参考答案

1. $B=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $|K|=2$

$|B|=|A|\cdot|K|=2\times2=4$

名

号

级

一、选择题（每题 3 分,共 15 分）

1. 设三阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且 $|A|=2$，

若 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)$，则 $|B|=$(D)。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. $|C|=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}A & \\ & 2B\end{vmatrix}$

$=(-1)^{mn}|A|\cdot|2B|$

$=(-1)^{mn}\cdot 2^n|A||B|$

装

2. 设 A 是 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，若 $C=\begin{pmatrix}0 & A\\ 2B & 0\end{pmatrix}$，则 $|C|=$(D)。

(A) $2|A||B|$ (B) $2^n|A||B|$ (C) $(-1)^m 2^n|A||B|$ (D) $(-1)^{m\cdot n}2^n|A||B|$

3. 左乘列变换 右乘行变换

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{31} & a_{32}-a_{33} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22}-a_{23} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12}-a_{13} & a_{13}\end{pmatrix}$，

订

$P_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则有 $B=$(B)。

(A) P_1AP_2 (B) $P_1AP_2^{-1}$ (C) P_2AP_1 (D) $P_1AP_2^T$

4. 设同阶方阵 A 与 B 特征值相同，则下列正确的是（ A ）。

当A与B可对角化或为实对称时

A,B特征值同 $\Leftrightarrow A\simeq B$

(A) A 与 B 不一定相似 (B) A 与 B 必相似

(C) A 与 B 必相等 (D) 以上结论都不正确

线

5. 若 A,B 均为正定矩阵，则下列不是正定矩阵的是(D)。

(A) $(A+B)^{-1}$ (B) $A^{-1}+B^{-1}$ (C) A^2+B^2 (D) AB

当A,B为正定 $\Rightarrow A+B$，A^{-1}，B^{-1}，A^k, B^k 正定

$\Rightarrow (A+B)^{-1}$，$A^{-1}+B^{-1}$，A^2+B^2 正定

但AB不一定正定

3分,共15分）

1、设四阶行列式 D 的第一行元素依次为 $3,-1,a,5$，第三行元素的余子式依次是 $5,a,3,-1$，

则 $a=$（ $\underline{-5}$ ）　　$3\times(+5)-1\times(-a)+a\times(+3)+5\times1=0 \Rightarrow a=-5$.

2. 设方阵 A 满足 $A^2+2A-E=0$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-2E)^{-1}=$（ $\underline{-\frac{A+4E}{7}}$ ）。

$(A-2E)(A+4E)+7E=0$

3. 设 A 是 5×4 矩阵，若齐次线性方程组只有零解，则 $R(A)=$（ $\underline{4}$ ）。

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是方程组 $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y-z=-1 \\ 7x-2z=-1 \end{cases}$ 的5个不同解，则向量组

$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_5$ 的秩是（ $\underline{1}$ ）。

4. $A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&1&-1\\7&0&-2\end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}1&-3&1\\0&7&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$

对应齐次基础解系只有一个 ξ

则非齐次通解：$k\xi+\eta$ → 非齐次

设 $\alpha_i=k_i\xi+\eta$　（k_i 互不

$\alpha_i-\alpha_j=(k_i-k_j)\xi$. 则

$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_5$

5. 设三阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，则 $|A^*+3E|=$（ $\underline{10}$ ）。

5. A^*+3E 的特征值 $\frac{|A|}{\lambda}+3$ 为 $1,5,2$　$|A|=-2$　则 $|A^*+3E|=10$

三、设四阶方阵 B 的伴随矩阵 $B^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $BAB^{-1}=AB^{-1}+3E$，其中 E 为四阶单位阵，求矩阵 A。（10分）

解：因为 $BAB^{-1}=AB^{-1}+3E$，

所以右乘 B 得 $BA=A+3B$，左乘 B^* 得 $B^*BA=B^*A+3B^*B$

$$|B|A=B^*A+3|B|E \qquad 3分$$

因为方阵 $|B^*|=|B|^{n-1}$，四阶方阵 $|B^*|=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{vmatrix}=8$

所以 $|B|=2$　　3分

所以 $2A=B^*A+6E$，$(2E-B^*)A=6E$，

$$A=6(2E-B^*)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix} \qquad 4分$$

课序号

名

号

专业班级

四、设线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$，

讨论（1）k 为何值时方程组有唯一解；

（2）k 为何值时方程组没有解；

（3）k 为何值时方程组有无穷多解，并求通解。（14 分）

解：因为 $B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & -2 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ k & 1 & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

装

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 3k-3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & 3(k-1) \end{pmatrix}$$

4 分

订

所以（1）当 $k \neq 1, k \neq -2$ 时，$R(A) = R(B) = 3$，方程组有唯一解； 2 分

（2）当 $k = -2$ 时，$R(A) = 2 < R(B) = 3$，方程组没有解； 2 分

（3）当 $k = 1,$ 时，$R(A) = R(B) = 1 < 3$，方程组有无穷解； 2 分

且 $B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

线

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4 分

c_1, c_2 为任意实数。

五、设四维列向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(1,-1,2,0)^T$，$\alpha_4=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_5=(0,3,1,6)^T$，

（1）求向量组的秩；

（2）求向量组的一个最大无关组；

（3）用最大无关组表示其它向量。（12 分）

解：因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0\\-1&3&-1&0&3\\2&1&2&7&1\\4&2&0&14&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0\\0&3&0&3&3\\0&1&0&1&1\\0&2&-4&2&6\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 4 分

所以（1）向量组的秩为 3； 3 分

（2）一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； 3 分

（3）$\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ 2 分

六、设 4 元非齐次线性方程组 $AX=b$，已知 $R(A)=3$，ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $AX=b$ 的解，$\xi_1=(2,0,1,4)^T$，$2\xi_2+\xi_3=(4,0,2,-8)^T$，求 $AX=b$ 的通解。（10 分）

解：因为 4 元非齐次方程组 $AX=b$ 有 $R(A)=3$，

所以齐次方程组基础解系为 $n-R(A)=4-3=1$ 个向量， 3 分

因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $AX=b$ 的解，$\xi_1=(2,0,1,4)^T$，$2\xi_2+\xi_3=(4,0,2,-8)^T$，

所以 $2\xi_2+\xi_3-3\xi_1=(-2,0,-1,-20)^T$ 为 $AX=0$ 的解， 3 分

所以 $AX=b$ 的通解为 $X=C\begin{pmatrix}2\\0\\1\\20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\\4\end{pmatrix}$ 4 分

C 为任意实数。

选课序号	
姓　　名	
学　　号	
专业班级	

装　订　线

七、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，其中二次型对称阵 A 的对角线元素之和为1，A 的行列式为 -12。

（1）写出二次型对称阵 A；

（2）求出 a,b 的值；

（3）求一个正交变换 $X=PY$，将二次型化成标准型，并写出标准型。（14 分）

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&0&b\\0&2&0\\b&0&a\end{pmatrix}$；　　3 分

（2）因为 $1+2+a=1$，$|A|=\begin{vmatrix}1&0&b\\0&2&0\\b&0&a\end{vmatrix}=2(a-b^2)=-12$

所以 $a=-2,b=2$；　　3 分

（3）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2(\lambda+3)$

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$　　3 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程 $(A-2E)X=0$ 得特征向量

$P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得　$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-3$ 时，解方程 $(A+3E)X=0$ 得特征向量

$P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，单位化得 $\xi_3=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$　　2 分

得正交矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，

二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。　　2 分

八、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ $(n\geq 3)$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$

证明：（1）当n为奇数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关；

（2）当n为偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性相关。（10 分）

证明：令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$ 2 分

因为$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$，

所以$(k_1+k_n)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots(k_{n-1}+k_n)\alpha_n=0$， 2 分

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，

$$\text{所以}\begin{cases}k_1+k_n=0\\k_1+k_2=0\\\quad\cdots\cdots\\k_{n-1}+k_n=0\end{cases}$$

$$\text{因为}D=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1},$$ 4 分

所以当n为奇数时，$D=2\neq 0$，所以只有零解，$k_1=k_2==\cdots=k_n=0$，

1 分

所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关；

所以当n为偶数时，$D=0$，关于$k_1,k_2,\cdots,k_n$的齐次线性方程组有非零解，

1 分

所以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性相关。