第二章 导数与微分

- §1 导数概念
- §2 函数的求导法则
- §3 高阶导数
- §4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率
- §5 函数的微分

解决求导问题的思路:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(构造性定义)

本节内容

求导法则

其他基本初等函数求导公式

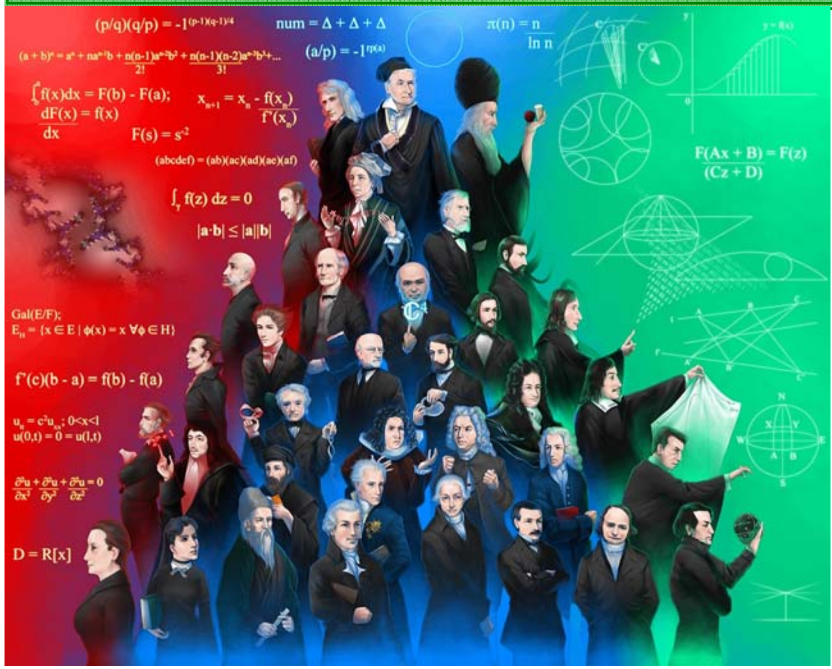
$$\left\{\begin{array}{l}(C)'=0\\[2ex](\sin x)'=\cos x\\[2ex](\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

证明中利用了两个重要极限

初等函数求导问题

第二节

函数的求导法则



内容

一、函数的和差积商的求导法则

二、反函数求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导法则与导数公式

一、函数的和差积商的求导法则

定理1. 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 可导

$\longrightarrow$ $u(x)$ 及 $v(x)$ 的和、差、积、商 (除分母为 0的点外) 都在点 x 可导, 且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ 例 $(cu(x))'=cu'(x)$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$ $\left(\dfrac{上}{下}\right)'=\dfrac{上'下-上下'}{下^2}$

(1)(2)可推广到有限个可导函数

$$(u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm\cdots\pm u_n'$$

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1\cdots u_{n-1}u_n'$$

一、函数的和差积商的求导法则

$$(3)\quad \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x)\neq 0)$$

证明

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$-u(x)v(x)+u(x)v(x)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\underbrace{[u(x+\Delta x)-u(x)]}_{\Delta x}v(x)-u(x)\underbrace{[v(x+\Delta x)-v(x)]}_{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)\cancel{\Delta x}}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

例 $y=\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)$，求 y' 及 $y'\big|_{x=1}$.

解: $y'=(\sqrt{x}\,)'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}\,(3x^2+4\sin x\,)$$

$$y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

例. 求证 $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

证: $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc x \cot x$$

类似可证: $(\cot x)' = -\csc^2 x$, $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

二、反函数的求导法则

定理2. 如果函数$x=f(y)$在区间Iy内单调可导且 $f'(y)\neq 0$ 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在$I_x=\{x\mid x=f(y), y\in I_y\}$内也可导

且 $[f^{-1}(x)]'=\dfrac{1}{f'(y)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\dfrac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=y_0}}$ 其中$x_0=f(y_0)$

证: 由于$x=f(y)$在I_y内单调可导从而连续, 则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在且在I_x单调连续 $\quad \forall x\in I_x, \Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x$

由单调性 $\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0 \quad \therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$?

因$y=f^{-1}(x)$连续 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

从而 $[f^{-1}(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\dfrac{1}{f'(y)}$

?

二、反函数的求导法则

定理2.如果函数$x=f(y)$在区间Iy内单调可导且$f'(y)\neq 0$则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在$I_x=\{x\mid x=f(y),y\in I_y\}$内也可导

且$[f^{-1}(x)]'=\dfrac{1}{f'(y)}$或$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\dfrac{1}{\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=y_0}}$其中$x_0=f(y_0)$

说明　三个条件缺一不可.即使一个函数可导,单调,它的反函数也可能不可导,例

$x=y^3$在$y=0$可导,　但$y=x^{\frac{1}{3}}$在$x=0$不可导

若所给的函数$x=f(y)$不是单调的，想求出反函数的导数时，应找出其单调区间，再对各单调区间分别应用反函数求导法则

例　设 $x=\sin y,\ y\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ 为单调可导

$\therefore\ (\sin y)'=\cos y>0$　由定理2

$y=\arcsin x$ 在$(-1,1)$内可导,且

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似可求得

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \text{或} \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$$

例 设 $x = \tan y$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 为单调可导

$$\therefore\ (\tan y)' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0 \quad \text{由定理2}$$

$y = \arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

类似可求得 $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

例　设 $y = e^x + \ln x$ 求 $\dfrac{dx}{dy}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x + \frac{1}{x}} = \frac{x}{xe^x + 1}$$

例　已知函数 $f(x) = 3x^2 + e^x$ 在x=1处 $f'(1) = 6 + e$

$f(x)$有反函数$\varphi(x)$,求$\varphi'(3+e)$

解 当x=1时y=3+e, 若记y=$f(x)$的反函数为$x = \varphi(y)$

从而

$$\varphi'(3+e) = \frac{dx}{dy}\Big|_{y=3+e} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6+e}$$

三、复合函数的求导法则

定理3. 如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导, $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x) \text{或} \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

证: $\because y=f(u)$ 在点 u 可导,故

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u) \qquad \therefore \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u \quad (\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$$

故有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta x\neq 0)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x)$$

$u=g(x)$可导必连续, $\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta u\to 0\Rightarrow \alpha\to 0$

说明i)此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如, $y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\left(f[\varphi(\psi(x))]\right)' = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$$

$$= f'[\varphi(\psi(x))] \cdot \varphi'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$$

$$\begin{array}{c} y \\ | \\ u \\ | \\ v \\ | \\ x \end{array}$$

ii)具体复合函数求导：先求出外面的基本初等函数的导数将后面的整个部分看成为一个变量；再求出第二个基本初等函数的导数，把后面的部分看成为一个变量,依此类推,从外层到里层一层一层地求导,不要漏层，但如果所给的函数既有四则运算又有复合运算应根据函数表达式决定先用四则运算还是先用复合函数求导

例 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 求 y'.

对复合分解熟练时，就不必写中间变量

解：$y=e^u, u=\sin v, v=\dfrac{1}{x}$

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=e^u\cdot\cos v\cdot(-\frac{1}{x^2})=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

或$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})$

例 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'.

不要把四则运算法则与复合函数求导混淆

解：$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

说明 iii)抽象复合函数求导

$$\text{区别}\begin{cases} f'(x^2)\text{表示对}f(u)\text{求导后得到}f'(u)\text{然后用}u=x^2\text{代入得到} \\ [f(x^2)]' = f'(x^2)\cdot 2x = \dfrac{df}{dx} \end{cases}$$

例 已知 $y = f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x) = \arcsin x^2$, 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

解 $$\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'$$

$$= \arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{3}{2}\pi$$

说明 iii)抽象复合函数求导

区别 $\begin{cases} f'(x^2)\text{表示对}f(u)\text{求导后得到}f'(u)\text{然后用}u=x^2\text{代入得到} \\ [f(x^2)]' = f'(x^2)\cdot 2x = \dfrac{df}{dx} \end{cases}$

例　设 $y = f[g^2(e^{-x})]$,其中 f,g 均可导,求 y'

解　$y' = f'[g^2(e^{-x})]\cdot 2g(e^{-x})\cdot g'(e^{-x})\cdot e^{-x}\cdot(-1)$

四、基本求导法则与导数公式

常数和基本初等函数的导数 (P92)

$$(C)' = \qquad (x^{\mu})' =$$

$$(\sin x)' = \qquad (\cos x)' =$$

$$(\tan x)' = \qquad (\cot x)' =$$

$$(\sec x)' = \qquad (\csc x)' =$$

$$(a^x)' = \qquad (\mathrm{e}^x)' =$$

$$(\log_a x)' = \qquad (\ln x)' =$$

$$(\arcsin x)' = \qquad (\arccos x)' =$$

$$(\arctan x)' = \qquad (\operatorname{arc\,cot} x)' =$$

四、基本求导法则与导数公式

常数和基本初等函数的导数 (P92)

熟记

$$(C)' = 0 \qquad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

说明 i) 在具体求导时，一定要先把求导的函数审视一遍，通常情况下，先化简再求导，能通过恒等变形化简时，应尽量化简

例 求$y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$的导数

对数形式的复合函数求导先化简再求导

解 $y=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

则$y'=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}-\frac{x}{1+x^2}$

例 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, 求 y'.

先化简
后求导

解 $\because \quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$, 求 y'.

解 $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

说明 ii) 如果复合函数中含有 $|x|$ 或者分段函数的形式, 应首先把复合函数用分段函数予以表达

例 设 $f(x)=2^{|a-x|}$, 求 $f'(x)$

解 $f(x)=\begin{cases}2^{x-a} & x\geq a\\ 2^{a-x} & x<a\end{cases}$

当 $x>a$ 时 $f'(x)=2^{x-a}\ln 2$ 　　当 $x<a$ 时 $f'(x)=-2^{a-x}\ln 2$

当 $x=a$ 时 $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{2^{a-x}-1}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{(a-x)\ln 2}{x-a}$

$$=-\ln 2$$

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{2^{x-a}-1}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)\ln 2}{x-a}=\ln 2$ 　　故 $f'(a)$ 不存在

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2^{x-a}\ln 2 & x>a\\ -2^{a-x}\ln 2 & x<a\end{cases}$$

说明　iii) 只给连续条件时，不能进行求导运算

例 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确?

因 $f'(x) = \varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法:　由于 $f(a)=0$，故

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

思考题

(1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,求$y'$

(2) $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$,则$y'|_{x=0}=$