第七章

微分方程

§1 微分方程的基本概念

§2 可分离变量的微分方程

§3 齐次方程

§4 一阶线性微分方程

§6 高阶线性微分方程

§7 常系数齐次线性微分方程

§8 常系数非齐次线性微分方程

第七章

第一节

微分方程的基本概念

内容

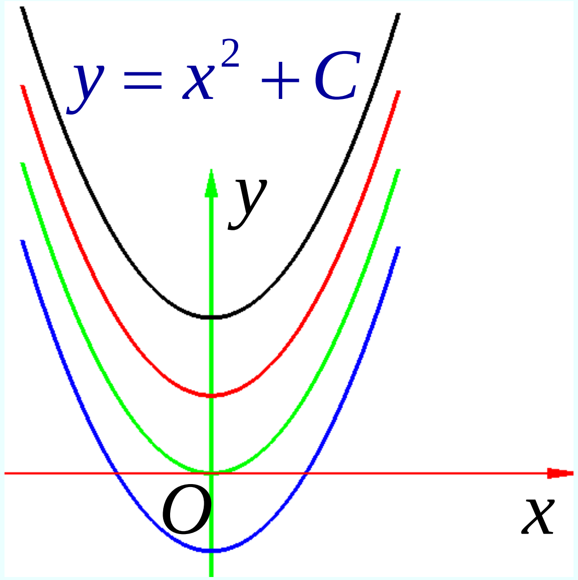
一、问题的提出

二、微分方程的基本概念

8个

一、问题的提出

引例1 一曲线通过点(1,2)，在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程.



解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$，则有

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x,} & ① \\ y\big|_{x=1} = 2. & ② \end{cases}$$

微分方程

由 ① 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$ (C为任意常数)，

由 ② 得 $C = 1$，因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例2. 列车在平直路上以 20 m/s 的速度行驶，制动时获得加速度 $a=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$，求制动后列车的运动规律.

解: 设列车在制动后 t 秒行驶了 s 米，即求 $s=s(t)$.

已知
$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$$
$$s\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$$

由前一式两次积分，可得 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

利用后两式可得 $C_1=20,\ C_2=0$

因此所求运动规律为 $s=-0.2t^2+20t$

说明: 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住，以及制动后行驶了多少路程 .

二、微分方程的基本概念

①微分方程 凡含有未知函数的导数或微分的方程

$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 称为微分方程,

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程,

未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程.

例 $y^2 + y = 3$ (普通方程)　　$xy' + y = (xy)'$ (恒等式)

$y'' + y^2 = y'$(常微分方程)　　$x + z'_x + z'_y = y$ (偏微分方程)

注意: 微分方程中一定要含有导数.

②阶 微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数

称微分方程的阶　$x(y')^2 - 2yy' + x = 0$　(一阶)

$x^2 y'' - xy' + y = 0$　(二阶)

③微分方程的解 —使方程成为恒等式的函数$y=f(x)$

或$\varphi(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$ 隐式解

④通解 —解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.

⑤ 特解 —不含任意常数的解, 其图形称为**积分曲线**.

⑥全部解 —由通解及其不能包含在通解中的特解组合在一起的解

引例1 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \\ y\big|_{x=1}=2 \end{cases}$

通解: $y=x^2+C$

特解: $y=x^2+1$

引例2 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \\ s\big|_{t=0}=0, \quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 \end{cases}$

通解: $s=-0.2t^2+C_1 t+C_2$

特解: $s=-0.2t^2+20t$

③微分方程的解 —使方程成为恒等式的函数$y=f(x)$

或$\varphi(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$隐式解

④通解 —解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.

⑤ 特解 —不含任意常数的解,其图形称为**积分曲线**.

⑥全部解 —由通解及其不能包含在通解中的特解组合在一起的解

例 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解

(1) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$　　$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$　　(是)

(2) $(x-2y)y'=2x-y$　　$x^2-xy+y^2=C$　　(是)

⑦初值问题

定解条件(初始条件) —确定通解中任意常数的条件.

n 阶微分方程的初值问题可表示为:

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1\,, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

它的解是一个确定的函数,通常是按**定解条件**定出通解中独立的几个常数的确定值后得到的

引例1 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 2 \end{cases}$

通解: $y = x^2 + C$

特解: $y = x^2 + 1$

引例2 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4 \\ s\big|_{t=0} = 0\,,\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 20 \end{cases}$

通解: $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$

特解: $s = -0.2t^2 + 20t$

初值问题

⑦初值问题

定解条件(初始条件)—确定通解中任意常数的条件.

n 阶微分方程的**初值问题**可表示为:

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_1\,, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

它的解是一个确定的函数,通常是按**定解条件**定出通解中独立的几个常数的确定值后得到的

例 验证下面函数是相应方程的通解, 并求满足初始条件的特解

$$\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases} \qquad y = Ce^{2x}$$

解: 将 $y = Ce^{2x}$, $y' = 2Ce^{2x}$

代入恒成立

$$1 = Ce^{2\cdot\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{1}{e} \qquad \therefore y = e^{2x-1}$$

⑧积分方程 带有未知函数的变上(下)限积分的方程

称为积分方程,它通常可以化为微分方程来解

有时可化成初值问题,可求得具体函数

例 将积分方程 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + f(x) = x^2$ 化为微分方程

解 两边对x求导得 $f(x) + f'(x) = 2x$

x=0时 $f(0) = 0$ 即 $\begin{cases} y' + y = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

例 已知积分曲线族为$y = C_1 x + C_2 x^2$

求它们满足的微分方程

分析 通过求导消去常数C_1, C_2得到微分方程

解 求导 $\begin{cases} y' = C_1 + 2C_2 x \Rightarrow C_1 = y' - y''x \\ y'' = 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} y'' \end{cases}$

代入曲线族方程中 $y = (y' - xy'')x + \frac{1}{2} y'' x^2$