第二章 导数与微分

- §1 导数概念
- §2 函数的求导法则
- §3 高阶导数
- §4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
- §5 函数的微分

第二章

第四节

隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

内容

一、隐函数的导数

二、由参数方程所确定的函

数的导数

一、隐函数的导数

显函数 给了x,直接得到y的函数,如 $y = f(x)$

1 隐函数 如果变量x和y满足一个方程 $F(x,y)=0$,在一定条件下,当x取某区间内任一值时总有唯一的y与之对应,称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y = f(x)$

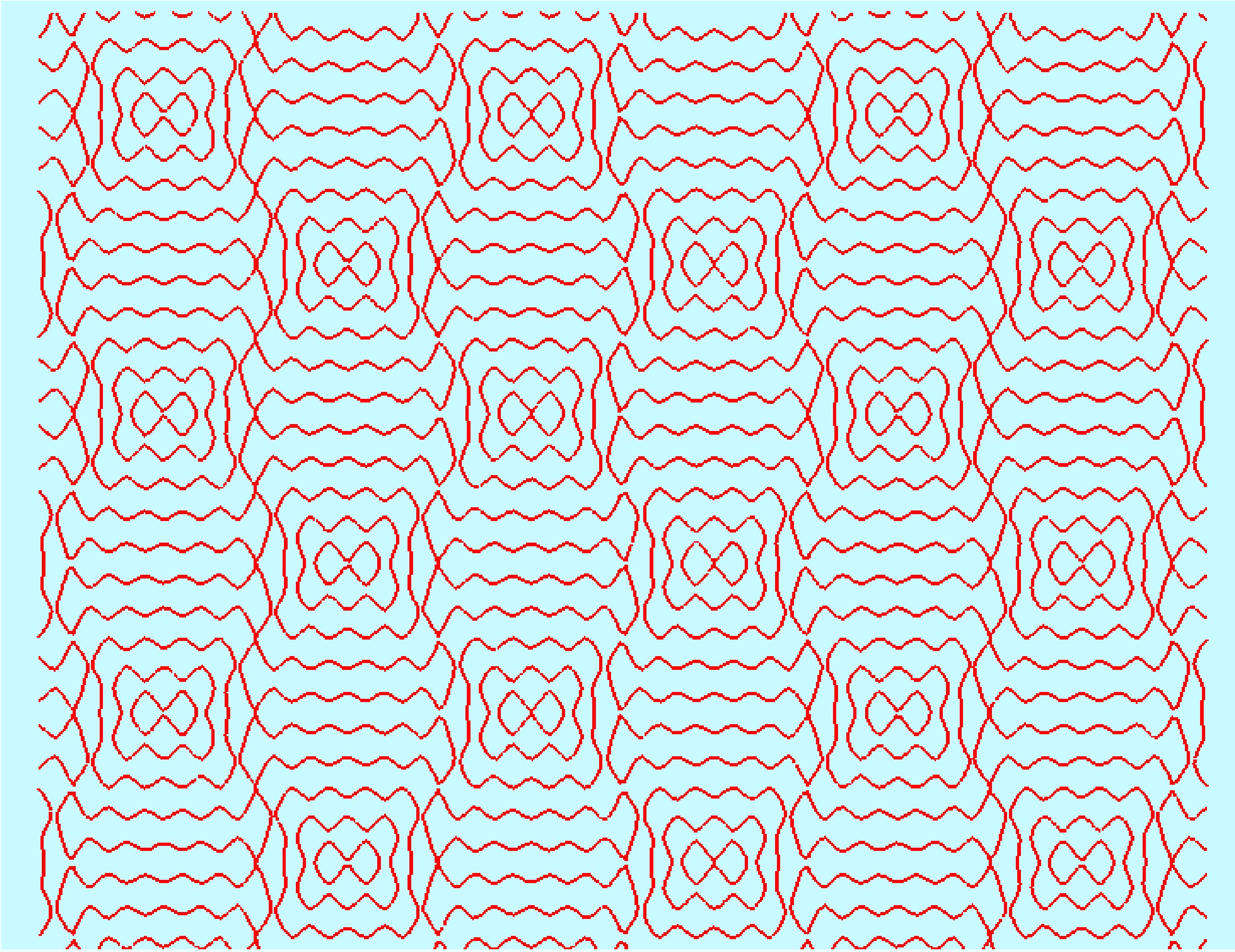
例如, $x - y^3 - 1 = 0$ 可确定显函数 $y = \sqrt[3]{x-1}$

$y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 可确定 y 是 x 的函数,

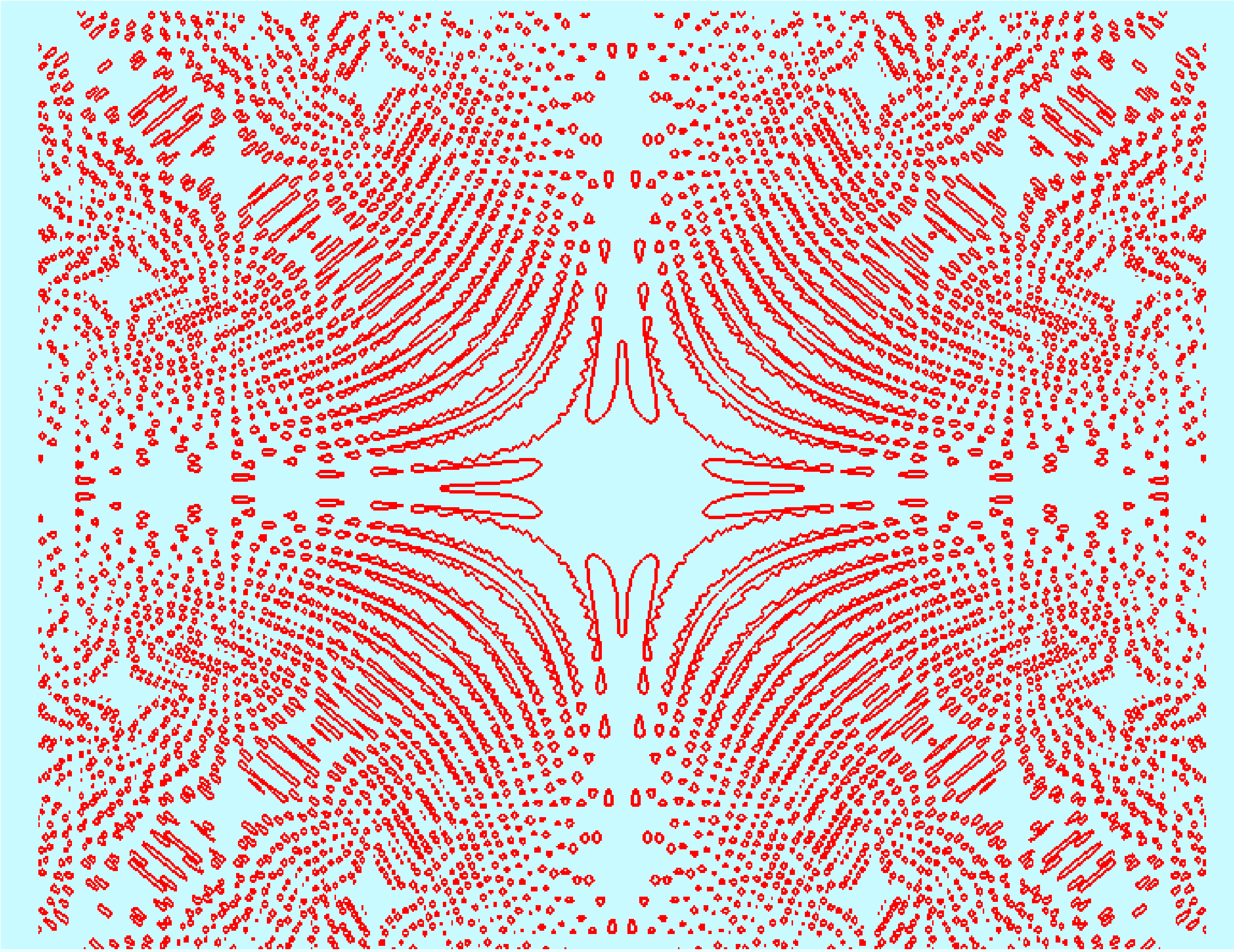
但此隐函数不能显化.

隐函数的图形

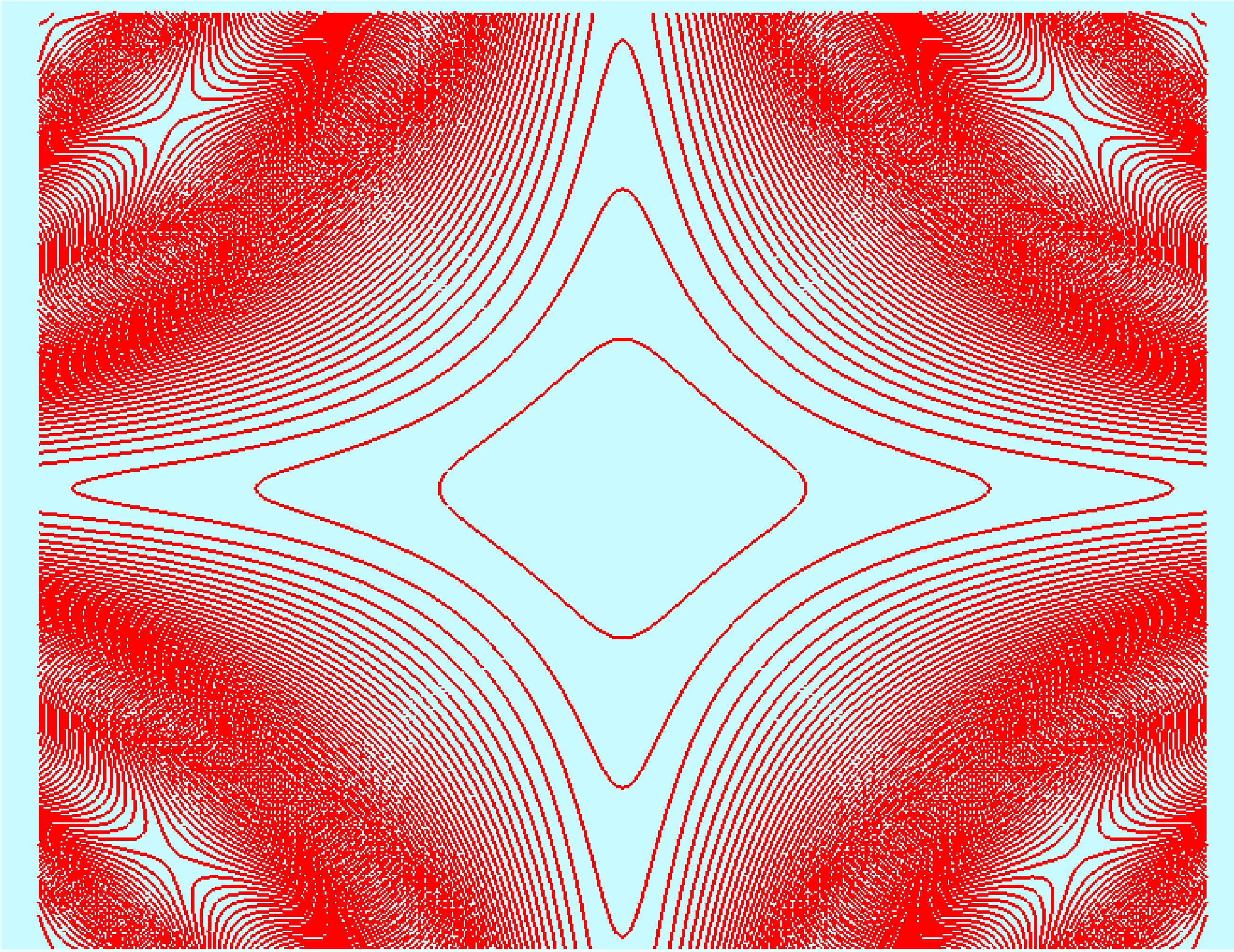
二元方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的一元隐函数的图形比一元显函数的图形更复杂更漂亮.



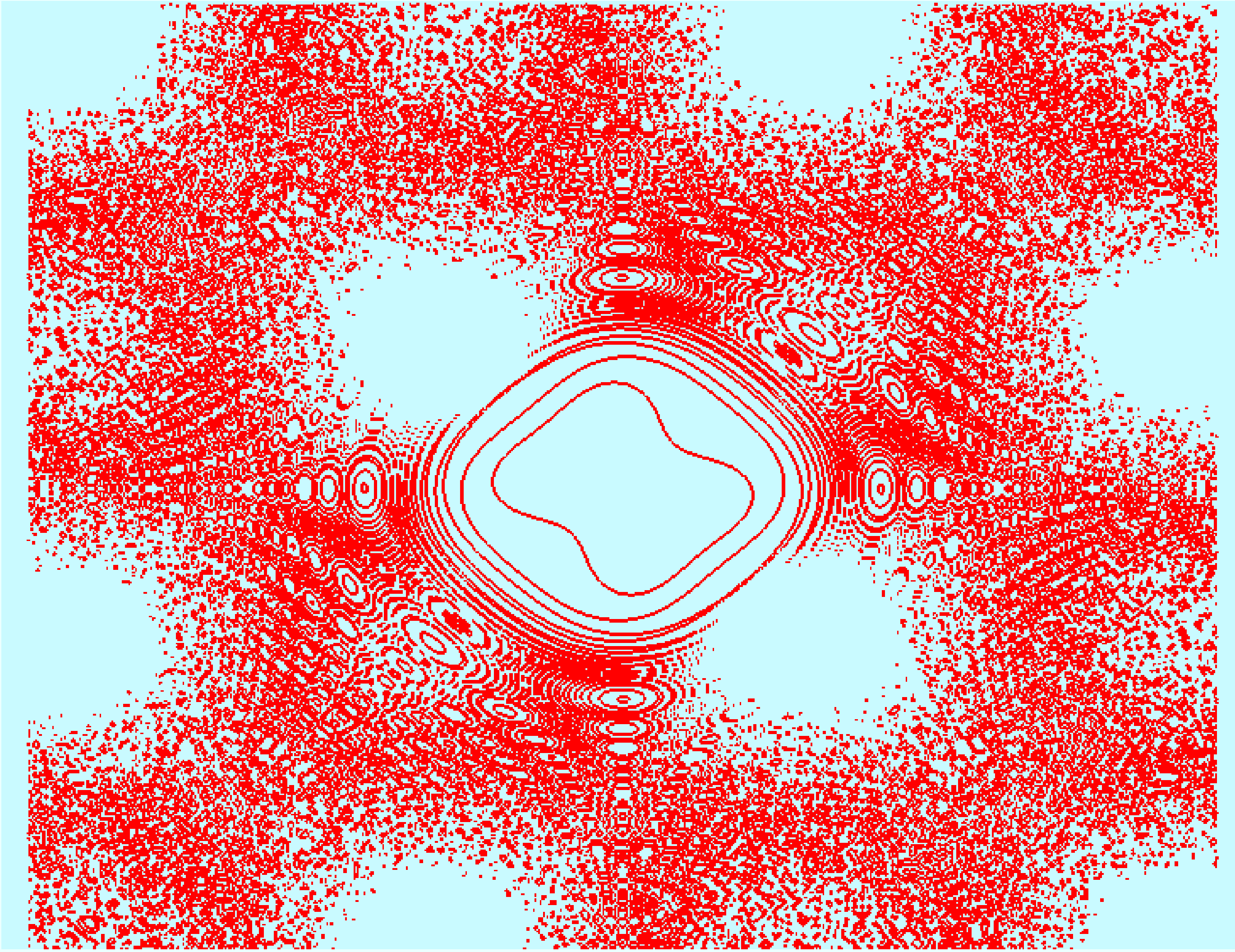
$$\sin^2 5x - \sin^2 2y + \sin x \sin 5y = 0$$



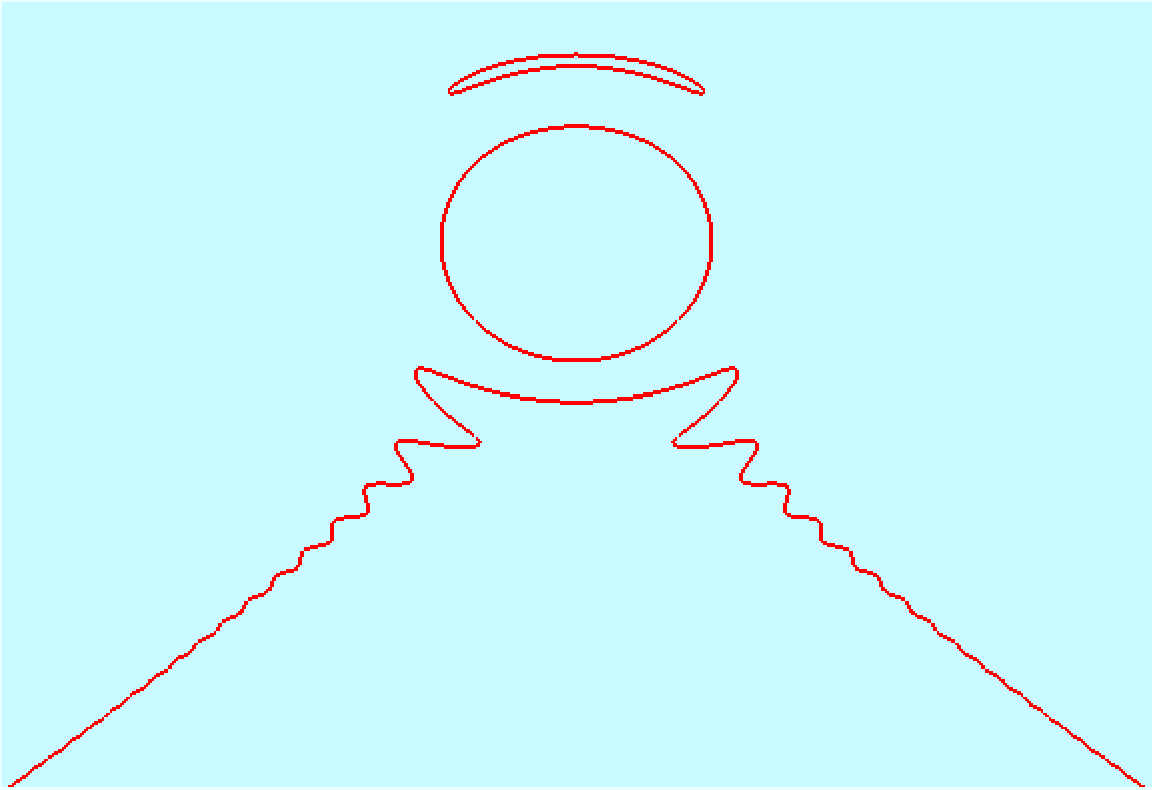
$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2xy}{\sin 40xy} = 1$$



$$\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}+0.1x^2y^2\right)=0$$



$$\sin\left((x^2+y^2)^3-(x^2-y^2)^2\right)+\sin x\sin y=0.25$$



$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 - 12\sin(3x^2 + 3y^2) = 0$$

怎么对隐函数求导呢？

考虑求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

解 方程两边同时对x求导,这里$y=y(x)$

$$\frac{d}{dx}(e^y + xy - e) = 0$$ 由复合函数求导法则

$$e^y \cdot y' + y + xy' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{-y}{x + e^y} \quad (x + e^y \neq 0)$$

2 隐函数求导法则

由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = f(x)$ 只须对恒等式 $F(x, f(x)) = 0$ 两边对x求导,并解出 $f'(x)$或y',它是x,y的函数,有时利用$F(x,y)=0$化简y',此时答案y'形式有所不同

3 典型题　①隐函数求一阶导数

例 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上点 $P(1,\frac{3}{2})$ 处的切线方程和法线方程

解: 方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{3}y\cdot y' =0 \Rightarrow y'=-\frac{3x}{4y}$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=1\\ y=\frac{3}{2}}} =-\frac{1}{2}$$

切线方程为　$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$

法线方程为　$y-\frac{3}{2}=2(x-1)$

3 典型题 ①隐函数求一阶导数

例 设函数$y=y(x)$由方程 $x^3+y^3+3xy-6x-7=0$ 确定,求$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2}$

解 方法一 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2}=\dfrac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}}$ 方程两边对 x 求导

$$3x^2+3y^2\cdot y'+3y+3xy'-6=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2-x^2-y}{y^2+x} \quad \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=-1\\ y=2}}=-\frac{1}{3} \quad \therefore \left.\frac{dx}{dy}\right|_{\substack{x=-1\\ y=2}}=-3$$

方法二 方程两边对 y 求导

$$3x^2\cdot\frac{dx}{dy}+3y^2+3\frac{dx}{dy}\cdot y+3x-6\frac{dx}{dy}=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{y^2+x}{2-x^2-y}\Rightarrow\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2}=-3$$

3 典型题 ②隐函数求二阶导数

例 求由方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

解 方程两边对 x 求导

$$1 - y' + \frac{1}{2}\cos y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2}{2 - \cos y}$$

对x再次求导

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2 \cdot \sin y \cdot y'}{(2-\cos y)^2} = \frac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2} \cdot \frac{2}{2-\cos y} = \frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$$

3 典型题 ②隐函数求二阶导数

例 设函数$y=y(x)$由方程 $e^{y}+xy=e$ 所确定,求 $y''(0)$

解 $x=0,y=1$ 两边对 x 求导

$$e^{y}\cdot y'+y\ \ +x\cdot y'\ =0$$

对x再次求导

$$e^{y}\cdot(y')^{2}+e^{y}\cdot y''+y'+y'+x\cdot y''=0$$

代入$x=0,y=1$ $\Rightarrow y'(0)=-\dfrac{1}{e}$

$$\Rightarrow y''(0)=\frac{1}{e^{2}}$$

3 典型题 ③对数求导法

如果一个函数是幂指函数$f(x)^{g(x)}$或是连乘连除以及根式乘幂等形式,一般可先取对数,再运用隐函数求导法,在有加减运算时慎用

例 求$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$的导数

$$\boxed{(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}}$$

解 两边取对数

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

对 x 求导 $$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

3 典型题 ③对数求导法

如果一个函数是幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 或是连乘连除以及根式乘幂等形式,一般可先取对数,再运用隐函数求导法,在有加减运算时慎用

例 求 $y = x^{\sin x} \ (x > 0)$ 的导数 .

解: 两边取对数 , 化为隐式

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

两边对 x 求导

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x \ + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \quad y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

3 典型题 ③对数求导法

如果一个函数是**幂指函数** $f(x)^{g(x)}$ 或是**连乘连除**以及**根式乘幂**等形式,一般可先取对数,再运用隐函数求导法,在有加减运算时慎用

例 求由方程 $x^y = y^x + 10^{x^2}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数

注意到 不能用对数求导法

3 典型题

④利用指数恒等式 $a = e^{\ln a}$ 适用于幂指函数

例 求由方程 $x^y = y^x + 10^{x^2}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数

注意到 不能用对数求导法

3 典型题

④利用指数恒等式　$a = e^{\ln a}$ 适用于幂指函数

例 求由方程$x^y = y^x + 10^{x^2}$所确定的函数$y=y(x)$的导数

解 $e^{y\ln x} = e^{x\ln y} + 10^{x^2}$

两边对 x 求导

$$e^{y\ln x}(y'\ln x + \frac{y}{x}) = e^{x\ln y}(\ln y + \frac{x}{y}\cdot y') + 10^{x^2}\cdot\ln 10\cdot 2x$$

同乘以xy,得　$$y' = \frac{xy^{x+1}\ln y - y^2x^y + 2x^2y\cdot 10^{x^2}\cdot\ln 10}{yx^{y+1}\ln x - x^2y^x}$$

3 典型题

④利用指数恒等式　$a = e^{\ln a}$ 适用于幂指函数

例 求$y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$的导数 .

解：　$y = e^{\sin x \cdot \ln x}$

两边对 x 求导

$$y' = e^{\sin x \cdot \ln x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

即$y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x})$

3 典型题

③对数求导法

如果一个函数是幂指函数$f(x)^{g(x)}$或是连乘连除以及根式乘幂等形式,一般可先取对数,再运用隐函数求导法,在有加减运算时慎用

例 求$y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$的导数 .

解：两边取对数 , 化为隐式

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

两边对 x 求导

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \quad y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

二、由参数方程确定的函数的导数

1定义 若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定y与x间的函数关系, 称此关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数

怎么对参数方程求导?

若$x = \varphi(t)$单调连续且反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$与$y = \psi(t)$能复合,

那么消t后参数方程确定的函数可以看成$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \psi'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \boxed{\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

2 参数方程求导法则

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$在$(\alpha, \beta)$上均可导且$x'(t) \neq 0$,则由参数方程确定的函数$y = y(x)$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cancel{=} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'$$

二阶求导

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y' = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

3典型题　①参数方程求二阶导数

例求由参数方程$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\arcsin t \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\bigg/\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{t}$$

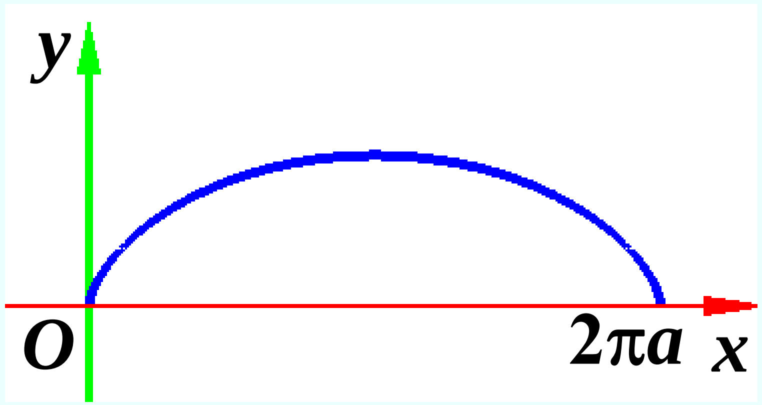
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{1}{t^2}\bigg/\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$$

3典型题 ①参数方程求二阶导数

例 计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

摆线　半径是a的圆沿直线滚动时,其上定点的轨迹.

方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$



周期 $T = 2\pi a$

一拱长 $8a$

一拱面积 $3\pi a^2$

3典型题 ①参数方程求二阶导数

例 计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数

$y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$$

3典型题 ②隐函数参数方程求导

例 设$y=y(x)$由参数方程 $\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1 \\ t\sin y - y + \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$ 所确定,求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

解 参数方程两边对t求导

$$\begin{cases} e^x \cdot \dfrac{dx}{dt} = 6t + 2 \\ \sin y + t\cos y \cdot \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{-x}(6t+2) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\sin y}{1 - t\cos y} \end{cases}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^x \sin y}{(6t+2)(1-t\cos y)}\right|_{\substack{t=0 \\ x=0 \\ y=\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}$$