第二节

对坐标的曲线积分

内容

一、对坐标的曲线积分定义
　　物理意义及性质

二、对坐标曲线积分的计算法

三、两类曲线积分的关系

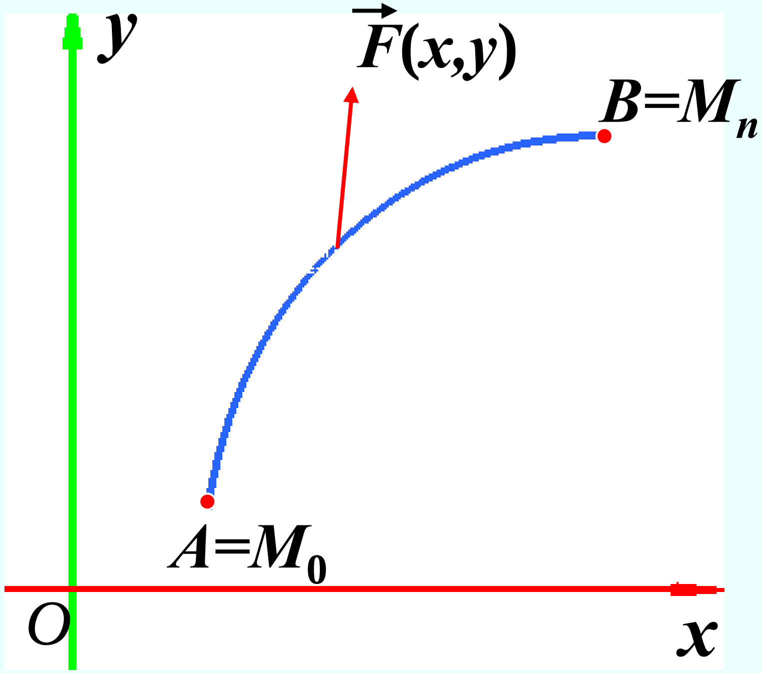
一、对坐标的曲线积分的定义、物理意义及性质

引例: 变力沿曲线所作的功

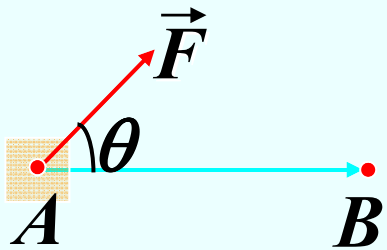
设一质点在xOy面内受到变力

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

的作用,从点A沿光滑曲线弧 L 移动到点B, 其中$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L上连续,求变力 F 所作的功.



常力$\vec{F}$使物体作直线运动时所作的功



$$W=|\vec{F}|\cdot\cos\theta\cdot|\overrightarrow{AB}|=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

一、对坐标的曲线积分的定义, 物理意义及性质

引例: 变力沿曲线所作的功

设一质点在xOy面内受到变力

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

"$\boxed{\text{分割}}$、取点、作和、$\boxed{\text{求极限}}$"

$$\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

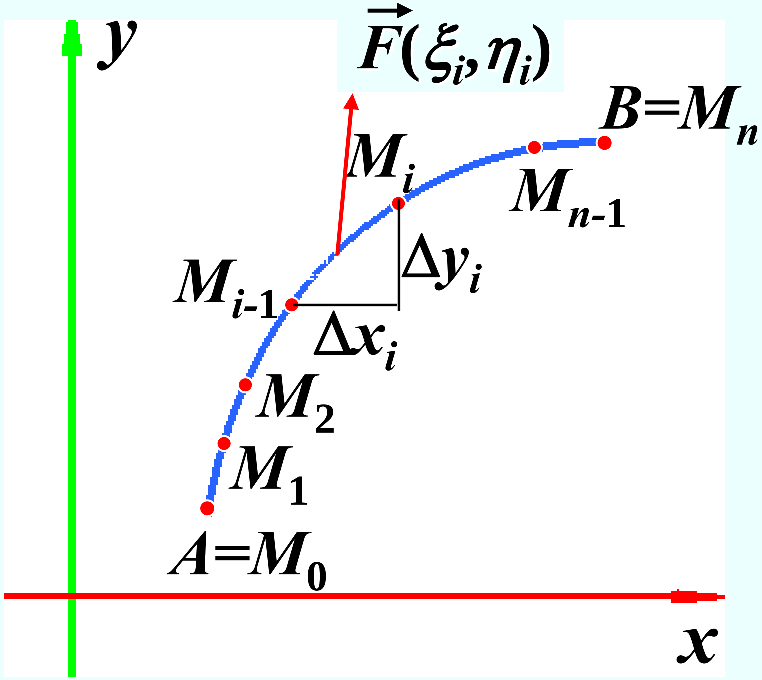
$$=P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\ .$$

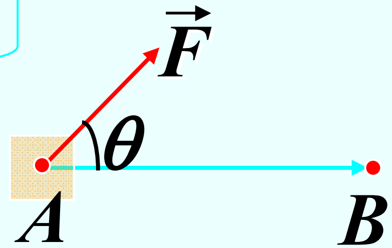
$$W\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i],$$

近似值

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

精确值





$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

1定义 设L为xoy面内从 A 到B 的一条有向光滑曲线弧，$P(x,y),Q(x,y)$在L上有界，若对 L **任意分割**和在局部弧段上**任意取点**，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$ 都存在，称极限为

$$\overset{\text{记作}}{=\!=}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

积分曲线

对坐标标的组合曲线积分

第二类曲线积分

$P(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标x的曲线积分

$Q(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标y的曲线积分

若L为封闭有向曲线，则记为 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

存在条件 当$P(x,y)$, $Q(x,y)$在L上连续时，第二类曲线积分存在

推广: 沿空间有向曲线 Γ 对坐标的曲线积分是

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2物理意义: 设一质点在xoy面内在力 $\vec{F} = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ 作用下由点A沿光滑曲线L移动到点B,则变力$\vec{F}$作的功为

$$W = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

---

3 性质

①线性性 $\int_L \alpha P(x,y)\mathrm{d}x + \beta Q(x,y)\mathrm{d}y = \alpha\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \beta\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$

②逐段可加性 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

③有向性 若 L^- 是 L 的反向曲线弧, 则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{L^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

二、对坐标的曲线积分的计算法 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分

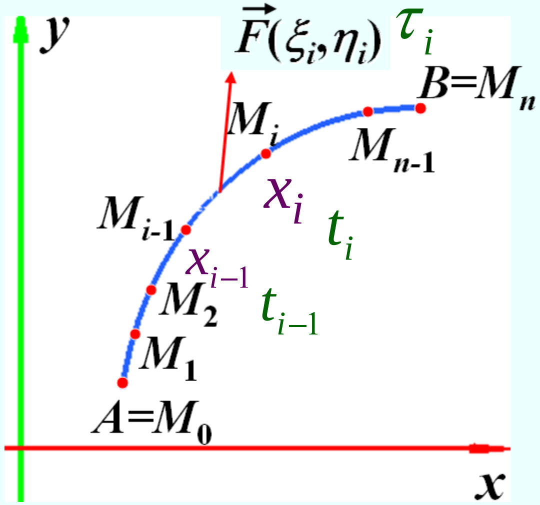
定理 设$P(x,y),Q(x,y)$在有向曲线弧 L上有定义且连续,L的参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$当$t$单调地从$\alpha$变到$\beta$ 时,点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B, $\varphi(t),\psi(t)$在α,β为端点的闭区间上具有一阶连续导数,且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,则$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$存在,且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

证明: 先证$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

根据定义$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点x_i对应参数t_i, (ξ_i,η_i)对应参数τ_i



二、对坐标的曲线积分的计算法 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 定积分

证明：先证 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

根据定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i，(ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i \quad \text{(拉格朗日中值定理)}$$

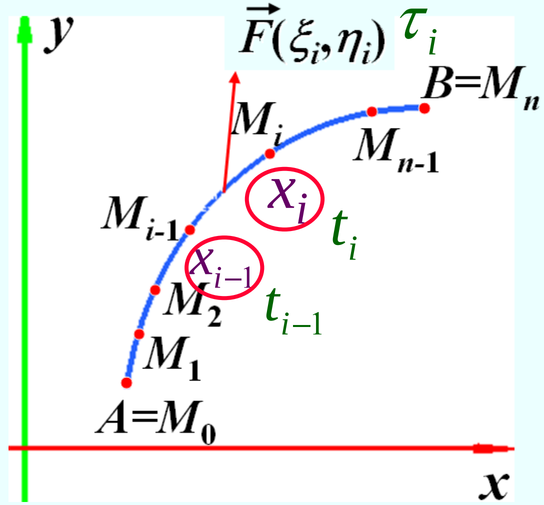
$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\ \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为 L 为光滑弧，所以 $\varphi'(t)$ 连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

同理 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\,\mathrm{d}t$



公式① 平面曲线 $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), t$从$\alpha$到$\beta$ 则有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

注意: i) α是起点参数, β是终点参数

ii)对坐标的曲线积分中被积函数可用积分曲线方程代入化简

公式② 空间曲线 $\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=w(t), t$从$\alpha$到$\beta$ 则有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

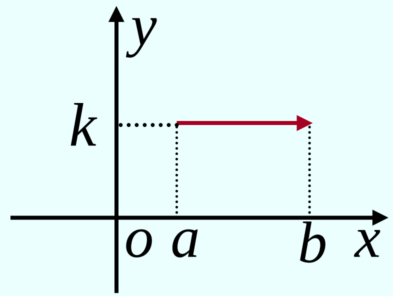
$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

公式③ 当曲线L由直角坐标$y=y(x)$,x从a到b

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{a\ 起}^{b\ 终}\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\mathrm{d}x$$

当有向曲线L垂直于y轴时



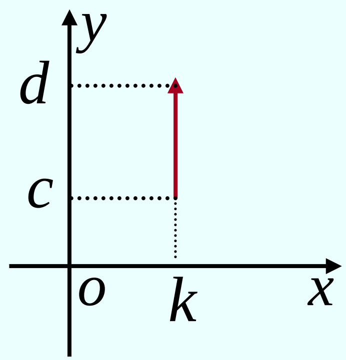
$y=k$, x从a到b

$$\int_L P(x,\underset{\uparrow k}{y})\mathrm{d}x+Q(x,y)\underbrace{\mathrm{d}y}_{=0}=\int_a^b P(x,k)\mathrm{d}x$$

公式④ 当曲线L由直角坐标$x=x(y)$,y从c到d

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c\ 起}^{d\ 终}\{P[x(y),y]x'(y)+Q[x(y),y]\}\mathrm{d}y$$

当有向曲线L垂直于x轴时



$x=k$, y从c到d

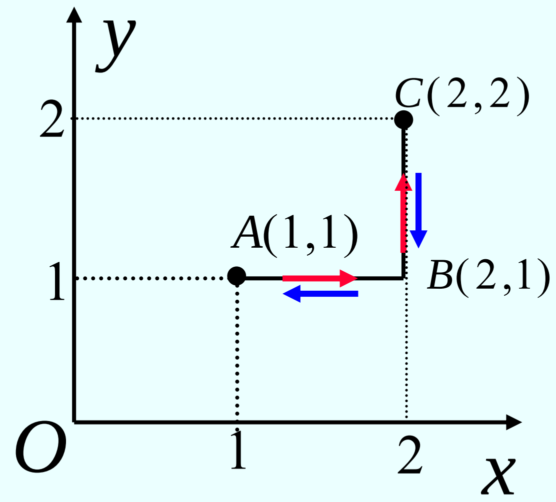
$$\int_L P(x,y)\underbrace{\mathrm{d}x}_{=0}+Q(\underset{\uparrow k}{x},y)\mathrm{d}y=\int_c^d Q(k,y)\mathrm{d}y$$

例1. 计算$\int_L y^2\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$ 其中L: $(1,1)\to(2,1)\to(2,2)$

解: 原式$=\int_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} y^2\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$

$$=\int_{\overrightarrow{AB}} \underline{y^2}\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y + \int_{\overrightarrow{BC}} y^2\,\mathrm{d}x + \underline{x^3}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 1\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2^3\,\mathrm{d}y = 9$$



若$\int_{L^-} y^2\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y = \int_{\overrightarrow{CB}} y^2\,\mathrm{d}x + \underline{x^3}\,\mathrm{d}y + \int_{\overrightarrow{BA}} \underline{y^2}\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$

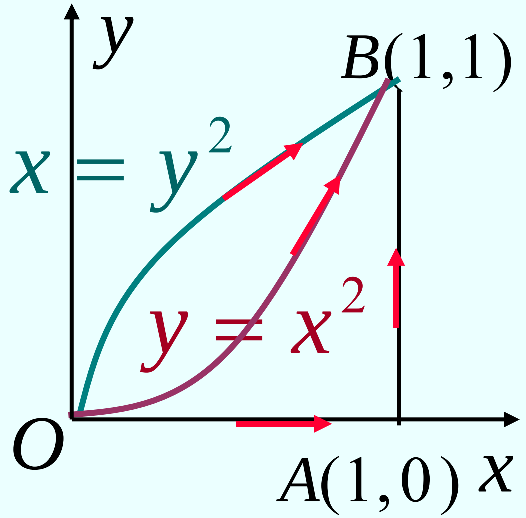
$$=\int_2^1 2^3\,\mathrm{d}y + \int_2^1 1\,\mathrm{d}x = -9$$

例2. 计算$\int_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\, x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\, y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}.$



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (\,2x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x\,)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y\cdot 2y + y^4\,)\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$

$= 0 + \int_0^1 \mathrm{d}y = 1$

虽然沿不同路径,曲线积分的值可以相等

计算对坐标的曲线积分的步骤

Step1 画出积分曲线L的图形,并确定L的参数方程

Step2 将曲线积分转化为定积分,注意定积分的下限和上限分别对应L的起点和终点

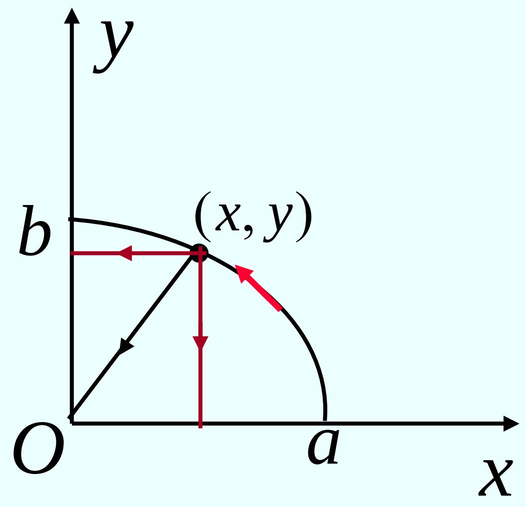
Step3 求出定积分

例3. (对坐标的曲线积分的物理意义)

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上每一点有作用力$\vec{F}$,大小等于点M到椭圆中心的距离,方向指向椭圆中心, 求质点P沿椭圆位于第一象限中的弧从$(a,0)$运动到$(0,b)$时, $\vec{F}$所作的功

解 $\vec{F}=-x\vec{i}-y\vec{j}$

L的参数方程 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$, $\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$



$$W=\int_L -x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)-b\sin\theta\cdot(b\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-b^2)\sin\theta\,\mathrm{d}\sin\theta=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\cdot\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$$

例4. 求 $I=\oint_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$ 其中

$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: Γ的参数方程

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ z=2-\cos t+\sin t\ \ (t:2\pi\to 0)$$

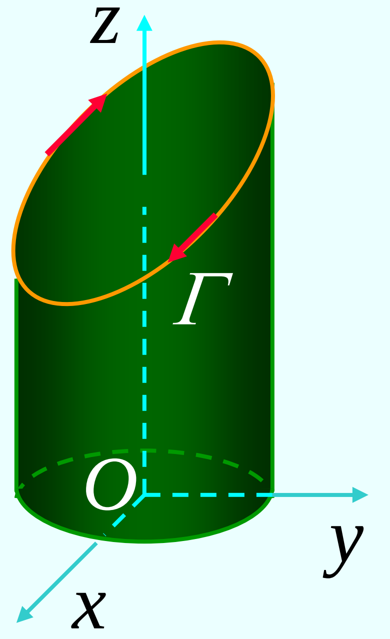
$$I=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(4\cos^2 t-1)\mathrm{d}t$$

$$=-2\pi$$



例5 计算 $\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是从点$\boldsymbol{A(3,2,1)}$到点$B(0,0,0)$的直线$AB$.

解 直线段的方程

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$$

化为参数方程得

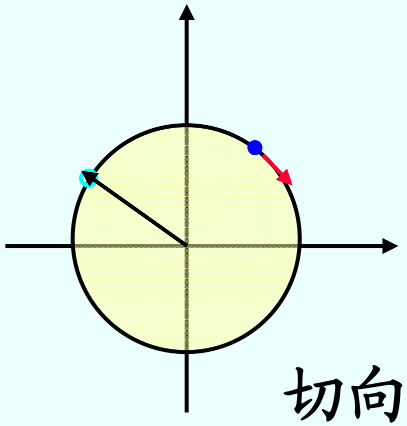
$$x=3t,\ y=2t,\ z=t,\ t:1\to 0$$

所以$\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$

$$=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t]\mathrm{d}t=-\frac{87}{4}$$

观察

结论2 任意有向曲线总能找到参数方程使得走向是参数增加方向



$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

$$\theta:\frac{\pi}{2}\to 0$$

走向是参数减小方向

切向量 $(-\sin\theta,\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{3}}$

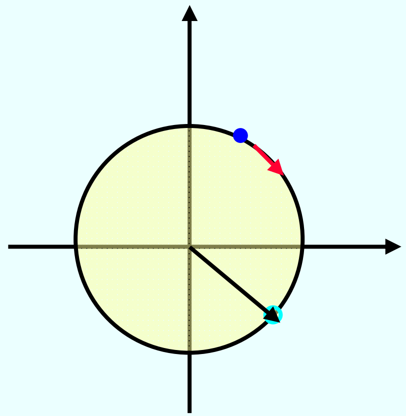
$$=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$$

结论1

切向量指向参数增加的方向

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

令 $\theta=-\varphi$



$$\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=-\sin\varphi \end{cases}$$

$$\varphi:-\frac{\pi}{2}\to 0$$

走向是参数增加方向

切向量 $(-\sin\varphi,-\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$$

切向量指向参数增加的方向

有向曲线弧的切向量

有向曲线的切向量与走向一致

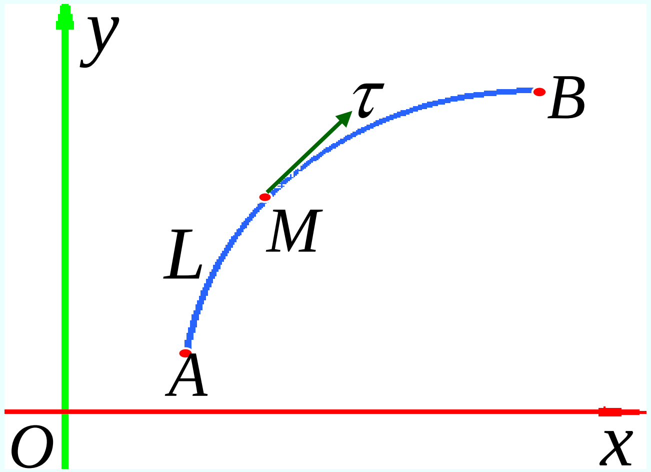
三、两类曲线积分之间的关系

分析 设光滑曲线弧L的参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$其起点和终点对应的参数值分别为$\alpha$和$\beta$,**且设$\boldsymbol{\alpha < \beta}$**.曲线弧$L$在点$M(\varphi(t),\psi(t))$的切向量为$\boldsymbol{\tau} = (\varphi'(t),\psi'(t))$,它的指向与参数$t$的增长方向一致,当$\alpha < \beta$时，这个指向就是有向曲线弧$L$的方向，称之为**有向曲线弧的切向量**.

它的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$\cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$



三、两类曲线积分之间的关系

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ P[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + Q[\varphi(t),\psi(t)]\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} \right\} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$\cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

三、两类曲线积分之间的关系

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ P[\varphi(t),\psi(t)] \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} \right.$$

$$\left. + Q[\varphi(t),\psi(t)] \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} \right\} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

其中 $\cos\alpha = \dfrac{\pm\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$ $\cos\beta = \dfrac{\pm\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$ 有向曲线上一点 (x,y) 处**单位切向量**

走向是参数**增加**(**减少**)方向时取**+**(**–**)

三、两类曲线积分之间的关系

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{\pm\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$ $\cos\beta=\dfrac{\pm\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$ 有向曲线上一点 (x,y)处单位切向量

走向是参数增加(减少)方向时取+(−)

推广 $\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$

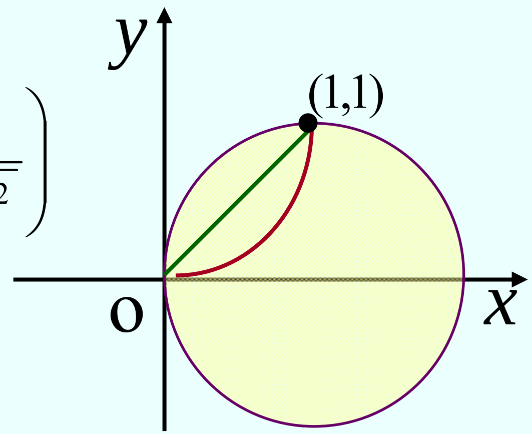
$$=\int_\Gamma[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}s$$

(α,β,γ)为有向曲线弧Γ在点(x,y,z)处的切向量的方向角

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为方向余弦或单位切向量 (α,β,γ)

有向曲线弧Γ选择走向和参数增加方向一致的参数方程

例 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$化成对弧长的曲线积分,$L$沿 (1)$x^2+y^2=2x$；(2)沿直线；(3)$y=x^2$从点(0,0)到点(1,1)



解 (1) $L:\begin{cases} x=x \\ y=\sqrt{2x-x^2} \end{cases}$ 切向量$\left(1,\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\right)$

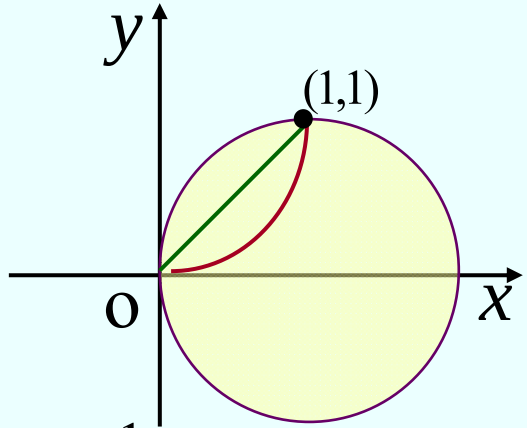
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2}$$

$$\cos\beta=\sin\alpha=\sqrt{1-2x+x^2}=1-x$$

则$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$

$$=\int_L[P(x,y)\cdot\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)\cdot(1-x)]\mathrm{d}s$$

例 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分,L沿 (1)$x^2+y^2=2x$；(2)沿直线；(3)$y=x^2$ 从点(0,0)到点(1,1)



解 (2) $L:\begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases}$ 切向量 (1,1)

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

则$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + Q(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}]\mathrm{d}s$

---

(3) $L:\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 切向量 $(1,2x)$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ $\cos\beta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$

则$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} + Q(x,y)\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}]\mathrm{d}s$