第九章

第八节

多元函数的极值及其求法

内容

一、多元函数的极值
(无条件极值问题)

二、条件极值
拉格朗日乘数法

一、 多元函数的极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

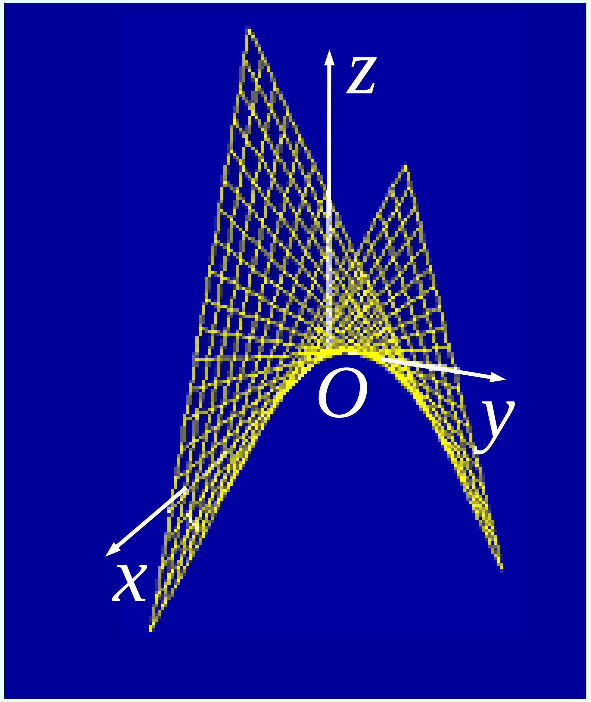
则称函数在该点取得**极大值(极小值)**. 极大值和极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如：

$z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z = xy$ 在点 (0,0) 无极值.



例1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1}$$,问点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$的极值点?

解 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 分子极限为0, 必有 $f(0,0)=0$

由二元函数极限定义,沿任何路径趋于(0,0),都有极限为1

当 $y=-x\to(0,0)$时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,-x)+x^2}{4x^4}=1\Rightarrow\dfrac{f(x,-x)+x^2}{4x^4}=1+o(x)$

$$\Rightarrow f(x,-x)=-x^2+4x^4+4x^4\cdot o(x)$$

当x充分小,$f(x, -x)<0 = f(0,0)$

当 $y=0\to(0,0)$时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-0}{x^4}=1\Rightarrow\dfrac{f(x,0)-0}{x^4}=1+o(x)$

$$\Rightarrow f(x,0)=x^4+x^4\cdot o(x)$$

当x充分小,$f(x, -x)>0= f(0,0)$

$f(0,0)$ 不是极值点

定理1 (必要条件)

偏导数存在且该点处有极值 $\Longrightarrow f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$

证: 不妨设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有极大值

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\quad \forall (x,y)\in \mathring{U}((x_0,y_0),\delta)$$

特别地,取$y=y_0$, $x\neq x_0$,也应适合$f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$

表明一元函数$f(x,y_0)$在$x=x_0$处取极大值,

因而有 $f_x(x_0,y_0)=0$ 同理, $f_y(x_0,y_0)=0$

说明: ① 几何上 若$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0,z_0)处有切平面,

且(x_0,y_0)为**极值点**, 法向量$(\overset{=0}{f_x(x_0,y_0)},\ \overset{=0}{f_y(x_0,y_0)},-1)$

则切平面为 $-(z-z_0)=0$ 即$z=z_0$

定理1 (必要条件)

偏导数存在且该点处有极值 $\Rightarrow f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$

说明: ②推广

若三元函数$u=f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)偏导数存在,且有极值

$\Rightarrow f_x(x_0,y_0,z_0)=0$，$f_y(x_0,y_0,z_0)=0$, $f_z(x_0,y_0,z_0)=0$

③驻点　凡是能使 $f_x(x,y)=0$，$f_y(x,y)=0$ 同时成立的点

(x_0,y_0)称为函数$z=f(x,y)$的驻点

注　偏导数存在的极值点必定是驻点

但驻点不一定是极值点. $z=xy$ 在$(0,0)$点

极值点不一定是驻点. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在$(0,0)$点 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$

不存在

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \; f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

$$\Delta = AC - B^2$$

则: 1) 当 $\Delta > 0$ 时 $\begin{cases} A<0 \text{ 时}, f(x_0,y_0)\text{取极大值}; \\ A>0 \text{ 时}, f(x_0,y_0)\text{取极小值}. \end{cases}$

2) 当 $\Delta < 0$ 时, $f(x_0,y_0)$不是极值.

3) 当 $\Delta = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

证明 略(第九节).

典型题 ①显函数$z=f(x,y)$的极值

步骤 (i)求$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$得驻点 (ii)对每一驻点求$A,B,C$ (iii)判定

说明:讨论函数的极值问题时,如果函数在所讨论的区域内具有偏导数,则极值点只可能在驻点处取得,如果函数在个别点处的偏导数不存在,但是也可能是极值点,需另加讨论

例2 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

解: 求驻点 解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

求二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0, A>0, \therefore f(1,0)=-5\text{ 为极小值;}$$

在点(1,2) 处 $A=12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)\text{ 不是极值;}$$

在点(−3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0,\ \therefore f(-3,0)\text{ 不是极值;}$$

在点(−3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0, A<0, \therefore f(-3,2)=31\text{ 为极大值}$$

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{\boxed{A}},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{\boxed{B}},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{\boxed{C}}$$

典型题 ②隐函数极值

求$F(x,y,z)=0$所确定函数$z=z(x,y)$的极值

步骤

Step1 用隐函数求偏导的公式法或直接法求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

Step2 令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$与$F(x,y,z)=0$联立,求得点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

注: 没有必要求出$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$的表达式,只要将$\frac{\partial z}{\partial x}=0=\frac{\partial z}{\partial y}$代入式中,求出驻点即可

Step3 求出 $A=z_{xx}|_{M_0},B=z_{xy}|_{M_0},C=z_{yy}|_{M_0}$

注: 没有必要解出z_{xx},z_{xy},z_{yy}的表达式,只要将$\frac{\partial z}{\partial x}=0=\frac{\partial z}{\partial y}$代入,求出$A,B,C$即可

Step4 判定

例3 求由$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的$z=z(x,y)$的极值

解： 两边对x,y分别求偏导得

$$\begin{cases} 2x+2z\cdot z_x-2-4z_x=0 \\ 2y+2z\cdot z_y+2-4z_y=0 \end{cases} \quad (*)$$

设在点(x_0,y_0)达到极值

$z_x=z_y=0$代入上式得

$$\begin{cases} 2x_0-2=0 \\ 2y_0+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-1 \end{cases}$$

代入原方程得$z_0=6,-2$

$M_0(1,-1,6)$, $\underline{M_0(1,-1,-2)}$

对(*)式两边对x,y求偏导

$$\begin{cases} 2+2(z_x)^2+2z\cdot z_{xx}-4z_{xx}=0 \\ 2z_y\cdot z_x+2z\cdot z_{xy}-4z_{xy}=0 \\ 2+2(z_y)^2+2z\cdot z_{yy}-4z_{yy}=0 \end{cases}$$

将$z_x=z_y=0$, $z=6$代入得

$$\begin{cases} 2+12z_{xx}-4z_{xx}=0 \\ 12z_{xy}-4z_{xy}=0 \\ 2+12z_{yy}-4z_{yy}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{4} \\ B=0 \\ C=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{1}{16}>0 \quad A<0$$

$z=6$为$z=f(x,y)$的极大值

例3 求由$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的$z=z(x,y)$的极值

$$\begin{cases} 2+2(z_x)^2+2z\cdot z_{xx}-4z_{xx}=0 \\ 2z_y\cdot z_x+2z\cdot z_{xy}-4z_{xy}=0 \\ 2+2(z_y)^2+2z\cdot z_{yy}-4z_{yy}=0 \end{cases}$$

将$z_x=z_y=0$，$z=6$代入得

$$\begin{cases} 2+12z_{xx}-4z_{xx}=0 \\ 12z_{xy}-4z_{xy}=0 \\ 2+12z_{yy}-4z_{yy}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{4} \\ B=0 \\ C=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{1}{16}>0 \quad A<0$$

$z=6$为$z=f(x,y)$的极大值

将$z_x=z_y=0$，$z=-2$代入得

$$\begin{cases} 2-4z_{xx}-4z_{xx}=0 \\ -4z_{xy}-4z_{xy}=0 \\ 2-4z_{yy}-4z_{yy}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=0 \\ C=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{1}{16}>0 \quad A>0$$

$z=-2$为$z=f(x,y)$的极小值

典型题 ③利用函数极值来求函数的最大值和最小值

分析: 如果函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则$f(x,y)$在D上必定取得最大值和最小值,这种取得最大值或最小值的点,既可能在D的内部,也可能在D的边界上.

求最值的一般方法

Step1 求函数 $f(x, y)$在开区域内可能的极值点(驻点和使一阶偏导数不存在的点);

Step2 求函数 $f(x, y)$ 在边界曲线上的极值点;

Step3 比较函数 $f(x, y)$ 在这些点处的函数值,最小的即为最小值,最大的即为最大值　　很麻烦

典型题 ③利用函数极值来求函数的最大值和最小值

分析：如果函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$f(x,y)$在D上必定取得最大值和最小值，这种取得最大值或最小值的点，既可能在D的内部，也可能在D的边界上. 假定函数在D上连续，在D内可微分且有有限个驻点，这时如果函数在D的内部取得最大(小)值，则是极大(小)值

求最值的一般方法

实际问题中，如果函数$f(x,y)$的最大(小)值一定在D内取得而函数在D内只有一个驻点，那么可以肯定该驻点处函数值就是$f(x,y)$在D上的最大(小)值 不需比较和判断.

但如果不知极大(小)值可利用充分条件判定

例4 某厂要用铁板做一个体积为$2\mathrm{m}^3$的有盖长方体水箱,问当长、宽、高各取怎样的尺寸时,才能使用料最省?

解 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为$\frac{2}{xy}$m,

可见,在体积一定的长方体中,以立方体的表面积为最小

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right),$$

令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0, \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

根据题意,用料最小值一定存在,并在 $\boxed{D = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}}$ 内取得. 唯一驻点,断定取得最小值

除定义域外无其它条件

即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$, 高为$\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时,水箱所用材料最省

无条件极值

二、条件极值 拉格朗日乘数法

实例：小王有200元钱，他决定用来购买两种急需物品：计算机磁盘和录音磁带，设他购买x磁盘，y盒录音磁带达到最佳效果，效果函数为$U(x,y)=\ln x+\ln y$ 设每张磁盘8元，每盒磁带10元，问他如何分配这200元以达到最佳效果

问题的实质：求 $U(x,y)=\ln x+\ln y$

在条件 $8x+10y=200$ 下的极值点

条件极值：对自变量有附加条件的极值.

问题 寻求函数**z=f(x,y)**在条件$\varphi(x,y)=0$下取得极值的必要条件

分析 若**z=f(x,y)**在**(x_0,y_0)**取得极值,首先有$\varphi(x_0,y_0)=0$

假定在**(x_0,y_0)**的某一邻域内**f(x,y)**与$\varphi(x,y)$均有连续的一阶偏导数,而$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$由隐函数存在定理可知,

$\varphi(x,y)=0$确定一个连续且有连续导数的函数$y=\psi(x)$

将其代入得$z=f[x,\psi(x)]$ 函数**z=f(x,y)**在**(x_0,y_0)**取得所求的极值,也就是相当于$z=f[x,\psi(x)]$在**x=x_0**取得极值

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}=0 \qquad -\frac{\varphi_x(x_0,y_y)}{\varphi_y(x_0,y_y)}$$

问题 寻求函数**z=f(x,y)**在条件$\varphi(x,y)=0$下取得极值的必要条件

分析 **函数z=f(x,y)在(x_0,y_0)取得所求的极值,**

也就是**相当于$z=f[x,\psi(x)]$ 在x=x_0取得极值**

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\varphi_x(x_0,y_y)}{\varphi_y(x_0,y_y)}=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}=0 \qquad -\frac{\varphi_x(x_0,y_y)}{\varphi_y(x_0,y_y)}$$

问题 寻求函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下取得极值的必要条件

分析 函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)取得所求的极值,

也就是相当于$z=f[x,\psi(x)]$在$x=x_0$取得极值

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\varphi_x(x_0,y_y)}{\varphi_y(x_0,y_y)}=0 \qquad \text{设}\ \frac{f_y(x_0,y_y)}{\varphi_y(x_0,y_y)}=-\lambda$$

如果(x_0,y_0)是方程组

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0 \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

的解,那么点(x_0,y_0)就是该条件极值可能的极值点

引进辅助函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

拉格朗日乘数法

要找目标函数**z=f(x,y)**在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点,可以先作

拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组
$$\begin{cases} L_x = f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ L_y = f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ L_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \\ y \\ \lambda \end{cases}$$

注：**(x,y)**为可疑极值点,需根据问题本身判断

或将$\varphi(x,y)=0 \Rightarrow y=\psi(x)$代入$f(x,y)$，利用一元函数判定极值的办法来判定．实际问题中已知存在极值,而又解出一个点,则该点为极值点

推广 目标函数$u=f(x,y,z)$在附加条件$\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$下的可能极值点,可以先作

拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$$

解方程组
$$\begin{cases} L_x = f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ L_y = f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ L_z = f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ L_{\lambda_1}=\varphi(x,y,z)=0 \\ L_{\lambda_2}=\psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点.

例1 在曲面 $z=1-x^2-y^2$ 的第一卦限内求一点,使其切平面与三个坐标面构成的四面体的体积最小,并求出此最小体积.

解 设切点(x_0,y_0,z_0) 令$F(x,y,z)=1-x^2-y^2-z$

法向量 $(-2x,-2y,-1)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(-2x_0,-2y_0,-1)$

切平面 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$

$$\Rightarrow 2x_0x+2y_0y+z=2x_0^2+2y_0^2+z_0=2-z_0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{2-z_0}{2x_0}}+\frac{y}{\frac{2-z_0}{2y_0}}+\frac{z}{2-z_0}=1$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{2-z_0}{2x_0}\cdot\frac{2-z_0}{2y_0}\cdot(2-z_0)=\frac{1}{24}\cdot\frac{(2-z_0)^3}{x_0y_0}$$

例1 在曲面 $z=1-x^2-y^2$ 的第一卦限内求一点,使其切平面与三个坐标面构成的四面体的体积最小,并求出此最小体积.

解 设切点 (x_0,y_0,z_0) $V=\frac{1}{24}\cdot\frac{(2-z_0)^3}{x_0y_0}$ $V_{\min}=\frac{1}{24}\cdot4\cdot(2-\frac{1}{2})^3=\frac{9}{16}$

相当于求 $\ln\frac{(2-z_0)^3}{x_0y_0}=3\ln(2-z_0)-\ln x_0-\ln y_0$

$$L(x,y,z,\lambda)=3\ln(2-z)-\ln x-\ln y+\lambda(z+x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases}L_x=-\frac{1}{x}+2x\lambda=0\Rightarrow 2x^2\lambda=1\\ L_y=-\frac{1}{y}+2y\lambda=0\Rightarrow 2y^2\lambda=1\\ L_z=\frac{-3}{2-z}+\lambda=0\Rightarrow 2\lambda-\lambda z=3\Rightarrow 2\lambda-\lambda\cdot\frac{\lambda-1}{\lambda}=3\Rightarrow\lambda=2\\ L_\lambda=z+x^2+y^2-1=0\Rightarrow z=1-\frac{1}{\lambda}\Rightarrow z=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}2x^2\lambda=1\\2y^2\lambda=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore$ 切点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

例2 求函数 $u = xyz$ 在附加条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \quad (x>0, y>0, z>0, a>0)$$下的极值

解 作拉格朗日函数$L(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}).$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} L_x &= yz-\frac{\lambda}{x^2}=0 \Rightarrow x^2yz=\lambda \\ L_y &= xz-\frac{\lambda}{y^2}=0 \Rightarrow xy^2z=\lambda \\ L_z &= xy-\frac{\lambda}{z^2}=0 \Rightarrow xyz^2=\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^4y^4z^4=\lambda^3 \Rightarrow xyz=\lambda^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda^{\frac{1}{4}} \\ y=\lambda^{\frac{1}{4}} \\ z=\lambda^{\frac{1}{4}} \end{cases} \\ L_\lambda = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}=0 \Rightarrow 3\lambda^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{a} \Rightarrow \lambda^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3a} \Rightarrow x=y=z=3a \end{cases}$$

在$(3a,3a,3a)$处取得极小值 $u=27a^3$

用其它值作比较,如 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{6a}=\frac{1}{a}$ 有$u=36a^3>27a^3$

例2 求函数 $u = xyz$ 在附加条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \quad (x>0, y>0, z>0, a>0)$$下的极值

解 作拉格朗日函数$L(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}).$

$\varphi(x,y,z)=0$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} L_x &= yz-\frac{\lambda}{x^2}=0 \Rightarrow x^2yz=\lambda \\ L_y &= xz-\frac{\lambda}{y^2}=0 \Rightarrow xy^2z=\lambda \\ L_z &= xy-\frac{\lambda}{z^2}=0 \Rightarrow xyz^2=\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^4y^4z^4=\lambda^3 \Rightarrow xyz=\lambda^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda^{\frac{1}{4}} \\ y=\lambda^{\frac{1}{4}} \\ z=\lambda^{\frac{1}{4}} \end{cases} \\ L_\lambda = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}=0 \Rightarrow 3\lambda^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{a} \Rightarrow \lambda^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3a} \Rightarrow x=y=z=3a \end{cases}$$

判定 将$\varphi(x,y,z)=0$确定$z=z(x,y)$代入$u=xy\cdot z(x,y)$

应用二元函数极值的充分条件判断极大极小

例3 设$f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2$求$f(x,y)$的极值及其

在$x^2+y^2\le 16$内的最大值

解 求函数在$x^2+y^2<16$内的驻点

令$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6x=0\Rightarrow x=0,2\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-6y=0\Rightarrow y=0,2\end{cases}\right\}\Rightarrow(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-6\qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\qquad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y-6$$

$(0,0)$ $\Delta=36>0$ $A=-6<0$ $f(x,y)$在$(0,0)$点取极大值0

$(2,0)$ $\Delta=-36<0$

不是极值

$(0,2)$ $\Delta=-36<0$

$(2,2)$ $\Delta=36>0$ $A=6>0$ $f(x,y)$在$(2,2)$点取极小值-8

例3 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 求 $f(x,y)$ 的极值及其在 $x^2+y^2\le 16$ 内的最大值

解 在边界 $x^2+y^2=16$ 上

作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3x^2-3y^2+\lambda(x^2+y^2-16)$

$$\begin{cases} L_x=3x^2-6x+2\lambda x=0 \\ L_y=3y^2-6y+2\lambda y=0 \\ L_z=x^2+y^2-16=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48-6(x+y)+2\lambda(x+y)=0 \\ 3(x+y)-6+2\lambda=0\ (x\neq y) \\ \text{或}x=y\text{时 } x=y=\pm\sqrt{8} \end{cases} \quad f(\pm\sqrt{8},\pm\sqrt{8})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=9,\ -3 \\ x+y=-4,\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ \lambda=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \\ \lambda=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ \lambda=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=0 \\ \lambda=-3 \end{cases}$$

$f(0,0)=0$ $\quad -112 \quad -112 \quad 16 \quad 16$

比较函数值可知,在闭区域 $x^2+y^2\le 16$ 上,$f(x,y)$ 的最大值为16