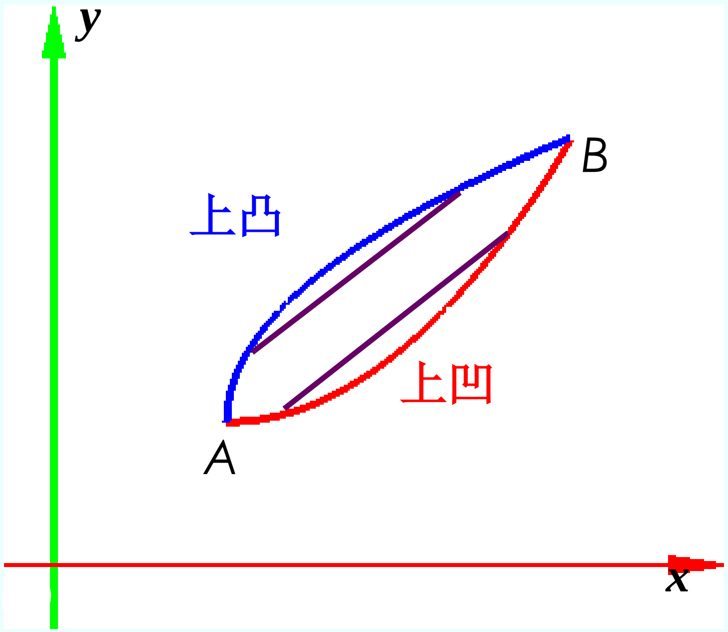
由零点定理在$(0,\frac{1}{a})$,$(\frac{1}{a},+\infty)$均至少有一个零点

均为单调区间,故恰有两个根

若$a>\frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{a})<0$, 无根

三、凹凸性的定义及判别

观察



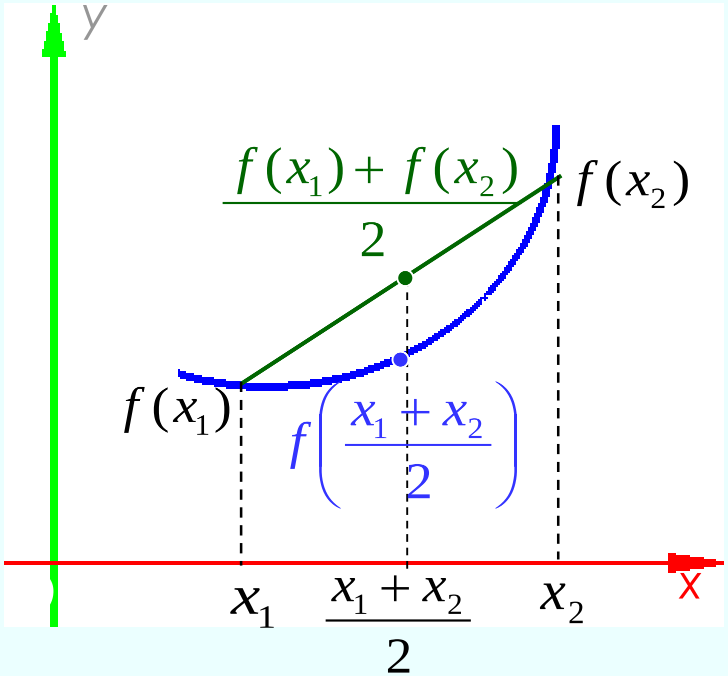
虽然都是上升

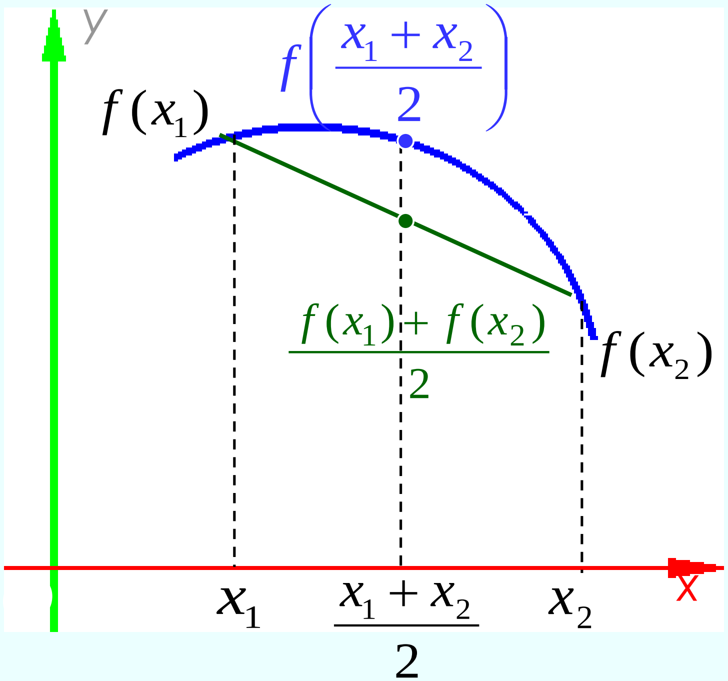
上凸：任意两点弧在弦上方

上凹：任意两点弧在弦下方

如何描述呢？

三、凹凸性的定义及判别





$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

凹

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

凸

三、凹凸性的定义及判别

1定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, $\forall x_1 \neq x_2 \in I$ 恒有

弧上的点

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

称 $f(x)$ 在 I 上的**图形是上凹的**;

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

称 $f(x)$ 在 I 上的**图形是上凸的**.

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

凹 凸

三、凹凸性的定义及判别

2. 曲线凹凸性的判别法

定理2 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有一阶和二阶导数

i) $f''(x) > 0 \overset{>}{\Longrightarrow} f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

ii) $f''(x) < 0 \overset{<}{\Longrightarrow} f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的

证明 设 $f''(x) > 0$ 往证 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$,

不妨设 $x_2 > x_1$ 令 $x_2 = x$

$$F(x) = \frac{f(x_1) + f(x)}{2} - f\left(\frac{x + x_1}{2}\right) \quad (x > x_1)$$

i) $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

ii) $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的

证明 设 $f''(x) > 0$ 往证 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$,

不妨设 $x_2 > x_1$ 令 $x_2 = x$

$$F(x) = \frac{f(x_1) + f(x)}{2} - f\left(\frac{x + x_1}{2}\right) \quad (x > x_1)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{x + x_1}{2}\right)$$

$\because f''(x) > 0$ $f'(x) \nearrow$ 当$x>x_1$时 $x > \dfrac{x + x_1}{2} \Longrightarrow f'(x) > f'\left(\dfrac{x + x_1}{2}\right)$

$\therefore F'(x) > 0$ $F(x) \nearrow$ 当$x>x_1$时 $F(x) > F(x_1) = 0$

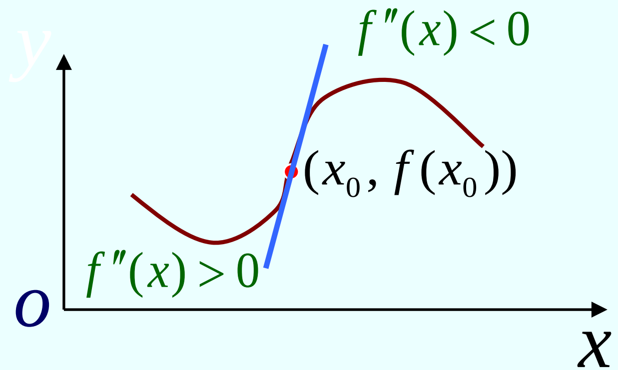
$x = x_2 > x_1$ $F(x_2) > F(x_1) = 0$ $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$,凹的

3. 拐点及其求法

定义 如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了,那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

说明： i)拐点是曲线上的点，$(x_0, f(x_0))$

不要写成 $x = x_0$ 是拐点



3. 拐点及其求法

定义 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了,那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

说明：ii)设 $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0)=0$ 且在 x_0 两侧 $f''(x)$ 不同号

则 (x_0, y_0) 是 $f(x)$ 的拐点

例 曲线 $y=x^4$ 是否有拐点？

解：$y''=12x^2$ 尽管 $f''(0)=0$

但在它的两侧 $y''>0$

故(0,0)不是拐点，没有拐点

3. 拐点及其求法

定义 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时， 曲线的凹凸性改变了,那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

说明: iii)拐点也可能是二阶导数不存在的点,此时$f''(x)$的符号发生变化

例 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 是否有拐点?

解: 当 $x\neq 0, y'=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}, y''=-\dfrac{2}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$,当$x$=0时 y', y''不存在

y'' 在 $(-\infty, +\infty)$ 不连续且不具有零点

$(-\infty,0)$ $y''>0$ 凹

$(0,+\infty)$ $y''<0$ 凸

故 $(0, 0)$ 是拐点

四、怎样用凹凸性解题

（1）求函数凹凸区间

> **求 拐点及凹凸区间的步骤：**
>
> Step 1 求 $f''(x)=0$ 以及 $f''(x)$ 不存在的点
>
> Step 2 用这些点将定义域分为若干个子区间；
>
> Step 3 列表，在每个子区间上用定理判断 $f(x)$ 的凹凸性.
>
> 对步骤中求出的每一个点，检查 $f''(x)$ 在这个点左右两侧的符号，当两侧的符号相反时，该点是拐点，当两侧的符号相同时，该点不是拐点.

1° $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

2° $(a, x_1)\ x_1\ (x_1, x_2)\ x_2\ (x_2, x_3) \cdots (x_n, b)$

y'' $\quad + \quad - \quad - \quad +$

y $\quad$ 凹 拐点 凸 × 拐点 凸 拐点 凹

注：在区间内部符号是一定的

假若 $f''(\xi_1) > 0,\ f''(\xi_2) < 0,$ 则 $\exists \xi,\ f''(\xi) = 0,$ 矛盾

例1 求曲线$y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$的凹凸区间及拐点.

解: 1) 求 $y'=x^{\frac{2}{3}}+(x-5)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}(x-2)x^{-\frac{1}{3}}$, $y''=\frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$

2) 令$y''=0$ 以及不存在的点 $x_1=-1$, $x_2=0$,

3) 列表判别得

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$
y	凸	-6	凹	0	凹

故凹区间$(-1,0)$及$(0,+\infty)$ 凸区间为$(-\infty,-1)$

拐点为 $(-1,-6)$

例2 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数

所给函数有任意阶导数，拐点只能出现在二阶导数等于0的点

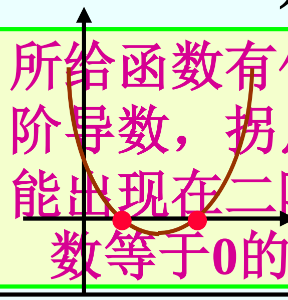
解 $y=(x^2-4x+3)^2 \quad y'=4(x^2-4x+3)(x-2)$

$$y''=4(x^2-4x+3)+4(2x-4)(x-2)=4(3x^2-12x+11)$$

令 $y''=0$ 得 $x=2\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ 邻近两侧 y'' 异号，

因此曲线有两个拐点

所给函数有任意阶导数，拐点只能出现在二阶导数等于0的点



例3 问 a,b 为何值时，点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解 $y'=3ax^2+2bx \quad y''=6ax+2b$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{由于 } y''(1)=0 & \Rightarrow 6a+2b=0 \\ y(1)=3 & \Rightarrow a+b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$$

（2）利用凹凸性证明不等式

①当题目中出现 $f\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right), \dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$ 时，可用结论

$$f''(x)\geq 0\text{时，}\ f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

$$f''(x)\leq 0\text{时，}\ f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

例 利用函数图形的凹凸性证明

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x>0,y>0,x\neq y).$$

证明 不等式可变形为

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}\quad(x>0,y>0,x\neq y).$$

（2）利用凹凸性证明不等式

例 利用函数图形的凹凸性证明

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad (x>0, y>0, x\neq y).$$

证明 不等式可变形为

$$\frac{x\ln x + y\ln y}{2} > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}\quad (x>0, y>0, x\neq y),$$

若令 $f(t)=t\ln t$，则需证明

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad (x>0, y>0, x\neq y),$$

因此只要证明曲线 $f(t)=t\ln t$ 在其定义域内是凹弧即可.
由于 $f'(t)=\ln t+1$，$f''(t)=\dfrac{1}{t}>0$，故 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹弧，得证。

（2）利用凹凸性证明不等式

②**$f(x)$在$[a,b]$上为凸函数,$f(a)=f(b)=0$** $\Rightarrow \forall x\in[a,b],\ f(x)\ge 0$

或$\forall x\in(a,b),\ f(x)>0$

$f(x)$在$[a,b]$上为凹函数,$f(a)=f(b)=0$ $\Rightarrow \forall x\in[a,b],\ f(x)\le 0$

或$\forall x\in(a,b),\ f(x)<0$

例. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,证明 $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x$

证明: 设 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}x-\sin x$, 则 $f'(x)=\dfrac{2}{\pi}-\cos x$

$f''(x)=\sin x>0$, 凹弧 且$f(0)=0=f(\dfrac{\pi}{2})$

所以,当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时 $f(x)<0$, 即$\dfrac{2}{\pi}x-\sin x<0$