

## 第三节

## 三重积分

## 内容

- 一、三重积分的概念
- 二、三重积分的计算
  - 1、利用直角坐标系计算
  - 2、利用柱面坐标计算
  - 3、利用球面坐标计算
- 三、利用性质计算三重积分



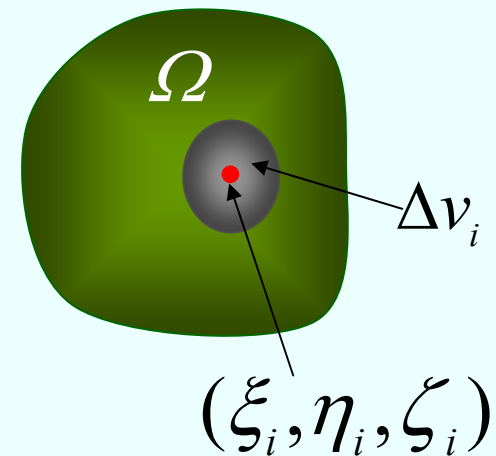
## 一、三重积分的概念

**引例:** 设在空间有限闭区域  $\Omega$  内分布着某种不均匀的物质, 密度函数为  $\mu(x, y, z) \in C$ , 求分布在  $\Omega$  内的物质的质量  $M$ .

**解决方法:** 类似二重积分解决问题的思想, 采用  
“分割, 取点, 作和, 求极限”

可得

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



**定义.** 设  $f(x, y, z)$  是空间有界闭区域  $\Omega$  上的有界函数  
若对  $\Omega$  作任意分割  $\Delta v_i (i=1, \dots, n)$ , 任意取点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$ ,

$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta v_i \text{直径}\}$  若

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i \stackrel{\text{记作}}{=} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在, 称  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上的三重积分存在(可积)

$dv$  称为体积元素, 在直角坐标系下常写作  $dx dy dz$ .

**注:** ①  $f$  在  $\Omega$  上连续, 则可积

② 物理意义 当  $f(x, y, z) \geq 0$  时  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  表示占有空间  $\Omega$   
的体密度为  $f(x, y, z)$  的物体的质量

③ 三重积分有类似于二重积分的性质

{	可加性	线性性
	估值性	比较性
	中值性	对称性

## 二、三重积分的计算

### 1. 直角坐标系中将三重积分化为三次积分

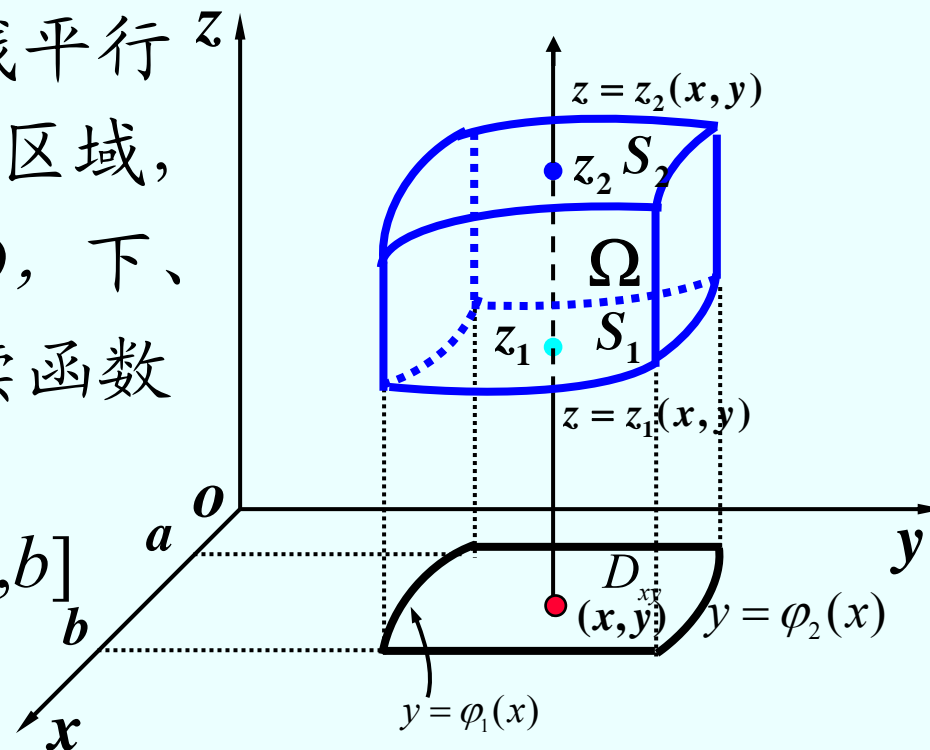
特点：若积分区域的边界方程均为变量 $x, y, z$ 的一次或零次方程时, 宜于用直角坐标系

设 $\Omega$ 是由上下两曲面及母线平行于 $z$ 轴的柱面所围成的空间区域,  
 $\Omega$ 在 $xoy$ 面上的投影区域为 $D$ , 下、上两个曲面都是 $D_{xy}$ 上的连续函数  
 $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$

设 $D_{xy}$ 在 $x$ 轴上的投影区间 $[a, b]$

连续函数 $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$

在 $D_{xy}$ 内任取点 $(x, y)$ 作平行于 $z$ 轴的射线,



# 1. 直角坐标系中将三重积分化为三次积分

线段 $z_1z_2$ 的质量  $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$  积分结果是 $x,y$ 的函数

先将 $x,y$ 看做定值,将 $f(x,y,z)$ 看作 $z$ 的函数,

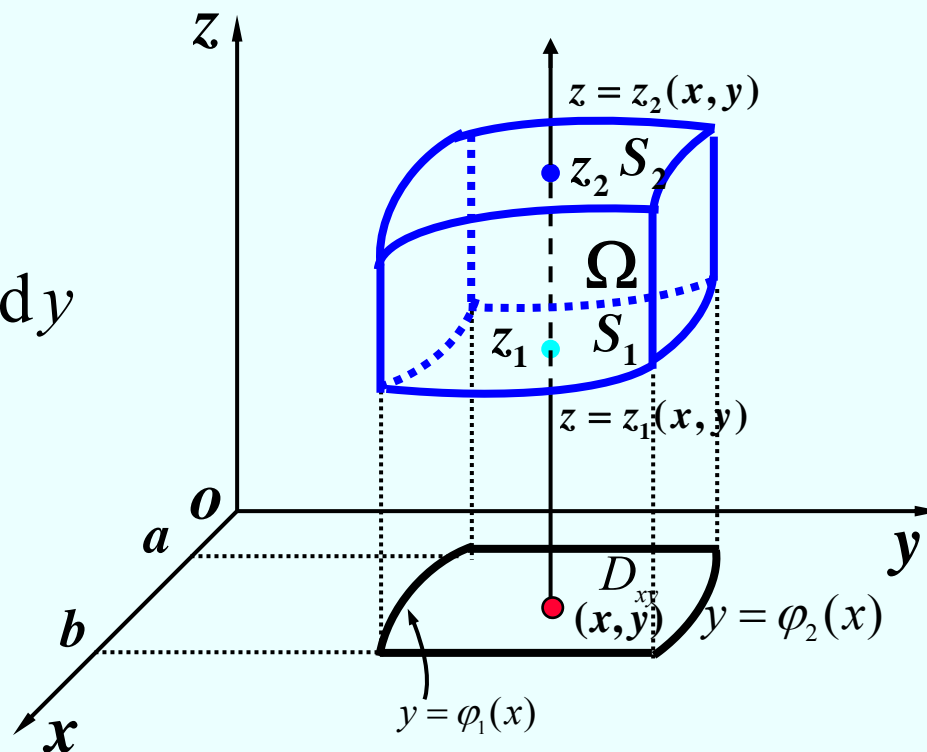
该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

记作  $\iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



# 1. 直角坐标系中将三重积分化为三次积分

## 步骤①投影法(先一后二)

设 $\Omega$ 在 $xoy$ 面上的投影为 $D_{xy}$ , 任取一点作平行于 $z$ 轴的射线  
若交点为两个, 则入射点所在曲面为 $z$ 的下限

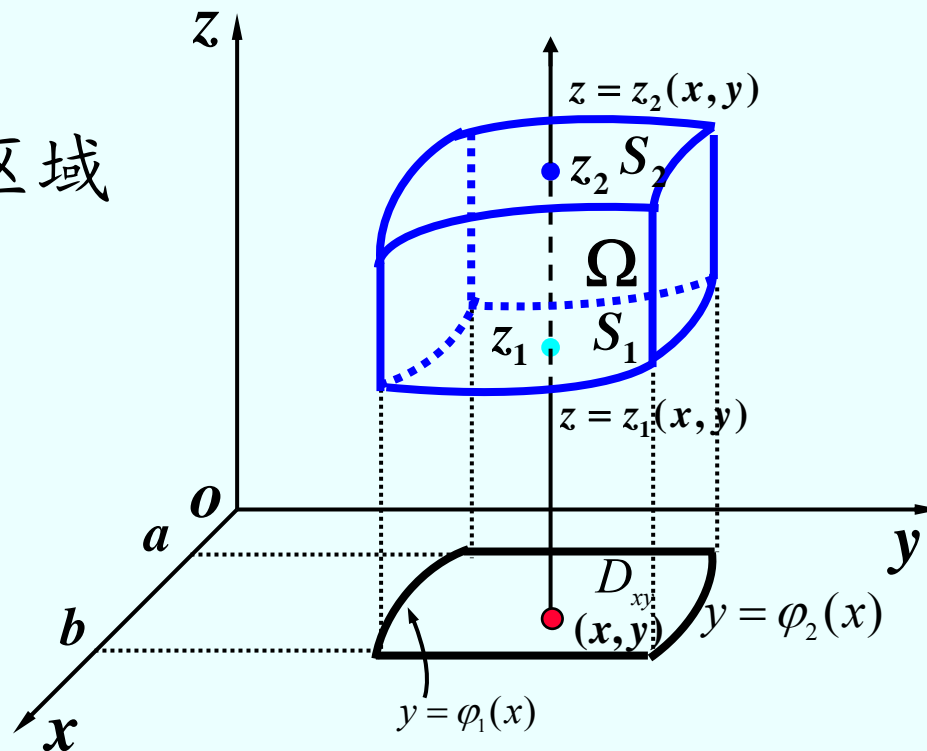
出射点所在曲面为 $z$ 的上限

若交点超过两个则要划分区域

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}} \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$



**例1.** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为三个坐标

面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域.

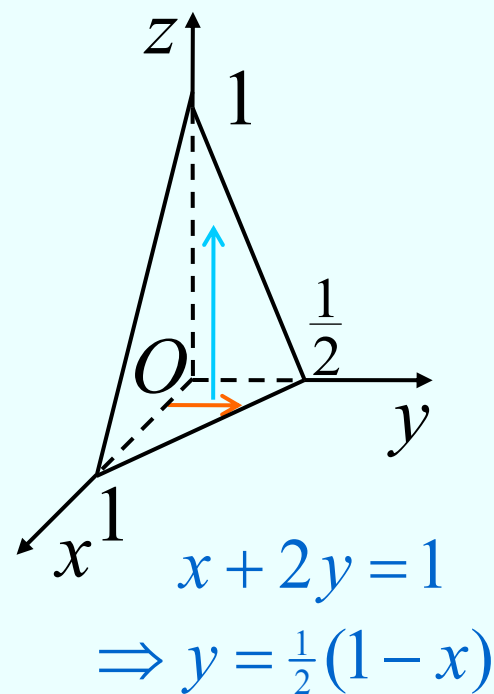
解:  $\Omega: \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x - 2y \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(1 - x) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$\therefore \iiint_{\Omega} x dx dy dz$$

$$= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dy \int_0^{1-x-2y} dz$$

$$= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (1-x-2y) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{48}$$

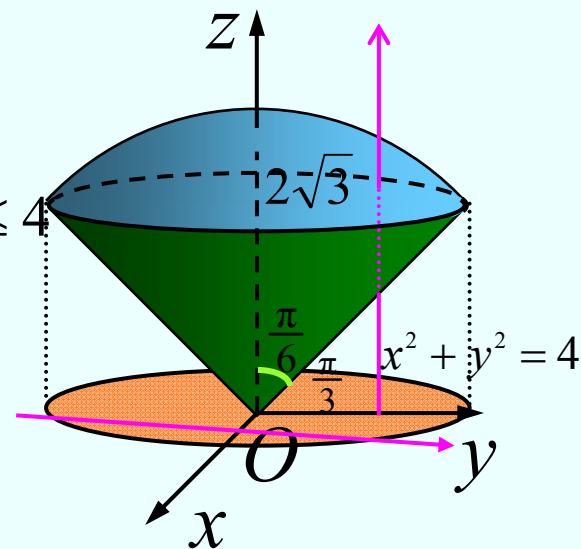


**例2.**若 $\Omega$ 由锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 围成,则三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = ?$

**解:** 投影法

求交线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$  得投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4$

$$I = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$



# 1. 直角坐标系中将三重积分化为三次积分

## ② 截面法(先二后一)

若空间区域 $\Omega$ 介于平面 $z=c_2$ 与 $z=c_1$  ( $c_2 > c_1$ ) 之间,  
过 $z$ 轴上的区间 $[c_1, c_2]$ 中任一点 $z$ 作垂直于 $z$ 轴的平面  
截区域 $\Omega$ 得平面区域 $D(z)$ , 则

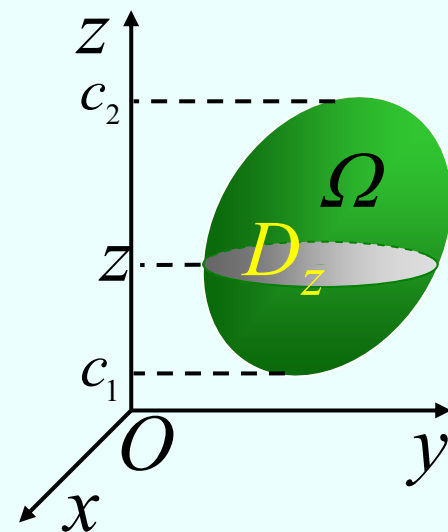
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy$$

**说明:** 被积函数 $f(z)$ , 作垂直 $z$ 轴的平面

$$\int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D(z)} f(z) dx dy = \int_{c_1}^{c_2} f(z) \cdot S_{D(z)} dz$$

同理被积函数 $f(x)$ , 作垂直 $x$ 轴的平面

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \iint_{D(x)} f(x) dy dz = \int_{a_1}^{a_2} f(x) \cdot S_{D(x)} dx \quad \text{同理 } f(y)$$



上例. 若 $\Omega$ 由锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 围成, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = ?$

解: 在直角坐标系下

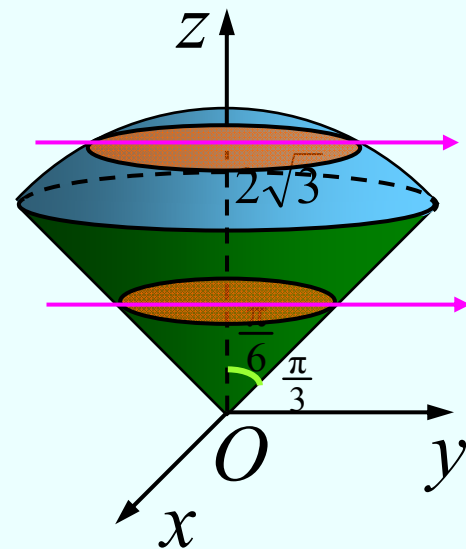
$$\text{求交线} \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{3}, \quad D(z): x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}$$

$$2\sqrt{3} \leq z \leq 4, \quad D(z): x^2 + y^2 \leq 16 - z^2$$

$$I = \int_0^{2\sqrt{3}} dz \int_{-\frac{z}{\sqrt{3}}}^{\frac{z}{\sqrt{3}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{z^2}{3} - x^2}}^{\sqrt{\frac{z^2}{3} - x^2}} f(x, y, z) dy$$

$$+ \int_{2\sqrt{3}}^4 dz \int_{-\sqrt{16 - z^2}}^{\sqrt{16 - z^2}} dx \int_{-\sqrt{16 - z^2 - x^2}}^{\sqrt{16 - z^2 - x^2}} f(x, y, z) dy$$

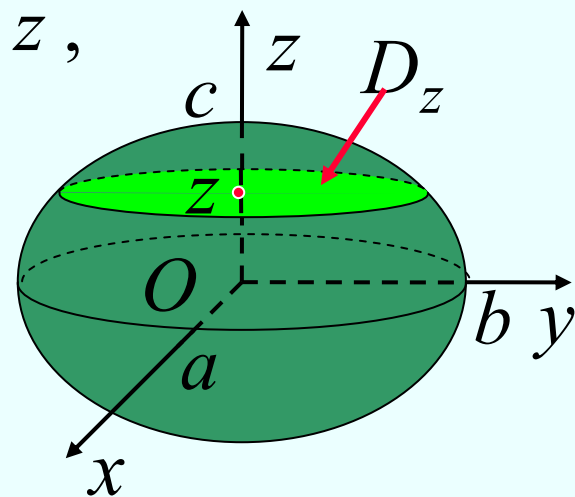


例2. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ,

其中  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

解:

$$\Omega: \begin{cases} -c \leq z \leq c \\ D_z: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \end{cases}$$



用截面法

$$\therefore \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy$$

$$= \int_{-c}^c z^2 \cdot \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3$$

## 2. 利用柱面坐标计算三重积分

特点: 积分区域的边界曲面方程含  $x^2 + y^2$ , 或积分区域投影是圆形, 扇形, 圆环形类区域, 或被积函数为  $f(x^2 + y^2)$

设  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 将  $x, y$  用极坐标  $\rho, \theta$  代替, 则  $(\rho, \theta, z)$  就称为点  $M$  的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

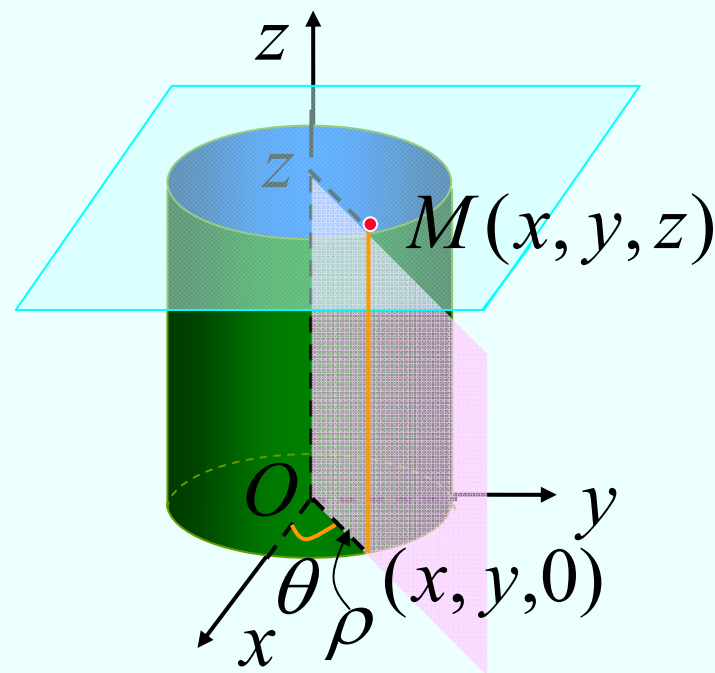
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \leq \rho < +\infty \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{pmatrix}$$

坐标面分别为

$\rho = \text{常数}$   $\longrightarrow$  圆柱面

$\theta = \text{常数}$   $\longrightarrow$  半平面

$z = \text{常数}$   $\longrightarrow$  平面



## 2. 利用柱面坐标计算三重积分

### ① 投影法(先一后二)

$\Omega$ 在 $xoy$ 面的投影 $D_{xy}$ ,

$$\forall (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

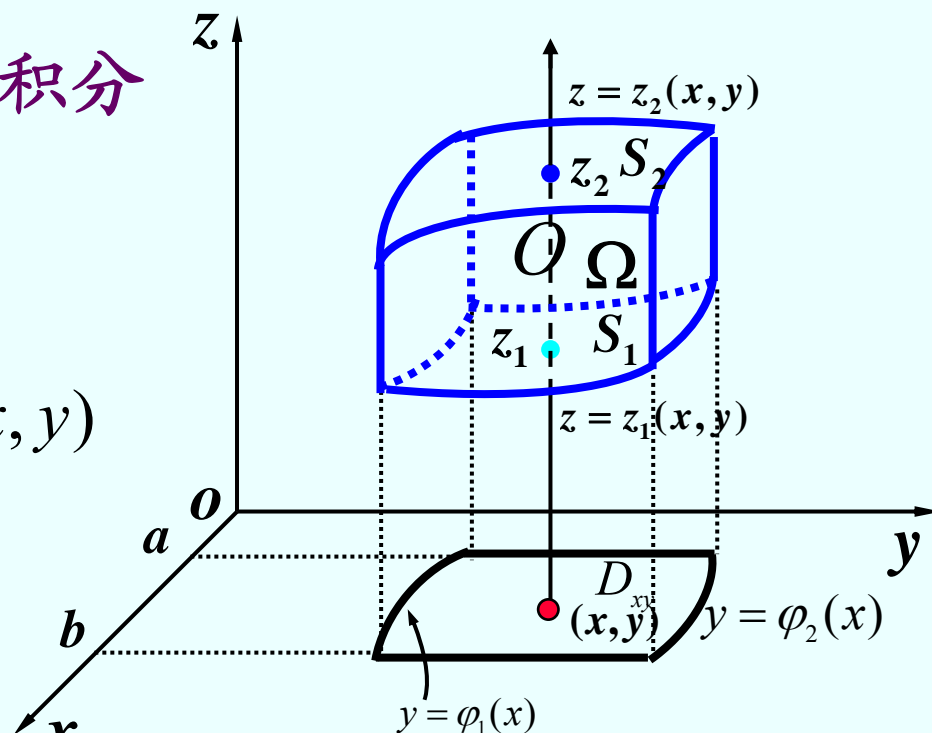
在坐标变换下,

$$D_{xy} \leftrightarrow D_{\rho\theta} : \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta, \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}^{z_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz$$



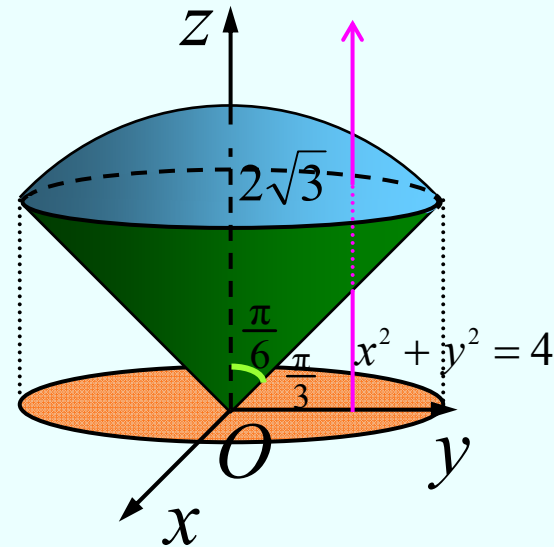
上例若 $\Omega$ 由锥面  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  围成, 则三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = ?$

解: 投影法(柱面坐标)

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \Rightarrow z = \sqrt{3}\rho$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow z = \sqrt{16 - \rho^2}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{16-\rho^2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz$$



解: 投影法(直角坐标) 求交线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$I = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

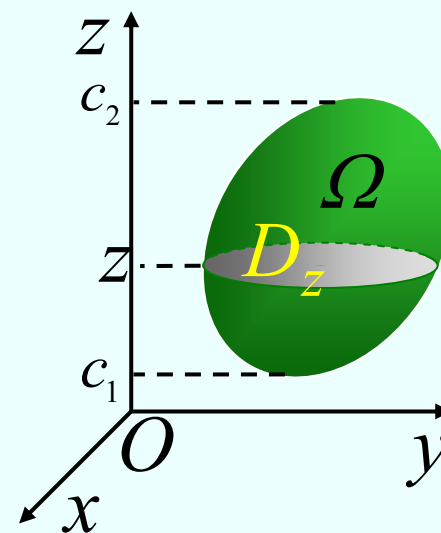
## 2. 利用柱坐标计算三重积分

### ②截面法(先二后一)

$\Omega$ 被平行于 $xoy$ 面的平面截得 $D(z)$ ,其中  $c_1 \leq z \leq c_2$

在坐标变换下,  $D(z) \leftrightarrow D_{\rho\theta}(z)$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \\ &= \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \\ &= \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_{\rho, \theta}(z)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$



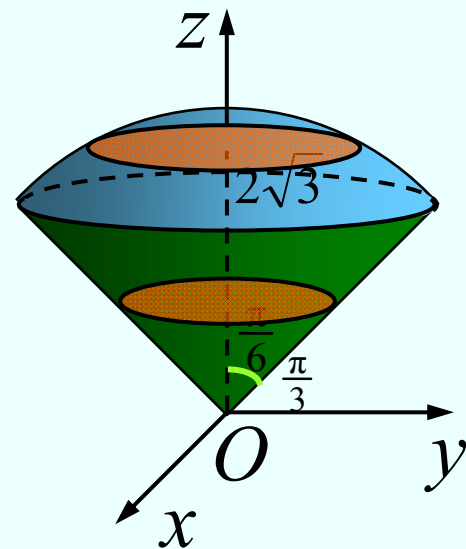
上例. 若 $\Omega$ 由锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 围成, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = ?$

解: 截面法(柱面坐标)

$$0 \leq z \leq 2\sqrt{3}, \quad D(z): x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}$$

$$2\sqrt{3} \leq z \leq 4, \quad D(z): x^2 + y^2 \leq 16 - z^2$$

$$I = \int_0^{2\sqrt{3}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{z}{\sqrt{3}}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho \\ + \int_{2\sqrt{3}}^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{16-z^2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho$$



$$I = \int_0^{2\sqrt{3}} dz \int_{-\frac{z}{\sqrt{3}}}^{\frac{z}{\sqrt{3}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{z^2}{3}-x^2}}^{\sqrt{\frac{z^2}{3}-x^2}} f(x, y, z) dy \\ + \int_{2\sqrt{3}}^4 dz \int_{-\sqrt{16-z^2}}^{\sqrt{16-z^2}} dx \int_{-\sqrt{16-z^2-x^2}}^{\sqrt{16-z^2-x^2}} f(x, y, z) dy$$

例. 计算  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$  其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  及

$z = x^2 + y^2$  所围成的区域

解 联立  $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow z = 1, -2 (\text{舍去})$

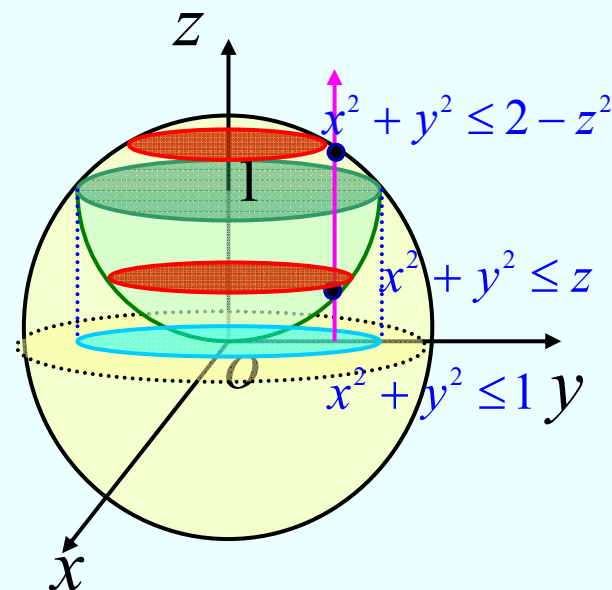
利用投影法

投影域  $D_{\rho\theta} : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz = \frac{7\pi}{12}$$

利用截面法

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} z \rho d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-z^2}} z \rho d\rho \\ &= \frac{7\pi}{12} \end{aligned}$$



### 3. 利用球面坐标计算三重积分

特点被积函数具有形式  $f(x^2 + y^2 + z^2)$ , 或积分

区域边界曲面方程含  $x^2 + y^2 + z^2$  的形式

$$(x, y, z) \quad (\rho, \theta, z) \quad (r, \theta, \varphi)$$

柱面坐标      球坐标

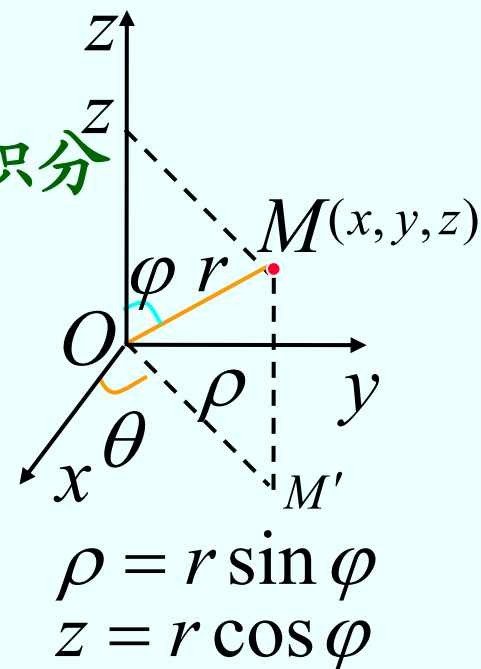
直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{pmatrix}$$

$r$  为  $O$  与  $M$  间距离

$\varphi$  为  $\overrightarrow{OM}$  与  $z$  轴的正向夹角

$\theta$  为从正  $z$  轴看自  $x$  轴按逆时针方向转到  $\overrightarrow{OM'}$  的角



### 3. 利用球面坐标计算三重积分

特点: 被积函数  $f(x^2 + y^2 + z^2)$  形式或积分区域边界曲面方程含  $x^2 + y^2 + z^2$  的形式

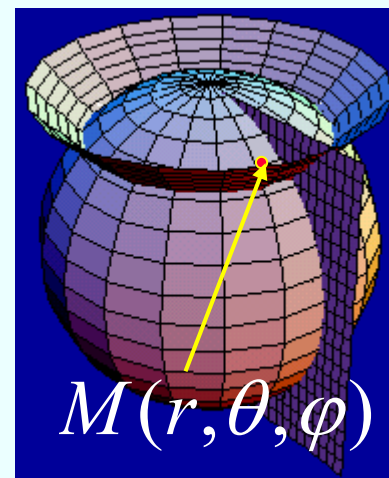
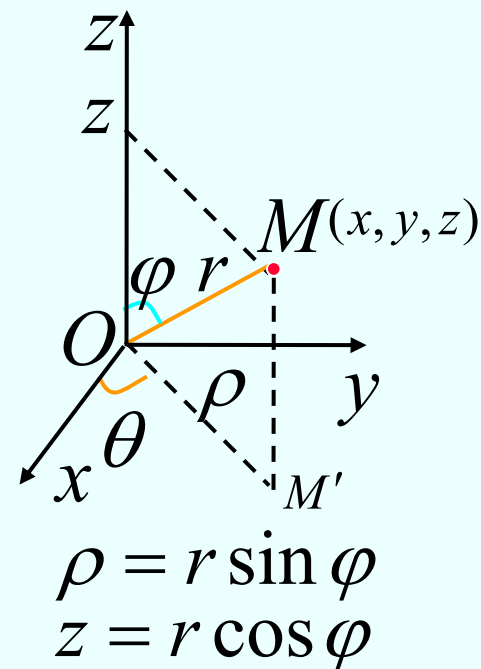
$(x, y, z)$      $(\rho, \theta, z)$      $(r, \theta, \varphi)$

柱面坐标    球坐标

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \begin{cases} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

坐标面分别为  $\begin{cases} r = \text{常数} \longrightarrow \text{球面} \\ \theta = \text{常数} \longrightarrow \text{半平面} \\ \varphi = \text{常数} \longrightarrow \text{锥面} \end{cases}$



直角坐标系  $\xrightarrow{\text{变换}}$  球面坐标

用三组坐标面将 $\Omega$ 分成许多小块

考虑 $r, \varphi, \theta$ 各取得微小增量 $dr, d\varphi, d\theta$

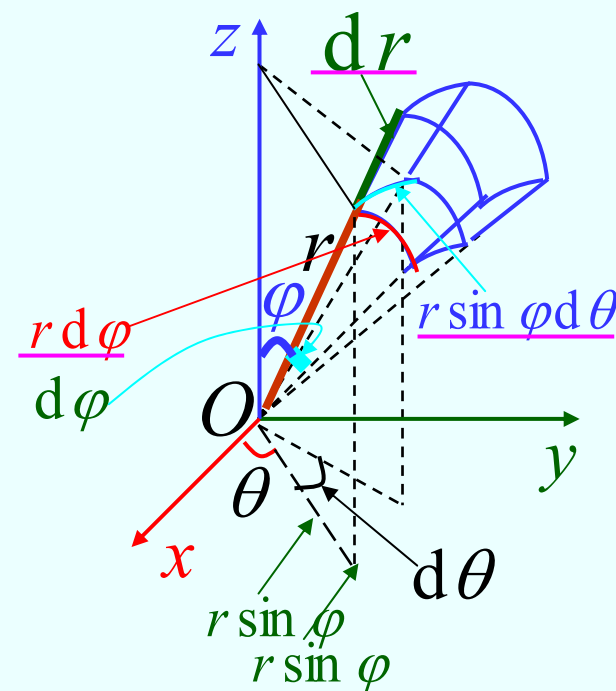
所成六面体的体积? 看作长方体

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

### 利用球面坐标计算三重积分

积分区域 $\Omega_{xyz}$ 在球面坐标  $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$  下变为 $\Omega_{r\theta\varphi}$  则有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$



## 利用球面坐标计算三重积分

积分区域 $\Omega_{xyz}$ 在球面坐标 $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$ 下变为 $\Omega_{r\theta\varphi}$ 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

**关键:** 确定积分限

1. 先用过原点的射线把区域夹住, 射线与 $z$ 轴正向夹角  $\alpha, \beta$  分别为 $\varphi$ 的上下限;
2. 再把图像向 $xoy$ 面上投影, 用过原点的射线把投影夹住得 $\theta$ 的上下限
3. 引射线穿透 $\Omega$ , 入射面为 $r$ 的下限, 出射面为 $r$ 的上限; 或将球面坐标公式代入积分域中求出 $r, \theta, \varphi$ 的范围

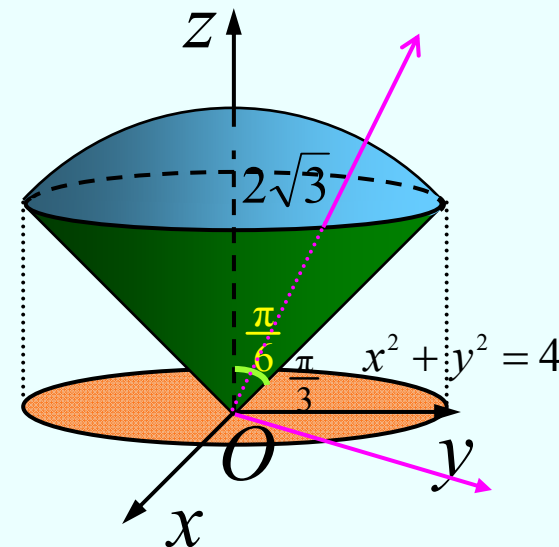
上例若 $\Omega$ 由锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 围成,则三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = ?$

解: 球面坐标 求交线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

$I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr$$



$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$r$ 为 $O$ 与 $M$ 间距离  
 $\varphi$ 为 $\overrightarrow{OM}$ 与 $z$ 轴的正向夹角

$\theta$ 为从正 $z$ 轴看自 $x$ 轴按逆时针方向转到 $\overrightarrow{OM}$ 的角

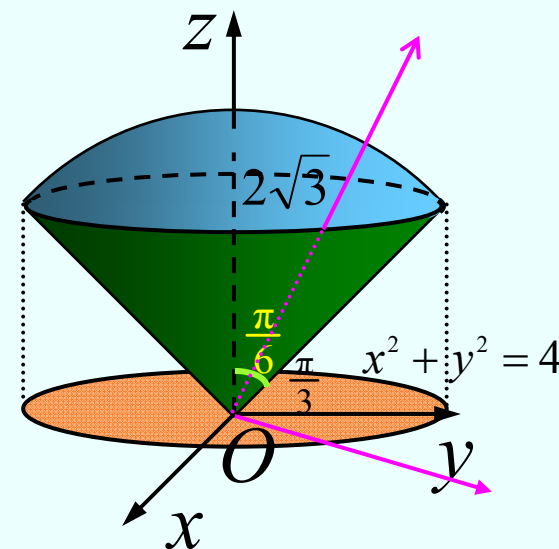
上例若 $\Omega$ 由锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 围成, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = ?$

解: 球面坐标 求交线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

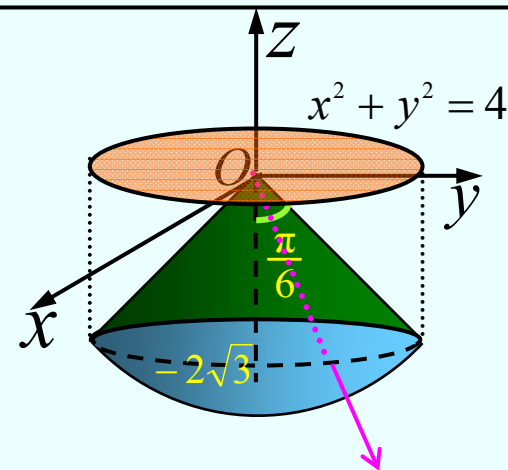
$I =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr$$



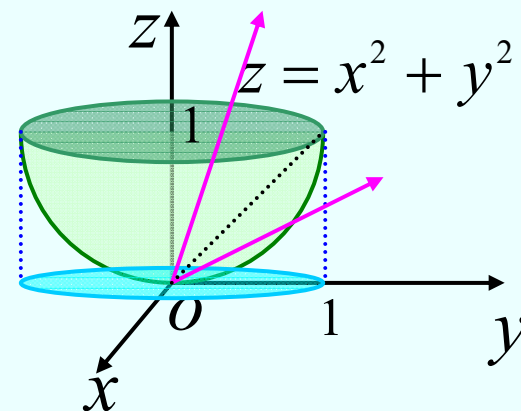
若在 $xoy$ 面的下方, 则

$$\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) \cdot r^2 \sin \varphi dr$$



例. 计算  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  其中  $\Omega: z = x^2 + y^2$  与  $z=1$  共围区域

解 利用球面坐标系



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sec\varphi} f(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cot\varphi \csc\varphi} f(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ \Rightarrow r \cos\varphi &= 1 \\ \Rightarrow r &= \sec\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ \Rightarrow r \cos\varphi &= r^2 \sin^2\varphi \\ \Rightarrow r &= \cot\varphi \cdot \csc\varphi \end{aligned}$$

### 三、利用性质计算三重积分

#### ①利用中值定理

**例1** 设 $f(x,y,z)$ 为连续函数  $I(R) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R} f(x,y,z)dv$  则当 $R \rightarrow 0$ 时( )

- (A)  $I(R)$ 是 $R$ 的同阶无穷小 (B)  $I(R)$ 是 $R$ 的二阶无穷小  
(C)  $I(R)$ 是 $R$ 的三阶无穷小 (D)  $I(R)$ 至少是 $R$ 的三阶无穷小

**解** 利用中值定理

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R} f(x,y,z)dv = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V$$

$$I(R) = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

若 $f(0,0,0) \neq 0$   $I(R)$ 是 $R$ 的三阶无穷小

若 $f(0,0,0) = 0$   $I(R)$ 至少是 $R$ 的三阶无穷小

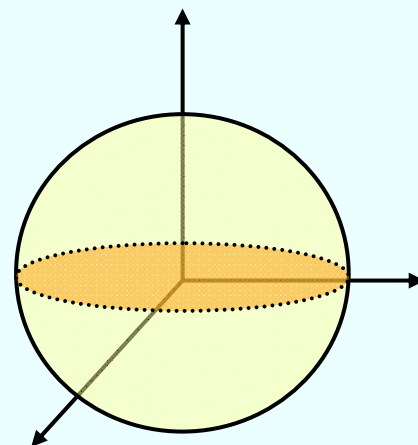
## ①利用中值定理

**例2** 设 $f(x)$ 具有连续导数,  $f(0)=0$ ,  $\Omega$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ ,

$$\text{则} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv = ?$$

**解** 若用中值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) \cdot \frac{4}{3} \pi t^3 \quad \text{无法确定}$$



$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r) r^2 \sin \varphi dr \\ &= \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \cdot 4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4f(t)t^2}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$$

### 三、利用性质计算三重积分

#### ② 利用对称性

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \begin{cases} \Omega \text{ 关于 } yoz \text{ 平面对称} \\ f(-x, y, z) = -f(x, y, z) \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega \text{ 关于 } xoz \text{ 平面对称} \\ f(x, -y, z) = -f(x, y, z) \end{cases} \\ & \begin{cases} \Omega \text{ 关于 } xoy \text{ 平面对称} \\ f(x, y, -z) = -f(x, y, z) \end{cases} \quad \text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0 \\ & \begin{cases} \Omega \text{ 关于 } yoz \text{ 平面对称} \\ f(-x, y, z) = f(x, y, z) \end{cases} \quad \text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega(x \geq 0)} f(x, y, z) dv \\ & \quad \text{同理 } xoz, xoy \text{ 也有同样结论} \end{aligned}$$

例 设  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0, \Omega_0: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$(A) \checkmark \iiint_{\Omega} z dv = 4 \iiint_{\Omega_0} z dv$$

$$(B) \iiint_{\Omega} \overset{=0}{xyz} dv = 4 \iiint_{\Omega_0} \overset{>0}{xyz} dv$$

$$(C) \iiint_{\Omega} \overset{=0}{x} dv = 4 \iiint_{\Omega_0} \overset{>0}{x} dv$$

$$(D) \iiint_{\Omega} \overset{=0}{y} dv = 4 \iiint_{\Omega_0} \overset{>0}{y} dv$$

## 2° 利用轮换对称性

若积分区域的表达式中将其变量 $x, y, z$ 按下列次序:

$x$ 换成 $y$ ,  $y$ 换成 $z$ ,  $z$ 换成 $x$ 后其表达式均不变, 则称积分

区域关于变量 $x, y, z$ 具有轮换对称性, 此时一般有

$$\iiint_{\Omega} f(x) dv = \iiint_{\Omega} f(y) dv = \iiint_{\Omega} f(z) dv$$

**例** 设 $f(x)$ 为连续函数且 $f(x) > 0$ ,  $\iiint_{\Omega} \frac{f(x)}{f(x) + f(y) + f(z)} dx dy dz = ?$   
其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ .

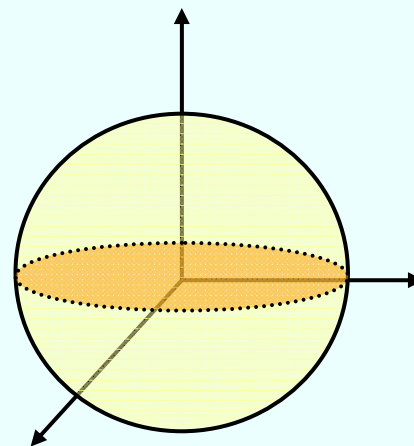
**解** 
$$I = \iiint_{\Omega} \frac{f(y)}{f(y) + f(z) + f(x)} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{f(z)}{f(z) + f(x) + f(y)} dx dy dz$$
$$= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{9} \pi a^3$$

## 2° 利用轮换对称性

例  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2 + z^2 + 2xy + 3) dv = ?$

解 
$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2 + z^2) dv + 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} xy dv \\ &= \frac{2}{3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2 + y^2 + z^2) dv + 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr + 4\pi R^3 \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4 dr + 4\pi R^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} + 4\pi R^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} x^2 dv \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} y^2 dv \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} z^2 dv \end{aligned}$$



### 三、利用性质计算三重积分

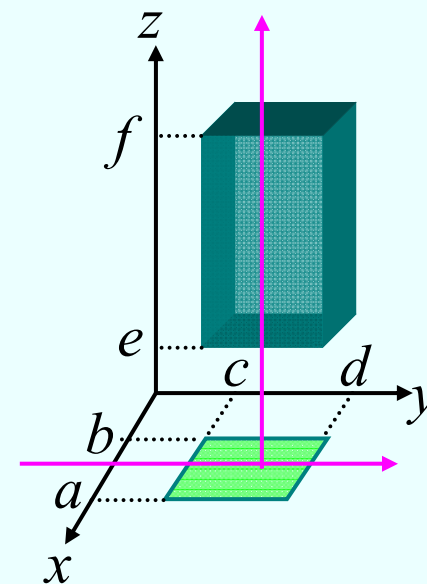
#### ③重要结论

求证  $\iiint_{\Omega} f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) dv = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy \cdot \int_e^f f_3(z) dz$

其中 $\Omega$ 是长方体 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$

证明 左式  $= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz$

$$= \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) f_2(y) \int_e^f f_3(z) dz dy$$
$$= \int_e^f f_3(z) dz \cdot \int_a^b f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy dx$$
$$= \int_e^f f_3(z) dz \cdot \int_c^d f_2(y) dy \cdot \int_a^b f_1(x) dx$$



### 三、利用性质计算三重积分

#### ③重要结论

例 已知  $f(x, y, z) = xyz + 2 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$

其中  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  求  $f(x, y, z)$

解 设  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = C$

$$f(x, y, z) = xyz + 2C$$

两边同时对  $\Omega$  求三重积分得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz + 2C \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

$$C = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy \cdot \int_0^1 z dz + 2C \Rightarrow C = \frac{1}{8} + 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{8}$$

$$\text{即 } f(x, y, z) = xyz - \frac{1}{4}$$

