偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率．但许多物理现象告诉我们，只考虑函数沿坐标轴方向的变化率是不够的．例如，热空气要向冷的地方流动，气象学中就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率．因此我们有必要来讨论函数沿任一指定方向的变化率问题.

第七节

方向导数与梯度

内容

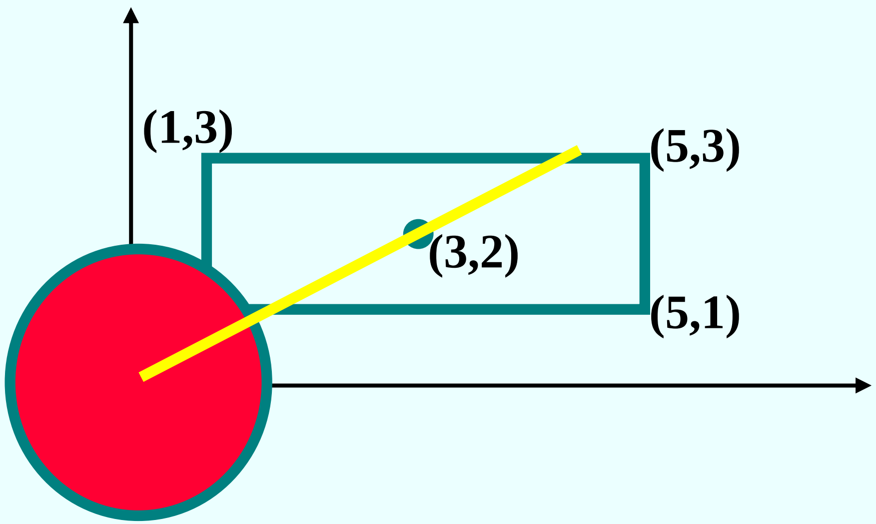
一、问题的提出

二、方向导数

三、梯度

一、问题的提出

实例:一块长方形的金属板，四个顶点的坐标是(1,1)(5,1),(1,3),(5,3).在坐标原点处有一个火焰，它使金属板受热.假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比.在(3,2)处有一个蚂蚁,问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?



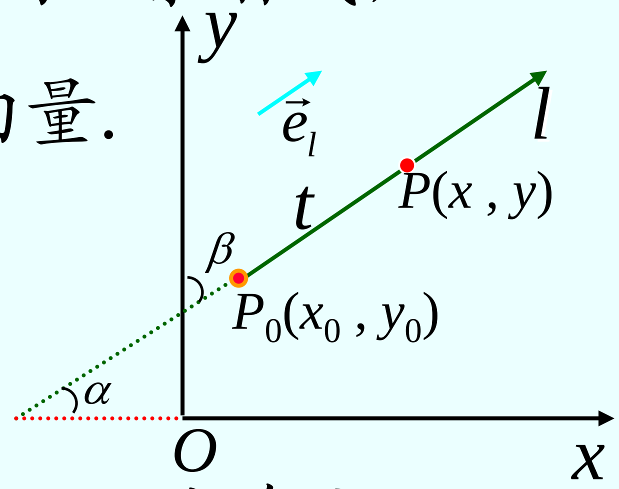
问题的实质:

应沿由热变冷变化最骤烈的方向(即梯度方向)爬行.

二、方向导数

设 l 是 xOy 平面上以 $P_0(x_0\,,y_0)$ 为始点的一条射线，

$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\overset{\sin\alpha}{\cancel{\cos}}\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量.



射线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha\,, \\ y=y_0+t\sin\alpha\,, \end{cases}\quad (t\geq 0)\,.$$

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，

$P(x_0+t\cos\alpha\,,y_0+t\sin\alpha)$ 为 l 上另一点，且 $P\in U(P_0)$.

若 $\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha\,,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}\to A$ 当 P 沿着 l 趋于 P_0 $(t\to 0^+)$ 时

极限存在，则称此极限为 $f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 l 的**方向导数**

记作 $$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha\,,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

说明 ①几何意义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$就是函数$f(x,y)$在点$P_0$沿方向 l 的变化率

②方向导数与偏导数的关系

(i)设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的偏导数存在

取$\vec{e}_l=(1,0)$ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0+t,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f'_x(x_0,y_0)$

平行x轴方向的方向导数存在

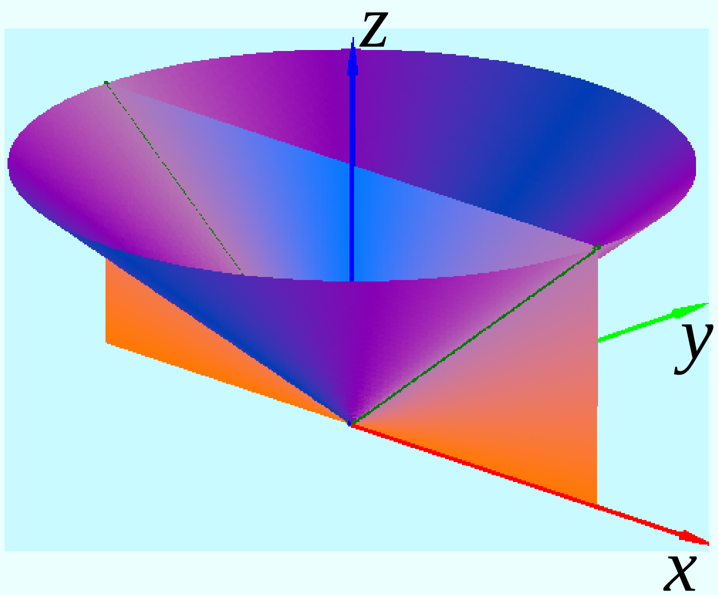
取$\vec{e}_l=(0,1)$ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0,\ y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=f'_y(x_0,y_0)$

平行y轴方向的方向导数存在

(ii) 方向导数存在 $\not\longrightarrow$ 偏导数存在

方向导数:单方向(射线)变化率　偏导数:双向变化率

例如　取 $\vec{e}_l=(1,0)$　$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+t\,,0)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-0}{t}=1$$ 方向导数存在

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x\,,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$ 偏导数 $f_x(0\,,0)$ 不存在.

综上所述:

(1) 偏导数存在，只能保证函数沿平行于坐标轴方向的方向导数存在，而不能保证沿其它方向的方向导数存在;

(2)函数沿任意方向的方向导数存在，也不能保证偏导数存在.

那么，函数到底满足什么条件时，方向导数一定存在，如何计算呢？ 下面的定理给出了回答.

定理 如果函数 $f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微分,那么 $f(x,y)$在该点沿任意方向 l 的方向导数存在,且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$是方向 l 的方向余弦.

注： 定理给出方向导数存在的条件以及计算方法

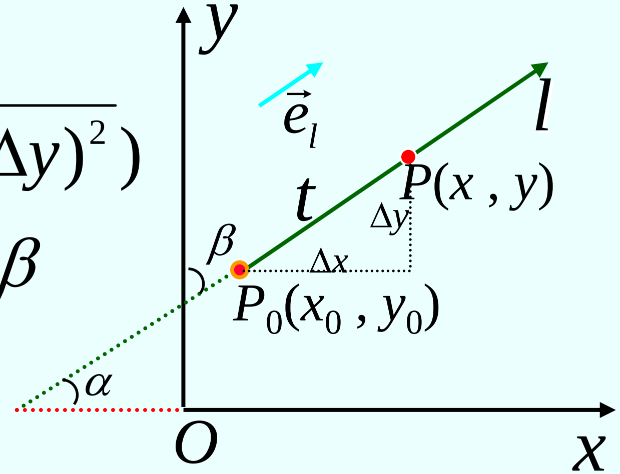
证： $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

在射线l上$\boxed{\Delta x=t\cos\alpha}$, $\Delta y=t\sin\alpha=t\cos\beta$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\overset{\cos\beta}{\cancel{\sin}}\alpha=\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$$



例1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从 $(1,2)\to(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数

解: $\vec{l}=(1,\sqrt{3}),\ \vec{e}_l=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2x\Big|_{(1,2)}=2 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=2y\Big|_{(1,2)}=4$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=f_x'(1,2)\cos\alpha+f_y'(1,2)\cos\beta$$

$$=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta}$$

推广 三元函数$f(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$沿$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$方向的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$=f_x'(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z'(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta}$$

例2. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向角 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向导数

解: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)} = y^2 - yz\Big|_{(1,1,2)} = -1$ $\quad\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)} = 2xy - xz\Big|_{(1,1,2)} = 0$

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)} = 3z^2 - xy\Big|_{(1,1,2)} = 11$ $\quad\cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)} = -1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 11\cdot\frac{1}{2} = 5$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = f_x'(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z'(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma}$$

三、梯度

问题: 在$P_0(x_0,y_0)$点$f(x,y)$沿什么方向的变化率最大?

或$z=f(x,y)$函数值增加的最快? 即方向导数最大?

定义 $\forall P_0(x_0,y_0)$,**称向量** $f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$ 为函数$f(x,y)$在点P_0的**梯度**, 记作

$$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}=\nabla f(x_0,y_0)$$

①梯度与方向导数的关系

若$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微分,$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与$\vec{l}$同向单位向量

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}$$

$$=\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l$$

①梯度与方向导数的关系

若$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微分,$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与$\vec{l}$ 同向单位向量

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}$$

$$=\text{grad}f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l$$

①梯度与方向导数的关系

若$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微分,$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与$\vec{l}$同向单位向量

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$=\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l$$

$$=|\mathrm{grad}f(x_0,y_0)|\cdot\cos\theta\quad 其中\theta=(\widehat{\mathrm{grad}f(x_0,y_0),\ \vec{e}_l})$$

当$\cos(\widehat{\mathrm{grad}f(x_0,y_0),\ \vec{e}_l})=1$时,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$最大

即$\vec{l}$取梯度方向时,方向导数取得最大值

最大方向导数值为$|\mathrm{grad}f(x_0,y_0)|$即梯度的模

即 $\vec{l}$ 取梯度方向时，方向导数取得最大值

最大方向导数值为 $|\mathrm{grad} f(x_0, y_0)|$ 即梯度的模

最大方向导数值 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}} > 0$ 随着t增加，函数值增加

方向指向函数值增加的方向

②梯度方向怎么表示

$z = f(x, y)$ 在几何上表示一个曲面

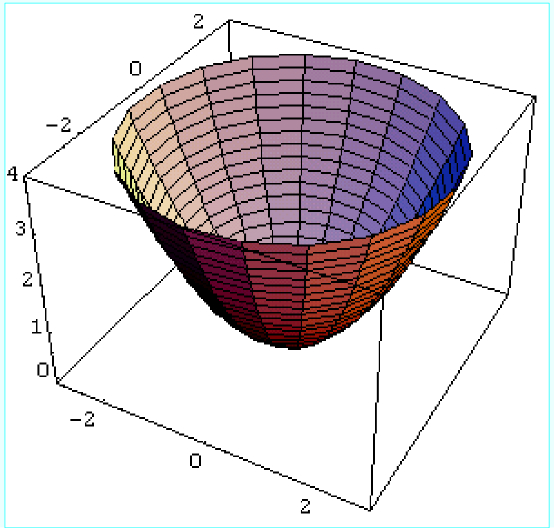
$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$ 表示被平面$z=c$所截得的曲线L

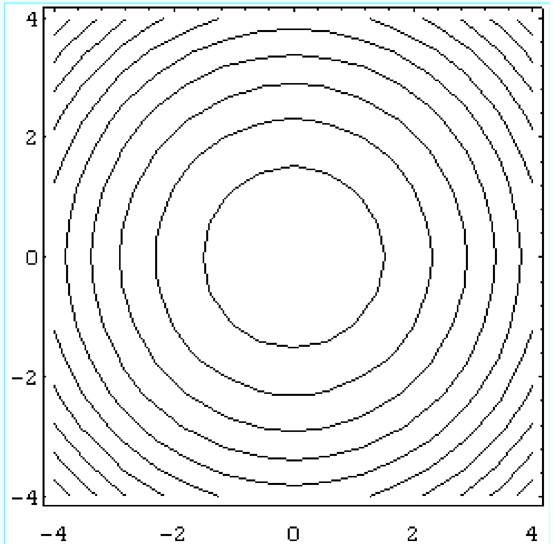
L在xoy面上的投影是L^*

$L^*: f(x, y) = c$

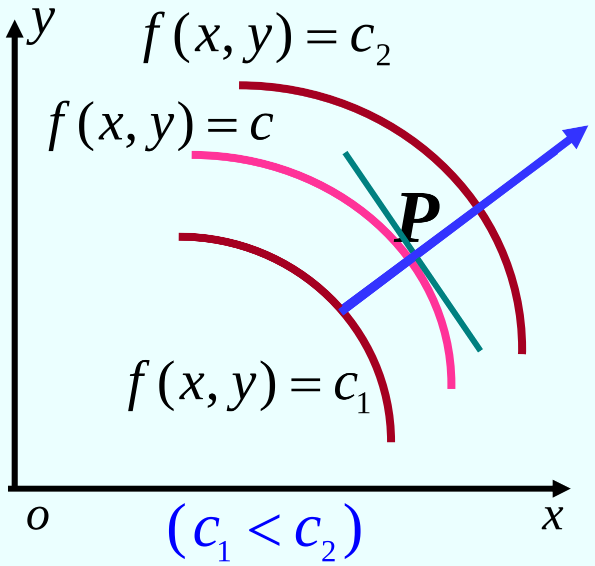
称为函数 $f(x,y)$的

等值线或等高线 .





②梯度方向怎么表示



开口向上旋转抛物面

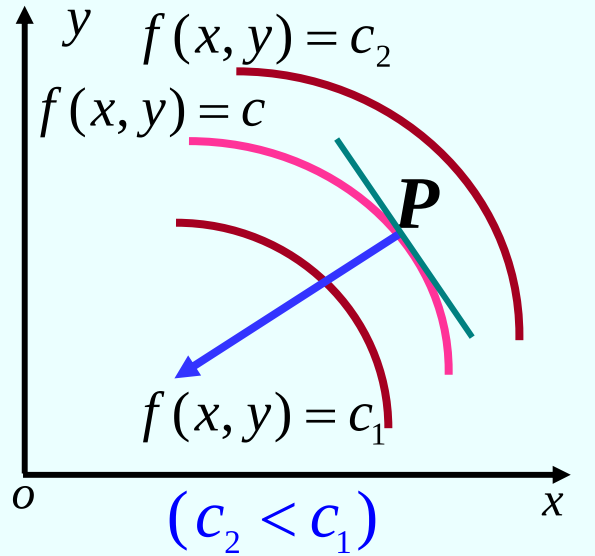
等值线内小外大外法线方向为梯度方向

等值线 $f(x,y)=c$ 上任一点 $P(x_0,y_0)$ 处单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{\overbrace{(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))}^{\text{梯度}}}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}$$

表明梯度方向与等值线上这点的一个法线方向相同

而沿这个方向的方向导数最大且等于 $|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)|$



开口向下旋转抛物面

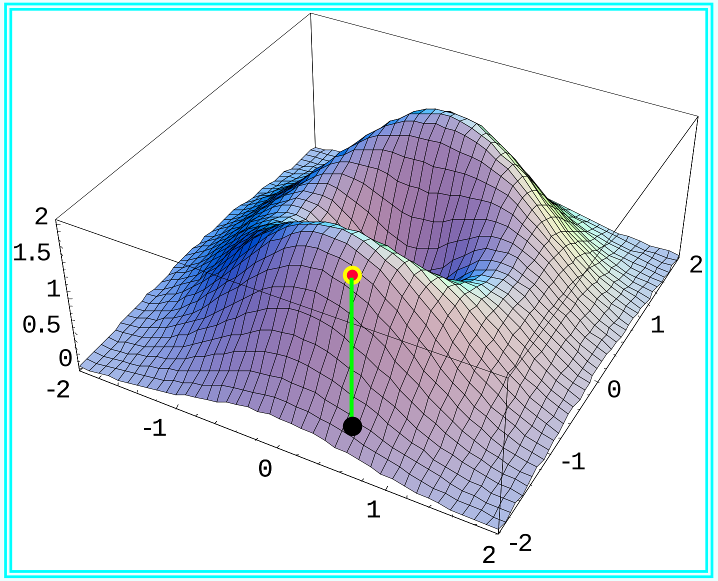
等值线内大外小内法线方向为梯度方向

曲面在(x_0,y_0)处的各个方向上的射线中，梯度方向最陡,变化最快

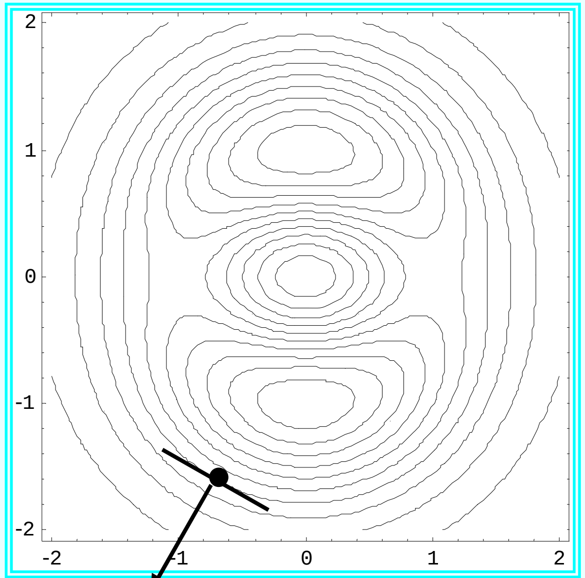
指向从数值较低指向数值较高的等值线

等高线图举例

$$z = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

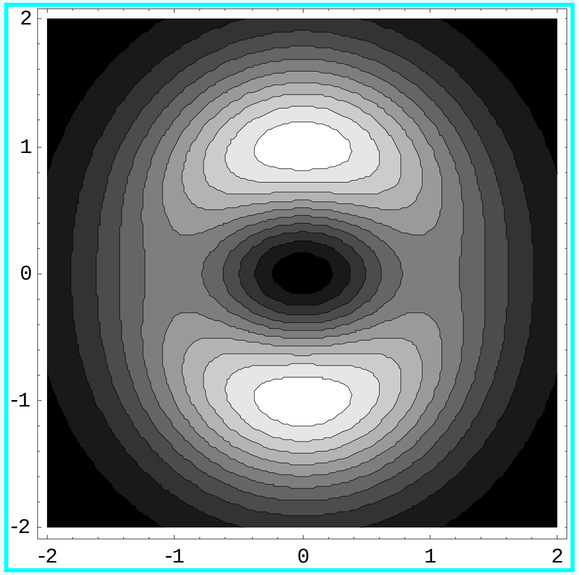


最速下降方向



负梯度方向

等高线图



带阴影的等高线图

这是利用数学软件Mathematica绘制的曲面及其等高线图，带阴影的等高线图中，亮度越大对应曲面上点的位置越高

③推广 三元函数$f(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的梯度

$$\mathrm{grad}f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}$$

例1 函数$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$M(1,2,-2)$处的梯度$\mathrm{grad}u|_M$

解 $\mathrm{grad}u|_M$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(1,2,-2)}$$

$$=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)_{(1,2,-2)}$$

$$=\frac{2}{9}(1,2,-2)$$

数量场与向量场的介绍自行阅读

如果对于空间区域G内的任一点M，都有一个确定的数量$f(M)$，则称在这空间区域G内确定了一个**数量场**. 例如温度场、密度场等. 一个数量场可用一个数量函数$f(M)$来确定. 如果与点M相对应的是一个向量$F(M)$，则称在这个空间区域G内确定了一个**向量场**. 例如力场、速度场等. 一个向量场可用一个向量值函数$F(M)$来确定.

数量场

例2 函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？最大值是多少？

解 $$\mathrm{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

梯度场（向量场）

$$= (y^2 - yz,\ 2xy - xz,\ 3z^2 - xy)$$

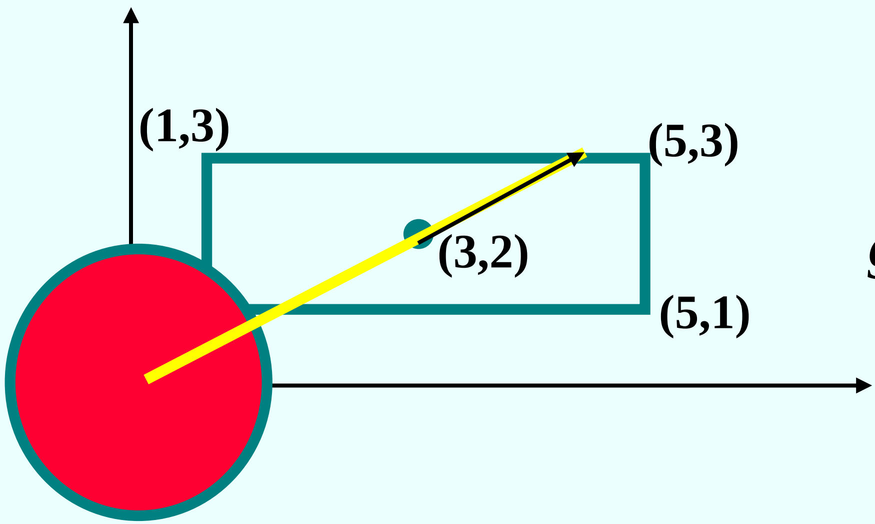
$$(\mathrm{grad}u)_P = (0,1,2)$$

函数u在点P处沿向量$(0,1,2)$方向的方向导数最大

最大值为 $|(\mathrm{grad}u)_P| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

一、问题的提出

实例:一块长方形的金属板，四个顶点的坐标是(1,1)(5,1),(1,3),(5,3).在坐标原点处有一个火焰，它使金属板受热.假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比.在(3,2)处有一个蚂蚁,问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?



$$T=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$gradT=\left(-\frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}},-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$gradT|_{(3,2)}=\left(-\frac{3k}{13\sqrt{13}},-\frac{2k}{13\sqrt{13}}\right)$$