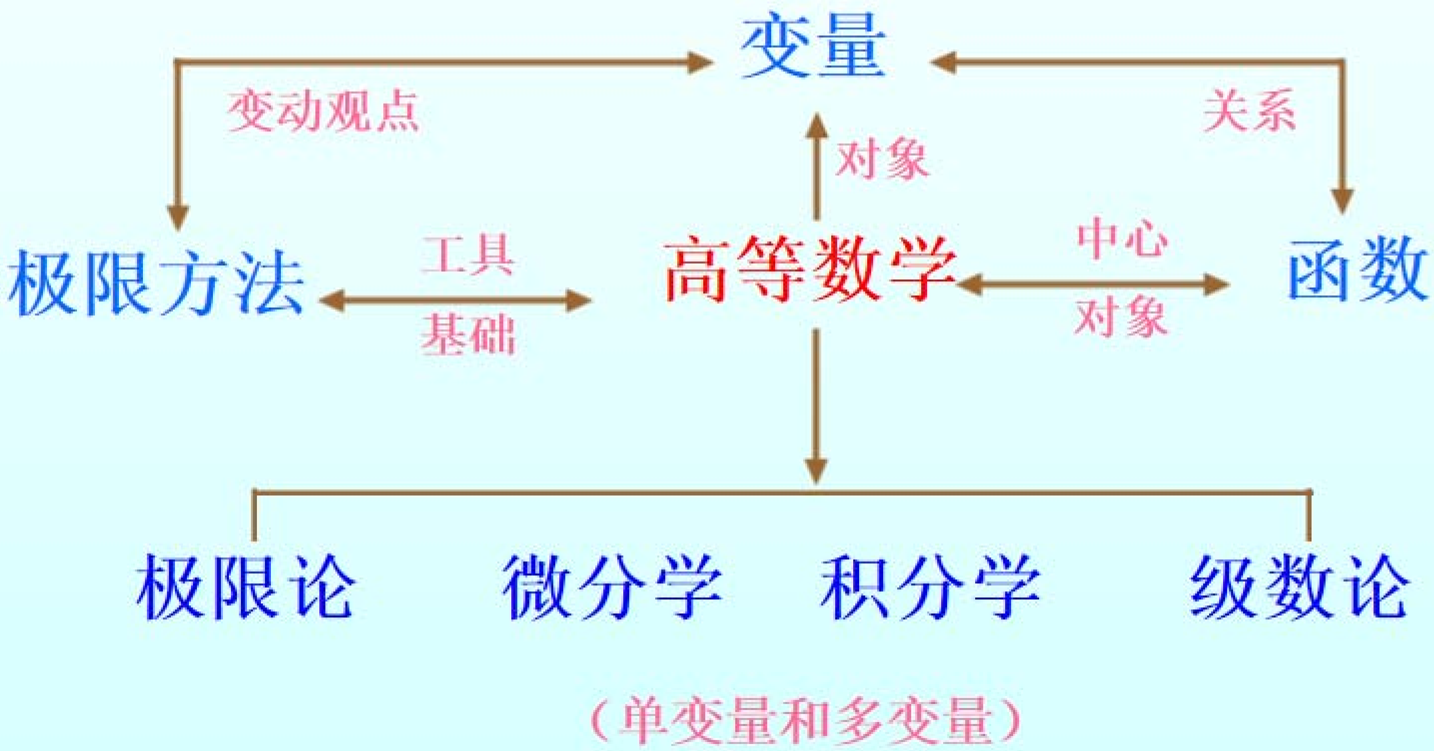
高等数学



上册

一元函数 微分学

空间曲线的切线

空间曲面的切平面

多个因素情况下的极值问题

多元函数微分学

下册

第九章多元函数微分法及其应用

- §1 多元函数的基本概念
- §2 偏导数
- §3 全微分
- §4 多元复合函数的求导法则
- §5 隐函数的求导公式

求导法则

- §6 多元函数微分学的几何应用
- §7 方向导数与梯度
- §8 多元函数的极值及其求法

偏导数的应用

第一节

多元函数的基本概念

内容

一、平面点集

二、多元函数概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续

一、平面点集，n维空间

1.平面点集

坐标平面 建立了坐标系的平面,表为二维数组(x,y)的全体 $R^2 = R\times R = \{(x,y) \mid x,y\in R\}$

平面点集 坐标平面上具有某种性质P的点的集合

表为$E=\{(x,y)|(x,y)$具有性质$P\}$

例：$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > r^2\}$

P_0的邻域 与平面定点$P_0(x_0,y_0)$距离小于$\delta(\delta>0)$的点$P(x,y)$全体,称为点P_0的δ邻域

$$U(P_0,\delta) = \left\{P \,\middle|\, |PP_0| < \delta\right\} = \left\{(x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\} = U(P_0)$$

点P_0的去心δ邻域 $\overset{o}{U}(P_0,\delta) = \left\{P \,\middle|\, 0 < |PP_0| < \delta\right\} = \overset{o}{U}(P_0)$

P_0的邻域 与平面定点$P_0(x_0,y_0)$距离小于$\delta(\delta>0)$的点$P(x,y)$全体,称为点P_0的δ邻域

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta\}=\left\{(x,y)\,\big|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}=U(P_0)$$

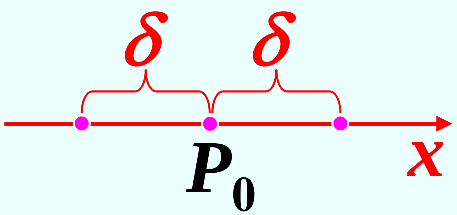
点P_0的去心δ邻域 $\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,0<|PP_0|<\delta\}=\overset{o}{U}(P_0)$

P_0的邻域 与平面定点$P_0(x_0,y_0)$距离小于$\delta(\delta>0)$的点$P(x,y)$全体,称为点P_0的δ邻域

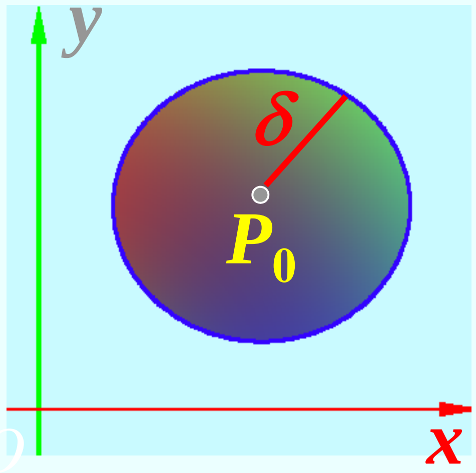
$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}=U(P_0)$$

点P_0的去心δ邻域 $\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}=\overset{o}{U}(P_0)$

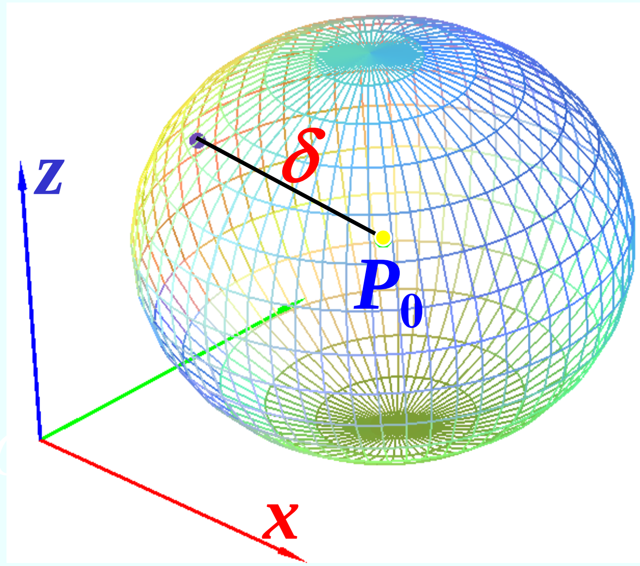
邻域的几何表示



数轴上的邻域



平面上的邻域



空间上的邻域

2.点与点集的关系

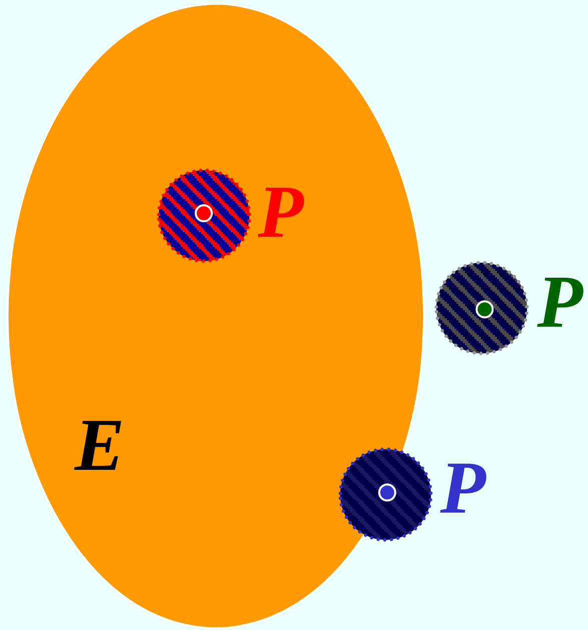
设有点集 E 及一点 P

(1) 内点：若存在点 P 的某邻域

$U(P)\subset E$,则称 P 为 E 的内点；

(2) 外点：若存在点 P 的某邻域

$U(P)\cap E=\varnothing$,则称 P 为 的外点；



(3) 边界点：若对点 P 的任一邻域

$U(P)$ 既含 E中的内点也含 E的外点,则称P为E的边界点

E的边界点的全体, 称为E的边界, 记作 ∂E .

E的边界点可能属于E，也可能不属于E.

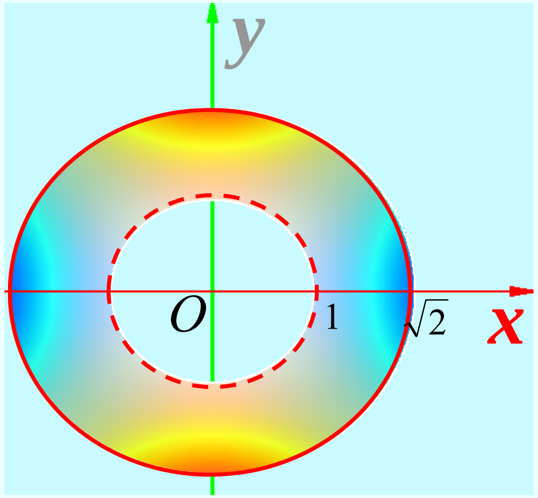
2.点与点集的关系

例 $E=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2\le 2\}$

内点集 $1<x^2+y^2<2$

外点集 $x^2+y^2<1$及$x^2+y^2>2$

边界 $x^2+y^2=1$及$x^2+y^2=2$



(4)聚点(极限点)

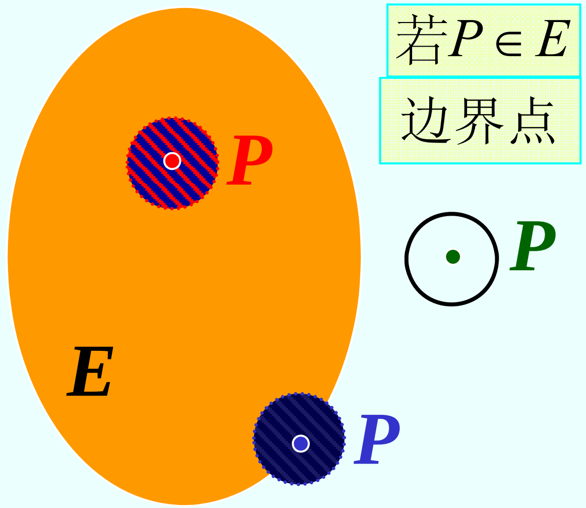
若对$\forall\delta>0$, 去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$内总有E中的点，

则称 P 是 E 的聚点.

上例聚点集 $1\le x^2+y^2\le 2$

聚点可以属于 E, 也可以不属于 E

若$P\in E$,但P非聚点,称P是孤立点

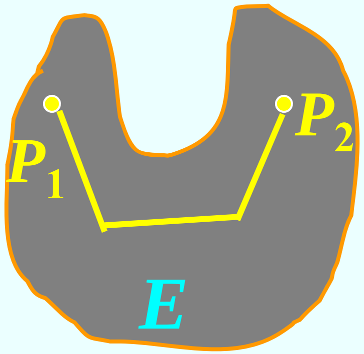


3. 平面区域

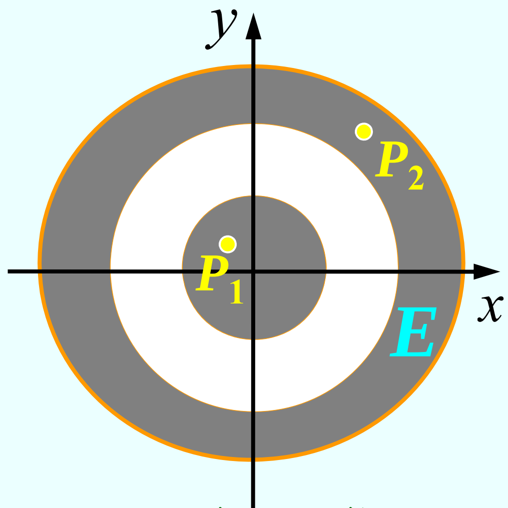
(1) 开集: 若点集E的点都是E的内点,则称E为开集.

(2) 闭集: 若点集E的边界 $\partial E \subset E$,则称E为闭集.

(3) 连通集: 若点集E内任何两点，都可用折线联结起来，且该折线上的点都属于E,则称E为连通集.

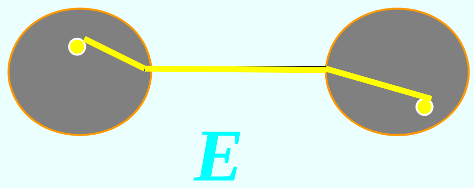


连通集



非连通集

$$u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$$



连通集

3. 平面区域

(4) 区域(或开区域): 连通的开集称为区域或开区域**.**

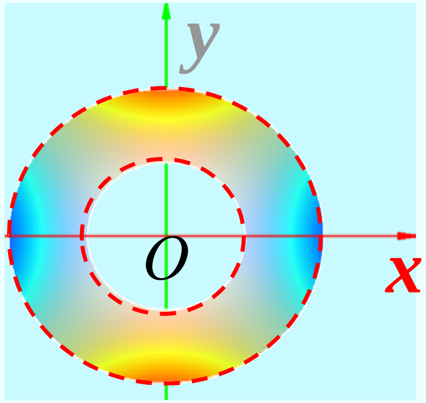
(5) 闭区域: 开区域同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

(6) 有界集: 对于平面点集$\boldsymbol{E}$，如果存在某一正数 $\boldsymbol{r}$，使得 $E \subset U(O, r)$,其中$\boldsymbol{O}$是坐标原点,称$\boldsymbol{E}$为有界集

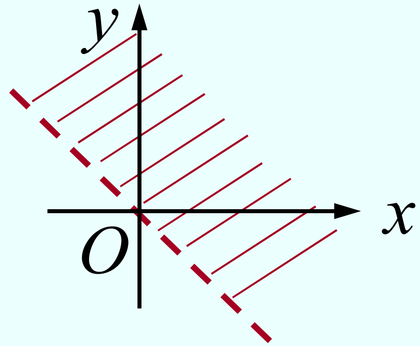
(7) 无界集: 一个集合如果不是有界集，就称这集合为无界集

例 在平面上

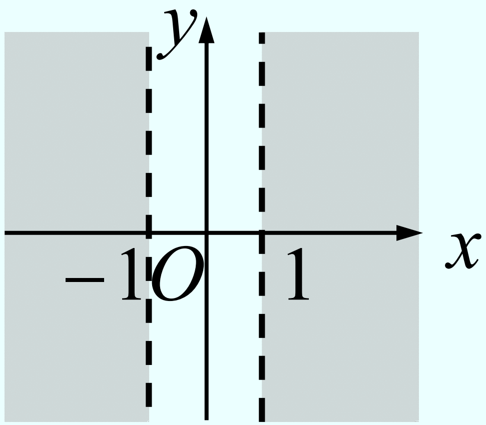
- ♣ $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ 有界开区域

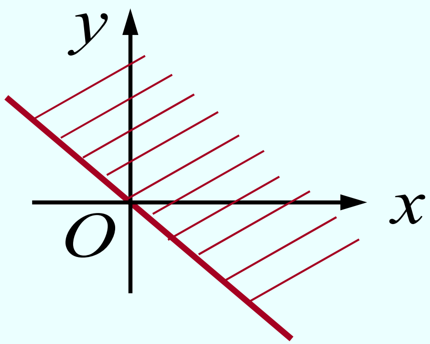


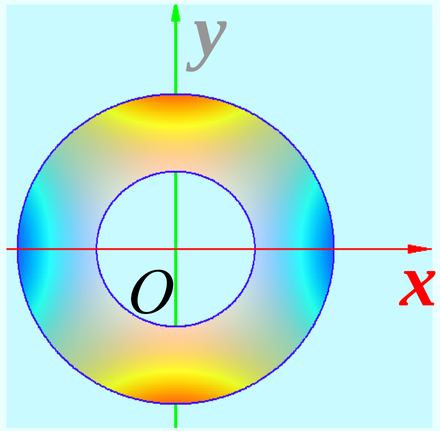
- ♣ $\{(x,y) \mid x + y > 0\}$ 无界开区域



- ♣ $\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$ 有界闭区域
- ♣ $\{(x,y) \mid x + y \ge 0\}$ 无界闭区域
- ♣ $\{(x,y) \mid |x| > 1\}$ 但非区域







4. n维空间

R^n　n 元有序数组 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$的全体所组成的集合

记作$\mathrm{R}^n = \mathrm{R}\times\mathrm{R}\times\cdots\times\mathrm{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$\mathrm{R}^n$中的一个点或一个$n$维向量

x_i称为点x的第 i 个坐标或第i个分量

零元$\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$称为$\mathrm{R}^n$中的坐标原点或零向量．

线性运算　设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathrm{R}^n$，$\lambda \in \mathrm{R}$

规定　加法　$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \cdots,\ x_n + y_n)$

数乘　$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n)$

---

n 维空间　定义了线性运算的R^n

距离 R^n中两点$x=(x_1,\cdots,x_n),\ \ y=(y_1,\cdots,y_n)$

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

当n=1,2,3即数轴,平面,空间中两点距离

范数 $\|x\|=\rho(x,0)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

当n=1,2,3时,$\|x\|$通常记作$|x|$

$$\|x-y\|=\rho(x-y,0)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}=\rho(x,y)$$

极限 设变元 $x=(x_1,\cdots,x_n),a=(a_1,\cdots,a_n)\in R^n$

若$\|x-a\|\to 0$,称变元x在R^n中趋向固定元a

记作 $x\to a$ 显然 $x\to a \Leftrightarrow x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n$

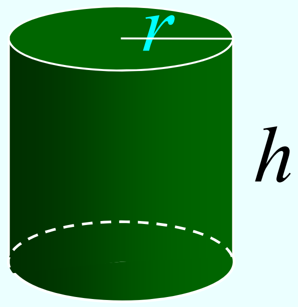
$\mathbf{R}^n$中点 a 的 $\boldsymbol{\delta}$邻域 $U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\,\boldsymbol{x}\mid x\in\mathrm{R}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\,\}$

二、多元函数概念

引例:

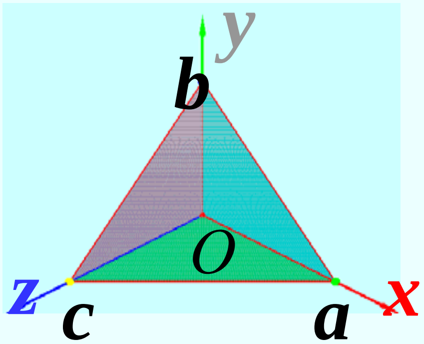
- 圆柱体的体积

$$V=\pi r^2 h\,,\ \{(r,h)\mid r>0,h>0\}$$



- 四面体的体积

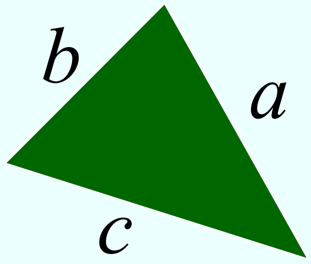
$$V=\frac{1}{6}abc$$



- 三角形面积的海伦公式（$p=\dfrac{a+b+c}{2}$）

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c)\mid\ a>0,b>0,c>0,a+b>c\}$$



二元函数 设D是R^2的一个非空子集,称映射$f: D \to R$为定义在D上的二元函数,记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \text{ 或 } z = f(P), P \in D$$

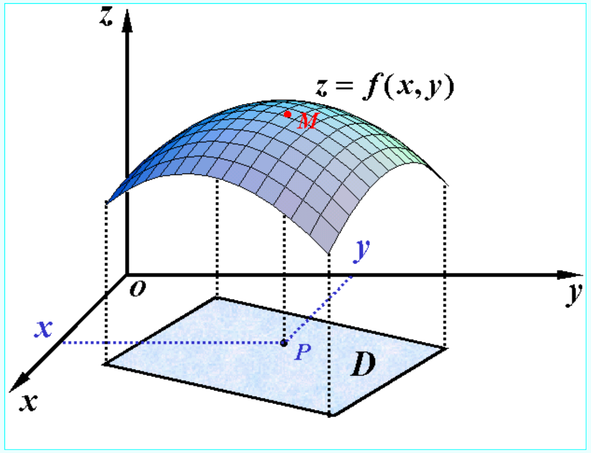
因变量 自变量 定义域

值域 $f(D) = \{z \mid z = f(P), P \in D\}$

图形 设二元函数 $z = f(x, y)$的定义域为D,则空间点集

$$\{(x,y,z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

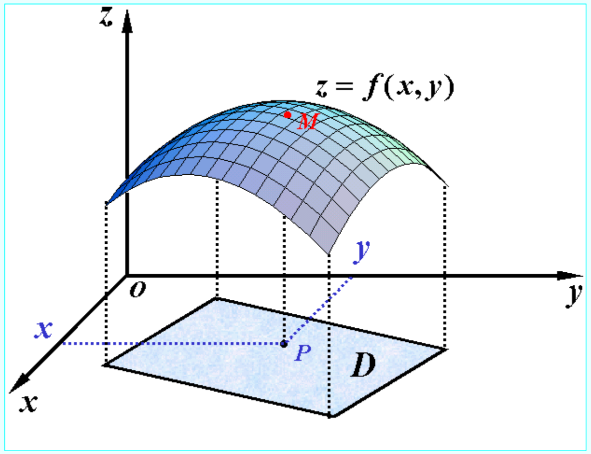
称为二元函数$z = f(x, y)$的图形



图形 设二元函数 $z=f(x\,,y)$的定义域为D,则空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

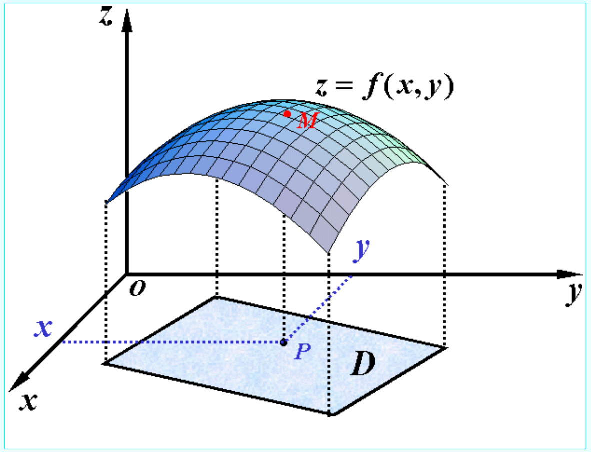
称为二元函数$z=f(x,y)$的图形



图形 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, 则空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

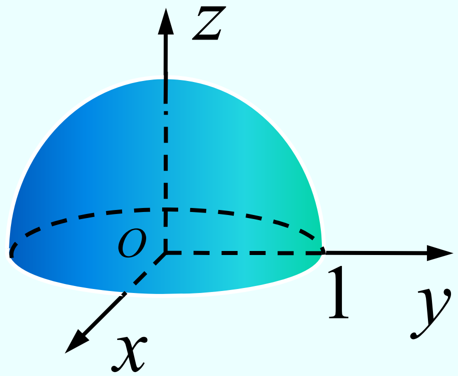
称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形



例如, 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义域为圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.



n元函数 设D是R^n中一个非空子集,称映射$f: D \to \mathrm{R}$为定义在D上的n元函数,记为

$$u = f(x_1, \cdots, x_n),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D \text{ 或 } u = f(P),\ P \in D$$

定义域 使多元函数算式$u = f(x_1, \cdots, x_n)$有意义的变元$x_1, \cdots, x_n$的值组成的集合

例1 函数$z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$的定义域________________

$$D=\{(x, y) \mid 4x - y^2 \geq 0,\ 1 - x^2 - y^2 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\}$$

例2 函数$u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$的定义域________________

$$D=\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \geq z^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

n元函数 设D是$\mathbb{R}^n$中一个非空子集,称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 为定义在D上的n元函数,记为

$$u = f(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \in D \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

例3 $f(x,y) = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$, 求$f(xy, \dfrac{x}{y})$

解 $$f(xy, \frac{x}{y}) = \frac{4xy \cdot \dfrac{x}{y}}{(xy)^2 + (\dfrac{x}{y})^2} = \frac{4y^2}{1+y^4}$$

例4 $f(x+y, e^y) = x^2 y$ 求$f(x,y)$

解 令$x + y = u, e^y = v \Longrightarrow \begin{cases} x = u - \ln v \\ y = \ln v \end{cases}$

$$f(u,v) = (u - \ln v)^2 \cdot \ln v \quad \text{即} f(x,y) = (x - \ln y)^2 \cdot \ln y$$

三、多元函数的极限

复习 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时$,|f(x)-A|<\varepsilon$

二重极限 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为D

$P_0(x_0,y_0)$ 是D 的聚点，若存在常数 A，对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当$P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$时，都有$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon,$

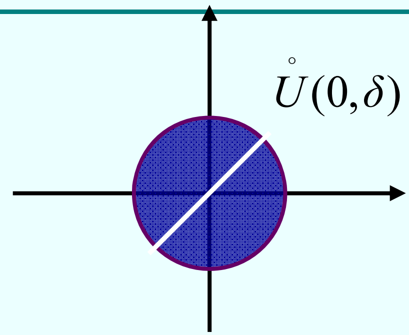
则称 A 是 $(x,y)\to(x_0,y_0)$时$f(x,y)$ 的二重极限

记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

或 $f(x,y)\to A\left((x,y)\to(x_0,y_0)\right)$

注：对于 $\mathring{U}(P_0,\delta)$中没有定义的点不考虑

如$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$存在($y=x$没有定义)



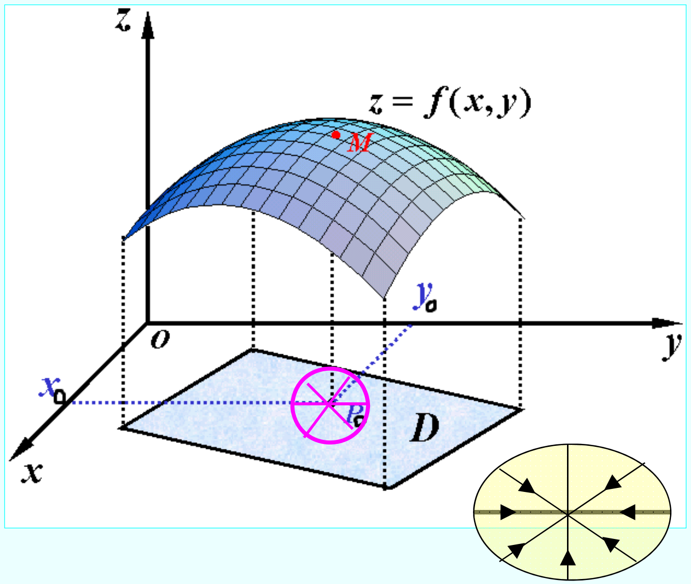
说明：①二重极限存在,是指动点$P(x,y)$沿任何线路趋于点P_0时,函数值$f(x,y)$都无限接近于A.

如果P以某些特殊方式趋于P_0，即使$f(x,y)$无限接近于某一确定值，我们也不能确定函数的极限存在.

若P以某些特殊方式趋于P_0时，$f(x,y)$趋于不同的值，那么就可以断定这函数的极限不存在.

可用来证明函数极限不存在

常取方向 $\begin{cases}\text{沿}x\text{轴方向}\\ \text{沿}y\text{轴方向}\\ \text{沿直线}y=kx+b\text{方向}\end{cases}$



②关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则

典型题（关于二重极限的问题）

①证明极限存在

例 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$，求证：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

证明 定义域 $D=\mathrm{R}^2\backslash(0,0)$，点 $(0,0)$ 为 D 的聚点

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，

总有 $\left|f(x,y)-0\right|=\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leq x^2+y^2<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

典型题（关于二重极限的问题）

②证明极限不存在

例 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在

解 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$, 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k=0\end{cases}$$

显然它随着k 值不同,极限也不同,故$f(x,y)$在$(0,0)$点极限不存在

典型题（关于二重极限的问题）

③求极限

(i) 换元法

有些二元函数极限可以转换成一元函数极限问题

如 $f(x,y)=g(\varphi(x,y))$ 令 $\varphi(x,y)=t$ 则 $f(x,y)=g(t)$

用一元函数极限运算讨论 $g(t)$

例 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y \overset{\text{积的运}}{\underset{\text{算法则}}{=\!=\!=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=2$$

四、多元函数的连续性

连续 设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为D, 聚点$P_0\in D$,

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$

称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续. 若$f(x,y)$在D的每一点都连续, 称$f(x,y)$在D上连续或$f(x,y)$是D上连续函数

说明：

①极限与连续的一个主要差别是聚点$\boldsymbol{P_0(x_0,y_0)}$的情况

- 极限的讨论不涉及该点,甚至该点可以无定义
- 但连续性则要求聚点必须在定义域内

②二元连续函数的图形是一片无裂缝,无点洞的曲面

四、多元函数的连续性

间断点 设函数$f(x,y)$的定义域为D, $P_0(x_0,y_0)$是D的聚点

如果函数 $f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$不连续, 则称$P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$ 的间断点

说明:

①二元函数的间断点可以是一个点,也可以是一条曲线

② 找间断点

步骤
- 先求定义域
- 从无定义或极限不存在的点中找
- 判定是否为聚点

例 函数$z=\dfrac{y^4-4x^2}{y^2-2x}$在何处是间断点

解 定义域$D=\{(x,y)\,|\,y^2-2x\neq 0\}$

抛物线$C:\{(x,y)\,|\,y^2-2x=0\}$上的点都是D的聚点

$f(x,y)$在C上没定义,故不连续,C上点都是间断点

例 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的间断点

解 定义域R^2, $(0,0)$是R^2的聚点

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

与k取值有关

$f(x,y)$在$(0,0)$点极限不存在 所以,$(0,0)$是间断点

运算法则

前面指出 多元函数的极限运算法则(类似一元函数)

可以证明 多元连续函数的和,差,积,商(分母不为0处)

仍连续；复合函数也连续

多元初等函数

由常数及具有不同变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的用一个式子表示的多元函数

例$z = \sin(x+y)$ $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

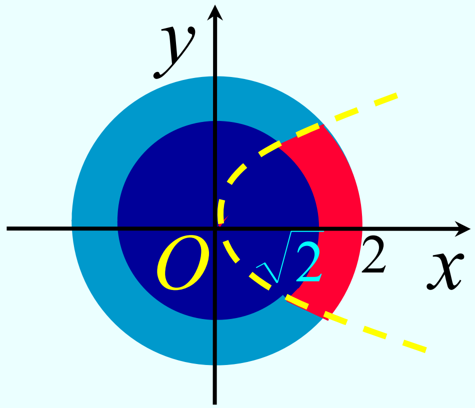
结论：一切多元初等函数在定义区域内连续.

定义区域指包含在定义域内的区域或闭区域

例 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$



有界闭域上连续的多元函数性质(类似一元函数)：

性质：若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则

(1) $f(P)$ 在 D 上有界,能取得最大值 M 及最小值 m ;

(2) $f(P)$ 在 D 上能取到介于最大值和最小值之间的任何值.

求极限 **(ii)初等函数在定义区域内连续**

(i) 换元法

$f(x,y)$初等函数 若$(x_0,y_0)\in$定义域,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

例 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{4-xy}{x^2+y^2}$

解 初等函数,连续点, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{4-xy}{x^2+y^2}=4$

(iii)利用两边夹法则 当$f(x,y)\le g(x,y)\le h(x,y)$

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=A$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=A$

例 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

$\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$ 所以原极限=0

分析 $x\to0,y=kx$

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}=0$$

例 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x}$

解 $0 \le \left|\dfrac{\sin xy}{x}\right| \le \dfrac{|xy|}{|x|} = |y|$

$\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

所以原极限=0

$$\cancel{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y}$$

两个函数定义域不同

后者中点集{(x,0)}上的点不在讨论范围内

(iv)利用化简方法

恒等变形,因式分解,有理化,等价代换,极限的运算性质

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$