第十章

重 积 分

一元函数积分学

多元函数积分学
- 重积分
- 曲线积分
- 曲面积分

第十章

第一节

二重积分的概念与性质

内容

一、引例

二、二重积分概念

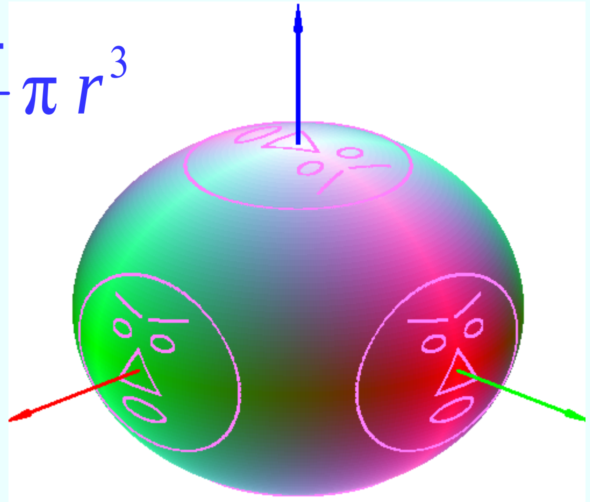
三、二重积分的性质

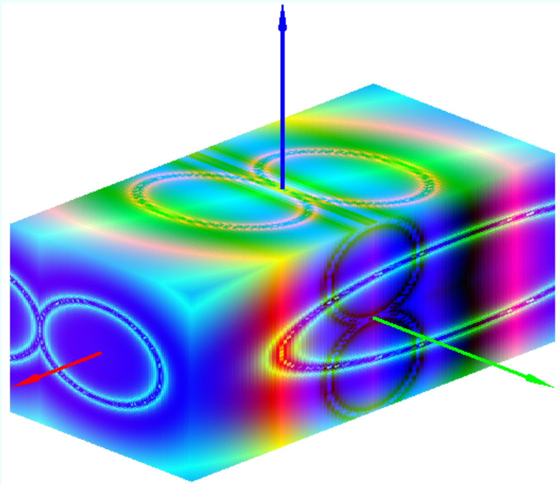
一、引例

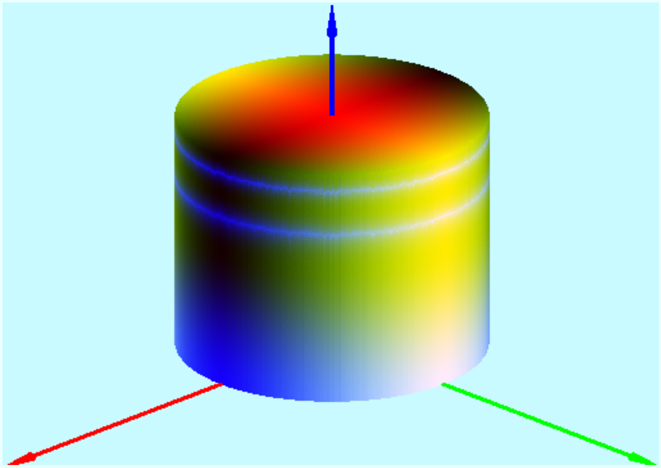
1.曲顶柱体的体积

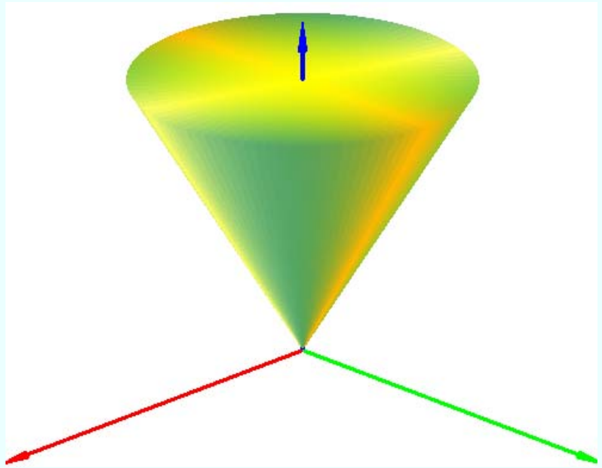
我们已经会求规则立体的体积，如

$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}$



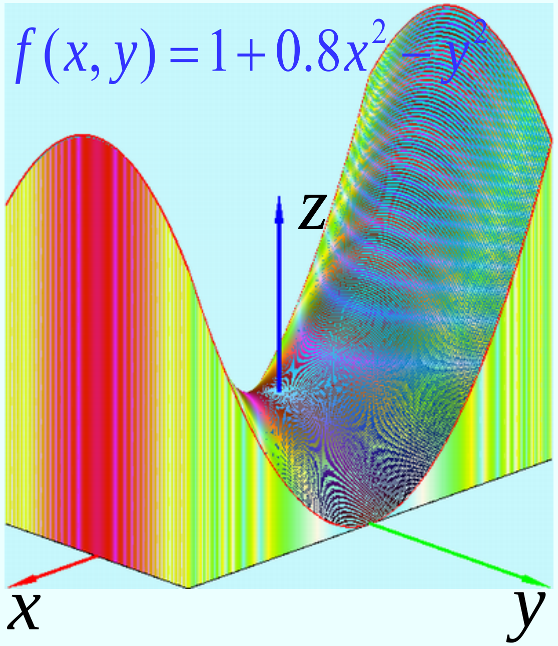


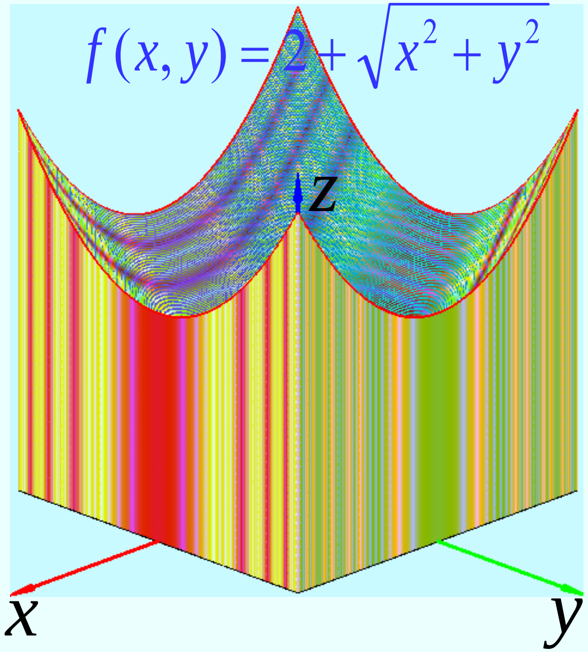


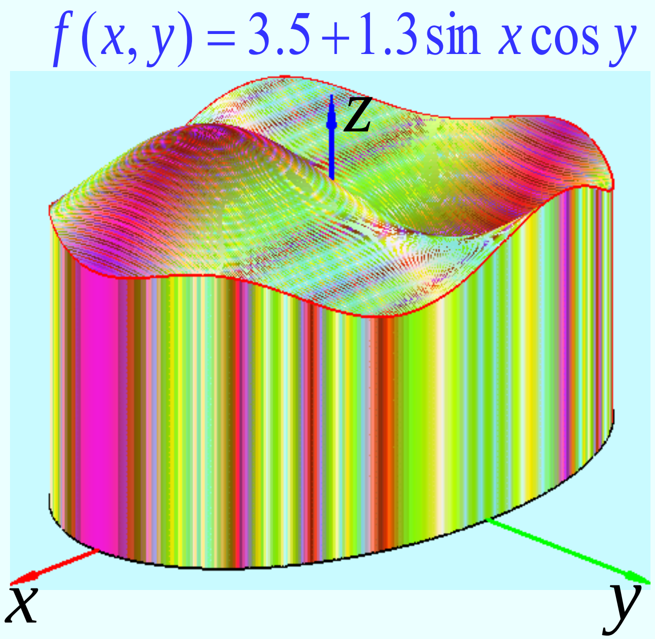


$V=abc$ $\quad V=\pi r^{2}h$ $\quad V=\frac{1}{3}\pi r^{2}h$

那么如何求不规则立体的体积？如

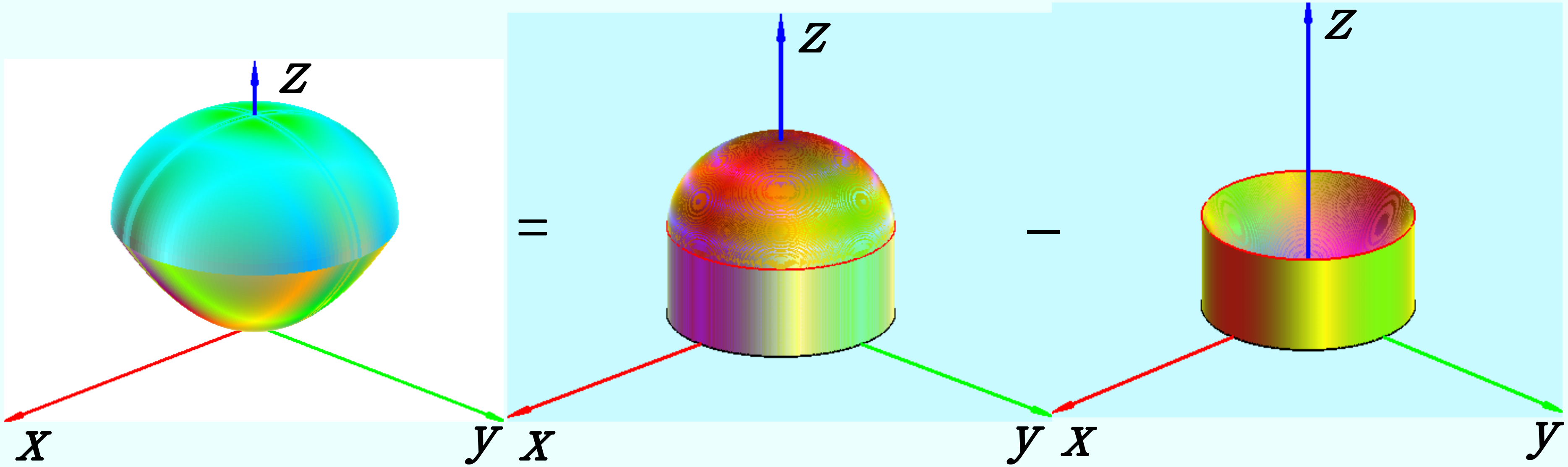






上述三个立体的共同点是：底是xOy面上的平面区域D，侧面是以D的边界为准线而母线平行于z轴的柱面，顶为空间曲面，这种立体称为曲顶柱体.

而对于任意其他不规则的空间立体，在求其体积时，总可以分割成若干个曲顶柱体体积的代数和．如



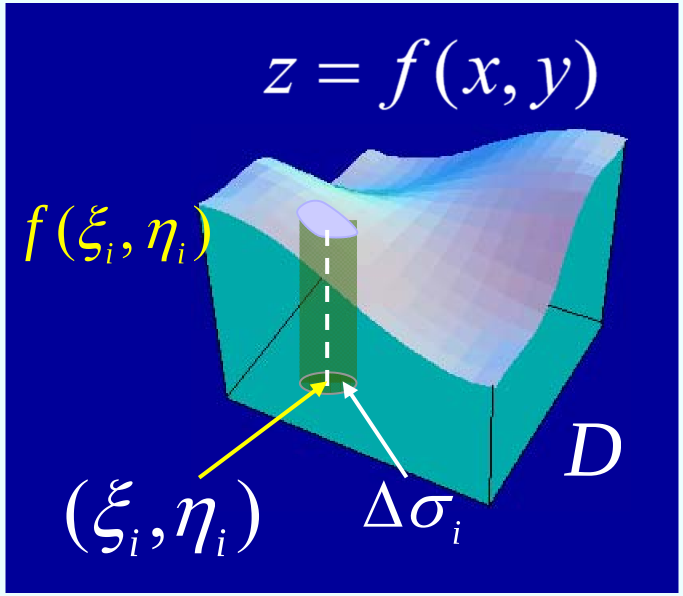
因此，只要会求曲顶柱体的体积，即能求任意空间立体的体积．为此, 我们来研究如何求曲顶柱体的体积.

1)分割

用任意曲线网分D为 n 个区域

$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 以它们为底

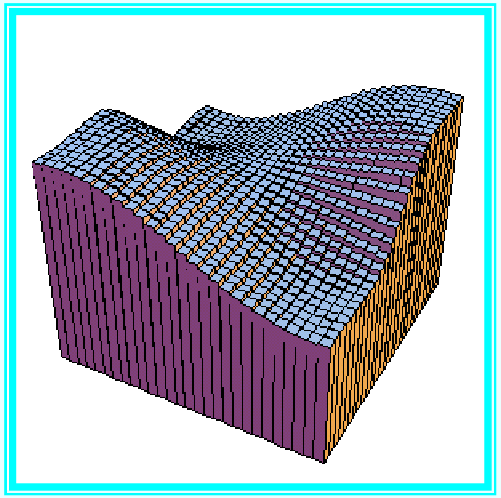
把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2)以平面代曲面

在每个$\Delta\sigma_i$中任取一点(ξ_i, η_i)，则

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$



3) 求和

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

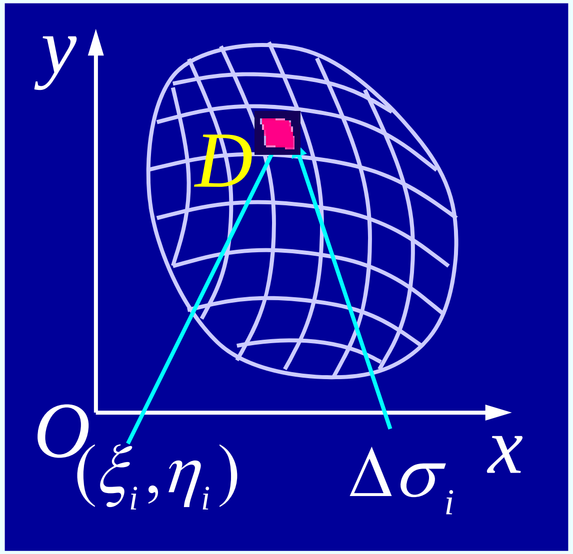
4) 取极限

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \qquad \lambda = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta\sigma_i \text{直径}\}$$

2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xOy 平面上占有区域 D ,

其面密度为 $\mu(x,y)$ 计算该薄片的质量 M .



1)分割

用任意曲线网分D为 n 个小区域

$$\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

2)以匀代变

取$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,

$$\mu(x,y)=\mu(\xi_i,\eta_i),(x,y)\in\Delta\sigma_i$$

3)作乘求和

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

4)取极限

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \qquad 令\ \lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i直径\}$$

两个问题的共性：

(1) 解决问题的步骤相同

“分割, 代替, 求和,取极限”

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量:

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二. 二重积分概念

1定义: 设 $f(x,y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，将区域 D **任意**分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，**任取**一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，若存在一个常数 I，使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \xlongequal{\text{记作}} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

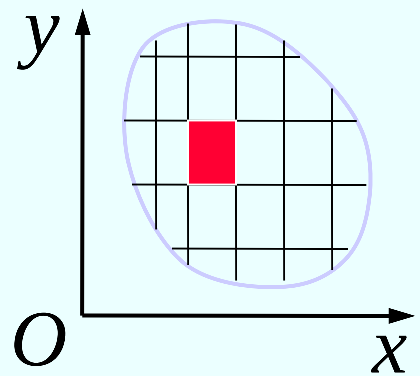
则称 $f(x,y)$ **可积**，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**.

$$\iint_{\underset{\text{积分域}}{D}} \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}$$

积分表达式

x,y 称为积分变量

如果 $f(x,y)$ 在D上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D，这时 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$，因此面积元素$\mathrm{d}\sigma$也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作



直角坐标系 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

$$M = \iint\limits_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2.存在定理 设$f(x,y)$在闭区域D上连续,则在D上的二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$存在

(今后总假定$f(x,y)$在闭区域D上连续)

3.几何意义

$f(x,y)\geq 0,$ 二重积分就是柱体的体积,曲顶是曲面$f(x,y)$

$f(x,y)\leq 0,$ 柱体在 xoy 平面下方,

二重积分的绝对值等于柱体的体积

$f(x,y),$ $f(x,y)$在D的若干部分区域上是正的, 其他部分是负的, 二重积分是两部分柱体体积代数和

三、二重积分的性质（二重积分与定积分有类似的性质）

1 线性性 设α,β为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$$

如果在D上，$f(x,y)=1$，S为D的面积，则 $S=\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma$

高为1的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积，

2可加性质

设$D=D_1\bigcup D_2$，$D_1\cap D_2$的面积为零

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

3.比较性质

如果$\forall(x,y)\in D, f(x,y)\le g(x,y)$, 则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别地 $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

4. 估值性质

$\forall(x,y)\in D, m\le f(x,y)\le M$， S是区域D的面积

则有 $$m\cdot S \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\cdot S$$

5.中值性质 设$f(x,y)$在闭区域D上连续, S为D的面积,

则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$$

证: 由估值性质可知,

$$m\cdot S\le\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\le M\cdot S \Rightarrow m\le\frac{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{S}\le M$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

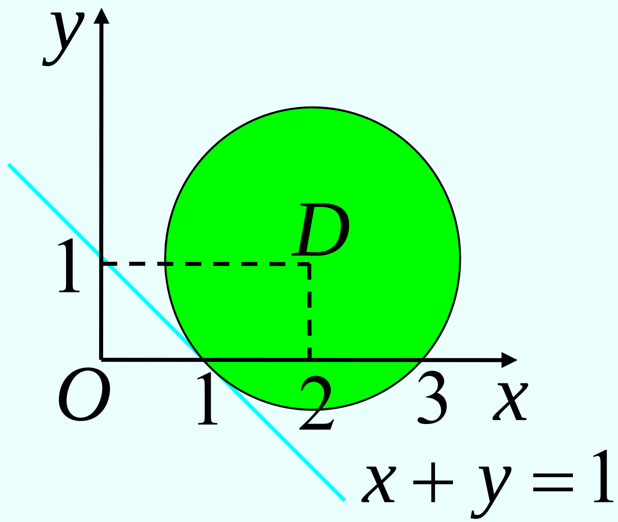
因此

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$$

例1. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma\,,\quad \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

它在与 x 轴的交点 $(1,0)$ 处与直线 $x+y=1$ 相切.

而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

例2. 估计积分 $I=\iint\limits_{D}(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$ 的值,其中D是圆形区域 $D: x^2+y^2\le 4$

解法一: 估值性质

求$f(x,y)$的最值. 由$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=8y=0 \end{cases}$ 唯一驻点(0,0), 且$f(0,0)=9$

闭区域上函数的最值点还可能在边界上 $x^2+y^2=4$

$f(x,y)=x^2+4y^2+9=13+3y^2 \quad 0\le y^2\le 4$

故$13\le f(x,y)\le 25$ 于是$m=9, M=25$

$$9\cdot 4\pi \le \iint\limits_{D}(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma \le 25\cdot 4\pi$$

例2. 估计积分 $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$ 的值,其中D是圆形区域 $D: x^2+y^2\le 4$

解法二: 中值定理

$f(x,y)$在D上连续,在D上至少存在一点(ξ,η)使得

$$I=\underline{\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma}=f(\xi,\eta)\cdot 4\pi=\underline{(\xi^2+4\eta^2+9)\cdot 4\pi}$$

$$9\le\xi^2+\eta^2+9\le \underline{\xi^2+4\eta^2+9}\le 4(\xi^2+\eta^2)+9\le 25$$

$$\text{其中}0\le\xi^2+\eta^2\le 4$$

从而 $9\cdot 4\pi\le\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma\le 25\cdot 4\pi$

例3. 设D是以原点为中心,r为半径的圆,则

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=?$$

解: 中值定理

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{1}{\cancel{\pi r^2}}\cdot e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\cancel{\pi r^2}$$

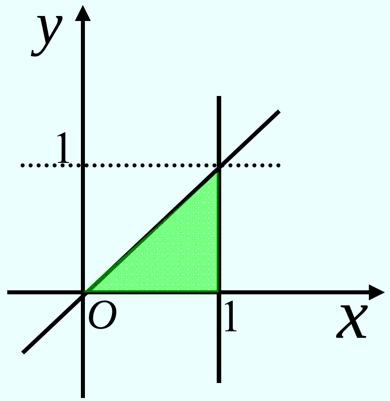
$$=\lim_{\xi\to0,\eta\to0}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)$$

$$=1$$

例4. 设闭区域D由y=0,y=x,x=1围成,$f(x,y)$为D上的连续

函数,且$f(x,y)=1+\underbrace{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{A}$, 则$f(x,y)$=?

解: 两边同取二重积分



$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D A\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot(A+1)\Rightarrow A=1$$

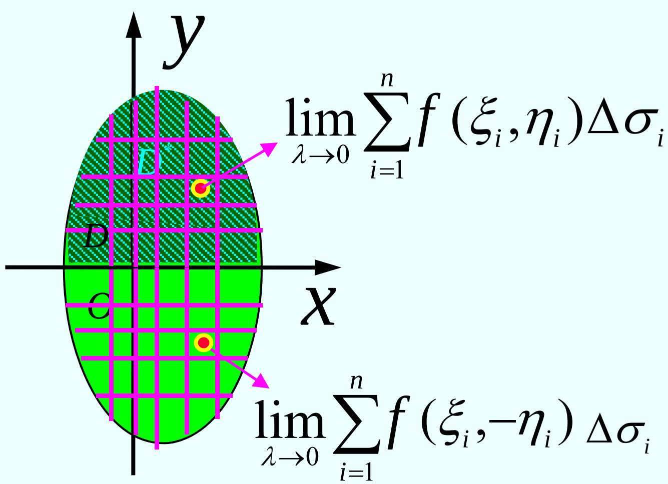
所以$f(x,y)$=2

6. 对称区域上奇偶函数积分性质

设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积

1)若D关于x轴对称, $D^*=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, y\geq 0\}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(x,-y)=f(x,y), \\ & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数} \\ 0 & \text{当} f(x,-y)=-f(x,y), \\ & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}\end{cases}$$

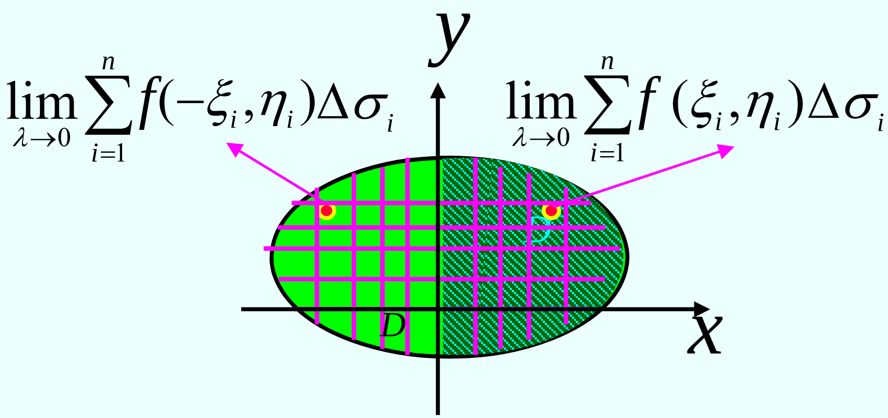


6. 对称区域上奇偶函数积分性质

设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积

2)若D关于y轴对称, $D^* = \{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, x\ge 0\}$ 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(-x,y) = f(x,y),\ f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数} \\ 0 & \text{当} f(-x,y) = -f(x,y),\ f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数} \end{cases}$$



6. 对称区域上奇偶函数积分性质

设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积

1)若D关于x轴对称, $D^* = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, y \geq 0\}$则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(x,-y) = f(x,y),\ f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数} \\ 0 & \text{当} f(x,-y) = -f(x,y),\ f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数} \end{cases}$$

积分域关于**x**轴对称，**y**可正可负,考量**y**的奇偶性

2)若D关于y轴对称, $D^* = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, x \geq 0\}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(-x,y) = f(x,y),\ f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数} \\ 0 \quad D & \text{当} f(-x,y) = -f(x,y),\ f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数} \end{cases}$$

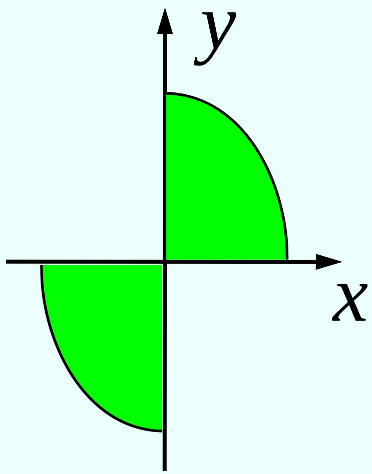
积分域关于**y**轴对称，**x**可正可负,考量**x**的奇偶性

6. 对称区域上奇偶函数积分性质

设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积

3)若D关于原点对称，$D^* = \{(x,y) \mid (x,y) \in D,\ \ x \geq 0 \text{ 或} y \geq 0\}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(-x,-y) = f(x,y), \\ & f(x,y)\text{关于}x,y\text{为偶函数} \\ 0 & \text{当} f(-x,-y) = -f(x,y), \\ & f(x,y)\text{关于}x,y\text{为奇函数} \end{cases}$$



4)若D关于直线$y=x$对称，$\{(x,y) \in D \Rightarrow (y,x) \in D\}$

轮换对称性 ⟵ D的特点是***x,y***互换区域不变

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例5. 计算$I=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中D是以原点为心的任意圆

解: $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

圆关于y轴对称, $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

圆关于x轴对称, $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 故I=0

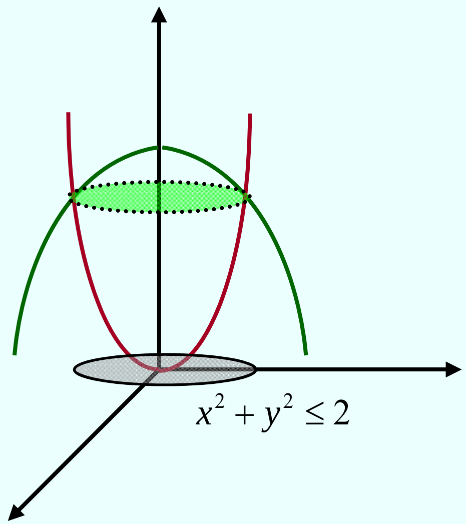
例6. 计算$I=\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$其中D是以原点为心的任意圆

解: D关于y轴对称

$f(x,y)=xe^{x^2+y^2}$ 是关于x的奇函数

故I=0

例7. 用二重积分表示由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积



解: $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}[6-2x^2-y^2-(x^2+2y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\displaystyle = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例8. 已知$f(x),f(y)$在区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$上连续,

且$f(x)>0,\ f(y)>0$,求 $\boxed{\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$

解: 因为积分区域关于$y=x$ 对称,所以

原式$=\boxed{\iint\limits_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(a+b)[f(x)+f(y)]}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a+b}{2}\cdot 2$$

$$=a+b$$