Contents

1 Метод вариации произвольной постоянной для решения неоднородных линейных систем

1.1 Метод вариации

$(1)\dot{X} = A(t)X + B(t)$

$\dot{X} = AX, \; X(t) = M(t)C$

$]X(t) = M(t) * C(t) \Rightarrow (1)$

$\dot{X} = \dot{M}(t)C(t) + M(t)\dot{C}(t)$

$\dot{M}(t)C(t) + M(t)\dot{C}(t) = AM(t)C(t) + B(t)$

$\dot{M}(t) = AM(t)$

$\cancel{AM(t)C(t)} + M(t)\dot{C}(t) = \cancel{AM(t)C(t)} + B(t)$

$M(t)\dot{C}(t) = B(t)$

$$detM = W \neq 0\underline{\dot{C}(t) = M^{-1}(t)B(t)}$$

I)$\dot{X} = AX + B$ — общее решение
$C(t) = \int M^{-1}(t)$
$X(t) = M(t)C_0 + M(t) * \int M^{-1}(t)B(t)dt$
$\overset{o}{X}(t) - M(t)C_0$
$\overset{*}{X}(t) - \int M^{-1}(t)B(t)dt$

$$\text{II)} \begin{cases} \dot{X} = AX + B \\ \dot{X}_{|t=t_0} = X_0 \end{cases} (1) \; C(t) = \int_{t0}^{t} M^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

—

$$X(t) = M(t) * \int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau \text{ — Решение задачи Коши}$$

—

1.2 Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\sqrt{\dfrac{1}{t}} \\ \dot{y} = -2x + 2y + \sqrt{\dfrac{1}{t}} \end{cases} (2) \; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} B(t) = \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ t^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-2=$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda=0\Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sigma(A)=\{\lambda_1=0(k_1=1);\lambda_2=3(k_2=1)\}$$

$$(A-\lambda_1 I)h_1=\mathbb{O}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix},\sim (1\ \ -1)$$

$$\Rightarrow h_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)h_2=\mathbb{O}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix},\sim (2\ \ 1)$$

$$2x_1=-x_2\Leftrightarrow x_2=-2x_1, x_1=\alpha\neq 0$$

$$\Rightarrow h_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overset{o}{X}(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2*e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$X_1(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$X_2(t)=C_2*e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$M(t)=\begin{pmatrix}1 & e^{3t}\\ 1 & -2e^{3t}\end{pmatrix};W=-2^{3t}-e^{3t}=-3e^{3t}\neq 0$$

$$M^{-1}(t)=-1/3e^{-3t}\begin{pmatrix}-2e^{3t} & -e^{3t}\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}e^{-3t} & \frac{-1}{3}e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}(t)B(t)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}e^{-3t} & \frac{-1}{3}e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^{\frac{-1}{2}}\\ t^{\frac{-1}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^{\frac{-1}{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} dt + C_0 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ 1 \end{pmatrix} + C_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{t} + e^{3t} \\ 2\sqrt{t} - 2e^{3t} \end{pmatrix} + C_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2^0 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} + e^{3t} \\ 2\sqrt{t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

2 Числовой ряд. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.

2.1 Определения

$\{a_n\}$ – последовательность членов ряд
$\{S_n\}$ – последовательность частных сумм

$$S_n := a_1 + ... a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k S_1 = a_1;\ S_2 = a_1;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 a_1 = S_1;\ a_2 = S_2 - S_1;\ a_3 = S_3 - S_2 a_n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := a_1 + ... + a_n + ...\ (1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim\ S_n$$

Если $\exists\ \lim\ S_n = S < \infty$, то ряд (1) называется сходящимся, а число $S \in \mathbb{R}$ называется его суммой, в противном случае (если $\overline{\exists}\ \lim\ S_n$или $\lim\ S_n = \infty$) ряд называется расходящимся.

2.1.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n + ...$$

$q^{n-1} = a_n\ S_n = a_1 + ... + a_n = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

$$\text{Рассмотрим } q^n \to \left[\begin{array}{l} 0,\ |q| < 1; \\ +\infty, |q| > 1, \end{array}\right.$$

$$S = \lim\ S_n = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{q-1},\ |q| < 1; \\ +\infty, |q| > 1, \end{array}\right.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + ... = \infty$$

$\{q^{n-1}\}_{n \in N}$-геометрическая прогрессия.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \text{ — геометрический ряд.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \frac{1}{1-q},\ |q| < 1$$

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^{n-1} \frac{q^m}{1-q},\ |q| < 1$$

2.2 Теорема (необходимое условие сходимости)

$$\text{Если} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится, то} \lim\ a_n = 0\ (a_n \to 0)$$

Доказательство:

$$\lim\ a_n = \lim\left(S_N - s_{n-1}\right) = \lim\ S_n - \lim\ S_{n-1} = S - S = 0$$

NB: Необходимое условие сходимости еще называют “достаточным условием расходимости”.

2.2.1 Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+7} a_n = \frac{3n^2+1}{4n^2+7} = \frac{n^2(3+\frac{1}{n^2})}{n^2(4+\frac{7}{n^2})} \to \frac{3}{4}] \neq 0 \Rightarrow \text{ряд} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+7}\ \text{– расходится.}$$

3 Свойства сходящихся числовых рядов.

3.1 Основные свойства рядов

$$(1)\,]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S < \infty - \text{сходится}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to \alpha S < \infty$$

$$(2)\,]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A < \infty \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha A + \beta B < \infty$$

Со сходящимися рядами можно работать как с конечными суммами.
(3)
Члены сходящегося ряда можно, не меняя их местами, группировать. От этого сходимость ряда не изменится, величина суммы тоже не изменится. (работает ассоциативность)

NB: в расходящихся рядах группировать члены нельзя.

$(1-1)+(1-1)+... = S = 0$
$1-(1+1)-1+... \neq 0$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ m \in \mathbb{N} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + ... + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + ... a + 1 + .. + a_{m-1} + a_m = S_m a_{m+1} + ... = \sum_{n=m+1}^{+\infty}$$

3.2 Теорема (об остатке числового ряда / о “хвосте”)

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и его остаток $\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$ сходятся и расходятся одновременно

(Отбрасывание/дописывание конечного числа членов на сходимость не влияет)

3.2.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c}{n^\alpha} + b_n\right),\ c \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{Q},\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S < \infty$$

$\alpha > 1$ – сходится
$\alpha < 1$ – неопределен

4 Ряды с положительными членами. Признаки сравнения в разных формах и следствия. Примеры.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \geq 0\ (1)$$

4.1 Теорема (Необходимое и достаточное словие сходимости ряда)

Для сходимости ряда (1) $\Leftrightarrow$ (необходимо и достаточно) $\exists M > 0 : S_n \leq M\ \forall\ n \in N$
NB: Критерий сходимости знакопостоянного ряда по ограниченности частных сумм.
$S_n \leq S_{n+1} \Rightarrow \{S_n\} \nearrow,\ S_n \in M \Rightarrow$ ряд сходится.

4.2 Теорема 2 (первый признай сравнения в форме неравенства)

$$]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ (1) \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ (2)$$

$\exists\ a_n \leq b_n\ \forall\ n > N_0 \in \mathbb{N}$
$0 \leq A_n \leq B_n \to B$
$\Rightarrow$ 1) если (2) сходится, то (1) сходится
2) если (1) расходится, то (2) расходится

4.3 Теорема 3 (второй признак сравнения в предельной форме)

$]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ (1) sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ (2)]\, \exists\, l = \lim \dfrac{a_n}{b_n} (l \neq 0, l \neq +\infty) \Rightarrow$ (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно

4.3.1 Пример:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ —гармонический ряд $a_n = \dfrac{1}{n},\ b_n = \ln(1+\dfrac{1}{n}) l = \lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} = |\ln(1+\dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}; n \to$

4.4 Следствия

1. $a_n = \overline{\overline{o}}(b_n) \Rightarrow$ (1) и (2) имеют одинаковую сходимость
2. $a_n \sim b_n \Rightarrow$ (1) и (2) имеют одинаковую сходимость
3.

$$\begin{cases} p > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{сходится} \\ p \leq 1, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{расходится} \end{cases}$$

4. $a_n \sim b_n \overset{def}{\iff} \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

5. $a_n = \overline{\overline{o}}(b_n) \overset{def}{\iff} \lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, \phi_n : |a_n| \leq \phi_n |b_n|,\ \phi_n -$ ограничена

5 Признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.

5.1 Теорема (Признак Даламбера)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0)\text{если } \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \begin{cases} <1 - \text{сходится} \\ >1 - \text{расходится} \end{cases}$$

5.2 Теорема (Признак Коши радикальный)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0) \ (1)\text{если } \lim \sqrt[n]{a_n} = c \begin{cases} <1 - \text{сходится} \\ >1 - \text{расходится} \end{cases}$$

5.3 Теорема (Признак Коши интегральный)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0), \ f \searrow, \ x \in [m, +\infty) f(n) = a_n \Rightarrow \int_m^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \sum_{n=m}^{+\infty} a_n \text{—сходится или расходится од}$$

5.4 Примеры:

1.

Признак Даламбера: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \ a_n = \frac{a^n}{n!}, \ a_{n+1} = \frac{a * a^n}{n!(n+1)} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ сход

2.

Признак Коши радикальный: $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{7n+1}{6n+5})^{3n+2}, \ a_n = (\frac{7n+1}{6n+5})^{3n+2} \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{(\frac{7n+1}{6n+5})^{3n}}$

3.

Признак Коши интегральный: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\, ln^\alpha n}, \ a_n = \frac{1}{n\, ln^\alpha n} = f(n)$Рассмотрим $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^\alpha x} = \lim_{b \to +}$

6 Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость.

6.0.1 Определение

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, если a_nпроизвольного знака газывается знакопеременным.Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,(2);\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\ (1)$есл

Теорема Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится.

7 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда (теорема Лейбница).

7.0.1 Определение

Ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$ - **знакопеременный**, если u_n произвольного знака.

7.0.2 Определение

Знакопеременный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$ - **знакочередующийся**, если соседние члены ряда различного знака, то есть $u_n \cdot u_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Знакочередующийся ряд удобно записывать в виде $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n > 0$.

7.0.3 Теорема (признак Лейбница)

Для того, чтобы знакочередующийся ряд сходился, достаточно выполнения следующих условий:

1. $a_n \geq a_{n+1}$ начиная с некоторого номера n;
2. $\lim a_n = 0$.

7.0.3.0.1 Пример: Ряд $\Sigma_{n=1}^{n}(-1)^n \frac{1}{n}$ - сходится, так как:

1. $1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$...
2. $lim \frac{1}{n} = 0$

7.0.4 Теорема Лейбница

$S = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^n$
$S = S_n + R_n,$
$S_n = \Sigma_{m=1}^{n}(-1)^m a^m$

Остаток знакочередующегося ряда $R_n = S - S_n$ будет меньше по модулю его первого члена: $|R_n| < b_{n+1}$

(прим.: запись $\lim$ *означает* $\lim_{n\to\infty}$*)*

Доказательства теорем можно посмотреть тут. Если надо, оформлю в билете.

8 Определение функционального ряда. Поточечная сходимость. Область сходимости функционального ряда.

8.0.1 Определение

Пусть дана бесконечная последовательность $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая определена на множестве X. *Функциональным рядом* называется бесконечная сумма, соответствующая этой последовательности: $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in X$.

8.0.2 Определение

Каждой точке $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд, который может сходиться или расходиться. Если ряд сходится, то x_0 – *точка сходимости*.

8.0.3 Определение поточечной сходимости

Пусть ряд сходится при всех $x \in X$. Тогда существует предел частичных сумм $\lim S_n(x) = S(x)$.

Более крутыми словами: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(x, \varepsilon) : \forall n > N, |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, x \in X$

8.0.4 Определение

Множество всех *точек сходимости* называется *областью сходимости ряда* $X_{\text{сх}}$. Понятно, что $X_{\text{сх}} \subset X$

9 Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Пусть ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ имеет область сходимости $X_{\text{сх}}$.

9.0.1 Определение

Функциональный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ и всех точек $x \in [a, b]$ существует такое число $N_0(\varepsilon)$, что для любого $N > N_0(\varepsilon)$ справедливо: $|S(x) - \Sigma_{n=1}^{N} u_n(x)| < \varepsilon, x \in X_{\text{сх}}$.

9.0.2 Свойства

1. Если ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отвезке $[a, b]$, то сумма ряда $S(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна на этом отрезке.
2. Если ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отвезке $[a, b]$, то ряд можно почленно интегрировать, то есть справедливо равенство:

$$\int_a^x (\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(t))dt = \Sigma_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$$

3. Если на отрезке $[a, b]$ члены функционального ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеют непрерывные производные и ряд, составленный из производных $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то справедливо равенство:

$$(\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

10 Признак Вейерштрасса.

10.1 Определение (мажорантный ряд)

Ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ называется *мажорантным* для функционального ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X, если в каждой точке $x \in X$, выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$.

10.2 Теорема Вейерштрасса

Функциональный ряд сходится **равномерно** на множестве X, если его мажорантный ряд сходится.

$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ – сх $\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – сх равномерно, $x \in X$

Для доказательства достаточно проверить равномерную сходимость ряда по определению (критерий Коши).

10.2.1 Пример

Исследуем функциональный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на равномерную сходимость на множестве $X = [-1; 1]$.

На этом множестве можно составить мажорантный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится как гармонический с $\alpha > 1$. Следовательно, ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ – сходится равномерно на отрезке $[-1; 1]$.

11 Степенные ряды. Первая теорема Абеля.

11.1 Определение (степенной ряд)

Функциональный ряд вида $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ называется *степенным рядом*.

Понятно, что заменой переменной $t = x - x_0$ можно свести степенной ряд к виду $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (t)^n$, поэтому далее рассматриваются ряды вида $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$. Такой ряд полностью определяется последовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

11.2 Теорема Абеля

Если степенной ряд $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$ сходится в точке x_1, то он сходится **абсолютно** в каждой точке интервала $(-|x_1|, |x_1|)$. Если ряд расходится в точке x_2, то он расходится в каждой точке интервала $(-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$.

Скорее всего её можно доказать с помощью признака сравнения в форме неравенства.

12 Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формулы для радиуса сходимости.

В этом ответе рассматривается степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

12.1 Определение (радиус сходимости)

$R > 0$ называют *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд сходится при всех $x : |x| < R$ и расходится при всех $x : |x| > R$. Если ряд расходится во всех точках кроме $x = 0$, то $R = 0$. Если ряд сходится во всех точках $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

12.2 Определение (интервал сходимости)

Интервал $(-R, R)$ называюется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Замечание: интервал сходимости не следует путать с областью сходимости $X_{\text{сх}}$. Как следствие из теоремы Абеля: область сходимости степенного ряда совпадает с одним из следующих интервалов:

1. $(-R; R)$;
2. $[-R; R]$;
3. $(-R; R]$;
4. $[-R; R)$;

12.3 Теорема (формула Даламбера)

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Для доказательства этой формулы можно исследовать ряд из абсолютных величин $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ с помощью признака Даламбера.

Ряд сходится абсолютно:

$$d = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Ряд расходится:

$$d = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1 \Leftrightarrow |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

12.4 Теорема (формула Коши-Адамара)

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Доказать эту формулу можно так же, как и формулу Даламбера: просто исследовать степенной ряд с помощью признака Коши.

13 Свойства радиуса сходимости степенных рядов при их интегрировании и дифференцировании.

13.1 Теорема

Радиус сходимости степенного ряда при его интегрировании или дифференцировании не изменяется.

Доказать это можно, если просто почленно проинтегрировать или продифференцировать ряд. В результате получится новый степенной ряд, у которого a_n будет такой же, как у исходного. По формуле Даламбера или формуле Коши-Адамара можно найти радиус сходимости нового ряда, и он совпадёт с областью сходимости исходного ряда.

Да, это весь билет. Тут написано даже больше, чем нужно

14 Ряды Тейлора и Маклорена.

Пусть $f(x)$ - дифференцируемая бесконечная число раз функция в окрестности точки $x = x_0$. То есть $f(x) \in C^{\infty}_{U(x_0)}$.

14.1 Определение (ряд Тейлора)

Рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

14.2 Определение (ряд Маклорена)

Ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = 0$ называется *рядом Маклорена*.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Рекомендуется ознакомиться со следующими двумя билетами для более чёткого понимания темы.

15 Теорема о представлении функции сходящимся рядом Тейлора.

Пусть дана функция $f(x) \in C^{\infty}_{U(x_0)}$ и её ряд Тейлора в точке $x = x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$.

15.1 Теорема

Если в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ функция $f(x)$ имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, то есть $|f^{(n)}(x)| \leq M (n = 1, 2, ...)$, то ряд Тейлора этой функции сходится к $f(x)$ для любого x из интервала $(x_0 - R; x_0 + R)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n, x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Следует отметить, что если функция разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора. Такое разложение единственно.

15.2 Определение

Функция, для которой существует ряд Тейлора называется *аналитической*.

16 Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

16.1 Вывод ряда Маклорена для функции

Для примера разложим функцию e^x в ряд Тейлора в точке $x = 0$ (то есть в ряд Маклорена):

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x; f^{(n)}(0) = 1$$

Получаем ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Все производные e^x ограничены на любом отрезке $[-a; a]$, то есть $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq M = e^a$. Поэтому согласно о теореме о разложении можно записать:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Радиус сходимости вычислим по формуле Даламбера.

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty$$

Тогда интервал сходимости ряда – $(-\infty; +\infty)$

16.2 Разложения основных функций

Следующие разложения и интервалы их сходимости следует запомнить.

$$1.\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$2.\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$3.\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$4.\ (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} \cdot x^n, x \in (-1; 1)$$

5. $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x \in (-1;1)$

6. $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1;1)$

7. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n, x \in (-1;1)$