第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理（第1节）
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 —推广→ 泰勒公式（第3节）
- 柯西中值定理

洛必达法则求极限 (第2节)

导数应用（第4-5节） 研究曲线的性态包括**单调性**，极值，**最值**，**凹凸性**，**拐点**等

第三章

第一节

微分中值定理

内容

一、罗尔定理

二、拉格朗日中值定理

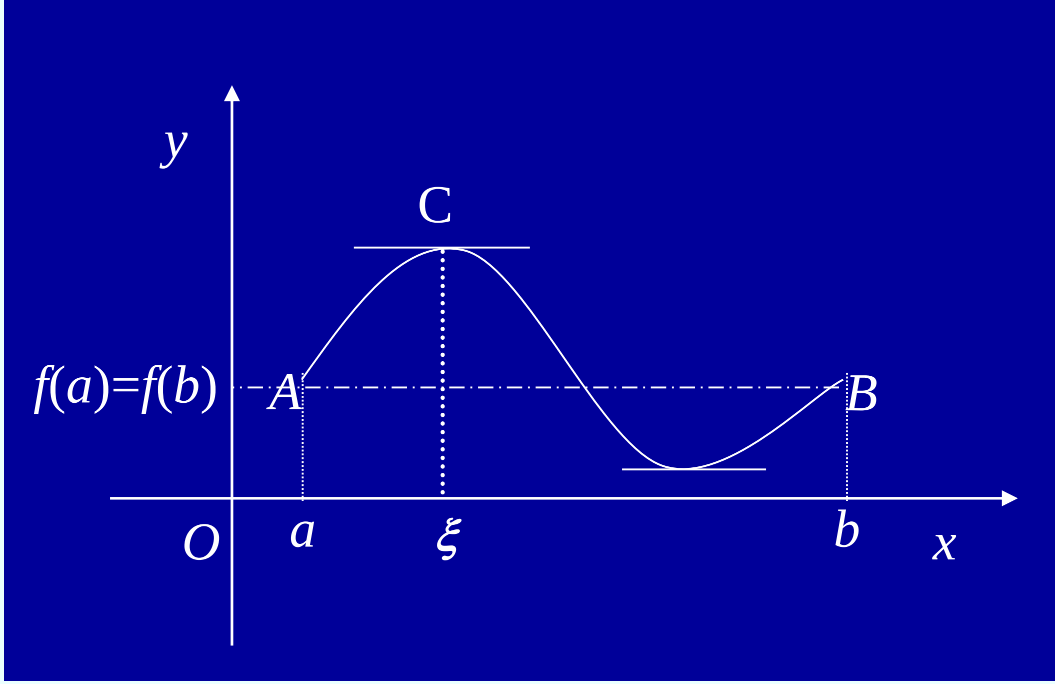
三、柯西中值定理

四、典型题

一罗尔定理

1. 几何现象

设曲线弧AB是函数
$y = f(x), x \in [a,b]$的图形，
这是一条连续的曲线弧，



除端点外处处具有不垂直x轴的切线，且$f(a)=f(b)$.

观察发现在曲线弧的最高点或最低点处曲线有水平切线，

若记C点坐标$(\xi, f(\xi))$, 则有 $f'(\xi) = 0$

现在用分析语言，把这个几何现象描述出来得罗尔定理

2.费马引理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，

且 $f'(x_0)$ 存在，如果对 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$f(x) \le f(x_0)$（或 $f(x) \ge f(x_0)$），那么

$f'(x_0) = 0$，并称导数等于0的点为函数的**驻点**

费马 **Fermat, (法) 1601-1665**

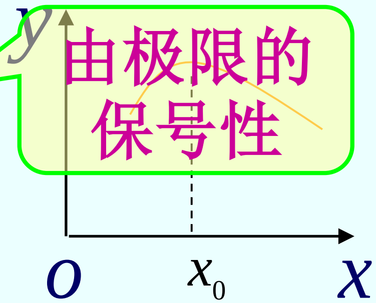
证 **仅证** $f(x) \le f(x_0)$ 对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$，

$$f(x_0+\Delta x) \le f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \le \mathbf{0}$$

$$若\ \Delta x > 0,\ f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0;$$

由极限的保号性

$$若\ \Delta x < 0,\ f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0;$$



由 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ 有 $f'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

3.罗尔定理

罗尔（Rolle）
法国数学家
1652-1719

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a, b) 内可导；

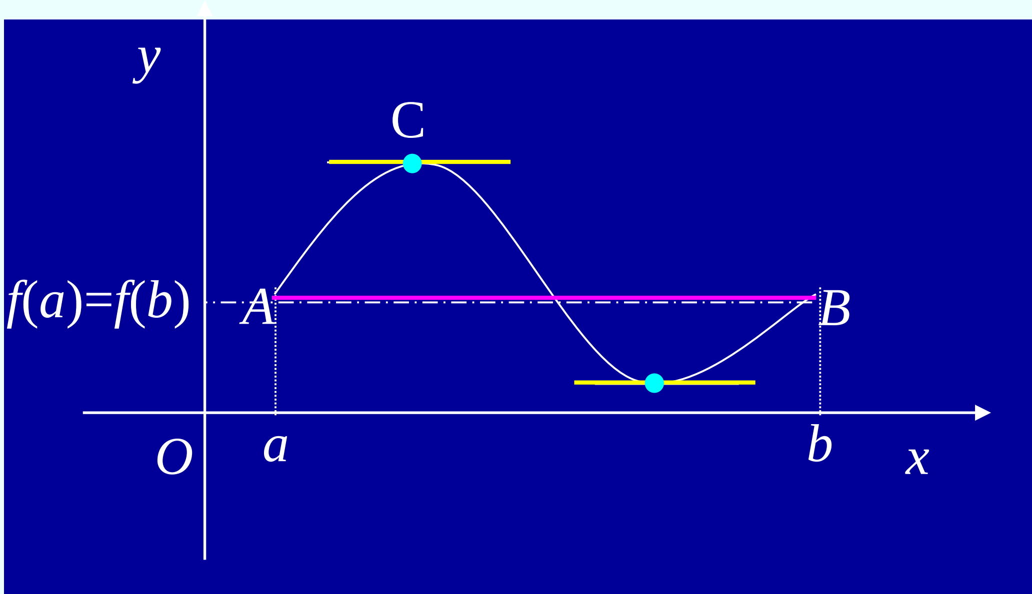
(3) $f(a) = f(b)$，

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi) = 0 .$$

几何意义

若弦AB是水平的，
则在(a,b)中有点 ξ
使得过$(\xi, f(\xi))$
的切线是水平的



3.罗尔定理 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) $[a, b]$ 上连续；(2) (a, b) 内可导；(3) $f(a)=f(b)$，

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证：因$f(x)$在$[a,b]$上连续 故在$[a, b]$上取得最大值 M 和最小值 m .

若 $M=m$ $f(x)\equiv M, x\in[a,b]$ $\forall\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=0$

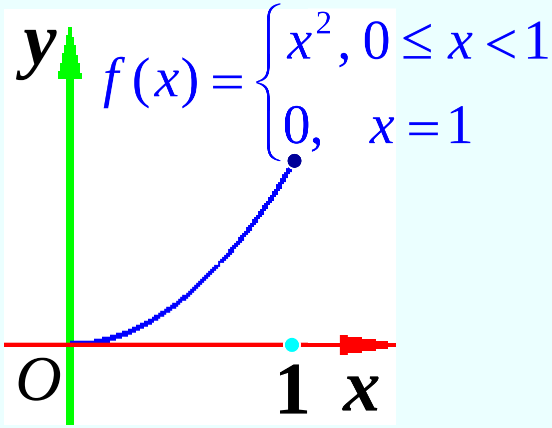
若$M>m$, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等,

不妨设 $M\neq f(a)$, $f(\xi)=M$, 由费马引理, $f'(\xi)=0.$

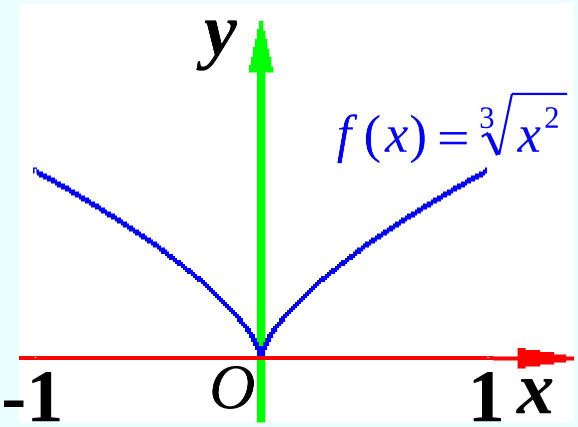
则至少存在一点 $\xi\in(a,b), f'(\xi)=0.$

说明

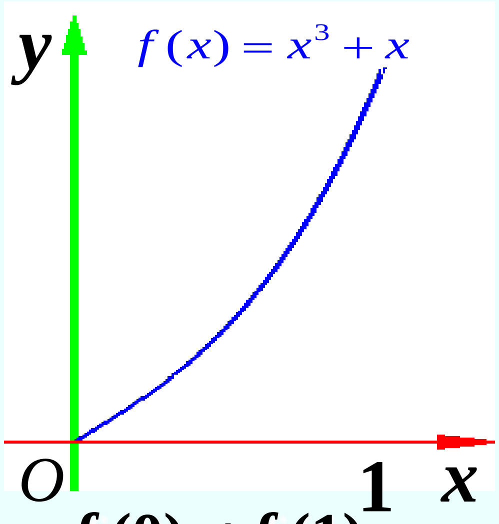
罗尔定理是一个充分性定理，定理的条件不全满足时，可能有该结论，也可能没有该结论．例如



$f(x)$ 在[0 , 1]不连续



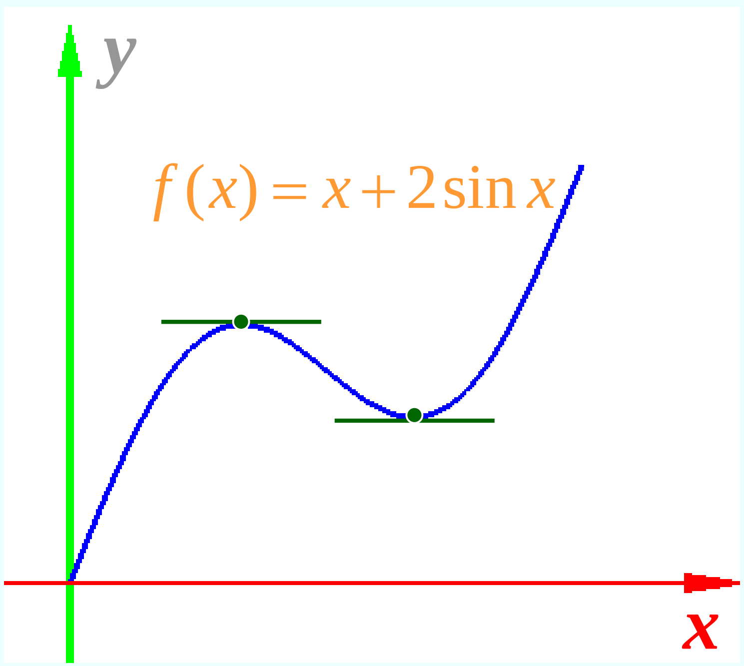
$f(x)$ 在(-1 , 1)不可导



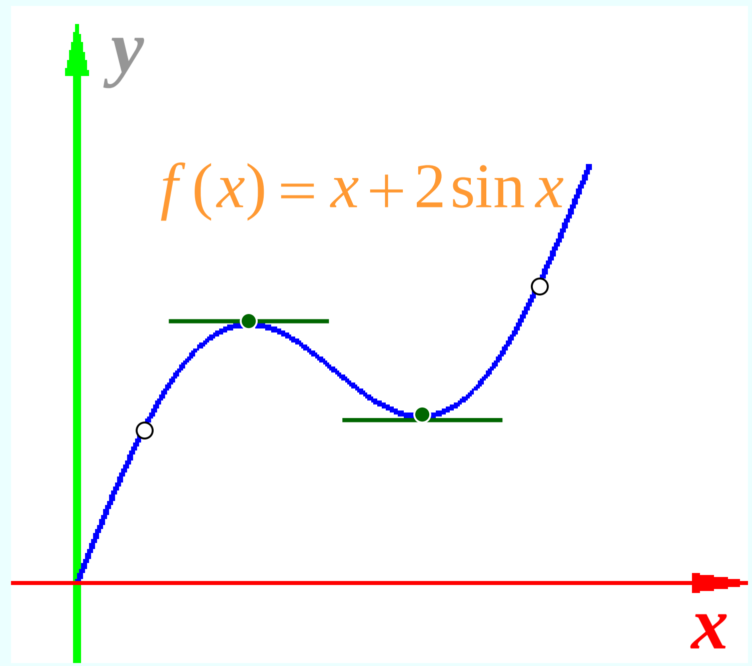
$f(0)\neq f(1)$

说明

罗尔定理是一个充分性定理，定理的条件不全满足时，可能有该结论，也可能没有该结论．例如



$f(0)\neq f(2\pi)$



$f(0)\neq f(2\pi)$且不连续

二、拉格朗日中值定理

罗尔定理 1)$[a,b]$上连续 2)(a,b)内可导

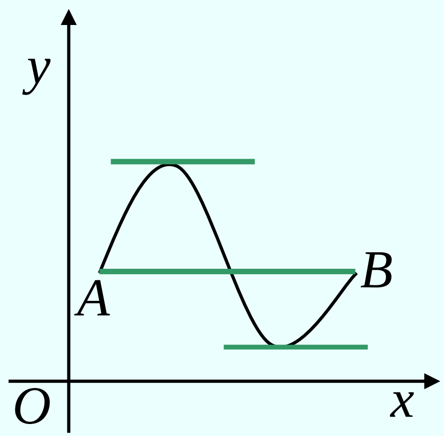
3)$f(a)=f(b)$ 至少存在一点$\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=0$.

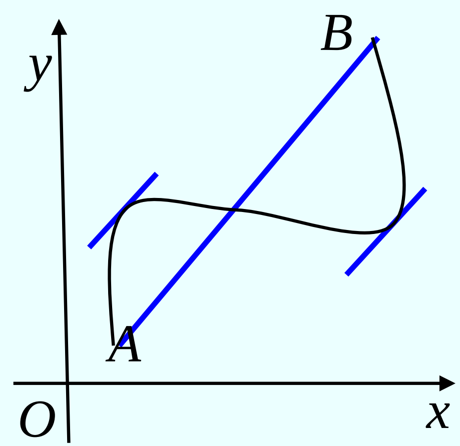
罗尔定理中的第3个条件 $f(a)=f(b)$ 相当特殊, 它使罗尔定理的应用受到限制.如果去掉这个条件，但仍保留其余两个条件, 会有什么样的结论呢?

罗尔定理结论

$$f'(\xi)=0$$

切线//弦 ***AB***





$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

切线//弦 ***AB***

去掉 $f(a)=f(b)$

猜想 **在区间 (a, b) 内至少存在一条平行于弦的切线.**

拉格朗日中值定理

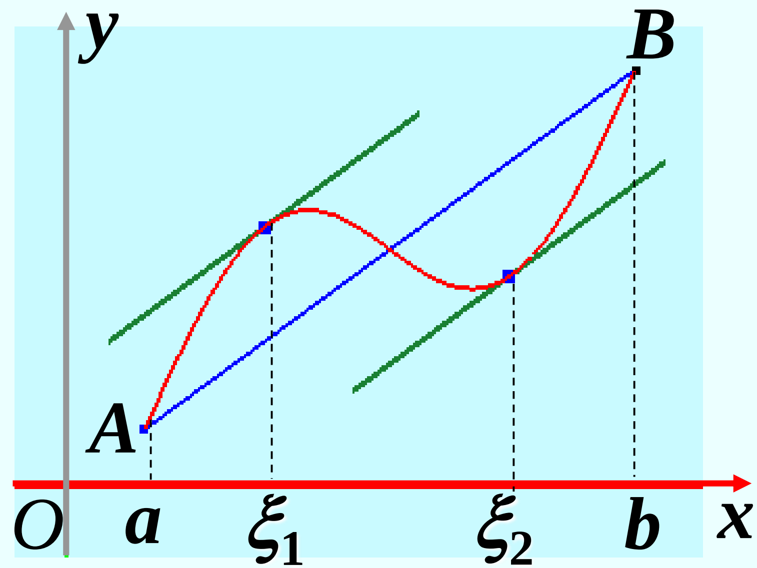
如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

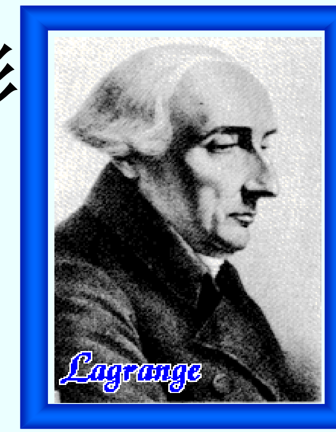
(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$



分析 罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形自然希望利用罗尔定理来证明.因此需要构造一个与 $f(x)$密切相关且满足罗尔定理条件的函数.



拉格朗日

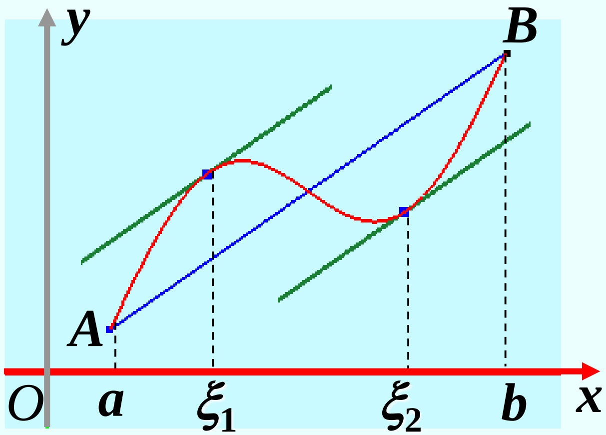
法国1736-1813

曲线弧AB与直线AB在 A, B 处的纵坐标相等

$$f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

证明 作辅助函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$,

易知$g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导



$$f(x)\ -\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

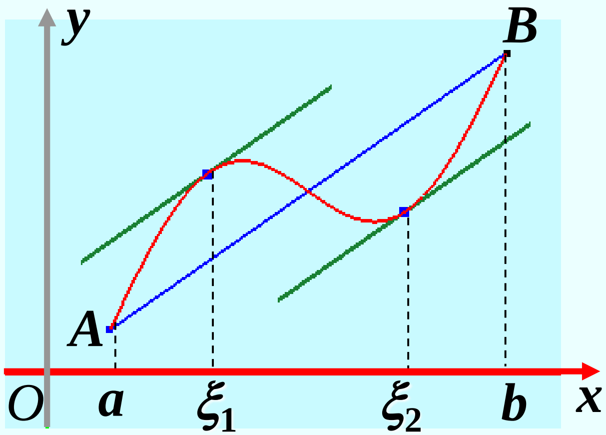
证明 作辅助函数 $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$,

易知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导

且 $g(a) = 0 = g(b)$

故在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ

使得 $g'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$ 即



说明 (1) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ **拉格朗日中值公式**

(2)拉格朗日中值公式对于 $b < a$ 也成立.

(3) $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$

有限增量形式

定理1 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

证 $\forall x_1 < x_2 \in I$, 由拉格朗日中值定理

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\therefore f(x_1) = f(x_2)$$

由 x_1, x_2 任意性 $f(x)$在I上函数值恒等一常数

定理2 如果在区间 I 上 $f'(x) = g'(x)$ 那么在区间 I 上 $f(x)$与$g(x)$至多相差一个常数$f(x)=g(x)+C$

例1. 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \ x \in [-1,1].$

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在$(-1,1)$上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由定理1可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ (常数)

令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域$[-1,1]$上成立.

经验: 欲证 $x \in I$ 时 $f(x) = C_0$, 只需证在 I 上 $f'(x) \equiv 0$,

且 $\exists\, x_0 \in I$, 使 $f(x_0) = C_0$.

类似地: $\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$

三、柯西中值定理

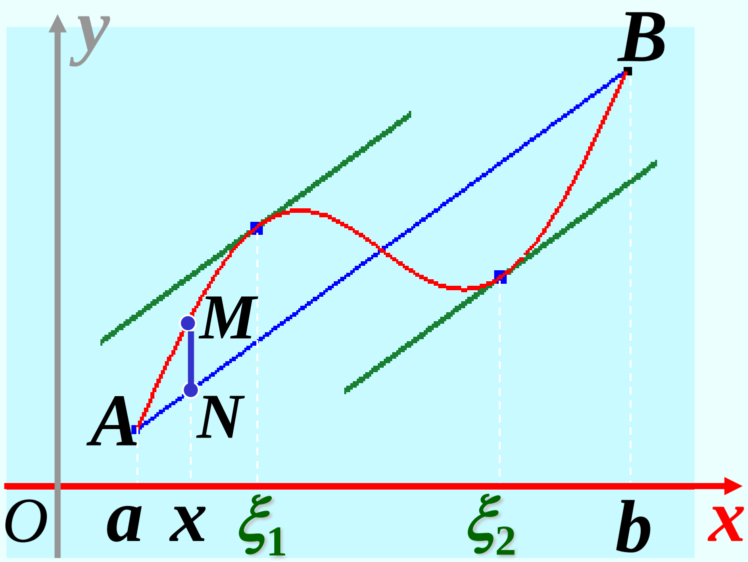
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

在拉格朗日中值定理的几何意义中，如果曲线的方程由参数方程 $\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 给出，其结论又该如何表达呢？此时，切线和弦 ***AB*** 的斜率分别为

$$k_{切} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \qquad k_{弦AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{F(\beta) - F(\alpha)},$$

于是结论应改为

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{F(\beta) - F(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$



柯西中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 对 $\forall x \in (a, b), F'(x) \neq 0$,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

法国(1789 – 1857)

微分中值定理

罗尔定理 $\underset{f(a)=f(b)}{\overset{\text{推广}}{\rightleftharpoons}}$ **拉格朗日中值定理** $\underset{F(x)=x}{\overset{\text{推广}}{\rightleftharpoons}}$ **柯西中值定理**

四、典型题（有关中值问题的题类）

运用中值定理的原则

如果要解决的问题中有未知的 ξ

首先应先分析题目中$f(x)$的条件，

如仅有连续条件，那么只能用闭区间上连续函数的性质

如有可导条件，微分中值定理一定会用到，

如果给出$f(x)$二阶可导条件

往往要对$f(x)$利用两次罗尔（或拉氏定理）

如果题目中找两个点

往往应该两次应用中值定理

例1 设函数$f(x)$可导，证明在$f(x)$的两个零点之间必有

$f(x)+xf'(x)$的零点

分析: $f(x)$的两个零点分别是 x_1, x_2 即$f(x_1)=f(x_2)=0$

由结论可知, 只需证存在ξ, $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

猜想 $[xf(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

设 $F(x)=xf(x)$

验证 $F(x)$在以x_1和x_2为端点的闭区间上

满足罗尔定理条件.

例2 设$f(x)$在 $[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$

证明：在$(0,1)$内至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\tan(\xi)}$

分析: 考虑是哪个函数在ζ的导数

由结论可知, 只需证

$$\sin\xi\cdot f'(\xi)+\cos\xi\cdot f(\xi)=0$$

猜想 $[f(x)\sin x]'\big|_{x=\xi}=0$

设 $F(x)=f(x)\sin x$

验证 $F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件.

例3 设$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)=0$,

$g'(x)\neq 0$ 证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

分析: 考虑是哪个函数在 ζ 的导数

由结论可知, 只需证

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

想不出

要证的结论改为 $H(\xi)f'(\xi)+H(\xi)f(\xi)g'(\xi)=0$

$H(x)$应满足 $H'(x)=H(x)g'(x)$ 想到 $H(x)=e^{g(x)}$

设 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$

验证 $F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理条件.

例4 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=f(1)=0$,

$f(\frac{1}{2})=1$,试证：(1)$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使$f(\eta)=\eta$

(2)对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$,使$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$

证： (1)令 $\varphi(x)=f(x)-x$

在$[\frac{1}{2},1]$上连续 $\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},\varphi(1)=-1$

由零点定理 $\exists\eta\in(\frac{1}{2},1),\varphi(\eta)=0$

例4 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 试证：(1)$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使$f(\eta)=\eta$

(2)对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$, 使$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$

证: (2)分析 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)-1=0$

想不出

$$(f(x)-x)'-\lambda(f(x)-x)\Big|_{\xi}=0$$

$$\underline{H(x)}\,\underline{(f(x)-x)'}-\lambda\underline{H(x)}\,\underline{(f(x)-x)}\Big|_{\xi}=0$$

$H(x)$应满足$H'(x)=-\lambda H(x)$ **想到** $H(x)=e^{-\lambda x}$

设 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

验证 $F(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理条件.

例5 证明方程$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$至少有一个小于1 的正根

分析 若用零点定理 $F(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$

$F(0)=-(a+b+c)$，$F(1)=3a+2b+c$符号不能确定

证明 令 $G(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$

$G(x)$在$[0,1]$连续,$(0,1)$可导,$G(0)=G(1)$

由罗尔定理 $\exists\xi\in(0,1)$ 使$G'(\xi)=0$

例6 若$f(x)$在(a,b)具有二阶导数,且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ 其中 $0<x_1<x_2<x_3<b$, **证明：在**(x_1,x_3)内至少有一点ξ 使得 $f''(\xi)=0$

证明 $f(x)$在$[x_1,x_2]$上应用罗尔定理

$$\exists\xi_1\in(x_1,x_2), f'(\xi_1)=0$$

$f(x)$在$[x_2,x_3]$上应用罗尔定理

$$\exists\xi_2\in(x_2,x_3), f'(\xi_2)=0$$

$f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)\ ,f''(\xi)=0$$

例7 讨论方程 $e^x - x^2 - 3x - 1 = 0$ 实根的个数及所在区间

解 先找根，$x_1=0$是方程的一个实根

设$f(x) = e^x - x^2 - 3x - 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 可取足够大$x_0>0$使$f(-x_0)<0$

$f(-1) = e^{-1} + 1 >$

在$(-x_0,-1)\subset(-\infty$

同样$f(1)=e-5<0$

又$f'''(x) = e^x > 0$

若有四个根

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$$

$$f''(\xi_4) = f''(\xi_5) = 0$$

$$f'''(\xi_6) = 0$$

与$f'''(x) > 0$矛盾

例7 讨论方程$e^x - x^2 - 3x - 1 = 0$实根的个数及所在区间

解 先找根，x_1=0是方程的一个实根

设$f(x) = e^x - x^2 - 3x - 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 可取足够大x_0>0,使$f(-x_0)$<0

$f(-1) = e^{-1} + 1 > 0$ 由零点定理知，

在$(-x_0,-1) \subset (-\infty,-1)$内存在方程的一个根$x_2$,

同样$f(1)=e-5<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 在$(1,+\infty)$内有一根x_3

又$f'''(x) = e^x > 0$ 知$f(x)$=0最多有三个实根

所以$f(x)$=0只有三个实根

例8 **证明当$x>0$时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$**

证 $\ln(1+x)$在$[0,x]$上应用拉格朗日定理

$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}(x-0),\ (0<\xi<x)$$

$$\text{即}\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},\ (0<\xi<x)$$

$$\because 0<\xi<x,\quad \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1,$$

$$\therefore \frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

$$\text{即}\ \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

例9 设$a>b>0$,证明当$x>0$时, $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$

证 $\ln x$在$[b,a]$上应用拉格朗日中值定理

$$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b),\ (b<\xi<a)$$

$$\text{即}\ln\frac{a}{b}=\frac{a-b}{\xi},\ (b<\xi<a)$$

$$\because b<\xi<a,\quad \frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$$

例10 当$x>0$时，求证$\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$

分析 $\ln\frac{1+x}{x}=\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi},(x<\xi<1+x)$

$\because x<\xi<1+x,\quad \frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}$

$$\therefore \ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$$

例11 设$f(x)$在$[a,b]$$(a>0)$上连续,在$(a,b)$内可导,且 $f(a)=f(b)=1$,证明存在$\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\frac{\xi}{n}f'(\xi)$$

分析 $n\eta^{n-1}=nf(\xi)\xi^{n-1}+f'(\xi)\xi^{n}$

$$\Longleftrightarrow (x^n)'|_{x=\eta}=(f(x)\cdot x^n)'|_{x=\xi}$$

证 令$F(x)=x^n$在$[a,b]$上应用拉格朗日定理

$$\frac{b^n-a^n}{b-a}=f'(\eta)=n\eta^{n-1}$$

令$G(x)=f(x)x^n$在$[a,b]$上应用拉格朗日定理

$$\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{b-a}=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)$$

由$f(a)=f(b)=1$,命题得证

例12 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)可导,且$0<a<b$,

证明在(a,b)内至少存在一点ξ使

$$f(b)-f(a)=\xi^2 f'(\xi)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

分析 $$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$f(x)$和x^2在$[a,b]$上应用柯西中值定理

例13 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)可导, $a>0$,则存在

$$\xi,\eta\in(a,b)\text{使 } f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

分析 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta) \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

令$F(x)=x^2$应用柯西

证明 由拉格朗日中值定理

$$\exists\xi\in(a,b),\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

由柯西中值定理

$$\exists\eta\in(a,b),\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

$$\Longrightarrow f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

例14 如果$x_1x_2>0$ 证明

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)\quad \xi\text{在}x_1,x_2\text{之间}$$

分析

$$\frac{x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\left.\frac{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right|_{\xi}=\left.\frac{\dfrac{e^x x-e^x}{\cancel{x^2}}}{-\dfrac{1}{\cancel{x^2}}}\right|_{\xi}$$

同除x_1x_2

应用柯西

$$=e^{\xi}(1-\xi)$$

费马(1601 – 1665)

法国数学家, 他是一位律师, 数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛, 博览群书并善于思考, 在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论, 他提出的费马大定理:

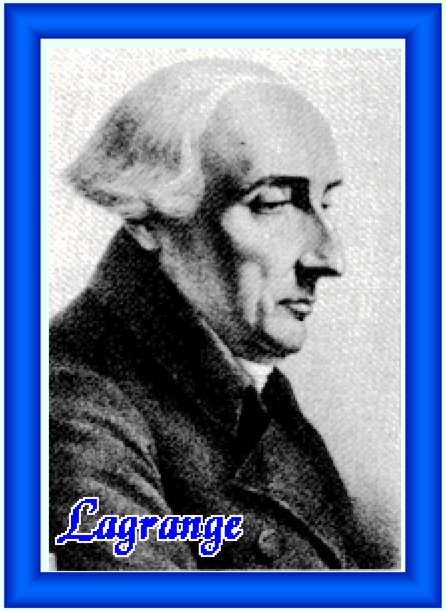
"当$n > 2$时,方程 $x^n + y^n = z^n$ 无整数解"

历经358年, 直到1993年才由美国普林斯顿大学的安德鲁.怀尔斯教授经过十年的潜心研究才得到解决 . 费马引理是后人从他研究解决最值的方法中提炼出来的.

罗尔(1652 – 1719)

法国数学家.罗尔在数学上的成就主要是在代数方面，专长于丢番图方程的研究.1690年他的专著《代数学讲义》问世，在这本书中他论述了仿射方程组，并使用欧几里得法则系统地解决了丢番图的线性方程问题. 罗尔于1691年在题为《任意次方程的一个解法的证明》的论文中指出了：在多项式方程$f(x)= 0$的两个相邻的实根之间，方程$f'(x)=0$至少有一个根. 1846年，尤斯托·伯拉维提斯（Giusto Bellavitis）将这一定理推广到可微函数，即如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且在这个区间内部$f'(x)$存在，又$f(a)=f(b)$，则在$[a, b]$内至少有一点c，使$f'(c)= 0$.尤斯托·伯拉维提斯还把此定理命名为罗尔定理.

拉格朗日 (1736 – 1813)



法国数学家. 他在方程论, 解析函数论, 及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都可直接或间接地追溯到他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷.其中最重要的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 . 他是经典分析的奠基人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析数学的发展.