高等数学期末B试卷

一、选择题(每小题 4 分，共 40 分)

1. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$， $g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 【 】

A.低阶无穷小　　B.高阶无穷小

C.等价无穷小　　D.同阶但非等价的无穷小

2. 当 $x\to 1$ 时， $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为 【 】

A. 2　　B. 0　　C. ∞　　D. 不存在但不是 ∞

3. 设 $f(x)$ 是不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 【 】

A. 在 $x=0$ 处无极限　　B. $x=0$ 为其可去间断点

C. $x=0$ 为其跳跃间断点　　D. $x=0$ 为其第二类间断点

4．设 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ ，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ 【 】

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ 【 】

A. 0　　B. 2　　C. ln2　　D. ln3

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}},x>0\\ x^2g(x),x\le 0\end{cases}$ ，其中 $g(x)$ 为有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 【 】

A. 极限不存在　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续，但不可导　　D. 可导

7. 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有 【 】

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

8. 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是 【 】

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

9. 设 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ 【 】

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. ∞

10. 设 $f(u)$ 可导， $y=f(x^2)$ 在 $x_0=-1$ 处取得增量 $\Delta x=0.05$ 时，函数增量 Δy 的线性部分为 0.15，则 $f'(1)=$ 【 】

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

二、填空题（每空 4 分，共 24 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^{\alpha}}=\beta\neq 0$，则常数 $\alpha=$___ ， $\beta=$____ .

2. 设 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，则常数 $a=$______.

3． $x=1$ 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的第______类间断点.

4． $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的单调递增区间为______，函数对应曲线上的拐点为______.

5. 设 $y=f(\mathrm{e}^x)$， $f'(x)=\arctan x$ ，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$________.

6. 设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}+2x^2\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$______.

三、解答题（每小题 6 分，共 36 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

2.设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\sin(xy)=0$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(n)}(0)$.

4. 已知 $\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\tan^2 t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}(x>0)$，

（1）求 $f(x)$ 的表达式；　（2）讨论 $f(x)$ 的连续性和可导性.

6. 证明：当 $x>0$ 时，$\sin x+\cos x>1+x-x^2$.