

答案

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	卷面分
得分										

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%，本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%。

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

$$L_{\text{周}} = \pi D = 2\pi R$$

1. 设 L 是曲线 $x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ ，则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot ds = \frac{\pi}{2}$$

2. 设 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为

$$2x - y - z - 1 = 0$$

3. 设 $f(x, y)$ 为二元可微函数， $z = f(x^2, y^2)$ ，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \frac{\partial f}{\partial u} + y^2 \ln y \frac{\partial f}{\partial v}$$

4. 设一平面经过原点及 $(6, -3, 2)$ 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直，则此平面方程

$$2x + 2y - 3z = 0$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ 6A - 3B + 2C = 0 \\ 4A - B + 2C = 0 \end{cases}$$

5. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{4}{15}\pi$

$$\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr \sin \phi d\phi d\theta = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos \phi \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6}$$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 交换积分顺序： $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy = (A)$

$$(A) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-y} f(x, y) dx \quad (B) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-y} f(x, y) dx$$

$$(C) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-y} f(x, y) dx \quad (D) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-y} f(x, y) dx$$

2. 函数 $u = xy + yz + xz$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的梯度为 (B)

$$(A) 2i - 2j + 2k \quad (B) 2i + 2j + 2k \quad (C) 2i + 2j - 2k \quad (D) 2i + j + 2k$$

$$(y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

3. 设 $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S\left(-\frac{9}{4}\right) = (C)$

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

4. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分, 则下列等式正确的是 (B)

- (A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ (B) $\iint_{\Sigma} x^2 dS = 8 \iint_{\Sigma_1} x^2 dS$
(C) $\iint_{\Sigma} xy dS = 3 \iint_{\Sigma_1} xy dS$ (D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 2 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=2$ 处收敛, 则数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ (D)

- (A) 发散 (B) 敛散性不定 (C) 条件收敛 (D) 绝对收敛

三、计算 (每题 8 分, 共 16 分)。

1. 设 $z = e^{xy}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: 方程变形为 $z = xe^{yz}$.

方程两端分别对 x, y 求偏导数, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{yz} = ze^{yz} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x(1+z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{yz} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{1+z} \quad (2)$$

(1) 式两端同时对 y 求偏导数, 并将 (2) 式代入整理有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} x(1+z) - xz \frac{\partial z}{\partial y}}{[x(1+z)]^2} = \frac{z}{x(1+z)^3}$$

2. 求二元函数 $f(x, y) = y^2(2+x^2) + x \ln x$ 的极值.

$$\text{解 } f_x(x, y) = 2xy^2 + 1 + \ln x, f_y(x, y) = 2(x^2 + 2)y$$

选课序号

专业班级

姓名

学号

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \text{ 解得唯一驻点 } (\frac{1}{e}, 0) \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } A = f''_{xx}(\frac{1}{e}, 0) = (2y^2 + \frac{1}{x})|_{(\frac{1}{e}, 0)} = e,$$

$$B = f''_{xy}(\frac{1}{e}, 0) = 4xy|_{(\frac{1}{e}, 0)} = 0,$$

$$C = f''_{yy}(\frac{1}{e}, 0) = 2(x^2 + 2)|_{(\frac{1}{e}, 0)} = 2(\frac{1}{e^2} + 2).$$

$$\text{所以 } AC - B^2 = 2e(2 + \frac{1}{e^2}) > 0, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{且 } A > 0, \text{ 从而 } f(\frac{1}{e}, 0) \text{ 是 } f(x, y) \text{ 的极小值, 极小值为 } f(\frac{1}{e}, 0) = -\frac{1}{e}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{四、(本题 8 分) 计算 } I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + xye^{-x^2-y^2}) dx dy$$

$$\text{解: } f(x, y) = xye^{-x^2-y^2} \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数, 积分区域 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 关于 } y \text{ 轴对称,}$$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + xye^{-x^2-y^2}) dx dy, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

五、计算 (每题 8 分, 共 16 分)

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

$$\text{解: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, R=1, \text{ 收敛区间为 } -1 < x-2 < 1, \text{ 即 } 1 < x < 3.$$

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 当 $x=3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以原幂级数的收敛域为

$$1 \leq x < 3$$

3分

设原幂级数的和函数为 $S(x)$,

$$\text{则 } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^{n-1} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x} \quad (1 \leq x < 3), \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

两边同时求积分,得:

$$S(x) = -\ln(3-x) \quad (1 \leq x < 3), \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

2. 将函数 $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x} \right)'$$

$$\text{解: 因为 } \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2), \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

两边同时求导得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{2^{n+1}} \quad (-2 < x < 2) \dots\dots\dots 4 \text{分} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

六、(本题 10 分) 已知 $f(x)$ 具有一阶连续偏导数, $f(0)=1$, 试确定 $f(x)$, 使线积分

$$\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy \text{ 与路径无关.}$$

$$\text{解: 设 } P = [f(x) - e^x] \sin y, Q = -f(x) \cos y, \text{ 则 } \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = [f(x) - e^x] \cos y, \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -f'(x) \cos y \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

由曲线积分与路径无关的条件, 知:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\text{所以, } f'(x) + f(x) = e^x \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

解此微分方程, 得:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} (C + \int e^x e^{1-x} dx) \\ &= e^{-x} (C + \frac{1}{2} e^{2x}). \end{aligned}$$

$$\text{由 } f(0)=1, \text{ 知 } C = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

七、计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + 2)dydz + (y^3 + 2)dzdx + (z^3 + 2)dxdy$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧。(12 分)

解: 加辅助面 $\Sigma_1: z = 0 (x^2 + y^2 \leq R^2)$ 下侧, (2 分)

$$I_1 = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^3 + 2)dydz + (y^3 + 2)dzdx + (z^3 + 2)dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dxdydz \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R 3r^2 \cdot r^2 \sin \phi dr$$

$$= \frac{6}{5} \pi R^5 \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$I_2 = \iint_{\Sigma_1} (x^3 + 2)dydz + (y^3 + 2)dzdx + (z^3 + 2)dxdy$$

$$= -2 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} 1 dxdy$$

$$= -2\pi R^2 \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{6}{5} \pi R^5 + 2\pi R^2 = -2\pi R^2 \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

选课序号

专业班级

姓名

学号

装

订

线

八、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛半径、收敛域及和函数。(12分)

解：收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$ (2分)

当 $x-1=1, x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 收敛， (4分)

当 $x-1=-1, x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ 发散 (6分)

所以，幂级数的收敛域为 $(0,2]$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$ ，则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} = \frac{1}{x}$ (10分)

$$\int_1^x S'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

有 $S(x) = \ln x, 0 < x \leq 2$ (12分)

九、计算 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{3f(x)+2f(y)}{f(x)+f(y)} dx dy$ ，其中 $f(u)$ 是任意正值连续函数。(6分)

解：由轮换对称性，可得

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{3f(x)+2f(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{3f(y)+2f(x)}{f(x)+f(y)} dx dy \dots\dots\dots (2分)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{3f(x)+2f(y)}{f(x)+f(y)} dx dy + \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{3f(y)+2f(x)}{f(x)+f(y)} dx dy \right) \dots\dots\dots (4分)$$

$$= \frac{5}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 1 dx dy$$

$$= \frac{5}{2} \pi R^2 \dots\dots\dots (6分)$$