选课序号

专业班级：

姓名：

学号

大连海事大学　《高等数学》试卷 B1 答案

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	得分
得分									

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%；本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%。

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1.方程 $y'=\dfrac{1}{-2x+e^{-2y}}$ 的通解为 $\underline{x=e^{-2y}(y+C)}$

装

2. 设 L 为连接 $(2,0)$ 及 $(0,2)$ 两点的直线段，则 $\oint_L (x+y)ds=$ $\underline{4\sqrt{2}}$

3.两平行平面 $x-2y+2z-45=0, x-2y+2z+18=0$ 间的距离为 $\underline{21}$

4. 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}$，单位向量 $\mathbf{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1,1,0\}$，则

$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{(1,1,1)}=$ $\underline{\sqrt{2}}$.

订

5.将 $\int dx\int_x f(x,y)dy$ 化为极坐标系下的二次积分为

$$\underline{\int_{\arctan\frac{1}{16}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}}^{\frac{4}{\cos\theta}} \rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho}$$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 利用变量代换 $u=x, v=\dfrac{y}{x}$，可以把方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化简为（ D ）

(A) $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(B) $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

线

(C) $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(D) $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

2. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$，Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分，则下列等式正确的是（ C ）

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1} y\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S=3\iint\limits_{\Sigma_1} \mathrm{d}S$

3. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在

$x=4\pi$ 处收敛于（ B ）

（A）$4\pi^2$ （B）$2\pi^2$

（C）0 （D）π^2

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=$（ （C） ）

（A）$\sin 2$ （B）$\sin 3$

（C）$\sin 1$ （D）$\sin 4$

5.设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=2$ 处（ A ）

（A）发散 （B 绝对收敛

（C）条件收敛 （D）敛散性不定

三、（8 分）设 $z=f(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则, $F_x(x,y,z)=\frac{1}{z}, F_z(x,y,z)=-\frac{x+z}{z^2}$ ……………………2 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

$$=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z}{x+z}$$ ……………………2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x+z}\right)$$

$$=\frac{(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-z\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+z)^2}$$ ……………………2 分

$$=\frac{-z^2}{(x+z)^3}$$ ……………………2 分

四、计算下列各题（每题 8 分，共 16 分）

选课序号

专业班级：

姓名：

分

学号

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(y-x)dxdy$，$D:-2\le x\le 2,-2\le y\le 2$.

解：将积分区域 D 两部分：$D_1: y>x$，$D_2: y<x$ ....2 分

$I=\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(y-x)dxdy=\iint\limits_{D_1}dxdy-\iint\limits_{D_2}dxdy$ ....2 分

$=\int_{1} dx\int dy-\int_{1} dx\int_{1} dy$ ....2 分

$=0$ ....2 分

装

2. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$，绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=1$ 和 $z=7$ 所围成的区域

解：Ω 空间区域为：$\begin{cases}x^2+y^2=2z\\1\le z\le 4\end{cases}$， ....2 分

$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$ ....2 分

订

$=\int^{7} dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy$ ....2 分

$=\int^{7} dz\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\sqrt{2z}}\rho^3 d\rho$

$=228\pi$ 2

五、计算下列各题（每题 8 分，共 16 分）

线

1. 计算 $\oint_L \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $2x^2+y^2-4x=0$ 的正向.

解：L：$(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2=1$ 包含了 $(1,0)$ 点，

$P(x,y)=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$，则

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ....2 分

取以 $(1,0)$ 为圆心，$r\,(r<1)$ 为半径的圆，

则圆的参数方程 $L_1: \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} (0 \le \theta \le 2\pi)$，方向取顺

时针方向.……………………………………………………………………………………2 分

所以由格林公式

$$\oint_{l} \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\oint_{l+l_1} \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2} - \oint_{l_1} \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy - \oint_{l_1} \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2} \text{……………………2 分}$$

$$=0-\oint_{l_1} \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\oint_{l_1^-} \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{-r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} d\theta = -2\pi \text{……………………2 分}$$

2. 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dxdz + 3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \ge 0)$ 的上侧.

解　作辅助平面 $\sum_1: z = 0,\ x^2+y^2 \le 1$，则平面 $\sum_1$ 与曲面 $\sum$ 围成空间有界闭区域 +2

Ω，则

$$\iint\limits_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dxdz + 3(z^2-1)dxdy,$$

$$= \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dxdz + 3(z^2-1)dxdy - \iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dxdz + 3(z^2-1)dxdy \text{ .....2 分}$$

由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dxdz + 3(z^2-1)dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 6(x^2+y^2+z)dxdydz \text{……………………2 分}$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} r(z+r^2)dr$$

$$= 12\rho \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r(1-r^2)^2 + r^3(1-r^2)\right]dr$$

$$= 2\pi \text{……………………2 分}$$ [illegible]

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dxdz + 3(z^2-1)dxdy$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)dxdy=3\pi,$$

所以 $I=-\pi$ ……………………………………………2 分

六、计算下列各题（每题 8 分，共 16 分）

1.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}x^{2n-1}$ 的收敛区间

解：由

装

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left|x^{2n+1}\right|}{(n+1)2^{n+1}}}{\dfrac{\left|x^{2n-1}\right|}{n\cdot 2^n}}=\frac{|x|^2}{2}<1$$ ……………………2 分

$\Rightarrow |x|<\sqrt{2}$ ……………………………………………2 分

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot(\pm 1)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛。2 分

订

所以原级数的收敛区间为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。……………………………………2 分

2.将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数.

解：因

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)'=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

……………………………………………2 分

线

又 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，两边积分得

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}dt=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

……………………………………………2 分

因为 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 连续，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，……2 分

所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$ ……………………2 分

七、(10 分)求微分方程 $y''-y'-2y=3e^{-x}$ 在原点处与 $y=x$ 相切的特解.

解：特征方程 $r^2-r-2=0$ 的根为 $r_1=2, r_2=-1$, ……………………2 分

所以对应的齐次方程的通解

为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x},$$ ……………………2 分

设特解为 $y^*=bxe^{-x}$,代入原方程,得 $b=-1$,所以 $y^*=-xe^{-x}$,因此,方程通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-xe^{-x},$$ ……………………2 分

由题设知初始条件为 $y(0)=0, y'(0)=1$, ……………………2 分

故得

$C_1+C_2=0, 2C_1-C_2=2$,所以 $C_1=\frac{2}{3}, C_2=-\frac{2}{3}$,故所求特解

$$y=\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{2}{3}e^{-x}-xe^{-x}$$ ……………………2 分

八、（4 分）设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导，且恒有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq 0$$

求证 $f(x,y)$ 必在 D 的边界上取最大值和最小值.

证明：用反证法.假设 $f(x,y)$ 不在 D 的边界上取最大值和最小值。由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导，所以 $f(x,y)$ 必在有界闭区域 D 上连续，由最值性定理知： $f(x,y)$ 必在 D 的内部取最值. ……………………2 分

不妨设 $f(x_0,y_0)=M=\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y), (x_0,y_0)\in D$ 内。

则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值，所以 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$.

选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装

订

线

$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$,因为

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq 0$。所以

$AC-B^2=-A^2-B^2<0$与$f(x_0,y_0)$为极大值矛盾，

故$f(x,y)$必在D的边界上取最大值和最小值……………………………………2分