

# Contents

1	Двойной и тройной интегралы: определение на языке интегральных сумм Римана. Определение площади и объёма.	4
2	Определение $n$ -мерного бруса (параллелепипеда) и разбиения бруса.	5
3	Суммы Дарбу и их основные свойства. Нижний и верхний интегралы Дарбу и их свойства.	6
4	Определение кратного интеграла на языке интегралов Дарбу. Критерий интегрируемости (на языке сумм Дарбу).	7
5	Свойства интеграла по $n$ -мерному параллелепипеду.	9
6	Множество меры 0. Основные свойства. Примеры.	12
7	Критерий интегрируемости функции на языке множества меры 0	14
8	Измеримые по Жордану множества. Определение интеграла от функции по измеримому множеству.	15
9	Свойства аддитивности и усиленной аддитивности интеграла по измеримым множествам.	17
10	Сведение кратного интеграла к повторному.	18
11	Теорема Фубини (формулировка). Примеры: двойной и тройной интегралы.	19
12	Объём цилиндрического тела.	21
13	Дифференциальные уравнения (ДУ1) 1-го порядка: определение, формы записи ДУ1. Примеры.	22
14	Общее, частное и особое решения ДУ1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка).	23
15	ДУ 1-го порядка с разделёнными и разделяющимися переменными: определение, формы записи, общий интеграл, решение задачи Коши.	24
16	Однородные ДУ первого порядка: определение, формы записи, общий интеграл, решение задачи Коши.	25
17	Линейные ДУ 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной	26
18	Линейные ДУ 1-го порядка. Метод Бернулли.	27
19	Уравнение Бернулли.	28

20	ДУ высших порядков, задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.	29
21	ДУ, допускающие понижение порядка. Примеры	30
22	Линейные однородные ДУ высших порядков: основные определения	31
23	Линейная независимость решений, определитель Вронского.	32
24	Фундаментальная система решений (ФСР) линейного ДУ.	33
25	Примеры построения ФСР для линейных ДУ с постоянными коэффициентами.	34
26	Теорема о структуре общего решения однородного ДУ. Теорема о структуре общего решения неоднородного ДУ.	37
27	Линейные неоднородные ДУ $n$ -го порядка, решение методом вариации произвольных постоянных.	39
28	Метод вариации произвольных постоянных для линейного ДУ 2-го порядка. Примеры.	41
29	Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Построение частного решения методом неопределенных коэффициентов	42
30	Системы линейных ДУ: определение формы записи, задача Коши	44
31	Системы линейных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. Нормальная форма записи системы	47
32	Система линейных ДУ и её матричная форма записи. Однородная система линейных ДУ первого порядка	48
33	Решение системы линейных ДУ для случаев различных вещественных корней, различных комплексных корней, кратных вещественных корней характеристического уравнения	49
34	ФСР линейной системы. Фундаментальная матрица (ФМ) линейной системы. Свойства ФСР и ФМ	51
35	Нормальная фундаментальная матрица линейной системы. Свойства.	53
36	Метод вариации произвольной постоянной для решения неоднородных линейных систем	54
37	Числовой ряд. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.	57

38	Свойства сходящихся числовых рядов.	59
39	Ряды с положительными членами. Признаки сравнения в разных формах и следствия. Примеры.	60
40	Признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.	62
41	Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость.	63
42	Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка знакопередающегося ряда (теорема Лейбница).	64
43	Определение функционального ряда. Поточечная сходимость. Область сходимости функционального ряда.	65
44	Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.	66
45	Признак Вейерштрасса.	67
46	Степенные ряды. Первая теорема Абеля.	68
47	Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формулы для радиуса сходимости.	69
48	Свойства радиуса сходимости степенных рядов при их интегрировании и дифференцировании.	71
49	Ряды Тейлора и Маклорена.	72
50	Теорема о представлении функции сходящимся рядом Тейлора.	73
51	Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.	74
52	Ортогональная система функций (ОГС). Разложение функции в ряд по ортогональной системе. Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.	76
53	Полнота и замкнутость ОГС. Неравенство Бесселя, Равенство Парсеваля.	78
54	Основная система тригонометрических функций. Ее ортогональность. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.	79
55	Теорема Дирихле. Ряды Фурье для четной и нечетной функций. Ряд Фурье для функций произвольного периода.	81
56	Комплексная форма ряда Фурье.	82

# 1 Двойной и тройной интегралы: определение на языке интегральных сумм Римана. Определение площади и объёма.

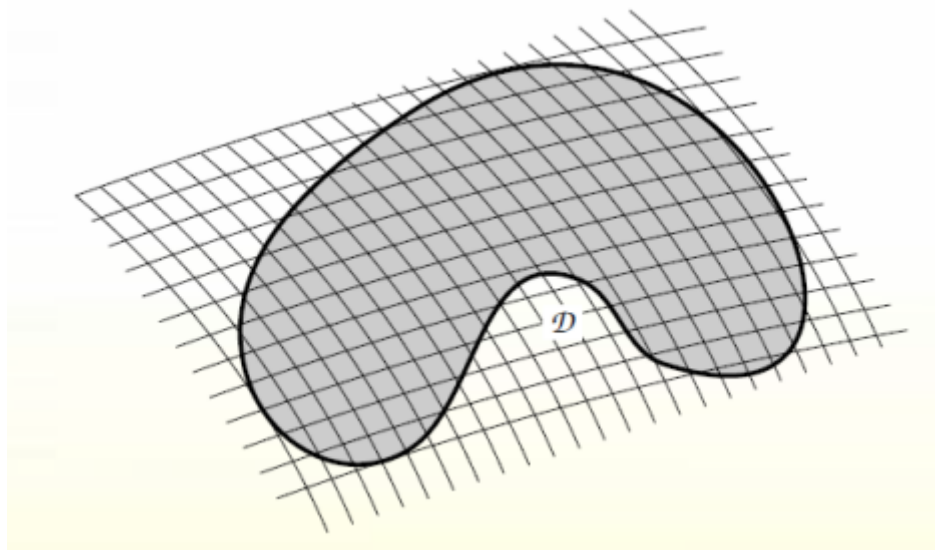


Figure 1: Разбиение области

$$D = \bigcup_{k=1}^n D_k, \quad D_i \cap D_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

Разбиением называется:  $\lambda = \{D_1 \dots D_n\}$  Ранг разбиения (т.е. наибольшее из диаметров

$$D_i, D_j): |\lambda| = \max_{1 \leq i \leq n} D_i \text{ Составим интегральную сумму Римана: } s(f, \Lambda) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) S(D_i), \quad (x, y) \in D$$

Двойной интеграл-предел интегральных сумм:

$$\iint_D f ds = \lim_{|\lambda| \rightarrow 0} s(f, \Lambda), \quad \Lambda = \{(D_1, x_1, y_1), \dots, (D_n, x_n, y_n)\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\lambda| < \delta \Rightarrow |s(f, \Lambda) - \iint_D f ds| < \varepsilon \quad \forall (x_i, y_i) \in D_i$$

Тройной интеграл-предел интегральных сумм:

$$\iiint f dv = \lim_{|\lambda| \rightarrow 0} s(f, \Lambda), \quad s(f, \Lambda) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) V(D_i), \quad V(D_i) - \text{объем области } D_i.$$

Геометрический смысл двойного и тройного интегралов:  $\int f(x, y) \geq 0$

$$S(D) := \iint_D dx dy; \quad V(D) := \iiint_G dx dy dz$$

## 2 Определение n-мерного бруса (параллелепипеда) и разбиения бруса.

### 2.1 Определение

Замкнутый прямоугольный параллелепипед или n-мерный интервал  $D \subset \mathbb{R}^n$  определен условием  $P\{x_1, \dots, x_n\} \in D \Leftrightarrow a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n$

При этом пишут

$D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  Такие параллелепипеды называются брусами. Объем  $V(D)$

бруса определяется равенством  $V(D) \stackrel{\text{Опр}}{=} \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

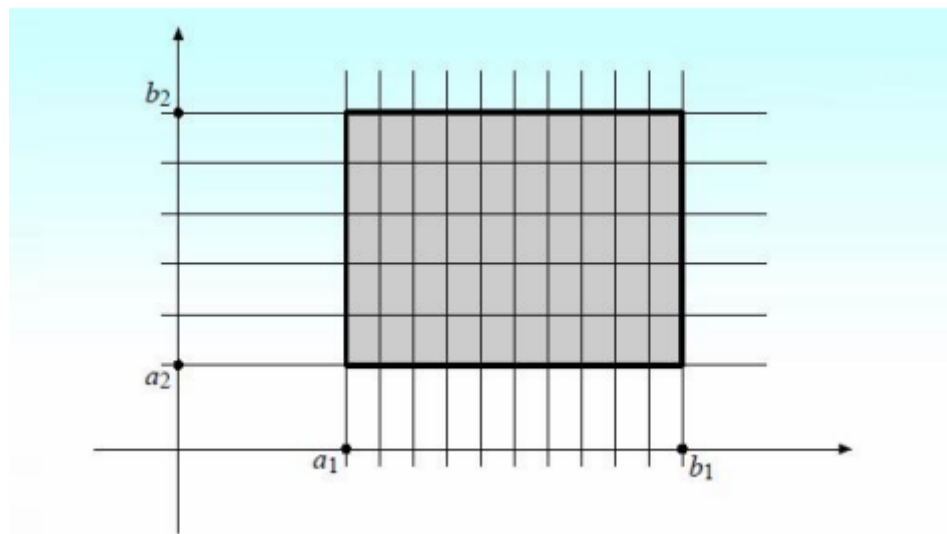


Figure 2: К определению 1.2

Разбиением  $\alpha$  интервала  $[a, b]$  удобно называть множество точек  $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  таких, что  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

Множество  $\lambda$  действительно делит интервал  $[a, b]$  на  $k$  интервалов  $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, k$ .

### 2.2 Определение

Разбиением  $\lambda$  бруса  $D$  называется кортеж  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  одномерных разбиений  $\lambda_i$  интервалов  $[a_i, b_i]$ .

### 3 Суммы Дарбу и их основные свойства. Нижний и верхний интегралы Дарбу и их свойства.

Схожими билетами являются билеты №4, 5, поэтому советую посмотреть их тоже, там могут быть важные детали.

$D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], D \subset \mathbb{R}^n, f$  ограничена по  $[a, b]$   
 $\forall A \subset D : M_A(f) = \sup_{x \in A} f(x), m_A(f) = \inf_{x \in A} f(x)$ —верхняя и нижняя границы на отрезке

A.

$\mu(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ —мера бруса A.

#### 3.1 Определение

Пусть  $\lambda$ -разбиение бруса D и  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ —ограниченная функция. Верхняя и нижняя суммы Дарбу определяются, соответственно, равенствами  $\sigma^*(f, \lambda) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} M_A(f)\mu(A), \sigma_*(f, \lambda) =$

$\sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f)\mu(A),$

суммирование ведется по всем параллелепипедам A из разбиения  $\lambda$ .

По построению, очевидно,  $\sigma_*(f, \lambda) \leq \sigma^*(f, \lambda)$

#### 3.2 Свойства:

1. Для произвольного разбиения  $\lambda$  и  $\nu$ , где  $|\lambda| < |\nu|$   $\sigma_*(f, \lambda) \leq \sigma_*(f, \nu)$
2. Нижние суммы Дарбу ограничены сверху, а верхние снизу.
3. При добавлении к имеющемуся разбиению новых точек  $\sigma_*$  никак не может уменьшиться, а  $\sigma^*$  никак не может увеличиться.

$$\sigma_*(f, \tau) \geq \sigma_*(f, \lambda)$$

$$\sigma^*(f, \tau) \leq \sigma^*(f, \lambda)$$

$\tau$ —изменения  $\lambda$ .

Величины  $I_*(f, D) = \sup_{\lambda} \sigma_*(f, \lambda)$ —нижний интеграл Дарбу.

$I^*(f, D) = \inf_{\lambda} \sigma^*(f, \lambda)$ —верхний интеграл Дарбу.

$$I_*(f, D) \leq I^*(f, D)$$

$\sigma_* \leq I_* \leq I^* < \sigma^* \forall \lambda, \mu$ —произвольные разбиения.

## 4 Определение кратного интеграла на языке интегралов Дарбу. Критерий интегрируемости (на языке сумм Дарбу).

Схожими билетами являются билеты №3, 5, поэтому советую посмотреть их тоже, там могут быть важные детали.

### 4.0.1 Определение

Если  $\sup_{\lambda} \sigma_*(f, \lambda) = \inf_{\lambda} \sigma^*(f, \lambda)$  (точные границы берутся по всем разбиениям  $\lambda$ ), функция  $f$  называется интегрируемой по брусу  $D$  и величина  $I = \sup_{\lambda} \sigma_*(f, \lambda) = \inf_{\lambda} \sigma^*(f, \lambda)$  называется интегралом от функции  $f$  по  $D$ . при этом пишут  $\int_D f = I$ .

Величины  $I_*(f, D) = \sup_{\lambda} \sigma_*(f, \lambda)$  и  $I^*(f, D) = \inf_{\lambda} \sigma^*(f, \lambda)$  всегда существуют и называются, соответственно, нижним и верхним интегралами Дарбу.

$$I_*(f, D) \leq I^*(f, D).$$

Функция интегрируема тогда и только тогда, когда нижний и верхний интегралы Дарбу равны между собой и их общее значение называется интегралом (Дарбу) функции  $f$ .

Если в обозначении интеграла нужно подчеркнуть размерность пространства, вместо  $\int_D f$  пишут

$$\int_D f \text{ или } \int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Например, интеграл по прямоугольнику  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  будет обозначаться  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и называется двойным интегралом, а интеграл по параллелепипеду

$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  будет обозначаться  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  и называется

тройным интегралом. Возможны и другие естественные модификации обозначений, как  $\int_D f(P) d\mu$  или  $\int_D f(P) dP$ .

### 4.0.2 Теорема (Критерий интегрируемости)

$f$  — интегрируема  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda : \sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda) < \varepsilon$ .

Доказательство:

$$\exists \nu : \int_D f - \sigma_*(f, \nu) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \tau : \sigma^*(f, \tau) - \int_D f < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если  $\lambda$  продолжит разбиения  $\nu, \tau$ , то тем более

$$\sigma^*(f, \lambda) - \int_D f < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \int_D f - \sigma_*(f, \lambda) < \frac{\varepsilon}{2},$$

что ведет к оценке  $\sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda) < \varepsilon$ .

$\forall \varepsilon > 0 : I^*(f, D) - I_*(f, D) < \varepsilon$ , то есть равенство верхнего и нижнего интегралов.

**4.0.2.0.1 Пример**  $f(P) = c = Const$

$$\sigma_*(f, \lambda) = \sigma^*(f, \lambda) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} c\mu(A) = c \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} \mu(A) = c\mu(D), \text{ откуда } \int_D f = c\mu(D).$$



## 5 Свойства интеграла по n-мерному параллелепипеду.

### 5.0.1 1. Линейность.

#### 5.0.2 Теорема

Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на бруске  $D$ , то функции  $f + g$  и  $\alpha f$  ( $\alpha = \text{Const}$ ) также интегрируемы, причем  $\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$ ,

$\int_D \alpha f = \alpha \int_D f$ . Доказательство. ] $A$ —произвольный параллелепипед из разбиения  $\lambda$ . Тогда  $\forall P \in A$

$$m_A(f) + m_A(g) \leq f(P) + g(P) \leq M_A(f) + M_A(g), \text{ откуда}$$

$$m_A(f) + m_A(g) \leq m_A(f + g) \leq M_A(f + g) \leq M_A(f) + M_A(g).$$

Умножая на  $\mu(A)$  и суммируя по всем ячейкам разбиения, приходим к неравенствам  $\sigma_*(f, \lambda) + \sigma_*(g, \lambda) \leq \sigma_*(f + g, \lambda) \leq \sigma^*(f + g, \lambda) \leq \sigma^*(f, \lambda) + \sigma^*(g, \lambda)$ .

Далее, как следствие,

$$\sigma_*(f, \lambda) + \sigma_*(g, \lambda) \leq I_*(f + g, D) \leq I^*(f + g, D) \leq \sigma^*(f, \lambda) + \sigma^*(g, \lambda).$$

Отсюда (в силу интегрируемости  $f$  и  $g$ )

$$\int_D f + \int_D g = I_*(f, D) + I_*(g, D) \leq I_*(f + g, D) \leq I^*(f + g, D) \leq I^*(f, D) + I^*(g, D) =$$

$$\int_D f + \int_D g,$$

что доказывает равенства

$$I_*(f + g, D) = I^*(f + g, D) = \int_D f + \int_D g$$

и, как следствие, равенство

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g.$$

Докажем теперь однородность интеграла (возможность вынести множитель за знак интеграла). Если  $\alpha > 0$ , то

$$m_A(\alpha f) = \alpha m_A(f) \text{ и } M_A(\alpha f) = \alpha M_A(f),$$

откуда (при  $\alpha > 0$ )

$$I_*(\alpha f, D) = \alpha I_*(f, D) \text{ и } I^*(\alpha f, D) = \alpha I^*(f, D)$$

в частности,

$$\int_D \alpha f = \alpha \int_D f.$$

Далее заметим, что

$$m_A(-f) = -M_A(f) \text{ и } M_A(-f) = -m_A(f),$$

откуда

$$I_*(-f, D) = -I^*(f, D) \text{ и } I^*(-f, D) = -I_*(f, D),$$

то есть в случае интегрируемости функции  $f$

$$I_*(-f, D) = I^*(-f, D) = - \int_D f$$

и, следовательно,

$$\int_D (-f) = - \int_D f.$$

### 5.0.3 2. Монотонность

#### 5.0.4 Теорема

Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на бресе  $D$ . Тогда

$$f \leq g \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g.$$

Доказательство

$$\sigma_*(f, \lambda) \leq \sigma_*(g, \lambda) \leq \int_D g,$$

откуда

$$\int_D f \leq \int_D g.$$

Как следствие, отметим свойство ограниченности интеграла, выраженное неравенством:

$$m_D(f)\mu(D) \leq \int_D f \leq M_D(f)\mu(D),$$

где  $f$ —произвольная функция, интегрируемая на бресе  $D$ .

#### 5.0.5 3. Теорема

Если  $f$ —интегрируема на бресе  $D$ , то  $|f|$ —также интегрируема, причем

$$\int_D |f| \leq \int_D |f|. \text{ Доказательство}$$

$$\begin{aligned} M_A(|f|) - m_A(|f|) &= \sup_{x \in A} |f(x)| - \inf_{y \in A} |f(y)| = \sup_{x \in A} |f(x)| + \inf_{y \in A} -|f(y)| \\ &= \sup_{x, y \in A} (|f(x)| - |f(y)|) = \sup_{x, y \in A} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in A} (f(x) - f(y)) \\ &= \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{y \in A} (-f(y)) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{y \in A} f(y) = M_A(f) - m_A(f), \end{aligned}$$

и, как следствие,

$$I^*(|f|, D) - I_*(|f|, D) \leq I^*(f, D) - I_*(f, D)$$

что влечет за собой интегрируемость  $|f|$  при условии, что  $f$ —интегрируема.

Оценка интеграла по абсолютной величине вытекает из монотонности интеграла:

$$\int_D f \leq \int_D |f| \text{ и } \int_D f = \int_D (-f) \leq \int_D |f|.$$

#### 5.0.6 4. Теорема

Если  $f$  и  $g$ —интегрируемы на бресе  $D$ , то произведение  $fg$ —также интегрируемая функция.

Доказательство

Прежде всего докажем, что квадрат интегрируемой функции—также интегрируемая функция.

Действительно, полагая  $M = M_D(|f|)$ , находим

$$\begin{aligned} M_A(f^2) - m_A(f^2) &= \sup_{x \in A} f^2(x) - \inf_{y \in A} f^2(y) = \sup_{x \in A} f^2(x) + \sup_{y \in A} (-f^2(y)) \\ &= \sup_{x, y \in A} (f^2(x) - f^2(y)) = \sup_{x, y \in A} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x, y \in A} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x, t \in A} (|f(x)| + f(y)||f(x) - f(y)|) \\ &\leq 2M \sup_{x, y \in A} (f(x) - f(y)) = 2M[\sup_{x \in A} f(x) + \sup_{y \in A} (-f(y))] \end{aligned}$$

$$= 2M[\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{y \in A} f(y)] = 2M[M_A(f) - m_A(f)],$$

откуда

$$\sigma^*(f^2, \lambda) - \sigma_*(f^2, \lambda) \leq 2M[\sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda)]$$

и, как следствие,

$$I^*(|f|, D) - I_*(|f|, D) \leq 2M[I^*(f, D) - I_*(f, D)],$$

что влечет интегрируемость  $f^2$ , при условии, что  $f$ —интегрируема.

Остается заметить, что

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4},$$

то есть  $fg$ —линейная комбинация интегрируемых функций.

## 6 Множество меры 0. Основные свойства. Примеры.

### 6.1 Определение1

Множество  $A \subset \mathbb{R}$  имеет объем-ноль ( $vol A = 0$ ), если для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует покрытие множества  $A$  брусами  $B_1 \dots B_k$ , суммарный объем которых меньше  $\varepsilon$  :

$$vol A = 0 \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^k B_j \supset A : \sum_{j=1}^k V(B_j) < \varepsilon$$

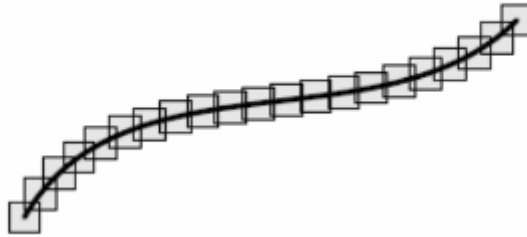


Figure 3: Площадь-ноль гладкой кривой

В этом определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие:

### 6.2 Лемма

в определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие

$$vol A = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^k \overset{o}{B}_j \supset A : \sum_{j=1}^k V(B_j) < \varepsilon,$$

здесь  $\overset{o}{B}_j$  — внутренность бруса  $B_j$ , т.е. открытый брус.

### 6.3 Док-во:

Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и пусть

$$\bigcup_{j=1}^k B_j \supset A : \sum_{j=1}^k V(B_j) < \varepsilon/2$$

Пусть брус  $C_j$  концентричен брусу  $B_j$  и подобен ему с некоторым коэффициентом подобия, строго больше единицы (т.е. брус  $C_j$  является растяжением бруса  $B_j$  во всех направлениях), при этом  $B_j \subset \overset{o}{C_j}$ . Коэффициент подобия фиксируем таким чтобы было выполнено неравенство:

$$V(C_j) \leq V(B_j) + \varepsilon/2k$$

Тогда открытые брусы  $\overset{o}{C_j}$  покрывают множество  $A$ , причем

$$\sum_{j=1}^k V(C_j) \leq \sum_{j=1}^k V(B_j) + k \frac{\varepsilon}{2k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

## 6.4 Определение2

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  имеет меру ноль ( $mes A = 0$ ), если для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует покрытие множества  $A$  последовательностью брусков  $B_j, j \in \mathbb{N}$ , суммарный объем которых меньше  $\varepsilon$

$$mes A = 0 \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset A : \sum_{j=1}^{\infty} V(B_j)$$

## 6.5 Теорема

Пусть  $D$  - брус в  $\mathbb{R}^n$  Ограниченная функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , множество точек разрыва которой имеет объем ноль – интегрируема

## 6.6 Лемма

Как и в случае объема ноль в определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие

$$mes A = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^k \overset{o}{B}_j \supset A : \sum_{j=1}^k V(B_j) < \varepsilon$$

## 6.7 Объединение последовательности множеств меры-ноль если мера ноль:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, mes A_i = 0 \Rightarrow mes A = 0$$

## 6.8 Теорема

$]B \subset \mathbb{R}^n$ —брус  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  если множество точек разрыва  $f$  имеет меру 0 то  $f \in R(B)$

## 7 Критерий интегрируемости функции на языке множества меры 0

### 7.1 Th1

Пусть  $D$  - брус в  $D$ -брус  $\mathbb{R}^n$  и  $E$  — множество точек разрыва ограниченной функции  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  — интегрируема на  $D \iff \text{mes} E = 0$ , т.е. ограниченная функция интегрируема тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру-ноль.

## 8 Измеримые по Жордану множества. Определение интеграла от функции по измеримому множеству.

$]D$ —произвольное множество на  $\mathbb{R}^n$  Характеристической функцией множества  $D$  называется функция  $X_D$

### 8.1 Определение 1

Пусть  $A$ — брус в  $\mathbb{R}^n$  и  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция на  $A$  Пусть  $D \supset A$  Тогда

$$\int_D f \stackrel{def}{=} \int_A f * X_D,$$

если функция интегрируема

### 8.2 Определение 2(скорее как доп инфа )

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  и  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция на множестве  $D$ . Пусть  $D$ — ограничено и  $A$ — произвольный брус в  $\mathbb{R}^n$ , содержащий  $D : D \subset A$ , Тогда

$$\int_D f \stackrel{def}{=} \int \tilde{f}$$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(P), P \in D, \\ 0, P \notin D \end{cases}$$

продолжение функции  $f$  нулем

Эти определения не зависят от выбора бруса  $A$ , содержащего множество  $D$

Функция  $f$  будет интегрируемой на множестве  $D$  всегда, если она (или ее продолжение нулем ) и характеристическая функция  $X_D$  интегрируемы на брус  $A \supset D$

### 8.3 Теорема

Пусть  $D$ — ограниченное множество в  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$X_D \text{ — интегрируема } \iff vol \delta D = 0$$

#### 8.3.1 Док-во:

Элементарное следствие из теоремы о критерии интегрируемости(из прошлого билета), поскольку множество точек разрыва характеристической функции совпадает с границей множества.

### 8.4 Определение 3

Ограниченное множество  $D \in \mathbb{R}$  называется измеримым по Жордану если  $vol\delta D = 0$ , значение интеграла

$$\int_D 1 = V(D)$$

называется объемом множества  $D$ . Одномерный объем называется длиной множества, а двумерный площадью

### 8.5 Теорема

$D$ — жорданово тогда и только тогда, когда  $\exists v \geq 0 : \forall \varepsilon > 0 :$

1. В  $D$  можно заключить брусы  $A_1 \dots A_k$  с непересекающимися внутреностями (объединение брусов целиком лежит в  $D$ )

$$D \supset \bigsqcup_{j=1}^k B_j \text{ — разбиение}$$

2.

$$Int B_s \cap Int B_j = \emptyset (s \neq j)$$

$$\sum_{j=1}^k \mu(B_j) > v - \varepsilon \text{ где } v = \mu(D)$$

#### 8.5.1 Док-во

$$\mu(D) = \int_D X_D, D \subset B \text{ где } B \subset \mathbb{R}$$

### 8.6 Следствия

1. Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  жордановы мно-ва  $X$  и  $Y : (X \subset D, D \subset Y) \wedge (\mu(Y) - \mu(X)) < \varepsilon$   
 $\Rightarrow D$  жорданово множество

2.]  $D \in \mathbb{R}^n : \mu(D) = 0$ , если  $(D\text{—жорданово}) \wedge (D \supset \bigsqcup_{j=1}^k B_j)$ , где  $\mu(B_j) = 0$



## 9 Свойства аддитивности и усиленной аддитивности интеграла по измеримым множествам.

### 9.1 Теорема

$]D_1, D_2$  жордановы и  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , то  $D = D_1 \cup D_2$  — тоже жорданово и:

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

### 9.2 Следствие (Усиленная аддитивность)

Если внутренности жордановых множеств не пересекаются ( $\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 \neq \emptyset$ ), то  $D_1 \cup D_2 = D$  тоже жорданово

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

#### 9.2.1 Пример

с-ва усиленной аддитивности обладает  $V(D)$  :

$$\overset{\circ}{D}_1 \overset{\circ}{D}_2 \neq \emptyset \Rightarrow V(D_1 \cup D_2) = V(D_1) + V(D_2)$$

## 10 Сведение кратного интеграла к повторному.

$]A \subset \mathbb{R}^n$  — брус,  $B \subset \mathbb{R}^m$  — брус

$A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$   $x = (x_1 \dots x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_m) \in B \subset \mathbb{R}^m$

$x^o = (x_1^o \dots x_n^o), y^o = (y_1^o \dots y_m^o)$  — точки

Рассм  $f(x, y)$ ,

$(\cdot)x_0; f(x_0, y) = f_{x_0}(y), x_0 \in A$

$\{f_{x_0}(y)\}_{x_0 \in A}$  — семейство

$(\cdot)y_0 : f(x, y_0) = f_{y_0}(x), y_0 \in B$

$\{f_{y_0}(x)\}_{y_0 \in B}$

$\varphi_*, \varphi^* : A \rightarrow \mathbb{R}$

$\varphi_*(x) = I_*(f_{y_0}(x)) = \sup_{\lambda_b} (f_y, \lambda_B)$

$\varphi^*(x) = I^*(f_{y_0}(x)) = \inf_{\lambda_b} (f_y, \lambda_B)$

$\lambda_B$  — разбиение бруса  $B$

$\lambda_A$  — разбиение бруса  $A$

$\varphi_*(x) \leq \varphi(x), \forall x \in A$

## 11 Теорема Фубини (формулировка). Примеры: двойной и тройной интегралы.

### 11.1 Теорема

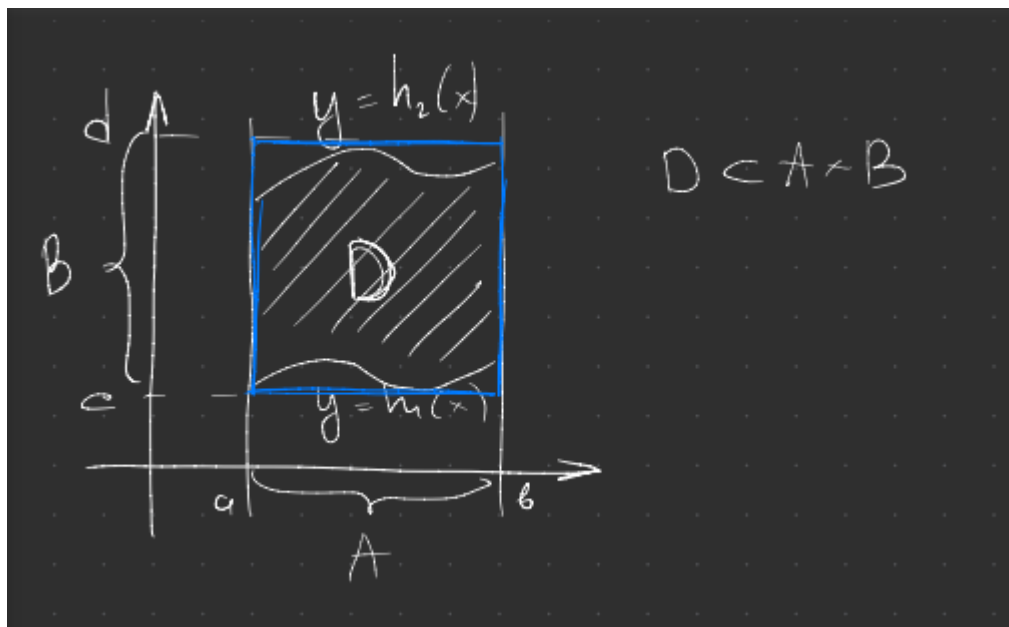
$f \in R(A \times B)$ , то  $\varphi_*, \varphi^* \in R(A)$  и

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi_* = \int_A \varphi^*$$

#### 11.1.1 Примеры двойной тройной интеграл

### 11.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}, h_1, h_2 \in C_{[a,b]} \forall x \in [a, b] : c \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq d$$

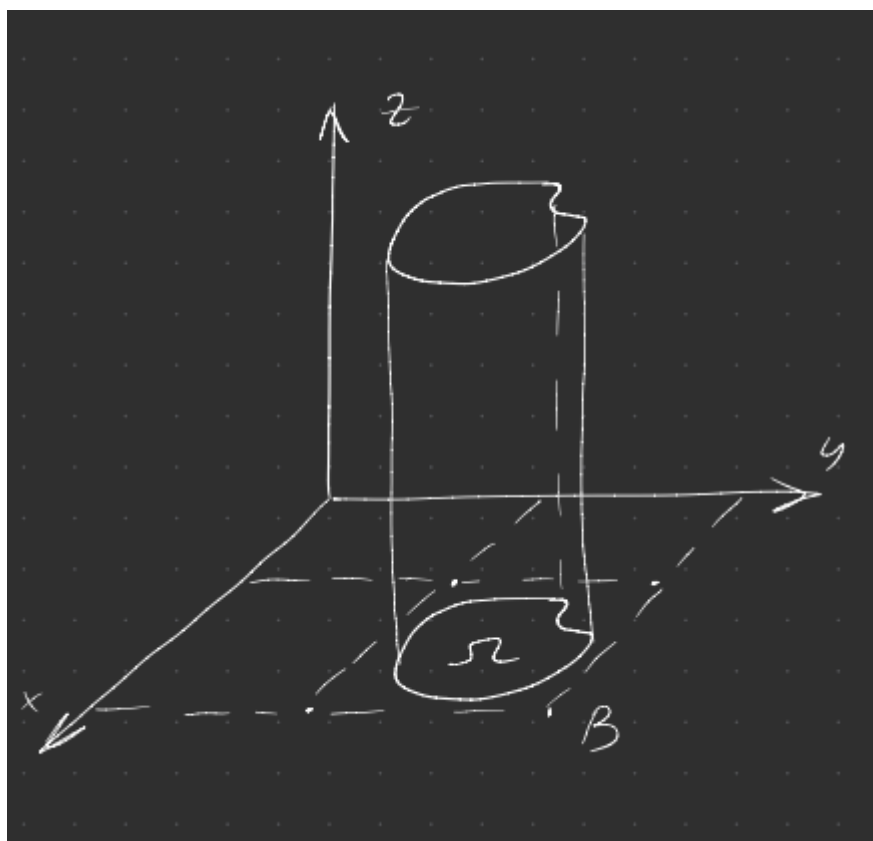


$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

### 11.3 $D \subset \mathbb{R}^3$ :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\} f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \in R(D) A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [c, d]$$

$$\iint_{\Omega} dx dy \int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} dz f(x, y, z) = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$



## 12 Объём цилиндрического тела.

### 12.0.1 Теорема

Пусть  $D$ -брус в  $\mathbb{R}^n$  и  $f$ -неотрицательная функция  $D \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $O_f$ —подграфию функции  $f$ , то есть

$$O_f = \{Q \in \mathbb{R}^{n+1} : Q = (P, u), P \in D, 0 \leq u \leq f(P)\}.$$

Тогда

$O_f$ —жорданово множество в  $\mathbb{R}^{n+1} \iff f$ —интегрируема на  $D$ , при этом

$$V(O_f) = \int_D f.$$

Доказательство

Предположим, что  $f$ -интегрируема и пусть  $E$ - множество точек разрыва. Пусть  $M = \sup_{P \in D} |f(P)|$  и  $A_1, A_2, \dots$ -брусы такие, что

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{o}{A}_k, \sum_{k=1}^{\infty} V(A_k) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда брусы  $B_k = A_k \times [0, M]$ ,  $k = 1, 2, \dots$  покрывают часть графика функции  $f$ , где  $f$ -разрывна и

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} V(A_k) \cdot M \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(подчеркнем! что здесь в левой части равенства суммируются  $(n+1)$ -мерный объемы, а справа  $n$ -мерные).

Отметим далее, что множество  $F = D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{o}{A}_k$ —замкнутое и, следовательно, компактное, причем на нем функция  $f$  непрерывна и, следовательно, —равномерно непрерывна. Пусть число  $\delta > 0$  характеризуется условием:

$$|P_1 P_2| < \delta \Rightarrow |f(P_2) - f(P_1)| < \frac{\varepsilon}{2V(D)}.$$

Пусть ранг разбиения  $\lambda$  руса  $D$  сделан меньше  $\delta$ . Если через  $S$  обозначить произвольную ячейку разбиения  $\lambda$ , то брусы  $S \times [m_S(f), M_S(f)]$  будут покрывать оставшуюся часть графика функции  $f$ , при этом

$$\sum_{\text{по } S \text{ из } \lambda} V(S \times [m_S(f), M_S(f)]) \leq \sum_{\text{по } S \text{ из } \lambda} V(S) \cdot \frac{\varepsilon}{2V(D)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом верхняя часть границы подграфика функции  $f$  оказывается покрыта системой брусков, суммарный объем которых не превосходит произвольно взятого положительного  $\varepsilon$ , то есть имеет меру-ноль. С учетом того факта, что гиперплоские грани подграфика  $O_f$  имеют  $(n+1)$ -мерный объем-ноль, получаем, что граница подграфика  $O_f$  имеет меру ноль, то есть характеристическая функция  $\chi_{O_f}$ -интегрируема, а подграфик  $O_f$ -является жордановым множеством.

Предположим, теперь,  $O_f$ -измеримо по Жордану. Тогда по теореме Фубини

$$V(O_f) = \int_{D \times [0, M]} \chi_{O_f} = \int_D dp \int_0^M \chi_{O_f}(P, u) du = \int_D f(P) dP = \int_D f$$

## 13 Дифференциальные уравнения (ДУ1) 1-го порядка: определение, формы записи ДУ1. Примеры.

### 13.1 Определение

ДУ называется уравнение, которое кроме неизвестных переменных и неизвестных функций содержит ещё и производные неизв. функций или их дифференциалы.

ДУ<sub>1</sub> называется уравнение

$$F(x, y, y')$$

где  $F$  - некоторая заданная функция 3-х переменных,  $y \in C^1_{<a,b>}$ ,  $< a, b >$  - интервал.

### 13.2 Формы записи

1. **Неявная:**  $F(x, y, y') = 0$
2. **Нормальная:**  $y' = f(x, y)$
3. **Симметричная:**  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

## 14 Общее, частное и особое решения ДУ1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка).

### 14.1 Общее решение

Семейство функций  $\{y = \phi(x, C)\}_{C \in R}$  задаёт общее решение ДУ в области  $D$ , если: - для  $\forall C = C_0$  - допустимого соотв. функ.  $y = \phi(x, C_0)$  – решение:

$$\phi'(x, C_0) \equiv f(x, \phi(x, C_0))$$

- $\forall (x_0, y_0) \in D \exists! C_0 \in R : y_0 = \phi(x_0, C_0)$ , т.е функция  $y = \phi(x, C_0)$  - Решение задачи Коши с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$

### 14.2 Частное решение

Частным решением ДУ<sub>1</sub> наз решение, полученное из общего решения фиксацией произвольной постоянной  $C$ .

### 14.3 Особое решение

Решение  $y = \tilde{\phi}(x)$  ДУ<sub>1</sub> называется особым решением ДУ, если через каждую точку  $(x_0, \tilde{\phi}(x_0))$  соответствующей интегральной кривой проходит другая инт.кривая – график решения  $y = \tilde{\phi}(x)$

### 14.4 Теорема ( $\exists$ и $!$ решения задачи Коши)

$$(1) \begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Если  $f$  непр в

$$U(x_0, y_0)$$

, то задача Коши (1),(2) имеет единственное решение в  $V(x_0)$

## 15 ДУ 1-го порядка с разделенными и разделяющимися переменными: определение, формы записи, общий интеграл, решение задачи Коши.

### 15.1 ДУ с разделенными переменными

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C - \text{общий интеграл}$$

### 15.2 ДУ с разделяющимися переменными

Ду вида:

$$(1) M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

$$(2) y' = f(x) * g(y)$$

### 15.3 Общие интегралы ДУ с разделяющимися переменными

$$(1') \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

$$(2') \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

### 15.4 Решение задачи Коши

$$(1) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(1') \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

$$(2') \int_{x_0}^x \frac{M_1(t)}{M_2(t)}dt + \int_{y_0}^y \frac{N_2(s)}{N_1(s)}ds = 0$$



## 16 Однородные ДУ первого порядка: определение, формы записи, общий интеграл, решение задачи Коши.

### 16.1 Определение

ДУ наз однородным степени  $m \in \mathbb{R}$  для любого

$$\forall \lambda \neq 0 : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m \cdot f(x, y)$$

ДУ наз однородным, если в НФ оно имеет вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

В симметричной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

если,  $P$  и  $Q$  однородные функции одного порядка

### 16.2 Общий интеграл

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln(C|x|), u = \frac{y}{x}$$

## 17 Линейные ДУ 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной

### 17.1 Определение

ДУ вида  $y' + p(x)y = q(x)$ , где  $y \in C'(X)$ ,  $p, q \in C(X)$ ,  $X \subset R$

ЛНДУ:  $y' + py = q$

ЛОДУ:  $y' + py = 0$

### 17.2 Метод Лагранжа

Решаем ЛОДУ от данного:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} - \text{общее решение ЛОДУ,}$$

где  $C$  заменено на  $C(x)$

От получившегося берём производную и подставляем в исходное уравнение

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1$$

$$y = \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

## 18 Линейные ДУ 1-го порядка. Метод Бернулли.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Замена  $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$v(u' + p(x)u) + uv' = q(x)$$

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0 \\ v' = \frac{q(x)}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = e^{-\int p(x)dx} \\ v' = q(x)e^{\int p(x)dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = e^{-\int p(x)dx} \\ v = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \end{cases}$$

Потом подставляем в  $y = uv$

## 19 Уравнение Бернулли.

ДУ вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^a$$

где  $a \neq 1, a \neq 0, a \in \mathbb{Q}$

Решается методом Бернулли.

## 20 ДУ высших порядков, задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

### 20.1 Определение

$ДУ_n$  - ДУ имеющие производные высших порядков

### 20.2 Задача Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \in D \subset R^n \end{array} \right.$$

### 20.3 Теорема ( $\exists$ и $!$ решения задачи Коши)

Если  $f \in C(U(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}))$

и имеет  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \in C(U(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}))$ ,

то в окрестности  $U(x_0)$ , задача Коши имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

## 21 ДУ, допускающие понижение порядка. Примеры

### 21.1 Не содержащее производной до $k$ -той

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, n > 0$$
$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

Замена для решения:  $z = y^k$

### 21.2 Не содержащее независимой переменной

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Замена для решения:

$$z = y' : y' = z(y),$$
$$y'' = \frac{d}{dx} z(y) = z'(y) y' = z z'$$

и т.д. до  $y^{(n)}$

### 21.3 Однородное относительно искомой ф-ии и её производных

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ где } F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k * F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

Замена для решения:

$$z = \frac{y'}{y}, y'' = (yz)'$$

и т.д. до  $y^{(n)}$

## 22 Линейные однородные ДУ высших порядков: основные определения

### 22.1 Определение

ЛОДУ<sub>n</sub>:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

$$\text{где } y \in C^n(X), p_k \in C(X), k = \overline{1, n}$$

### 22.2 Линейный диф. оператор n-го порядка

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + \dots + P_n(x)I$$

$$L : C^n(X) \rightarrow C(X)$$

$$\frac{d^k}{dx^k} \equiv D^k : y^{(k)} = D_y^k, k = \overline{0, n}, D^0 = I : D_y^0 = I_y = y$$

### 22.3 Ядро оператора

$$\ker L = \{y \in C^n(X) : L_y = 0\} - \text{множество решений ЛОДУ}_n$$

$\dim \ker L = n$  – размерность ядра

## 23 Линейная независимость решений, определитель Вронского.

### 23.1 Определение (Вронскиан)

Определитель Вронского системы функций (вронскиан):

$$W(x) := \begin{vmatrix} \phi_1(x) \dots \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) \dots \phi_n'(x) \\ \dots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) \dots \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

### 23.2 Теорема

Для того, чтобы ЛК  $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$ , где  $y_k$  - решение ( $k = \overline{1, n}$ ) являлось общим решением ЛОДУ<sub>n</sub>  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) \dots y_n(x) \\ y_1'(x) \dots y_n'(x) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) \dots y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

### 23.3 Определение (Линейная независимость)

Функции  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$  называются **линейно зависимыми** на промежутке  $X$ , если существуют такие  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ , одновременно не обращающиеся в 0, что

$$(1) \alpha_1 \phi_1(x) + \dots + \alpha_n \phi_n(x) = 0, \forall x \in X$$

Если (1) справедливо **только** при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то  $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  называются **линейно независимыми** на  $X$



## 24 Фундаментальная система решений (ФСР) линейного ДУ.

$$(1) \alpha_1 \phi_1(x) + \dots + \alpha_n \phi_n(x) = 0, \forall x \in X$$

Если (1) справедливо **только** при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то  $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  наз **ЛНЗ** на  $X$

$\forall$  совокупность (набор, система)  $n$  ЛНЗ решений ЛОДУ $_n$  называется его ФСР

### 24.1 Теорема 1

$$\forall y_1, \dots, y_n - \text{ФСР} \Leftrightarrow W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 \dots y_n \\ y'_1 \dots y'_n \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

### 24.2 Теорема 2

Для любого ЛОДУ существует ФСР

Найдём  $n$  решений дифференциального уравнения, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

■

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, y'_1(x_0) = \dots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) &= 0, y'_2(x_0) = 1, y''_2(x_0) = \dots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) &= \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{решения ЛНЗ} \Rightarrow \text{образуют ФСР} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad \blacksquare$$

## 25 Примеры построения ФСР для линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

$$(1) y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, a_k \in R; k = \overline{1, n}; y \in C^n(X)$$

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n I$$

$$(2) Ly = 0$$

$$\exists \text{ФСР} \{y_k\}_{k=1}^n - \text{частные ЛНЗ решения}$$

$$\dot{y} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

### 25.1 Метод Эйлера

Ищем частные решения (1), (2) в виде  $y = e^{\lambda x}$

$$D^k e^{\lambda x} = (e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$$

$$L e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n - \text{характеристический полином}$$

$$L e^{\lambda x} = P_n(\lambda) e^{\lambda x}$$

$$L e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \Lambda - \text{множество корней}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \{\lambda_k \in C : \text{mult}(\lambda_k) = m_k, k = \overline{1, l}\}; m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$$

## 25.2 Структура ФСР и общее решение

### 25.2.1 Вид 1.

Структура  $\Lambda$

$$\begin{aligned} mult(\lambda_n) &= 1 \\ \lambda_k \in RP_n(\lambda) &= \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k) \end{aligned}$$

Структура ФСР и общее решение

$$\begin{aligned} \text{ФСР} \{y_k = e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n \\ \dot{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

### 25.2.2 Вид 2.

Структура  $\Lambda$

$$\lambda_k : mult(\lambda_n) = m_k$$

Структура ФСР и общее решение

$$\begin{aligned} \lambda_1(m_1) : y_1^{(1)} &= e^{\lambda_1 x}, \\ y_1^{(2)} &= x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_1^{(m_1)} = x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_2(m_2) : y_2^{(1)} &= e^{\lambda_2 x}, y_2^{(2)} = x e^{\lambda_2 x}, \dots, y_2^{(m_2)} = x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ &\dots\dots \\ \lambda_l(m_l) : y_l^{(1)} &= e^{\lambda_l x}, y_l^{(2)} = x e^{\lambda_l x}, \dots, y_l^{(m_l)} = x^{m_l-1} e^{\lambda_l x} \end{aligned}$$

$$\dot{y} = (C_1 + C_2 x + \dots + C_{m_1} x^{m_1-1}) e^{\lambda_1 x} + \dots + (C_{n-m_l} + C_{n-m_l+1} x + \dots + C_n) x^{m_l-1} e^{\lambda_l x}$$

### 25.2.3 Вид 3.

Структура  $\Lambda$

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$$

$$\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$$

$$\text{mult}(\lambda_n) = 1$$

Структура ФСР и общее решение

$$\text{ФСР: } \{y_k^{(1)} = e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x; y_k^{(2)} = e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x\}_{k=1}^{2n}$$

$$\dot{y} = e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + D_1 \sin \beta_1 x) + \dots + e^{\alpha_n x} (C_n \cos \beta_n x + D_n \sin \beta_n x)$$

### 25.2.4 Вид 4.

Структура  $\Lambda$

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$$

$$\text{mult}(\lambda_n) = r_n$$

Структура ФСР и общее решение

$$\text{ФСР: } \{y_k^{(1)} = e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x; z_k^{(1)} = e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x, \dots, y_k^{(r_n)} = x^{r_n-1} e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x; z_k^{(r_n)} = e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x\}_{k=1}^n$$

$$\dot{y} = \dots + C_{r_1} x^{r_1-1} \cos \beta_1 x + e^{\alpha_1 x} (D_1 \sin \beta_1 x + \dots + D_{r_1} x^{r_1-1} \sin \beta_1 x) + \dots$$



$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \dots y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) \dots y_n'(x_0) \\ \dots \\ y_1^{(n-2)}(x_0) \dots y_n^{(n-2)}(x_0) \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \dots y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - \dot{y}(x_0) \\ y_0' - \dot{y}'(x_0) \\ \dots \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} - \dot{y}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\text{Т.к. } W[y_1 \dots y_n](x_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_1^0 \\ \dots \\ C_n = C_n^0 \end{cases} \text{ определяется однозначно} \blacksquare$$

## 27 Лине́йные неоднородные ДУ $n$ -го порядка, решение методом вариации произвольных постоянных.

$$Ly = f, L\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\} - \text{ФСР}$$

$$]y = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n$$

$$Ly = f \Leftrightarrow L\left(\sum_{k=1}^n C_k(x)y_k\right) = f \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n [LC_k(x)y_k + C_k(x)Ly_k] = f \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (LC_k)y_k = f$$

Имеем  $n$  неизв. ф-и  $C_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , они должны быть выбраны т.е., чтобы  $y$  удовлетв. ЛНДУ, поэтому  $n - 1$  условий можно задать произвольно. Выберем эти  $n - 1$  условий так, чтобы производные от  $y$  имели такой вид.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n C'_k(x)y_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x)y'_k = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x)y_k^{(n-2)} = 0 \end{cases} \quad (n-1) - \text{усл}$$

$$\text{n-ое условие } \sum_{k=1}^n C'_k(x)y_k^{(n-1)} = f$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \dots y_n \\ y'_1 \dots y'_n \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)} \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots 0 \\ \dots \\ f \end{pmatrix} \quad W(x) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} y_1 \dots y_n \\ y'_1 \dots y'_n \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)} \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots 0 \\ \dots \\ f \end{pmatrix}$$

$$C'_k(x) = \phi_k(x)$$

$$C_k(x) = \int \phi_k(x) dx + \sim C_k$$

$$y = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k = \sum_{k=1}^n (\sim C_k + \int \phi_k(x) dx) y_k = \sum_{k=1}^n \sim C_k y_k + \sum_{k=1}^n (\int \phi_k(x) dx) y_k,$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^n \sim C_k y_k = \dot{y} - \text{общ. реш},$$

$$\sum_{k=1}^n (\int \phi_k(x) dx) y_k = \overset{\circ}{y} - \text{частн. реш}$$



## 28 Метод вариации произвольных постоянных для линейного ДУ 2-го порядка. Примеры.

$$I) y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\Lambda = \{\lambda_{1,2} = \pm i, m_{1,2} = 1\} \Rightarrow \Phi\text{CP:}\{y_1 = \cos x, y_2 = \sin x\}$$

$$\overset{\circ}{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$]y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} W(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin x}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1(x) = \int \frac{d \cos x}{\cos x} + \tilde{C}_1 = \ln(\cos x) + \tilde{C}_1 C_2(x) = x + \tilde{C}_2$$

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x * \ln(\cos x) + x \sin x$$

## 29 Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Построение частного решения методом неопределенных коэффициентов

### 29.1 Определение

$$f(x) = e^{\nu x} [P_n(x) \cos \mu x + Q_m(x) \sin \mu x], \text{ где } \mu, \nu \in R, n = \deg P_n, m = \deg Q_m$$

наз. правой частью специального вида (Квазиполиномом)

$$I. \nu = \mu = 0 \Rightarrow f(x) = P_n(x)$$

$$II. \mu = 0, \nu \neq 0 \Rightarrow f(x) = e^{\nu x} P_n(x)$$

Правая часть

$$\xi = \nu + i\mu - \text{тестовое число}$$

$$1) \xi \in \Lambda (mult \xi = r)$$

$$2) \xi \notin \Lambda (r = 0)$$

Вид частного решения

$$s = \max(n, m)$$

$$1) \dot{y} = x^r e^{\nu x} (\tilde{P}_s(x) \cos \mu x + \tilde{Q}_s(x) \sin \mu x)$$

$$\tilde{P}_s(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_s x^s$$

$$\tilde{Q}_s(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_s x^s$$

$$2) \dot{y} = e^{\nu x} (\tilde{P}_s(x) \cos \mu x + \tilde{Q}_s(x) \sin \mu x)$$

### 29.2 Метод неопр. коэф

Пример:

$$\dot{y}'' + y' = x + 2$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\Lambda = \{\lambda_1 = 0 (m_1 = 1), \lambda_2 = -1 (m_2 = 1)\} \subset R$$

$$\dot{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

$$f(x) = x + 2$$

$$n = 1, \xi = 0 \Rightarrow \xi \in \Lambda \Rightarrow r = 1$$

$$\dot{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

$$\dot{y}' = 2Ax + B$$

$$\dot{y}'' = 2A$$

Подставляем в исходное

$$2A + 2Ax + B = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \dot{y} = 0.5x^2 + x$$

$$y = \overset{\circ}{y} + \dot{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + 0.5x^2 + x$$

## 30 Системы линейных ДУ: определение формы записи, задача Коши

### 30.1 Обозначения и соглашения

$t \in T \subset \mathbb{R}$  — интервал

$x_1(t), x_2(t) \dots$  — функции (t)

$y_1(t), y_2(t) \dots$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in M^{n,t} = \mathbb{R}^n(C^n)$$

$X : t \in T \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$

вектор ф-я = векторозначная функция если,

$x_k \in C^1(T, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow X \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$

$k = 1 \dots n$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{X}, \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\int X(t) dt = \int \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int x_1(t) \\ \vdots \\ \int x_n(t) \end{pmatrix}; \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau$$

$$X(t) + Y(t) : \begin{pmatrix} x_1(t) + y_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) + y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha * X(t) = \begin{pmatrix} \alpha x_1(t) \\ \vdots \\ \alpha x_n(t) \end{pmatrix}$$

$X^T(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad X \in M^{n,1}; Y^T \in M^{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow X * Y^T = M^n \quad X^T = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1(t)y_1(t) + \dots x_n(t)y_n(t) \quad \|X\| =$

$$\sqrt{\langle X, X \rangle_{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{x_1^2(t) + \dots x_n^2(t)}$$

$$\left[ l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

ОНБ в  $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}(X^T * Y) = \frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n x_k(t) y_k(t) \right) = \langle \dot{X}, Y \rangle + \langle X, \dot{Y} \rangle$$

**30.2 Опр 1 СДУ называется система связывающая t неизв. фу-ции**

$x_1(t) \dots x_n(t)$  и их производные  $x_1'(t), x_1''(t) \dots x_1^{m_1}(t), x_2'(t) \dots x_2^{m_2}(t), x_n'(t) \dots x_n^{m_n}(t)$

$$F_k(t, x_1(t), \dots, x_1^{m_1}(t), x_2(t), \dots, x_2^{m_2}(t), \dots, x_n^{m_n}(t))) = 0$$

**30.2.1**  $\max(m_1 \dots m_n)$  наз порядком СДУ

$$F_k(t, \dot{X}(t), \ddot{X}(t) \dots) = 0, k = 1 \dots l$$

если  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$  то СДУ<sub>1</sub>

$$\begin{cases} x_1(t) := f_1(t, x_1(t) \dots (x_n(t))) \\ \dots \\ x_n(t) := f_n(t, x_1(t) \dots (x_n(t))) \end{cases} \quad \text{— нормальная форма СДУ}_1$$

$\dot{X}(t) = F(t, X(t))$  (1') — Векторная (матричная) форма записи СДУ<sub>1</sub> в нормальной форме  $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$X : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вектор функция

**30.2.2** Если  $F = F(x)$ , то СДУ<sub>1</sub> :  $\dot{X} = F(x)$  называется автономной

**30.2.3 Опр2** Если  $F(t, X(t)) = A(t) * X(t) + B(t)$ , где  $A \in M^n; A : T \rightarrow M^n; B : T \rightarrow \mathbb{R}$  то СДУ<sub>1</sub> наз Линейной Системой Дифференциальных Уравнений 1 порядка ЛСДУ<sub>1</sub>

$\dot{X} = A(t)X + B(t)$  — неоднородная ЛСДУ<sub>1</sub>

$\dot{X} = A(t)X$  — однородная ЛСДУ<sub>1</sub>

$A \in M^n :$

$\dot{X} = AX + B(t)$ , ЛСДУ<sub>1</sub> с постоянными коэффициентами неоднородная

$\dot{X} = AX$ , ЛСДУ<sub>1</sub> с постоянными коэффициентами однородная

**30.2.4** **Опр3** Решением системы ДУ:  $F(t, X, \dot{X}) = 0$  называется набор из  $n$ -функций  $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$   $C^1(T, \mathbb{R}^n)$ ; когда при подстановку в СДУ обращает в тождество:  
 $F[t, X(t), \dot{X}(t)] = 0$

**30.2.5** **Задача Коши**

$$\begin{cases} F(t, x_1(t) \dots x_n(t), \dot{x}_1(t) \dots \dot{x}_n(t)) = 0 \\ x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \quad (2) \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

$$F(t, X, \dot{X}) = 0$$

$$X|_{t=t_0} = X_0$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^0 \end{pmatrix} \quad (2')$$

(2)(2') — Задача Коши для СДУ<sub>1</sub>

**30.2.6** *Th1*( $\exists n!$  решения задачи Коши)

Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X) \\ X|_{t=t_0} = X_0 \end{cases} \text{ — имеет единственное решение в } D = V(t_0) \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

а)  $F \in C(\overline{D})$ ;

б)  $F \in C^1(D)$  и  $\|\frac{\partial F}{\partial x_k}\| \leq C_k, k = \overline{1, n} (C_k > 0)$

в)  $(t_0, X_0) \in D$

*N.B.*

1)  $a, b) \Leftrightarrow a') F \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$

2) б)  $\|F'_{x_k}\| \leq C_k, k = \overline{1, n} \Rightarrow \|F(*, X) - F(*, Y)\| \leq L\|X - Y\|$  — называется условие Линница (более сильное условие, чем условие ограничен  $F'_{x_k}$ )

## 31 Системы линейных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. Нормальная форма записи системы

**31.0.1 Оп2** Если  $F(t, X(t)) = A(t) * X(t) + B(t)$ , где  $A \in M^n; A : T \rightarrow M^n; B : T \rightarrow \mathbb{R}$  то СДУ<sub>1</sub> наз Линейной Системой Дифференциальных Уравнений 1 порядка ЛСДУ<sub>1</sub>

$\dot{X} = A(t)X + B(t)$ - неоднородная ЛСДУ<sub>1</sub>

$\dot{X} = A(t)X$ - однородная ЛСДУ<sub>1</sub>

$A \in M^n :$

$\dot{X} = AX + B(t)$ , ЛСДУ<sub>1</sub> с постоянными коэффициентами неоднородная

$\dot{X} = AX$ , ЛСДУ<sub>1</sub> с постоянными коэффициентами однородная

$$\begin{cases} x_1(t) := f_1(t, x_1(t) \dots (x_n(t))) \\ \dots \\ x_n(t) := f_n(t, x_1(t) \dots (x_n(t))) \end{cases} \quad \text{— нормальная форма СДУ}_1$$

## 32 Система линейных ДУ и её матричная форма записи. Однородная система линейных ДУ первого порядка

**32.0.1 Опр2** Если  $F(t, X(t)) = A(t) * X(t) + B(t)$ , где  $A \in M^n; A : T \rightarrow M^n; B : T \rightarrow \mathbb{R}$  то СДУ<sub>1</sub> наз Линейной Системой Дифференциальных Уравнений 1 порядка ЛСДУ<sub>1</sub>

$\dot{X} = A(t)X + B(t)$ - неоднородная ЛСДУ<sub>1</sub>  $\dot{X} = A(t)X$ - однородная ЛСДУ<sub>1</sub>  $A \in M^n :$

$\dot{X} = AX + B(t)$ , ЛСДУ<sub>1</sub> с постоянными коэффициентами неоднородная

$\dot{X} = AX$ , ЛСДУ<sub>1</sub> с постоянными коэффициентами однородная

$\dot{X}(t) = F(t, X(t))(1')$ —Векторная(матричная) форма записи СДУ1 в нормальной форме  $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$



### 33 Решение системы линейных ДУ для случаев различных вещественных корней, различных комплексных корней, кратных вещественных корней характеристического уравнения

#### 33.0.1 Метод собственных векторов и собственных значений матрицы коэффициентов

$$\dot{X} = AX, A \in M^n, X \in C^1(T, R^n)$$

$$]X(t) = e^{\lambda * t} * h, h \in \mathbb{R}^n : h \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$\dot{X} = \lambda * e^{\lambda t} h \Rightarrow \lambda e^{\lambda t} h = A(e^{\lambda t} * h)$$

$$\Leftrightarrow Ah = \lambda h, h \neq 0$$

$h$  - собственный вектор,  $A$  отвечающ. с. з.  $\lambda$

$$(A - \lambda)h = 0$$

$$\Rightarrow h \neq 0, \text{ то } \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda I) = r < n$$

$P_a(\lambda) := \det(A - \lambda I)$  - характеристический полином матрицы

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n * (\lambda - \lambda_1)^{k_1} * (\lambda - \lambda_2)^{k_2} * \dots * (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, k_j = \text{mult}(\lambda_j)$$

**33.0.2 Опр1** Число  $k_j$  наз алгебраической кратностью с.з.  $\lambda_j(\lambda - \lambda_j)k_j$  Число  $s_j = n - r_j = n - \text{rang}(A - \lambda_j I)$ -геометрическая кратность  $\lambda_j$ - количество ЛНЗ с. векторов, отвечающих  $\lambda_j$

$$\lambda_j \leftrightarrow \{h_{1j}, h_{2j}, \dots, h_{s_j j}\}$$

$$s_j = \dim \text{Span}\{h_1, \dots, h_{s_j j}\}$$

**33.0.3 Th1**  $0 < s_j \leq k_j$

**33.0.4 I случай** :  $s_j = k_j = 1$

$$I.1. \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_i \rightarrow h_j \Rightarrow \{X_j(t) = e^{\lambda_j t} h_j\} - \text{ФСР}$$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} * h_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} * h_n$$

$$I.2 \lambda = \alpha_j + ib_j, \overline{\lambda_j} = \alpha_j - ib_j \in \mathbb{C}$$

$$\text{Рассмотрим } X_j(t) = e^{(\alpha_j + ib_j)t} h_j = e^{\alpha_j t} e^{ib_j t} h_j = e^{\alpha_j t} \cos(b_j)t * h_j + ie^{\alpha_j t} \sin(b_j)t * h_j$$

$$h_j = u_j + iv_j$$

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t}(\cos(b_j)t*u_j - \sin(b_j)t*v_j) + ie^{\alpha_j t}(\cos(b_j)t*v_j - \sin(b_j)t*u_j) = U_j(t) + iV_j(t)$$

$$\dot{X} = AX \Leftrightarrow (D * I - A)X = 0 \Leftrightarrow LX = 0$$

$$LX_j(t) = 0 \Leftrightarrow LU_j + iLV_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} LU_j = 0 \\ LV_j = 0 \end{cases}$$

$$U_j = \operatorname{Re}(e^{\lambda_j t} h_j); V_j = \operatorname{Im}(e^{\lambda_j t} h_j)$$

$$X_j(t) = C_j^{(1)} \operatorname{Re}(e^{\lambda_j t} h_j) + C_j^{(2)} \operatorname{Im}(e^{\lambda_j t} h_j)$$

**33.0.5 II случай :**  $s_j = k_j > 1$

$$II.1 \lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{mult}(\lambda_j) = k_j$$

$$\lambda_j \leftrightarrow \{h_1, h_2, \dots, h_{k_j}\}$$

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t} (C_j^{(1)} h_1 + C_j^{(2)} h_2 + \dots + C_j^{(k_j)} h_{k_j})$$

$$II.2 \operatorname{mult}(\lambda_j) = k_j, \lambda_j = \alpha_j + ib_j \in C$$

$$X_j(t) = \sum_{k=1}^{k_j} C_j^{(k)} \operatorname{Re}(e^{\lambda_j t} h_j) + \sum_{k=1}^{k_j} D_j^{(k)} \operatorname{Im}(e^{\lambda_j t} h_j)$$

$$### III s_j < k_j p_j := k_j - s_j \operatorname{mult}(\lambda_j) = k_j > s_j$$

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t} (A_{j1} + A_{j2}t + \dots + A_{jp_j} t^{p_j})$$

неопр. коэф-ты  $A_{jq} \in \mathbb{R}^n$

## 34 ФСР линейной системы. Фундаментальная матрица (ФМ) линейной системы. Свойства ФСР и ФМ

### 34.1 ФСР

Фундаментальной системой решений однородного линейного дифференциального уравнения называется упорядоченный набор из  $n$  линейно независимых решений уравнения.

$$X_1, \dots, X_n - \text{базис(ЛНЗ) в } \text{Ker} L$$

### 34.2 Св-ва ФСР

**Lm1** Если  $\{X_1, \dots, X_n\}$ - ЛНЗ  $\Rightarrow W[X_1, \dots, X_n] \neq 0$

**Lm2** Если  $W[X_1, \dots, X_n] \neq 0 \Rightarrow \{X_k\}_{k=1}^n - \text{ЛНЗ}$

**Lm3**  $[X_1, \dots, X_n]$ - вектор функции является решением  $\dot{X} = A(t)X$

### 34.3 Th1 О структуре общего решения СЛОДУ<sub>1</sub>

Если  $X_1, \dots, X_n$  ЛНЗ реш  $\dot{X} = A(t)X$ , то  $X(t) = C_1 X_1(t) + \dots + C_n X_n(t)$ -общее решение системы;  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$

### 34.4 Опр2 ФМС

Фундаментальной матрицей системы(ФМС) или матрицантом  $\dot{X} = A(t)X$  называется матрица, столбцы которой образованы ФСР

$$M(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \dots x_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_{n1}(t) \dots x_{nn}(t) \end{pmatrix} : \det M = W$$

$$X(t) = M(t) * C, C = (C_1, \dots, C_n)^T$$

### 34.5 Th2

М удовл системе ЛДУ:  $\dot{M} = A(t)M$

#### 34.5.1 Док-во:

$$\dot{X} = AX; \dot{X} = \dot{M}(t)C \Rightarrow \dot{M}C = A(MC) \Leftrightarrow \dot{M}C = (AM)C \Leftrightarrow \dot{M} = AM$$

### 34.5.2 Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = C_2 t + C_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = 0 \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 34.6 Th3

$]M(t) - \text{ФМС}, \dot{X} = AX \Rightarrow S(t) = M(t) * B, \text{ где } B \in M^n, \det(B) \neq 0 - \text{ФМС } \dot{X} = AX$

#### 34.6.1 Док-во:

$$\dot{S} = \dot{M}B = (AM)B = A(MB) = AS \det S = \det(M(t)B) = \det M * \det B = W * \det B \Rightarrow \det B \neq 0$$

### **35 Нормальная фундаментальная матрица линейной системы. Свойства.**

## 36 Метод вариации произвольной постоянной для решения неоднородных линейных систем

### 36.1 Метод вариации

$$(1) \dot{X} = A(t)X + B(t)$$

$$\dot{X} = AX, X(t) = M(t)C$$

$$]X(t) = M(t) * C(t) \Rightarrow (1)$$

$$\dot{X} = \dot{M}(t)C(t) + M(t)\dot{C}(t)$$

$$\dot{M}(t)C(t) + M(t)\dot{C}(t) = AM(t)C(t) + B(t)$$

$$\dot{M}(t) = AM(t)$$

$$\cancel{AM(t)C(t)} + M(t)\dot{C}(t) = \cancel{AM(t)C(t)} + B(t)$$

$$M(t)\dot{C}(t) = B(t)$$

$$\det M = W \neq 0 \quad \underline{\dot{C}(t) = M^{-1}(t)B(t)}$$

I)  $\dot{X} = AX + B$  — общее решение

$$C(t) = \int M^{-1}(t)$$

$$X(t) = M(t)C_0 + M(t) * \int M^{-1}(t)B(t)dt$$

$$\overset{o}{X}(t) - M(t)C_0$$

$$\overset{*}{X}(t) - \int M^{-1}(t)B(t)dt$$

$$\text{II)} \begin{cases} \dot{X} = AX + B \\ \dot{X}|_{t=t_0} = X_0 \end{cases} \quad (1) \quad C(t) = \int_{t_0}^t M^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

$$X(t) = M(t) * \int_{t_0}^t M^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau - \text{Решение задачи Коши}$$

### 36.2 Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\sqrt{\frac{1}{t}} \\ \dot{y} = -2x + 2y + \sqrt{\frac{1}{t}} \end{cases} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \\ t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 =$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = 0(k_1 = 1); \lambda_2 = 3(k_2 = 1)\}$$

$$(A - \lambda_1 I)h_1 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \sim (1 \quad -1)$$

$$\Rightarrow h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)h_2 = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \sim (2 \quad 1)$$

$$2x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1, x_1 = \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow h_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{o}{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 * e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = C_2 * e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 1 & -2e^{3t} \end{pmatrix}; W = -2^{3t} - e^{3t} = -3e^{3t} \neq 0$$

$$M^{-1}(t) = -1/3e^{-3t} \begin{pmatrix} -2e^{3t} & -e^{3t} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} & -\frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}(t)B(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} & -\frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ t^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} dt + C_0 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ 1 \end{pmatrix} + C_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{t} + e^{3t} \\ 2\sqrt{t} - 2e^{3t} \end{pmatrix} + C_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2^0 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} + e^{3t} \\ 2\sqrt{t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$$



## 37 Числовой ряд. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.

### 37.1 Определения

$\{a_n\}$  – последовательность членов ряда

$\{S_n\}$  – последовательность частных сумм

$$S_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; a_2 = S_2 - S_1; a_3 = S_3 - S_2; a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := a_1 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$ , то ряд (1) называется сходящимся, а число  $S \in \mathbb{R}$  называется его суммой, в противном случае (если  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ) ряд называется расходящимся.

#### 37.1.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n + \dots$$

$$q^{n-1} = a_n, S_n = a_1 + \dots + a_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\text{Рассмотрим } q^n \rightarrow \begin{cases} 0, & |q| < 1; \\ +\infty, & |q| > 1, \end{cases}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1; \\ +\infty, & |q| > 1, \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = \infty$$

$\{q^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ -геометрическая прогрессия.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \text{ — геометрический ряд.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^{n-1} \frac{q^m}{1-q}, \quad |q| < 1$$

## 37.2 Теорема (необходимое условие сходимости)

Если  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ( $a_n \rightarrow 0$ )

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

NB: Необходимое условие сходимости еще называют “достаточным условием расходимости”.

### 37.2.1 Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 7} a_n = \frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 7} = \frac{n^2(3 + \frac{1}{n^2})}{n^2(4 + \frac{7}{n^2})} \rightarrow \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 7} \text{ — расходится.}$$

## 38 Свойства сходящихся числовых рядов.

### 38.1 Основные свойства рядов

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S < \infty - \text{сходится}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rightarrow \alpha S < \infty$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A < \infty, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha A + \beta B < \infty$$

Со сходящимися рядами можно работать как с конечными суммами.

(3)

Члены сходящегося ряда можно, не меняя их местами, группировать. От этого сходимость ряда не изменится, величина суммы тоже не изменится. (работает ассоциативность)

NB: в расходящихся рядах группировать члены нельзя.

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = S = 0$$

$$1 - (1 + 1) - 1 + \dots \neq 0$$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, m \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \dots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \dots = S_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$$

### 38.2 Теорема (об остатке числового ряда / о “хвосте”)

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ и его остаток } \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

(Отбрасывание/дописывание конечного числа членов на сходимость не влияет)

#### 38.2.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{c}{n^\alpha} + b_n \right), c \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Q}, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S < \infty$$

$\alpha > 1$  – сходится

$\alpha < 1$  – неопределен

## 39 Ряды с положительными членами. Признаки сравнения в разных формах и следствия. Примеры.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, a_n \geq 0 \quad (1)$$

### 39.1 Теорема (Необходимое и достаточное словие сходимости ряда)

Для сходимости ряда (1)  $\Leftrightarrow$  (необходимо и достаточно)  $\exists M > 0 : S_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

NB: Критерий сходимости знакопостоянного ряда по ограниченности частных сумм.

$S_n \leq S_{n+1} \Rightarrow \{S_n\} \nearrow, S_n \in M \Rightarrow$  ряд сходится.

### 39.2 Теорема 2 (первый признак сравнения в форме неравенства)

$$\left] \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \quad (2) \right]$$

$$\exists a_n \leq b_n \forall n > N_0 \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq A_n \leq B_n \rightarrow B$$

$\Rightarrow$  1) если (2) сходится, то (1) сходится

2) если (1) расходится, то (2) расходится

### 39.3 Теорема 3 (второй признак сравнения в предельной форме)

$$\left] \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \quad (2) \right] \exists l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} (l \neq 0, l \neq +\infty) \Rightarrow (1) \text{ и } (2) \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

#### 39.3.1 Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ — гармонический ряд } a_n = \frac{1}{n}, b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}; n \rightarrow \infty$$

### 39.4 Следствия

1.  $a_n = \bar{\bar{o}}(b_n) \Rightarrow (1) \text{ и } (2) \text{ имеют одинаковую сходимость}$
2.  $a_n \sim b_n \Rightarrow (1) \text{ и } (2) \text{ имеют одинаковую сходимость}$
- 3.

$$\begin{cases} p > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{сходится} \\ p \leq 1, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{расходится} \end{cases}$$

$$4. a_n \sim b_n \stackrel{def}{\iff} \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$5. a_n = \bar{\bar{o}}(b_n) \stackrel{def}{\iff} \lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \Leftrightarrow \exists \phi_n : |a_n| \leq \phi_n |b_n|, \phi_n - \text{ограничена}$$

## 40 Признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.

### 40.1 Теорема (Признак Даламбера)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0) \text{ если } \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \begin{cases} < 1 - \text{сходится} \\ > 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

### 40.2 Теорема (Признак Коши радикальный)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0) \text{ (1) если } \lim \sqrt[n]{a_n} = c \begin{cases} < 1 - \text{сходится} \\ > 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

### 40.3 Теорема (Признак Коши интегральный)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0), \ f \searrow, \ x \in [m, +\infty) \ f(n) = a_n \Rightarrow \int_m^{+\infty} f(x) dx \text{ и } \sum_{n=m}^{+\infty} a_n - \text{сходится или расходится одновременно}$$

### 40.4 Примеры:

1.

Признак Даламбера:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \ a_n = \frac{a^n}{n!}, \ a_{n+1} = \frac{a * a^n}{n!(n+1)} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{сходится}$

2.

Признак Коши радикальный:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}, \ a_n = \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2} \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}} = \left(\frac{7}{6}\right)^3 < 1 \Rightarrow \text{сходится}$

3.

Признак Коши интегральный:  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}, \ a_n = \frac{1}{n \ln^\alpha n} = f(n)$  Рассмотрим  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$

## 41 Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость.

### 41.0.1 Определение

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , если  $a_n$  произвольного знака называется знакопеременным. Рассмотрим  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  (2);  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  (1) если

### 41.0.2 Теорема

Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится.

## 42 Знакопередающие ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка знакопередающегося ряда (теорема Лейбница).

### 42.0.1 Определение

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  - **знакопеременный**, если  $u_n$  произвольного знака.

### 42.0.2 Определение

Знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  - **знакопередающийся**, если соседние члены ряда различного знака, то есть  $u_n \cdot u_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Знакопередающийся ряд удобно записывать в виде  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , где  $a_n > 0$ .

### 42.0.3 Теорема (признак Лейбница)

Для того, чтобы знакопередающийся ряд сходился, достаточно выполнения следующих условий:

1.  $a_n \geq a_{n+1}$  начиная с некоторого номера  $n$ ;
2.  $\lim a_n = 0$ .

**42.0.3.0.1 Пример:** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  - сходится, так как:

1.  $1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \dots$
2.  $\lim \frac{1}{n} = 0$

### 42.0.4 Теорема Лейбница

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n$$

$$S = S_n + R_n,$$

$$S_n = \sum_{m=1}^n (-1)^m a^m$$

Остаток знакопередающегося ряда  $R_n = S - S_n$  будет меньше по модулю его первого члена:  
 $|R_n| < a_{n+1}$

(прим.: запись  $\lim$  означает  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ )

Доказательства теорем можно посмотреть тут. Если надо, оформлю в билете.



## 43 Определение функционального ряда. Поточечная сходимость. Область сходимости функционального ряда.

### 43.0.1 Определение

Пусть дана бесконечная последовательность  $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , которая определена на множестве  $X$ . *Функциональным рядом* называется бесконечная сумма, соответствующая этой последовательности:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $x \in X$ .

### 43.0.2 Определение

Каждой точке  $x_0 \in X$  соответствует числовой ряд, который может сходиться или расходиться. Если ряд сходится, то  $x_0$  – *точка сходимости*.

### 43.0.3 Определение поточечной сходимости

Пусть ряд сходится при всех  $x \in X$ . Тогда существует предел частичных сумм  $\lim S_n(x) = S(x)$ .

Более крутыми словами:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(x, \varepsilon) : \forall n > N, |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, x \in X$

### 43.0.4 Определение

Множество всех *точек сходимости* называется *областью сходимости ряда*  $X_{\text{сх}}$ . Понятно, что  $X_{\text{сх}} \subset X$

## 44 Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$  имеет область сходимости  $X_{\text{сх}}$ .

### 44.0.1 Определение

Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$  называется *равномерно сходящимся* на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  и всех точек  $x \in [a, b]$  существует такое число  $N_0(\varepsilon)$ , что для любого  $N > N_0(\varepsilon)$  справедливо:  $|S(x) - \sum_{n=1}^N u_n(x)| < \varepsilon, x \in X_{\text{сх}}$ .

### 44.0.2 Свойства

1. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на отрезке  $[a, b]$ , то сумма ряда  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  непрерывна на этом отрезке.
2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на отрезке  $[a, b]$ , то ряд можно почленно интегрировать, то есть справедливо равенство:

$$\int_a^x (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt$$

3. Если на отрезке  $[a, b]$  члены функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  имеют непрерывные производные и ряд, составленный из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится равномерно, то справедливо равенство:

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

## 45 Признак Вейерштрасса.

### 45.1 Определение (мажорантный ряд)

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$  называется *мажорантным* для функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на множестве  $X$ , если в каждой точке  $x \in X$ , выполняется неравенство  $|u_n(x)| \leq a_n$ .

### 45.2 Теорема Вейерштрасса

Функциональный ряд сходится **равномерно** на множестве  $X$ , если его мажорантный ряд сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сх} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \text{сх равномерно, } x \in X$$

Для доказательства достаточно проверить равномерную сходимость ряда по определению (критерий Коши).

#### 45.2.1 Пример

Исследуем функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  на равномерную сходимость на множестве  $X = [-1; 1]$ .

На этом множестве можно составить мажорантный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Этот ряд сходится как гармонический с  $\alpha > 1$ . Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  — сходится равномерно на отрезке  $[-1; 1]$ .

## 46 Степенные ряды. Первая теорема Абеля.

### 46.1 Определение (степенной ряд)

Функциональный ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  называется *степенным рядом*.

Понятно, что заменой переменной  $t = x - x_0$  можно свести степенной ряд к виду  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t)^n$ , поэтому далее рассматриваются ряды вида  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$ . Такой ряд полностью определяется последовательностью  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

### 46.2 Теорема Абеля

Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$  сходится в точке  $x_1$ , то он сходится **абсолютно** в каждой точке интервала  $(-|x_1|, |x_1|)$ . Если ряд расходится в точке  $x_2$ , то он расходится в каждой точке интервала  $(-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$ .

Скорее всего её можно доказать с помощью признака сравнения в форме неравенства.

## 47 Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формулы для радиуса сходимости.

В этом ответе рассматривается степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

### 47.1 Определение (радиус сходимости)

$R > 0$  называют *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд сходится при всех  $x : |x| < R$  и расходится при всех  $x : |x| > R$ . Если ряд расходится во всех точках кроме  $x = 0$ , то  $R = 0$ . Если ряд сходится во всех точках  $x \in \mathbb{R}$ , то  $R = \infty$ .

### 47.2 Определение (интервал сходимости)

Интервал  $(-R, R)$  называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Замечание: интервал сходимости не следует путать с областью сходимости  $X_{\text{сх}}$ . Как следствие из теоремы Абеля: область сходимости степенного ряда совпадает с одним из следующих интервалов:

1.  $(-R; R)$ ;
2.  $[-R; R]$ ;
3.  $(-R; R]$ ;
4.  $[-R; R)$ ;

### 47.3 Теорема (формула Даламбера)

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Для доказательства этой формулы можно исследовать ряд из абсолютных величин  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  с помощью признака Даламбера.

Ряд сходится абсолютно:

$$d = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Ряд расходится:

$$d = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1 \Leftrightarrow |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

#### 47.4 Теорема (формула Коши-Адамара)

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Доказать эту формулу можно так же, как и формулу Даламбера: просто исследовать степенной ряд с помощью признака Коши.

## 48 Свойства радиуса сходимости степенных рядов при их интегрировании и дифференцировании.

### 48.1 Теорема

Радиус сходимости степенного ряда при его интегрировании или дифференцировании не изменяется.

Доказать это можно, если просто почленно проинтегрировать или продифференцировать ряд. В результате получится новый степенной ряд, у которого  $a_n$  будет такой же, как у исходного. По формуле Даламбера или формуле Коши-Адамара можно найти радиус сходимости нового ряда, и он совпадёт с областью сходимости исходного ряда.

Да, это весь билет. Тут написано даже больше, чем нужно

## 49 Ряды Тейлора и Маклорена.

Пусть  $f(x)$  - дифференцируемая бесконечная число раз функция в окрестности точки  $x = x_0$ . То есть  $f(x) \in C_{U(x_0)}^\infty$ .

### 49.1 Определение (ряд Тейлора)

Рядом Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  называется степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

### 49.2 Определение (ряд Маклорена)

Ряд Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$  называется *рядом Маклорена*.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Рекомендуется ознакомиться со следующими двумя билетами для более чёткого понимания темы.



## 50 Теорема о представлении функции сходящимся рядом Тейлора.

Пусть дана функция  $f(x) \in C_{U(x_0)}^\infty$  и её ряд Тейлора в точке  $x = x_0$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n$ .

### 50.1 Теорема

Если в интервале  $(x_0 - R; x_0 + R)$  функция  $f(x)$  имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, то есть  $|f^{(n)}(x)| \leq M (n = 1, 2, \dots)$ , то ряд Тейлора этой функции сходится к  $f(x)$  для любого  $x$  из интервала  $(x_0 - R; x_0 + R)$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n, x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Следует отметить, что если функция разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора. Такое разложение единственно.

### 50.2 Определение

Функция, для которой существует ряд Тейлора называется *аналитической*.

## 51 Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

### 51.1 Вывод ряда Маклорена для функции

Для примера разложим функцию  $e^x$  в ряд Тейлора в точке  $x = 0$  (то есть в ряд Маклорена):

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x; f^{(n)}(0) = 1$$

Получаем ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Все производные  $e^x$  ограничены на любом отрезке  $[-a; a]$ , то есть  $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq M = e^a$ . Поэтому согласно о теореме о разложении можно записать:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Радиус сходимости вычислим по формуле Даламбера.

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty$$

Тогда интервал сходимости ряда  $-(\infty; +\infty)$

### 51.2 Разложения основных функций

Следующие разложения и интервалы их сходимости следует запомнить.

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$2. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$4. (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot x^n, x \in (-1; 1)$$

$$5. \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1; 1)$$

$$6. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1; 1)$$

$$7. \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n, x \in (-1; 1)$$

## 52 Ортогональная система функций (ОГС). Разложение функции в ряд по ортогональной системе. Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.

### 52.1 Определение (ОГС)

Функции  $f_i$  и  $f_j$  называются *ортогональными* на измеримом множестве  $X$ , если:

$$\int_X f_i(x) \cdot f_j(x) dx = 0$$

*Ортогональная система функция* – множество попарно ортогональных функций на множестве.

#### 52.1.1 Пример

Функции  $\sin nx$  и  $\cos kx$  образуют ОГС на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx = 0$$

### 52.2 Определение (Ряд по ОГС)

Пусть  $\varphi_n$  образуют ОГС на множестве  $X$ . Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) - \text{ряд по ОГС}$$

### 52.3 Теорема

Пусть ряд по ОГС на множестве  $X$  сходится к функции  $\varphi(x)$ . Тогда коэффициенты  $a_n$  ряда по ОГС можно вычислить следующим образом:

$$a_n = \frac{\int_X f(x) \cdot \varphi_n(x) dx}{\int_X \varphi_n^2(x) dx}$$

А сама функция раскладывается в ряд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), x \in X$$

В этом случае эти коэффициенты называются *коэффициентами Фурье*, а сам ряд называется *рядом Фурье*

## 53 Полнота и замкнутость ОГС. Неравенство Бесселя, Равенство Парсеваля.

### 53.1 Определение (замкнутость ОГС)

ОГС на множестве  $X$  называется *замкнутой*, если не существует такой функции  $f$ , что

$$\int f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \forall n$$

### 53.2 Определение (полнота ОГС)

Пусть дана ОГС  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  на множестве  $X$ . Такая система называется *полной*, если каждая кусочно-непрерывная функция  $f$  её ряд Фурье сходится к этой функции на множестве  $X$ , т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left[ f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \right] dx = 0$$

В действительности, если ОГС замкнутая, она является полной и наоборот: полная ОГС является замкнутой.

### 53.3 Определение (равенство Парсеваля)

$$\int_X f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_X \varphi_n^2(x)dx$$

### 53.4 Теорема (критерий полноты ОГС)

Для того, чтобы ОГС являлась полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции  $f_n$  кусочно-непрерывной на множестве  $X$  выполнялось равенство Парсеваля.

### 53.5 Теорема (неравенство Бесселя)

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle f, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\rangle \right|^2$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

## 54 Основная система тригонометрических функций. Её ортогональность. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.

### 54.1 Определение (Основная система тригонометрических функций)

Система функций  $1, \sin lx, \cos kx$  называется *основной системой тригонометрических функций* (далее ОСТФ).

### 54.2 Теорема (ортогональность ОСТФ)

ОСТФ является ортогональной на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Для доказательства проверим попарную ортогональность функций.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin lx dx &= -\frac{1}{l} \cos lx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{l} - \frac{1}{l} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx dx &= \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \cdot \cos kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(lx + kx) + \cos(lx - kx)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{l+k} \cos(lx + kx) + \frac{1}{l-k} \sin(lx + kx) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{l+k} + \frac{1}{l+k} \right] = 0\end{aligned}$$

### 54.3 Определение (тригонометрический ряд)

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

### 54.4 Определение (тригонометрический ряд Фурье)

Тригонометрический ряд сходится к  $f(x)$  на множестве  $[-\pi, \pi]$ , то он называется её *тригонометрическим рядом Фурье*

## 54.5 Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

Для разложение функции в тригонометрический ряд Фурье необходимо найти коэффициенты Фурье  $a_0, a_n, b_n$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Тогда  $f(x)$  можно представить в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



## 55 Теорема Дирихле. Ряды Фурье для четной и нечетной функций. Ряд Фурье для функций произвольного периода.

### 55.1 Определение (условия Дирихле)

Функция  $f(x)$  называется удовлетворяющей условиям Дирихле на  $[a, b]$ , если:

1. Непрерывна на  $[a, b]$  или имеет конечное число точек разрыва I-рода.
2. Кусочно-монотонная на  $[a, b]$ , т.е. отрезок  $[a, b]$  можно разделить на конечное число отрезков, на которых  $f(x)$  монотонна.

### 55.2 Теорема Дирихле

Если функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  удовлетворяет на любом отрезке из  $\mathbb{R}$  условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится при любых  $x$ . При этом, в каждой точке непрерывности функции сумма ряда  $S(x) = f(x)$ , а в каждой точке разрыва  $x = \xi$  сумма  $S(\xi) = \frac{f(\xi-0) + f(\xi+0)}{2}$ , где запись  $f(\xi - 0)$  означает  $\lim_{x \rightarrow \xi-0} f(x)$ , а  $f(\xi + 0)$  означает  $\lim_{x \rightarrow \xi+0} f(x)$ .

### 55.3 Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Известно, что такое тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

Под знаком суммы мы видим чётную функцию  $\cos$  и нечётную функцию  $\sin$ . В действительности, если  $f(x)$  - чётная, то для её разложение будет содержать только косинусы, а если нечётная - только синусы. То есть:

$$\begin{aligned} f - \text{чётная} &\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \Leftrightarrow a_n = 0 \\ f - \text{нечётная} &\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow b_n = 0 \end{aligned}$$

Доказать это совсем несложно, если применить формулы для  $a_n$  и  $b_n$  для тригонометрического ряда и использовать свойство чётности  $f$ .

## 56 Комплексная форма ряда Фурье.

Известны следующие факты:

$$\begin{aligned}e^{inx} &= \cos nx + i \sin nx \\e^{-inx} &= \cos nx - i \sin nx\end{aligned}$$

Откуда можно получить:

$$\begin{aligned}\cos nx &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin nx &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\end{aligned}$$

Подставим эту форму синуса и косинуса в тригонометрический ряд Фурье

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})\end{aligned}$$

где  $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ,  $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ .

Коэффициенты этого ряда можно найти по формулам для тригонометрического ряда Фурье:

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx\end{aligned}$$

Таким образом, получается комплексная форма ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \text{ или } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$