第 8 届全国大学生数学竞赛（非数学类）预赛参考解答

（2016 年 10 月）

一 填空题（满分 30 分，每小题 5 分）

1. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$ =___________。

解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ 。

2. 若 $f(1)=0$， $f'(1)$ 存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

解：$\mathrm{I}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

所以

$$\mathrm{I}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$
$$=3f'(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\lim_{x\to 0}(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2})$$
$$=3f'(1)(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}f'(1)$$

3. 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(e^x y^2)$, 若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, 求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式.

解：由题设得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x y^2)e^x y^2=f(e^x y^2)$. 令 $u=e^x y^2$, 得到当 $u>0$ 有

$$f'(u)u=f(u)，\ 即\ \frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}，\ 从而\left(\ln f(u)\right)'=(\ln u)'.$$

所以有 $\ln f(u)=\ln u+c_1$，$f(u)=cu$. 再而由初始条件得 $f(u)=2u$.

故当 $x>0$ 有 $f(x)=2x$.

4. 设 $f(x)=e^x\sin 2x$，求 $f^{(4)}(0)$。

解。由 Taylor 展式得

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right]$$

所以 $f(x)$ 展式的 4 次项 $\frac{-1}{3!}(2x)^3\cdot x+\frac{2}{3!}x^4=-x^4$，从而 $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-1$，故 $f^{(4)}(0)=-24$。

5. 求曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

解。该曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面的法向量为 $(x_0,2y_0,-1)$。又该切平面于已知平面平行，

从而两平面法向量平行，故 $\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}$。

从而 $x_0=2, y_0=1$，得 $z_0=\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=3$，从而所求切平面为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,$$

即 $2x+2y-z=3$。

二（满分 14 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$，$0<f'(x)<1$。试证当 $a\in(0,1)$，

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2>\int_0^a f^3(x)dx。$$

证：设 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$，**则** $F(0)=0$ **且要证明** $F'(x)>0$.

设 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$， **................................3'**

则 $F'(x)=f(x)g(x)$， **... ....5'**

由于 $f(0)=0, f'(x)>0$，**故** $f(x)>0$，**从而**

只要证明 $g(x)>0$，$x>0$。 **而** $g(0)=0$，**我们只要证明** $g'(x)>0, 0<x<a$。

而 $g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$，得证。 ....6'

三（满分 14 分）某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2 \le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

解. 由于 $\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le 1$，是一个椭球， ....2'

其体积为$V=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$. 作变换$u=x-\frac{1}{2}$，$v=y-\frac{1}{2}$, $w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$，将$\Omega$变为单位球

$\Sigma: u^2+v^2+w^2 \le 1$，而$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\sqrt{2}$，故$dudvdw=\sqrt{2}dxdydz$ 且

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Sigma}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]dudvdw. \quad \text{.............................4'}$$

因一次项积分都是0，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Sigma}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw+A,$$

其中$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)V=\frac{\pi}{2}$. ....4'

记$I=\iiint\limits_{\Sigma}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\theta dr=\frac{4\pi}{5}$.

由于u^2, v^2, w^2在Σ上积分都是$I/3$，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+A=\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\pi \quad \text{.............................4'}$$

四（满分 14 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$。证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}。$$

证明 将区间$[0,1]$ n等分，设分点$x_k=\frac{k}{n}$，则$\Delta x_k=\frac{1}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x_k\right) \quad \text{......................3'}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]dx\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right)\text{（其中}\xi_k\in(x_{k-1},x_k)\text{）}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right)\text{（其中}\eta_k\text{在}\xi_k,x_k\text{之间）}$$ ....6'

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\left(-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)(x_k-x_{k-1})\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}\text{。}$$ ....5'

五（**满分** 14 **分**）设函数 $f(x)$ 在区间 $[\mathbf{0},\ \mathbf{1}]$ 上连续，且 $I=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} f(x)dx\neq \mathbf{0}$。证明在 $(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$ 内存在不同的两点 x_1,x_2，使得 $\frac{\mathbf{1}}{f(x_1)}+\frac{\mathbf{1}}{f(x_2)}=\frac{\mathbf{2}}{I}$。

证明：设 $F(x)=\frac{\mathbf{1}}{I}\int_{\mathbf{0}}^{x} f(t)\mathbf{d}t$，则 $F(0)=0, F(1)=1$。由介值定理，存在 $\xi\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$ 使得 $F(\xi)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. ....6'

在两个子区间 $(0,\ \xi)$, $(\xi,\ 1)$ 分别应用拉格朗日中值定理：

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{1/2}{\xi},\qquad x_1\in(0,\xi),$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1/2}{1-\xi},\qquad x_2\in(\xi,1),$$ ....6'

$$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{1}{F'(x_1)}+\frac{1}{F'(x_2)}=\frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2}=2\text{。}$$ ....2'

六: 设 $f(x)$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **可导，且** $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$。**用 Fourier 级数理论证明** $f(x)$ **为常数 .**

证： 由 $f(x)=f(x+2)$ 知 f 为以 2 为周期的周期函数，其 *Fourier* 系数分别为：

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx \quad , \quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx \text{ ,}$$ ....**4'**

由 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$ 知

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x dx \\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})dt \\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)dt \\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t dt \\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t dt
\end{aligned}$$

所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$ 。 ....**6'**

同理可得 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$

联立 $\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$，得 $a_n=b_n=0 \quad (n=1,2\cdots)$ . ...**2'**

而 f 可导，其 $Fourier$ 级数处处收敛于 $f(x)$, 所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 为常数。 ....**2'**