第四章

不定积分

§1　不定积分的概念与性质
§2　换元积分法
§3　分部积分法
§4　有理函数的积分

第三节

分部积分法

内容

一、分部积分公式

二、典型题

一、分部积分公式

前面所讲的换元积分法，实际上是微分学中与复合函数微分法相对应的一种积分法，

下面要介绍的分部积分法是与乘积的微分法相对应的一种积分法。

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 具有连续导数，那么有

$$(uv)' = u'v + uv'$$

移 项

$$uv' = (uv)' - u'v$$

两边 积分

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\,.}$$

分部积分公式

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = uv - \int vu'dx}$$

分部积分公式的使用

(1)常用于求两类不同函数的乘积之积分,当$\int u\mathrm{d}v$不易计算,而$\int v\mathrm{d}u$容易计算时,便可用分部积分公式

(2) 恰当选取 u 和 dv 是使用分部积分法的关键

"反、对、幂、三、指" 这五类函数两两作乘积求不定积分时，将排在后面位置的函数凑到d*x*中，不属于这种情况的，不能凑的不要凑，把能凑的凑到d*x*中 .

$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

二、典型题

① $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 运用反对幂三指

例1 求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$

解 $\int x\cos x\mathrm{d}x = \int x \ \mathrm{d}\sin x$

$= \quad - \sin x \quad x$

$= x\sin x + \cos x + C.$

若将幂函数凑到dx中

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}\cos x$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$$

更难积出

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

二、典型题

① $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 运用反对幂三指

例2 求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$

解 $\int x\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}\ln x$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

例3 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= \int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2 = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

继续用分部积分法

$$= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C.$$

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}$$

② $\int f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)dx$

例4 求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解 原式 $= x\arcsin x - \int x\mathrm{d}\arcsin x$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

③分部积分出现原式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

例5 求 $\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x.$

解 $\boxed{\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x} = \int \sin x \,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}\sin x$

$= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$ 再用分部积分

$= \mathrm{e}^x \sin x - \int \cos x \mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$= \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}\cos x$

$= \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x - \boxed{\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x}$

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C.$$

③分部积分出现原式

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u}$$

例6 求 $\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x$

解 $\boxed{\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x} = \int \sec x \,\mathrm{d}\tan x = \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \,\mathrm{d} \sec x$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x \mathrm{d}x$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \boxed{\int \sec^3 x \mathrm{d}x} \quad + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x \cdot \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

④ $\int \frac{f(x)g(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x$变成$\int f_1(x)dg_1(x)$

设法将分母函数凑到dx中

例7 求 $\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=\int xe^{-x}\,\mathrm{d}\frac{1}{1-x}$

$$=\frac{xe^{-x}}{1-x}-\int\frac{1}{1-x}(e^{-x}-xe^{-x})dx$$

$$=\frac{xe^{-x}}{1-x}-\int e^{-x}dx$$

$$=\frac{xe^{-x}}{1-x}+e^{-x}+C$$

④$\int \frac{f(x)g(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x$变成$\int f_1(x)dg_1(x)$

设法将分母函数凑到dx中

例8 求 $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

解 原式 $= -\int \ln\sin x\,\mathrm{d}\cot x$

$$= -\ln\sin x\cdot\cot x + \int \cot x\,\mathrm{d}\ln\sin x$$

$$= -\ln\sin x\cdot\cot x + \int \cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= -\ln\sin x\cdot\cot x + \int (\csc^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\ln\sin x\cdot\cot x - \cot x - x + C$$

⑤ $I_n=\int f_n(x)dx$ 递推关系式 $I_n=aI_{n-1}+bI_{n-2}$

例9 求 $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

说明：与自然数n有关的积分常采用分部积分法

解 $I_n=\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$

$\mathrm{d}[(x^2+a^2)^{-n}]$

$=(-n)(x^2+a^2)^{-n-1}2x\mathrm{d}x$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

于是 $I_{n+1}=\dfrac{1}{2na^2}\left[\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right]$. 以此作递推公式,并由$I_1$可得$I_n$

⑥ 分解变形

例10 求$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

说明：有时需将被积函数变形或分解，对分解后的积分采用不同方法解之

解 原式$=\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}\tan\tfrac{x}{2}+\int \tan\tfrac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=x\tan\tfrac{x}{2}+C$$

$$\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv+C$$

⑥ 分解变形

例11 求 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$

解 原式 $= \int \frac{\ln x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$

$= -\int \ln x \, d\frac{1}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx$

$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$

$= -\frac{\ln x}{x} + C$

例12 求 $\int \frac{x^2 \color{red}{+1-1}}{1+x^2} \arctan x dx$

解 原式

$= \int \arctan x dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$- \int \arctan x d \arctan x$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

$- \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$

⑦ 换元积分法+分部积分法

例13 求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

带有根式的积分先利用代换消除根式，或引入新变量

解 令 $\sqrt{x}=t$， 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = 2t\mathrm{e}^t - 2\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$= 2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t + C$$

$$= 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

⑦换元积分法+分部积分法

例14 求$\displaystyle\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

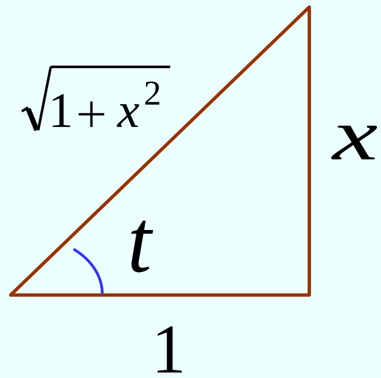
解 令 $\arctan x = t$， 则 $x = \tan t,\ \mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$

$$\text{原式} = \int \frac{\tan t\cdot e^t}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int e^t \sin t\mathrm{d}t$$

$$I = \int e^t \sin t\mathrm{d}t = \int \sin t\mathrm{d}e^t = e^t \sin t - \int e^t \cos t\mathrm{d}t$$

$$\therefore I = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t)$$

$$= e^t \sin t - \int \cos t\mathrm{d}e^t = e^t \sin t - e^t \cos t \ ?\int e^t \sin t\mathrm{d}t$$



$$\text{原式} = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t)$$

$$= \frac{e^{\arctan x}}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

⑦换元积分法+分部积分法

例15 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$, 则 $e^x=1+t^2$, $x=\ln(1+t^2)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int\frac{\ln(1+t^2)\cdot(1+t^2)}{t}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$

$$=2\left[t\ln(1+t^2)-\int\frac{2t^2}{1+t^2}dt\right]=2t\ln(1+t^2)-4\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

⑧函数符号+分部积分法

例16 $f'(\ln x)=x+1,\ f(0)=1$，求$f(x)=?$

解 令 $t=\ln x$，则$x=e^{t}$， $f'(t)=e^{t}+1$ 即$f'(x)=e^{x}+1$

$f(x)=\int e^{x}+1\mathrm{d}x=e^{x}+x+C$ 由$f(0)=1$可知$C=0$ $\therefore f(x)=e^{x}+x$

例17 设$f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求$\int f(x)\mathrm{d}x$

解 令 $t=\ln x$，则$x=e^{t}$，从而$f(t)=\dfrac{\ln(1+e^{t})}{e^{t}}$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+e^{x})\mathrm{d}e^{-x}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int e^{-x}\cdot\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\mathrm{d}x=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int\frac{1}{1+e^{x}}\mathrm{d}x=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int\frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}\mathrm{d}x=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+x-\ln(1+e^{x})+C$$

⑧函数符号+分部积分法

例18 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$

解 令$t=\sin^2 x$，则 $\sin x=\pm\sqrt{t}$ 即$x=\pm\arcsin\sqrt{t}$，$f(t)=\dfrac{\arcsin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

原式$=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

$$=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\cancel{2}\int\cancel{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x}}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$$

⑨原函数+分部积分法

例19 已知$f(x)$的一个原函数为e^{-x^2}，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$

解 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)$

$$=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x(e^{-x^2})'-e^{-x^2}+C$$

$$=-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C$$

⑨原函数+分部积分法

例20 设$F(x)$为$f(x)$的原函数,当$x \geq 0$时, $f(x)F(x) = \dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$

已知$F(0)=1, F(x)>0$, 求$f(x)$

解 $\displaystyle\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int \frac{xe^x}{2(1+x)^2}\mathrm{d}x$

设法将分母凑到**dx**中去

$$\int F(x)\mathrm{d}F(x) = -\frac{1}{2}\int xe^x \mathrm{d}\frac{1}{1+x}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}F^2(x) = -\cancel{\frac{1}{2}}\frac{xe^x}{1+x} + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\int \frac{1}{1+x}\cdot(e^x + xe^x)\mathrm{d}x$$

$$F^2(x) = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C \qquad \text{由}F(0)=1\text{知}C=0$$

$$\text{又}F(x)>0,\ F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}} \qquad \therefore f(x) = F'(x) = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{3/2}}$$