46学时

大连海事大学 2016-2017（2）《线性代数》试卷（A）参考答案

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	得分
得分									

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%，本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%.

选课序号　专业班级：　姓名：　学号

装　订　线

一、填空题（每题 3 分, 共 15 分）

1. 若 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=$ __-2__ .

2. 设 A，B 为 n 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|3A^*B^{-1}|=$ __-6^{n-1}__ .

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 __2__ .

4. 从二维向量空间 $E=\{(x_1,x_2,0)^T, x_1,x_2\in R\}$ 的基 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$ 到基 $\beta_1=(1,1,0)^T,\beta_2=(-1,1,0)^T$ 的过渡矩阵为 __$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$__.

5. 设 A 与 $B=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$ 相似，则 $R(A-E)=$ __3__ .

二、选择题（每题 3 分,共 15 分）

1. 已知 $\det A=\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，则 $\det A$ 中的一次项系数是（ D ）。

(A) -4　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 4

2．设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第一列加到第二列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵。记 $P_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 A=（ A ）

（A）P_2P_1　　（B）$P_1^{-1}P_2$　　（C）$P_2P_1^{-1}$　　（D）P_1P_2

3．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则（ C ）。

（A）α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示　　（B）α_2 可由 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

（C）α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示　　（D）α_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表示

4．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则（ B ）

（A）A 与 C 相似，B 与 C 相似　　（B）A 与 C 相似，B 与 C 不相似

（C）A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　（D）A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

5．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为（ A ）

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

三、(10 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B。

解：显然，$|A^*|=8$，所以 $|A|=2$．在方程两端左乘 A^*，右乘 A，得

$$A^*AB=A^*B+3A^*A,$$

$$2B=A^*B+6E,$$

$$\left(2E-A^*\right)B=6E$$

$B=6\left(2E-A^*\right)^{-1}$，　　……………………………5 分

选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装　订　线

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&-6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{6}\\0&0&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\6&6&0&0\\0&0&6&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

……………………………5 分

四、（10 分）设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

（1）证明 $R(A)=2$；（2）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

解：（1）证明：由 α_1，α_2 线性无关，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，

$\therefore R(A)=2$　　　　……………………………………4 分

（2）由（1）$R(A)=2$，知 $3-R(A)=1$，即 $Ax=0$ 的基础解系只有 1 个解向量，

由 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$ 可得，$Ax=0$ 的基础解系为（1，2，-1）^{T}，

又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则 $Ax=\beta$ 的一个特解为（1，1，1）^{T}，

……………………………………4 分

综上，$Ax=\beta$ 的通解为 $x=k$（1，2，−1）^{T} +（1，1，1）^{T}，k 为任意实数。

……………………………………2 分

五、（10 分）设

$$\begin{cases}\beta_1= \qquad \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\\ \beta_2=\alpha_1 \qquad +\alpha_3+\cdots+\alpha_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\end{cases},$$

证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价.

证明：将已知关系写成

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{…………………3 分}$$

将上式记为 $B=AK$. 因为

$$|K|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0, \qquad \text{…………………3 分}$$

所以 K 可逆，故有 $A=BK^{-1}$. 由 $B=AK$ 和 $A=BK^{-1}$ 可知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可相互线性表示. 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价……………………4 分

六、（10 分）设 A 为 n 阶正定矩阵，证明：存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$。

证明：因 A 为 n 阶正定矩阵，则 $A^T=A$，且 A 的特征值 λ_1，λ_2，$\cdots\lambda n$ 均大于零。 ……………………………………3 分

由 A 为实对称矩阵知 A 是可对角化的，即存在正交矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^T$，

……………………………………3 分

其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}。令 Q=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}，C=QP^T，$$

则 C 可逆，且 $Q^T=Q$，于是

$$A=PQ^TQP^T=(QP^T)^T(QP^T)=C^TC。\text{……………………4 分}$$

选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装　订　线

七、（15 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$。

（1）求 a,b 的值；（2）矩阵 A 能否与对角矩阵相似？若可以，写出矩阵 A 的相似对角矩阵；若不可以，说明理由。

解：（1）由 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

$$\text{则}\begin{cases}0+3+a=1+b+1\\ \begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}\end{cases},$$ ……………….3 分

解得 $a=4,b=5$ ……………………………………………3 分

（2）由

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

（也可以计算 $f_B(\lambda)$）

知 A 的特征值为 1，1，5， ……………………………3 分

因为对于二重的特征值 λ=1，

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，$R(\lambda E\text{-}A)=1$， …………3 分

故 A 可以与对角矩阵相似，A 的相似对角矩阵为：

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$ …………….3 分

八、（15 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，（1）求 a 的值；（2）$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表什么曲面？(3) 求正交矩阵 Q。

解: (1) 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $R(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$，……………………………2 分

(2) 将 $a=2$ 代入，此时 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&2\end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，……………………..3 分

故二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过正交变换 $X=QY$ 可以变为 $f(x_1,x_2,x_3)=-3y_2^2+6y_3^2$，它代表双曲柱面。 …………………..2 分

（3）由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值-3 的特征向量为 α_1=（1，-1，1）^{T}；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 α_2=（-1，0，1）^{T}；

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 α_3=（1，2，1）^{T}……………..6 分

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=diag(-3,6,0)$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt3}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,2,1)^T$，，

$$\text{则}Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},\quad Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$$

$f\overset{x=Qy}{=}-3y_1^2+6y_2^2$ ……………………..2 分