第七章

微分方程

§1　微分方程的基本概念

§2　可分离变量的微分方程

§3　齐次方程

§4　一阶线性微分方程

§6　高阶线性微分方程

§7　常系数齐次线性微分方程

§8　常系数非齐次线性微分方程

第七节

常系数齐次线性微分方程

内容

一、二阶常系数齐次线性微分方程

二、n阶常系数齐次线性微分方程

一、二阶常系数齐次线性微分方程

定义1 形如 $y''+py'+qy=0$ $(p, q$是常数$)$ 的方程称为二阶常系数齐次线性微分方程, 如果 p, q不全是常数, 则称之为二阶变系数齐次线性微分方程.

例如 $y''+2y'-5y=0,$ 二阶常系数齐次线性微分方程

$y''+2y'+3xy=0.$ 二阶变系数齐次线性微分方程

一、二阶常系数齐次线性微分方程

定义1 形如 $y'' + py' + qy = 0$ (p, q是常数)

的方程称为二阶常系数齐次线性微分方程, 如果 p, q不全是常数，则称之为二阶变系数齐次线性微分方程.

分析 寻找线性无关的两个解y_1, y_2 则通解为$y = C_1y_1 + C_2y_2$

考虑 $y = e^{rx}$ 代入得 $r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$

$$(r^2 + pr + q) \cdot e^{rx} = 0 \xrightarrow{r\text{满足}} r^2 + pr + q = 0$$

定义2 方程 $r^2 + pr + q = 0$为 $y'' + py' + qy = 0$

的特征方程，$r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 为特征根

定义2 方程 $r^2+pr+q=0$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的**特征方程**，$r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ 为**特征根**

三种情况

①有两个不等实根 $r_1\neq r_2$，$y_1=e^{r_1x}, y_2=e^{r_2x}$ 是两个线性无关的解,通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

②有两个相等实根 $r_1=r_2$，$y_1=\boxed{e^{r_1x}}$ 是解　考虑 $y_2=\boxed{xe^{r_1x}}$

$$(xe^{r_1x})''+p(xe^{r_1x})'+qxe^{r_1x}$$

$$=\underline{r_1e^{r_1x}}+\underline{r_1e^{r_1x}}+r_1^2\underline{xe^{r_1x}}+\underline{p(e^{r_1x}}+r_1\underline{xe^{r_1x}})+q\underline{xe^{r_1x}}$$

$$=\underbrace{(2r_1+p)}_{=0}e^{r_1x}+\underbrace{(r_1^2+pr_1+q)}_{=0}xe^{r_1x}=0$$

通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$

定义2 方程$r^2+pr+q=0$为$y''+py'+qy=0$的**特征方程**，$r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$为**特征根**

三种情况

③一对共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$　$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}$　$y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}$

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

任何线性组合仍是齐次的解

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \frac{y_1-y_2}{2i}=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

新y_1　新y_2　显然线性无关

通解为 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

求$y''+py'+qy=0$通解步骤

i) 写出特征方程$r^2+pr+q=0$,解出特征根r_1, r_2

ii)根据下表写出通解

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例1. 求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2-2r-3=0$, 特征根: $r_1=-1, r_2=3$,

因此原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$

例2. 求方程 $y''+2y'+y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=4$

$y'|_{x=0}=-2$ 的特解

解: 特征方程 $r^2+2r+1=0$, 特征根: $r_{1,2}=-1$,

通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$

$y|_{x=0}=4 \quad \therefore C_1=4 \quad \Rightarrow y'=(C_2-4-C_2x)\mathrm{e}^{-x}$

$y'|_{x=0}=-2 \quad \therefore C_2=2$ 特解 $y=(4+2x)\mathrm{e}^{-x}$

例3. 求方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2 - 2r + 5 = 0$,

特征根: $r_{1,2} = 1 \pm 2i$

通解为 $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

二、n阶常系数齐次线性微分方程

定义3 形如 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

的方程称为n阶常系数齐次线性微分方程, p_i 均为常数

求通解步骤 寻找n个线性无关的解$y_1, \cdots, y_n$

i) 写出特征方程 $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0 \Rightarrow r_1, \cdots, r_n$

ii)

特征根	通解中的对应项
有一个单实根r	$C_1 \mathrm{e}^{rx}$
有k重实根r	$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \mathrm{e}^{rx}$
有一对复根 $\alpha \pm i\beta$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
有k重复根$\alpha \pm i\beta$	$\mathrm{e}^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

例4. 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0,$

特征根: $r_1=r_2=0, r_{3,4}=1\pm 2i$

通解为

$$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

例5. 有一微分方程其特征方程为 $r^2(r^2+1)^2=0$ 求通解

解: 通解为

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\cos x+(C_5+C_6x)\sin x$$

例6. 有一微分方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}[(C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x] + C_5 + C_6 x + \mathrm{e}^{2x}(C_7 + C_8 x)$$

求此微分方程

解： 特征方程的根为

$$-1 \pm i(\text{二重}) \qquad 0(\text{二重}) \qquad 2(\text{二重})$$

$$(r^2 + 2r + 2)^2 \qquad r^2 \qquad (r-2)^2$$

特征方程 $(r^2 + 2r + 2)^2 r^2 \ (r-2)^2 = 0$

$$r^8 - 4r^6 - 8r^5 + 4r^4 + 16r^3 + 16r^2 = 0$$

微分方程为

$$y^{(8)} - 4y^{(6)} - 8y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y^{(3)} + 16y'' = 0$$

$x^2 + px + q = 0$

韦达定理

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 x_2 = q$