第五章

积分学 $\begin{cases} \text{不定积分} \\ \text{定积分} \end{cases}$

定积分

第五章

第一节

定积分的概念与性质

内容

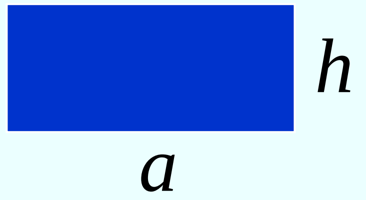
一、定积分问题举例

二、定积分定义

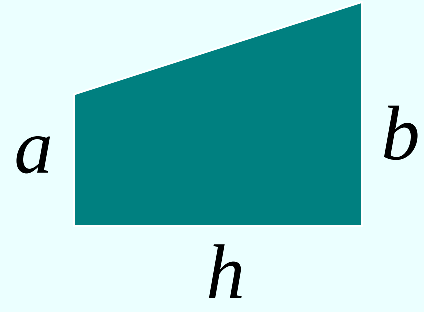
三、定积分性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= a h$



梯形面积 $= \frac{h}{2}(a+b)$



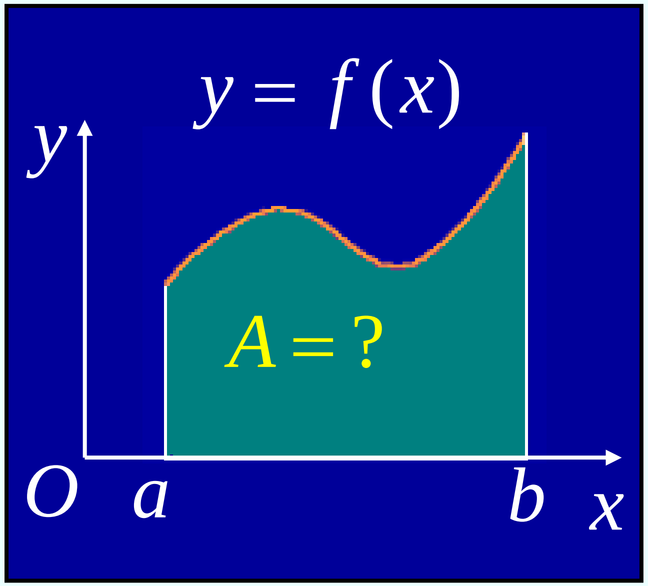
1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及 x 轴, 以及两直线 $x = a, x = b$

所围成, 求其面积 A .



解决步骤：

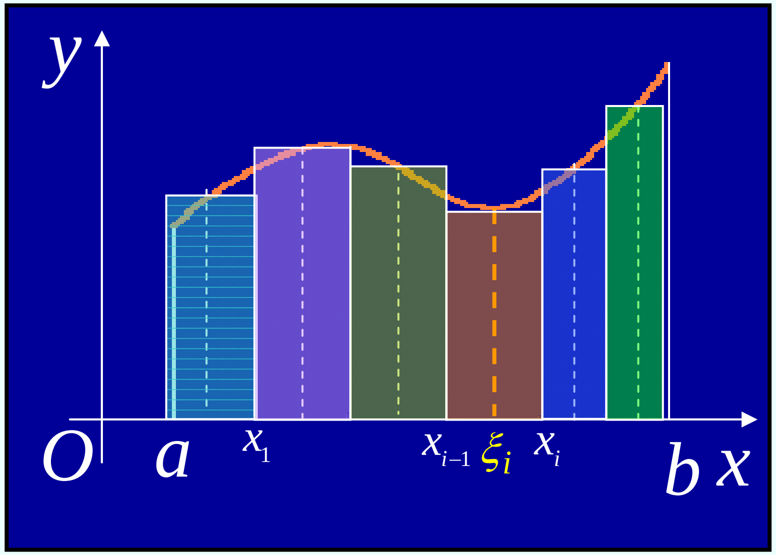
1)分割 在区间 $[a,b]$中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2)取点 在第i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以$[x_{i-1}, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形,并以此小矩形面积近似代替相应窄曲边梯形面积ΔA_i，得

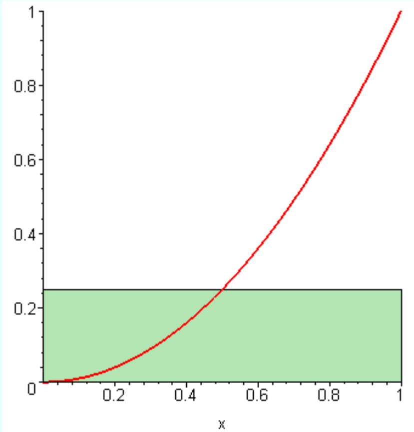


$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n)$$

3) 作和

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

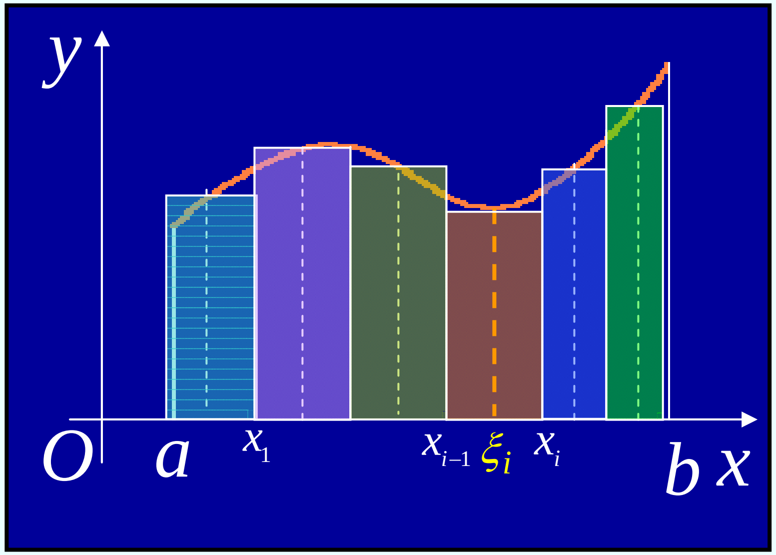


4) 取极限 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,

则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

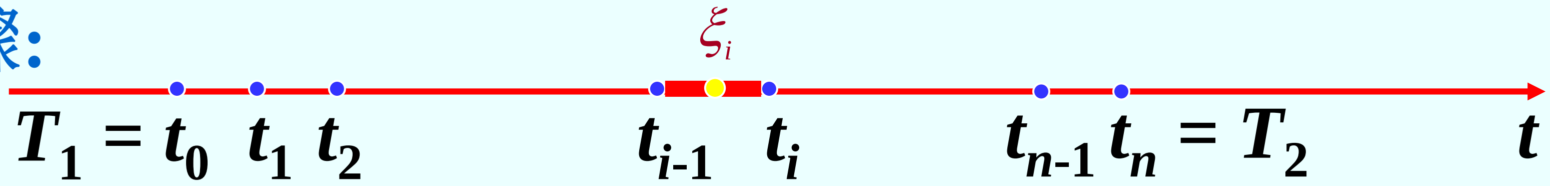
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



2. 变速直线运动的路程

设物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)(\geq 0)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上的连续函数,求在运动时间内物体所经过的路程 s.

解决步骤:



1) 分割 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点，将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i]\,(i = 1, 2, \Lambda\ , n)$, 在每个小段上物体经过的路程为 $\Delta s_i\ (i = 1, 2, \Lambda\ , n)$

2) 取点 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 以 $v(\xi_i)$ 代替变速，得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (i = 1, 2, \Lambda\ , n)$$

3) 作和

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

4) 取极限

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \quad (\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i)$$

上述两个问题的共性:

- 所求量和一个区间[a,b]以及该区间上的一个函数$f(x)$有关
- 所求量对区间有可加性,即总量等于部分量之和
- 所求量解决方法相同:“分割 , 取点 , 作和 , 取极限 ”
- 所求量极限结构式相同: 特殊乘积和式的极限

二、定积分的定义

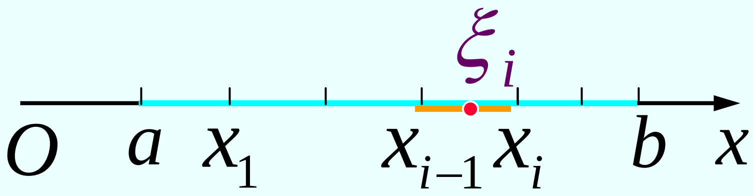
1定义 设 $f(x)$在$[a,b]$上有界,若对$[a,b]$的任一种分法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \Lambda < x_n = b,$$ 令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,任取

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,只要 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I,则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$上的**定积分**,记作$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时称 $f(x)$在$[a,b]$上**可积**.

积分上限

$[a,b]$称为积分区间

$$\int_a^b \boxed{f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

说明: i) $a>b$时, $\Delta x_i<0$, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx=0$

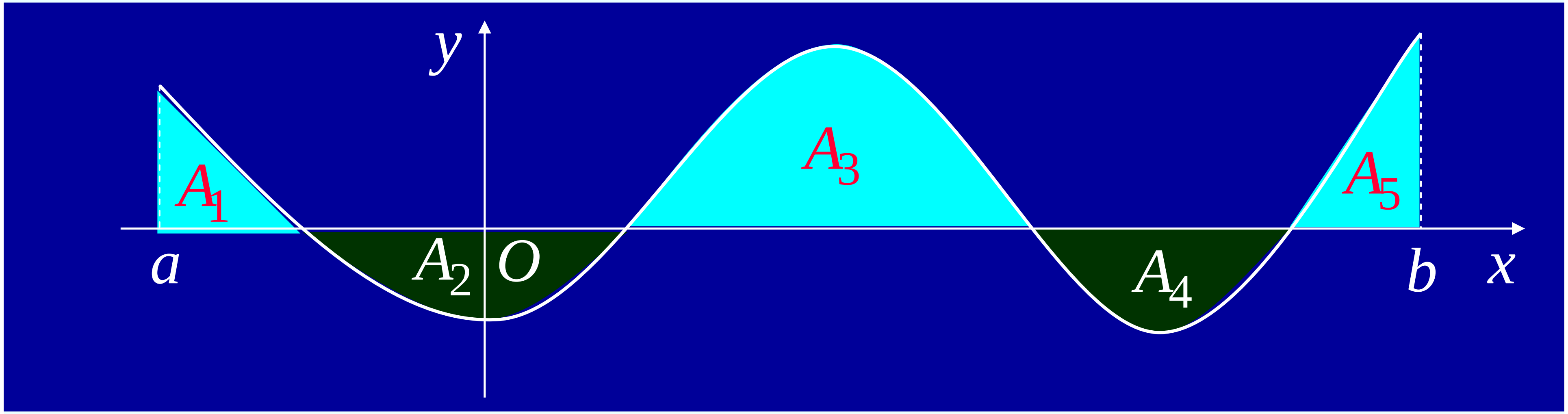
ii) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示一个数, 取决于**[a,b]**和***f(x)***,与积分变量的记号无关,即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

说明:

iii)几何意义

$f(x) > 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$　　曲边梯形面积

$f(x) < 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$　曲边梯形面积的负值



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

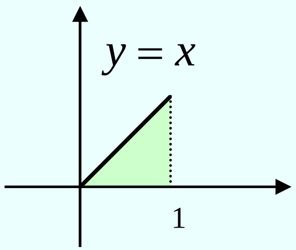
各部分面积的代数和

说明:

iii)几何意义

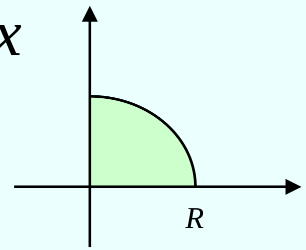
例1 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}$



例2 $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{4}R^2$



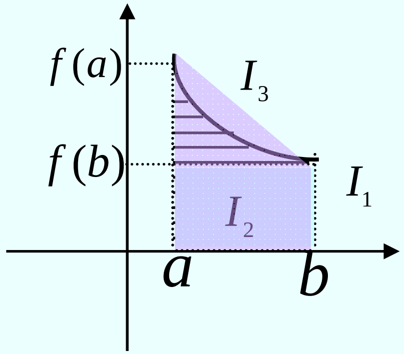
例3 已知函数$f(x)$在$[a,b]$上满足$f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$

试从定积分的几何意义,比较下述三个数的大小

$$I_1=\int_a^b f(x)dx,\quad I_2=f(b)(b-a),\quad I_3=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

解 非负函数$f(x)$在$[a,b]$上单减,上凹

故$I_3>I_1>I_2$



说明：

iv) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限,这个极限一旦存在,与分划,取法无关；若由于分划,取法不同导致和式极限不同或不存在,则$f(x)$在$[a,b]$上一定不可积

例 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$

任取分划 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

若 ξ_i 取有理点　和式为b-a

若 ξ_i 取无理点　和式为0

$\therefore$不可积

二、定积分的定义

2可积准则

可积的必要条件

若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上必有界

可积的充分条件

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

设$f(x)$在$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,
则$f(x)$在$[a,b]$上可积

3 怎样利用定积分定义解题

①利用定积分定义求定积分

例. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

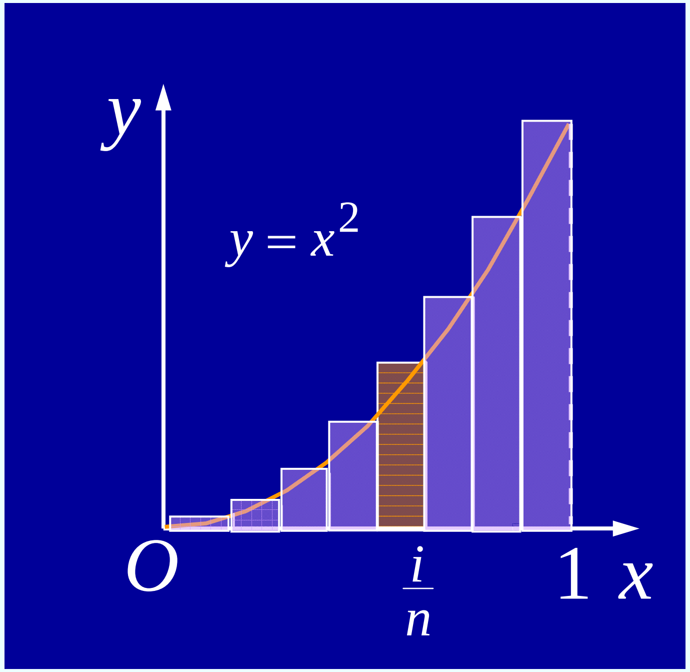
解: 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为$x_i=\frac{i}{n}\ (i=0,1,\Lambda\ ,n)$

取 $\xi_i=\frac{i}{n},\quad \Delta x_i=\frac{1}{n}\ (i=1,2,\Lambda\ ,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$$



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

②利用定积分定义求极限（数列之和）

$$a < a+\frac{b-a}{n} < a+2\frac{b-a}{n} < \Lambda < a+\frac{n}{n}(b-a) = b$$

$$[a, a+\frac{b-a}{n}], [a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}], \Lambda\ [a+(i-1)\frac{b-a}{n}, a+i\frac{b-a}{n}]\Lambda\ , [a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b]$$

$$\xi_i = a+\frac{i}{n}(b-a) \qquad \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}(b-a))\frac{b-a}{n} \\ \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}\end{gathered}}$$

例1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\Lambda+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

分析： 用两边夹准则或用定积分定义求

$$\text{找一般值}\,a_i\begin{cases} = f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} & \text{能用定积分定义求} \\ & \text{必须出现}\,\frac{i}{n}\,\text{且当作一个变量} \\ \neq f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} & \text{不能用} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$$

解： $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(1+\sqrt{2})$$

(学完下节后能求)

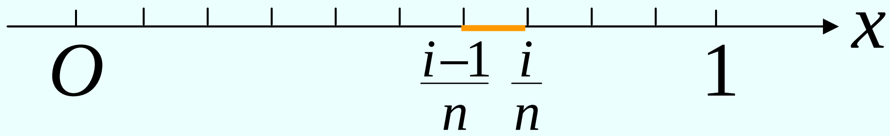
练习. 用定积分表示下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\Lambda+n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\Lambda+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i})^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

三、定积分的性质(设所列定积分都存在)

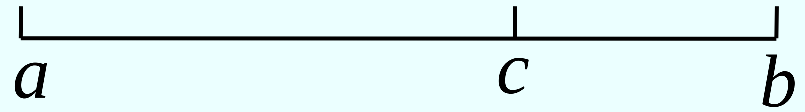
1.线性性 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$

$$\int_a^b k f(x) \mathrm{d}x = k \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \ (k \text{ 为常数})$$

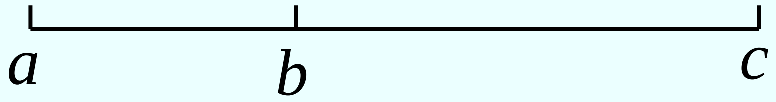
$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

2.可加性 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \boxed{\int_a^c} f(x) \mathrm{d}x + \boxed{\int_c^b} f(x) \mathrm{d}x$

证: 当 $a < c < b$ 时, 成立



当 $a < b < c$ 时,



$$\int_a^c f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x + \int_b^c f(x) \mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \mathrm{d}x - \int_b^c f(x) \mathrm{d}x = \boxed{\int_a^c} f(x) \mathrm{d}x + \boxed{\int_c^b} f(x) \mathrm{d}x$$

3.不等式性质

i)若在$[a,b]$上 $f(x)\geq 0$, 则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$.

ii)若在$[a,b]$上 $f(x)\leq g(x)$, 则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

i)′ 若$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f(x)\geq 0$, 且$f(x)\not\equiv 0$, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$

iii)$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

4.估值定理　设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, 则

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq M(b-a)\quad (a<b)$$

用于不能求原函数的积分

例　$\frac{1}{e}<\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x<1$

例 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$g(x)$在$[a,b]$上连续,且$g(x)$不变号,则至少存在一点$\xi\in[a,b]$使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

取$g(x)=1$

分析 出现了$f(\xi)$没有导数,考虑用介值定理

证明: 不妨设$g(x)\ge 0$ 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$,

则 $m\le f(x)\le M$, $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$

$$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x \quad \text{即} m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$$

由介值定理$\exists\xi\in[a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

5.积分中值定理

$f(x)$在$[a,b]$上连续,则至少存在一点$\xi\in[a,b]$使得

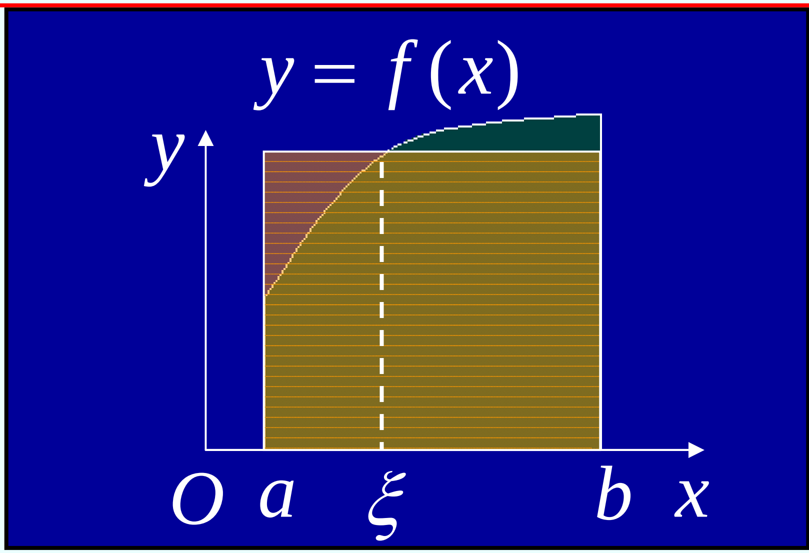
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

说明：i)题目中出现将定积分变成某一点的函数值的特征考虑利用积分中值定理

ii)$f(x)$在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$ 下节例题

iii)几何意义



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= f(\xi)(b-a)$$

例1 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$

证明在$(0,1)$内存在一点c,使 $f'(c)=0$

证明 由积分中值定理 $\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} f(\xi),\ \xi \in [\frac{2}{3},1]$

于是 $f(\xi) = f(0)$

又因为$f(x)$在$[0,\xi]$上连续,在$(0,\xi)$内可导,由罗尔定理

$\exists c \in (0,\xi) \subset (0,1)$,使$f'(c) = 0$

例2 设$f(x)$在$[0,1]$上可微, $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2} f(x)\mathrm{d}x$

证明在$(0,1)$内存在一点ξ,使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

证明 设 $F(x)=e^{1-x^2} f(x)$

由积分中值定理$f(1)=2F(\eta)\cdot\frac{1}{2}=F(\eta),\ \eta\in[0,\frac{1}{2}]$

即 $F(1)=F(\eta)$

因为$F(x)$在$[\eta,1]$上连续,在$(\eta,1)$内可导,由罗尔定理

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使$F'(\xi)=0$

$$F'(x)=-2xe^{1-x^2} f(x)+e^{1-x^2} f'(x)=e^{1-x^2}(f'(x)-2xf(x))$$

从而 $f'(\xi)-2\xi f(\xi)=0$命题得证