Contents

1 Двойной и тройной интегралы: определение на языке интегральных сумм Римана. Определение площади и объёма.

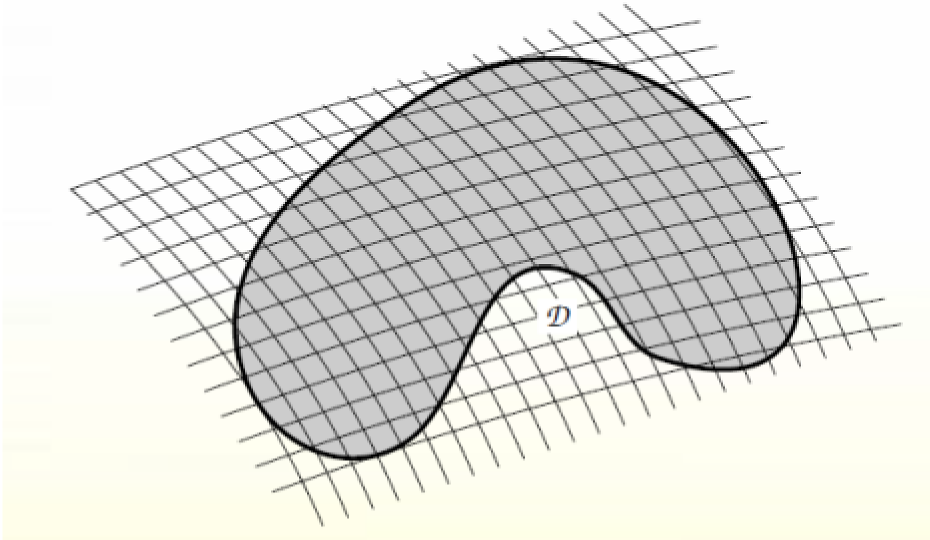


Figure 1: Разбиение области

$D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k,\ D_i \cap D_j = \emptyset\ (i \neq j)$
Разбиением называется: $\lambda = \{D_1 ... D_n\}$ Ранг разбиения (т.е. наибольшее из диаметров $D_i,\ D_j$): $|\lambda| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} D_i$ Составим интегральную сумму Римана: $s(f, \Lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(D_i),\ (x, y) \in D$
Двойной интеграл-предел интегральных сумм:
$\iint\limits_D f ds = \lim\limits_{|\lambda| \to 0} s(f,\ \Lambda), \Lambda = \{(D_1,\ x_1,\ y_1), ..., (D_n,\ x_n,\ y_n)\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |\lambda| < \delta \Rightarrow |s(f, \Lambda) - \iint\limits_D f ds| < \varepsilon\ \forall (x_i, y_i) \in D_i$
Тройной интеграл-предел интегральных сумм:
$\iiint f dv\ =\ \lim\limits_{|\lambda| \to 0} s(f, \Lambda),\ \ s(f, \Lambda)\ =\ \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) V(D_i),\ \ V(D_i)\ -$ объем области D_i.
Геометрический смысл двойного и тройного интегралов: $\rceil\ f(x, y) \geq 0$
$S(D) := \iint\limits_D dxdy;\ V(D) := \iiint\limits_G dxdydz$

2 Определение n-мерного бруса (параллелепипеда) и разбиения бруса.

2.1 Определение

Замкнутый прямоугольный параллепипед или n-мерный интервал $D \subset \mathbb{R}^n$ определен условием $P\{x_1, ..., x_n\} \in D \Leftrightarrow a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, ...,\ n$
При этом пишут
$D = [a_1,\ b_1] \times ... \times [a_n,\ b_n]$ Такие параллепипеды называются брусами. Объем $V(D)$ бруса определяется равенством $V(D) \overset{\text{Опр}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$

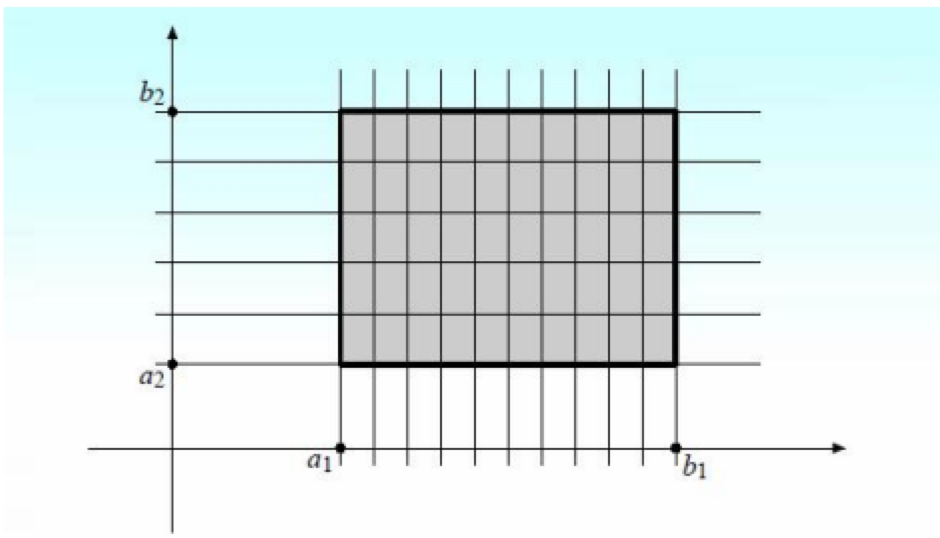


Figure 2: К определению 1.2

Разбиением α интервала $[a, b]$ удобно называть множество точек $\{t_0, t_1, ..., t_k\}$ таких, что $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$
Множество λ действительно делит интервал $[a, b]$ на k интервалов $[t_{i-1}, t_i],\ i = 1, ..., k$.

2.2 Определение

Разбиением λ бруса D называется кортеж $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ одномерных разбиений λ_i интервалов $[a_i, b_i]$.

3 Суммы Дарбу и их основные свойства. Нижний и верхний интегралы Дарбу и их свойства.

Схожими билетами являются билеты №4, 5, поэтому советую посмотреть их тоже, там могут быть важные детали.

$D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n], D \subset \mathbb{R}^n,\ f$ ограничена по $[a, b]$
$\forall A \subset D : M_A(f) = \sup\limits_{x \in A} f(x),\ m_A(f) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$—верхняя и нижняя границы на отрезке А.
$\mu(A) = \prod\limits_{i=1}^{n}(b_k - a_k)$—мера бруса А.

3.1 Определение

Пусть λ-разбиение бруса D и $f\colon\ D \to \mathbb{R}$—ограниченная функция. Верхняя и нижняя суммы Дарбу определяются, соответсвенно, равенствами $\sigma^*(f, \lambda) = \sum\limits_{\text{по A из } \lambda} M_A(f)\mu(A),\ \sigma_*(f, \lambda) = \sum\limits_{\text{по A из } \lambda} m_A(f)\mu(A),$
суммирование ведется по всем параллепипедам А из разбиения λ.
По построению, очевидно, $\sigma_*(f, \lambda) \le \sigma^*(f, \lambda)$

3.2 Свойства:

1. Для произвольного разбиения λ и ν , где $|\lambda| < |\nu|$ $\sigma_*(f, \lambda) \le \sigma_*(f, \nu)$

2. Нижние суммы Дарбу ограничены сверху, а верхние снизу.
3. При добавлении к имеющемуся разбиению новых точек σ_* никак не может уменьшиться, а σ^* никак не может увеличиться.
   $\sigma_*(f, \tau) \ge \sigma_*(f, \lambda)$
   $\sigma^*(f, \tau) \le \sigma^*(f, \lambda)$
   τ—изменения λ.
   Величины $I_*(f, D) = \sup\limits_{\lambda} \sigma_*(f, \lambda)$—нижний интеграл Дарбу.
   $I^*(f, D) = \inf\limits_{\lambda} \sigma^*(f, \lambda)$—верхний интеграл Дарбу.
   $I_*(f, D) \le I^*(f, D)$
   $\sigma_* \le I_* \le I^* < \sigma^*\ \forall \lambda, \mu$—произвольные разбиения.

4 Определение кратного интеграла на языке интегралов Дарбу. Критерий интегрируемости (на языке сумм Дарбу).

Схожими билетами являются билеты №3, 5, поэтому советую посмотреть их тоже, там могут быть важные детали.

4.0.1 Определение

Если $\sup\limits_{\lambda} \sigma_*(f,\lambda) = \inf\limits_{\lambda} \sigma^*(f,\lambda)$ (точные границы берутся по всем разбиениям λ), функция f называется интегрируемой по брусу D и величина $I = \sup\limits_{\lambda} \sigma_*(f,\lambda) = \inf\limits_{\lambda} \sigma^*(f,\lambda)$ называется интегралом от функции f по D. при этом пишут $\int\limits_D f = I$.

Величины $I_*(f,D) = \sup\limits_{\lambda} \sigma_*(f,\lambda)$ и $I^*(f,D) = \inf\limits_{\lambda} \sigma^*(f,\lambda)$ всегда существуют и называются, соответсвенно, нижним и верхним интегралами Дарбу.
$I_*(f,D) \leq I^*(f,D)$.
Функция интегрируема тогда и только тогда, когда нижний и верхний интегралы Дарбу равны между собой и их общее значение называется интегралом (Дарбу) функции f.
Если в обозначении интеграла нужно подчеркнуть размерность пространства, вместо $\int\limits_D f$пишут
$\int$ n раз $\int_D f$ или $\int ... \int\limits_D f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$.
Например, интеграл по прямоугольнику $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ будет обозначаться $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и называется тройным интегралом, а интеграл по параллелепипеду $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ будет обозначаться $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ и называется тройным интегралом. Возможны и другие естественные модификации обозначений, как $\int\limits_D f(P)d\mu$ или $\int\limits_D f(P)dP$.

4.0.2 Теорема (Критерий интегрируемости)

$f-$интегрируема $\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \lambda : \ \sigma^*(f,\lambda) < \varepsilon$.
Доказательство:
$\exists \nu : \ \int\limits_D f - \sigma_*(f,\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists \tau : \ \sigma^*(f,\tau) - \int\limits_D f < \frac{\varepsilon}{2}$.
Если λ продолжэпет разбиения ν, τ, то тем более
$\sigma^*(f,\lambda) - \int\limits_D f < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\int\limits_D f - \sigma_*(f,\lambda) < \frac{\varepsilon}{2}$,
что ведет к оценке $\sigma^*(f,\lambda) - \sigma_*(f,\lambda) < \varepsilon$.
$\forall \varepsilon > 0 : \ I^*(f,D) - I_*(f,D) < \varepsilon$, то есть равенство верхнего и нижнего интегралов.

4.0.2.0.1 Пример $f(P) = c = Const$
$\sigma_*(f, \lambda) = \sigma^*(f, \lambda) = \sum\limits_{\text{по A из } \lambda} c\mu(A) = c \sum\limits_{\text{по A из } \lambda} \mu(A) = c\mu(D)$, откуда $\int\limits_D f = c\mu(D)$.

5 Свойства интеграла по n-мерному параллелепипеду.

5.1 1. Линейность.

5.1.1 Теорема

Если функции f и g интегрируемы на брусе D, то функции $f+g$ и αf $(\alpha = Const)$ также интегрируемы, причем $\int\limits_D (f+g) = \int\limits_D f + \int\limits_D g$,
$\int\limits_D \alpha f = \alpha \int\limits_D f$.

Доказательство.
$]A-$произвольный параллепипед из разбиения λ. Тогда $\forall P \in A$
$m_A(f) + m_A(g) \le f(P) + g(P) \le M_A(f) + M_A(g)$, откуда
$m_A(f) + m_A(g) \le m_A(f+g) \le M_A(f+g) \le M_A(f) + M_A(g)$.
Умножая на $\mu(A)$ и суммируя по всем ячейкам разбиения, приходим к неравенствам
$\sigma_*(f,\lambda) + \sigma_*(g,\lambda) \le \sigma_*(f+g,\lambda) \le \sigma^*(f+g,\lambda) \le \sigma^*(f,\lambda) + \sigma^*(g,\lambda)$.
Далее, как следствие,
$\sigma_*(f,\lambda) + \sigma_*(g,\lambda) \le I_*(f+g,D) \le I^*(f+g,D) \le \sigma^*(f,\lambda) + \sigma^*(g,\lambda)$.
Отсюда (в силу интегрируемости f и g)
$\int\limits_D f + \int\limits_D g = I_*(f,D) + I_*(g,D) \le I_*(f+g,D) \le I^*(f+g,D) \le I^*(f,D) + I^*(g,D) = \int\limits_D f + \int\limits_D g$,
что доказывает равенства
$I_*(f+g,D) = I^*(f+g,D) = \int\limits_D f + \int\limits_D g$
и, как следствие, равенство
$\int\limits_D (f+g) = \int\limits_D f + \int\limits_D g$.
Докажем теперь однородность интеграла (возможность вынести множитель за знак интеграла). Если $\alpha > 0$, то
$m_A(\alpha f) = \alpha m_A(f)$ и $M_A(\alpha f) = \alpha M_A(f)$,
откуда (при $\alpha > 0$)
$I_*(\alpha f, D) = \alpha I_*(f,D)$ и $I^*(\alpha f, D) = \alpha I^*(f,D)$
в частности,
$\int\limits_d \alpha f = \alpha \int\limits_D f$.
Далее заметим, что
$m_A(-f) = -M_A(f)$ и $M_A(-f) = -m_a(f)$,
откуда
$I_*(-f,D) = -I^*(f,D)$ и $I^*(-f,D) = -I_*(f,D)$,
то есть в случе интегрируемости функции f
$I_*(-f,D) = I^*(-f,D) = -\int\limits_D f$
и, следовательно,
$\int\limits_D (-f) = -\int\limits_D f$.

5.2 2. Монотонность

5.2.1 Теорема

] функции f и g интегрируемы на брусе D. Тогда
$f \le g \Rightarrow \int\limits_D f \le \int\limits_D g.$
Доказательство
$\sigma_*(f,\lambda) \le \sigma_*(g,\lambda) \le \int\limits_D g,$
откуда
$\int\limits_D f \le \int\limits_D g.$
Как следствие, отметим свойство ограниченности интеграла, выраженное неравенством:
$m_D(f)\mu(D) \le \int\limits_D f \le M_D(f)\mu(D),$
где f-произвольная функция, интегрируемая на брусе D.

5.3 3. Теорема

Если f—интегрируема на брусе D, то $|f|$—также интегрируема, причем
$|\int\limits_D f| \le \int\limits_D |f|$. Доказательство
$M_A(|f|) - m_A(|f|) = \sup\limits_{x\in A} |f(x)| - \inf\limits_{y\in A} |f(y)| = \sup\limits_{x\in A} |f(x)| + \inf\limits_{y\in A} -|f(y)|$
$= \sup\limits_{x,y\in A} (|f(x)| - |f(y)|) = \sup\limits_{x,y\in A} ||f(x)| - |f(y)|| \le \sup\limits_{x,y\in A} |f(x) - f(y)| = \sup\limits_{x,y\in A} (f(x) - f(y))$
$= \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{y\in A}(-f(y)) = \sup\limits_{x\in A} f(x) - \inf\limits_{y\in A} f(y) = M_A(f) - m_A(f),$
и, как следствие,
$I^*(|f|,D) - I_*(|f|,D) \le I^*(f,D) - I_*(f,D)$
что влечет за собой интегрируемость $|f|$ при условии, что f-интегрируема.
Оценка интеграла по абсолютной величине вытекает из манотонности интегралла:
$\int\limits_D f \le \int\limits_D |f|$ и $\int\limits_D f = \int\limits_D (-f) \le \int\limits_D |f|.$

5.4 4. Теорема

Если f и g—интегрируемы на брусе D, то произведение fg—также интегрируемая функция.
Доказательство
Прежде всего докажем, что квадрат интегрируемой функции-также интегрируемая функция.
Действительно, полагая $M = M_D(|f|)$, находим
$M_A(f^2) - m_A(f^2) = \sup\limits_{x\in A} f^2(x) - \inf\limits_{y\in A} f^2(y) = \sup\limits_{x\in A} f^2(x) + \sup\limits_{y\in A}(-f^2(y))$
$\sup\limits_{x,y\in A} (f^2(x) - f^2(y)) = \sup\limits_{x,y\in A} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup\limits_{x,y\in A} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup\limits_{x,t\in A} (|f(x) + f(y)||f(x) - f(y)|)$

$\leq 2M \sup_{x,y\in A}(f(x)-f(y)) = 2M[\sup_{x\in A} f(x) + \sup_{y\in A}(-f(x))]$
$= 2M[\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{y\in A} f(y)] = 2M[M_A(f) - m_A(f)]$,
откуда
$\sigma^*(f^2,\lambda) - \sigma_*(f^2,\lambda) \leq 2M[\sigma^*(f,\lambda) - \sigma_*(f,\lambda)]$
и, как следствие,
$I^*(|f|,D) - I_*(|f|,D) \leq 2M[I^*(f,D) - I_*(f,D)]$,
что влечет интегрируемость f^2, при условии, что f—интегрируема.
Остается заметить, что
$fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$,
то есть fg—линейная комбинация интегрируемых функций.

6 Множество меры 0. Основные свойства. Примеры.

6.1 Определение1

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет объем-ноль($volA = 0$), если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A брусами $B_1....B_k$, суммарный объем которых меньше ε :

$volA \subset 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^{k} B_j \supset A :$
$\sum_{j=1}^{k} V(B_j) < \varepsilon$

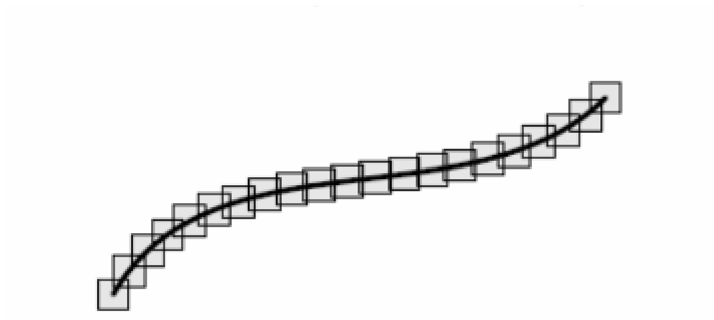


Figure 3: Площадь-ноль гладкой кривой

В этом определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие:

6.2 Лемма

в определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие

$$volA = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^{k} \overset{o}{B}_j \supset A : \sum_{j=1}^{k} V(B_J) < \varepsilon,$$

здесь $\overset{o}{B}_j$ – внутренность бруса B_j, т.е. открытый брус.

6.3 Док-во:

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть

$$\bigcup_{j=1}^{k} B_j \supset A : \sum_{j=1}^{k} V(B_j) < \varepsilon/2$$

Пусть брус C_j концентричен брусу B_j и подобен ему с некоторым коэффициентом подобия, строго больше единицы (т.е. брус C_j является растяжением бруса B_j во всех направлениях), при этом $B_j \subset \overset{o}{C_j}$. Коэффициент подобия фиксируем таким чтобы было выполнено неравенство:

$$V(C_j) \leqslant V(B_j) + \varepsilon/2k$$

Тогда открытые брусы $\overset{o}{C_j}$ покрывают множество A, причем

$$\sum_{j=1}^{k} V(C_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} V(B_j) + k\frac{\varepsilon}{2k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

6.4 Определение2

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль ($mesA = 0$), если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A последовательностью брусов $B_j, j \in \mathbb{N}$, суммарный объем которых меньше ε

$$mesA = 0 \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset A : \sum_{j=1}^{\infty} V(B_j)$$

6.5 Теорема

Пусть D - брус в $\mathbb{R}^n$ Ограниченная функция $f : D \to \mathbb{R}$, множество точек разрыва(I рода) которой имеет объем ноль, то $f \in R(B)$

6.6 Лемма

Как и в случае объема ноль в определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие

$$mesA = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists \bigcup_{j=1}^{k} \overset{o}{B_j} \supset A : \sum_{j=1}^{k} V(B_J) < \varepsilon$$

6.7 Объединение последовательности множеств меры-ноль если мера ноль:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, mesA_i = 0 \Rightarrow mesA = 0$$

6.8 Теорема

$]B \subset \mathbb{R}^n -$брус f: $B \to R$ если множество точек разрыва f имеет меру 0 то $f \in R(B)$

7 Критерий интегрируемости функции на языке множества меры 0

7.1 Th1

Пусть D- брус $\mathbb{R}^n$ и $E-$ множество точек разрыва ограниченной функции $f : D \to \mathbb{R}$. Тогда $f-$интегрируема на $D \iff mesE = 0$, т.е. ограниченная функция интегрируема тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру-ноль.

8 Измеримые по Жордану множества. Определение интеграла от функции по измеримому множеству.

$]D-$ произвольное множество на $\mathbb{R}^n$ Характеристической функцией множества D называется функция X_D определенная равентсвом

$$X_D(P) = \begin{cases} 1, P \in D, \\ 0, P \notin D \end{cases}$$

8.1 Определение 1

Пусть $A-$ брус в $\mathbb{R}^n$ и $f : A \to \mathbb{R}-$ ограниченная функция на A Пусть $D \supset A$ Тогда

$$\int_D f \stackrel{def}{=} \int_A f * X_D,$$

если функция интегрируема

8.2 Определение 2(скорее как доп инфа)

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{R}-$ ограниченная функция на множестве D. Пусть $D-$ ограничено и $A-$ произвольный брус в $\mathbb{R}^n$, содержащий $D : D \subset A$, Тогда

$$\int_D f \stackrel{def}{=} \int \widetilde{f}$$

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f(P), P \in D, \\ \quad 0, P \notin D \end{cases}$$

продолжение фукнции f нулем

Эти определения не зависят от выбора бруса A, содержащео множество D
Функция f будет интегрируемой на множестве D всегда, если она (или ее продолжение нулем) и характеристическая функция X_D интегрируемы на брусе $A \supset D$

8.3 Теорема

Пусть $D-$ ограниченное множество в $\mathbb{R}$. Тогда

$$X_D - \text{интегрируема} \iff \mu(\delta D) = 0$$

8.3.1 Док-во:

Элементраное следствие из теоремы о критерии интегрируемости(из прошлого билета), поскольку множество точек рарыва характеристической функции совпадает с границей множества.

8.4 Определение 3

Ограниченное множество $D \in \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Жордану если $\mu(\delta D) = 0$, значение интеграла

$$\int_D 1 = V(D)$$

называется объемом множества D. Одномерный объем называется длиной множества, а двумерный площадью

8.5 Теорема

$D-$ жорданово тогда и только тогда, когда $\exists v \geqslant 0 : \forall \varepsilon > 0 :$

1. В D можно заключить брусы $B_1 \dots B_k$ с непересекающимися внутреностями(объединение брусов целиком лежит в D)

$$D \supset \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j - \text{разбиение}$$

2. $IntB_s \bigcap IntB_j = \varnothing (s \neq j) : \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) > v - \varepsilon$ где $v = \mu(D)$

8.5.1 Док-во

$$\mu(D) = \int_D X_D, D \subset B$$

8.6 Следствия

1.Если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ жордановы мно-ва X и $Y : (X \subset D, D \subset Y) \wedge (\mu(Y) - \mu(X)) < \varepsilon)$
$\Rightarrow D$ жорданово множество

2.$\rceil D \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu(D) = 0$, если ($D-$жорданово)$\wedge(D \supset \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j)$, где $\mu(B_j) = 0$

9 Свойства аддитивности и усиленной аддитивности интеграла по измеримым множествам.

9.1 Теорема

$]D_1, D_2$ жордановы и $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то $D = D_1 \cup D_2 -$ тоже жорданово и:

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

9.2 Следствие (Усиленная аддитивность)

Если внутренности жордановых множеств не пересекаются ($\overset{o}{D}_1 \cap \overset{o}{D}_2 \neq \varnothing$), то $D_1 \cup D_2 = D$ тоже жорданово

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

9.2.1 Пример

с-ва усиленной аддитивности обладает $V(D)$:

$$\overset{o}{D}_1 \cap \overset{o}{D}_2 \neq \varnothing \Rightarrow V(D_1 \cup D_2) = V(D_1) + V(D_2)$$

10 Сведение кратного интеграла к повторному.

$]A \subset \mathbb{R}^n -$ брус, $B \subset \mathbb{R}^m -$ брус
$A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$
$f : A \times B \to \mathbb{R}$
$x = (x_1 ... x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n, y = (y_1, ..., y_m) \in B \subset \mathbb{R}^m$

$$x^o = (x_1^o ... x_n^o), y^o = (y_1^o ... y_m^o) - \text{точки}$$

Рассм $f(x, y)$,
$(.)x_0; f(x_0, y) = f_{x_0}(y), x_0 \in A$
$\{f_{x_0}(y)\}_{x_0 \in A} -$ семейство
$(.)y_0 : f(x, y_0) = f_{y_0}(x), y_0 \in B$
$\{f_{y_0}(x)\}_{y_0 \in B}$
$\varphi_*, \varphi^* : A \to \mathbb{R}$
$\varphi_*(x) = I_*(f_{y_0}(x)) = \underset{\lambda_b}{sup}(f_y, \lambda_B)$
$\varphi^*(x) = I^*(f_{y_0}(x)) = \underset{\lambda_b}{inf}(f_y, \lambda_B)$
$\lambda_B -$ разбиение бруса B
$\lambda_A -$ разбиение бруса A
$\varphi_*(x) \leq \varphi(x), \forall x \in A$
см. некст вопрос

11 Теорема Фубини (формулировка). Примеры: двойной и тройной интегралы.

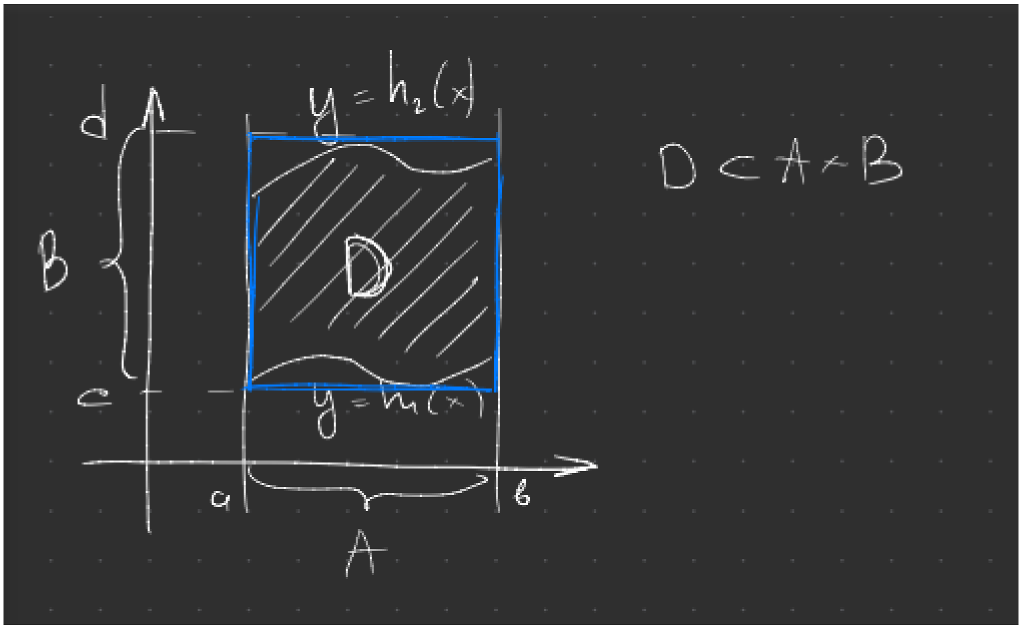
11.1 Теорема

$$]f \in R(A \times B), \text{ то } \varphi_*, \varphi^* \in R(A) \text{ и}$$
$$\int_{A\times B} f = \int_A \varphi_* = \int_A \varphi^*$$

11.1.1 Примеры двойной тройной интеграл

11.2 $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,$$
$$h_1(x) \le y \le h_2(x)\}, h_1, h_2 \in C_{[a,b]}$$
$$\forall x \in [a, b] : c \leqslant h_1(x) \leqslant h_2(x) \leqslant d$$
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)X_D(x, y)dxdy =$$
$$= \int_A dx \int_B dyf(x, y) * X_D(x, y)$$
$$\int_a^b dx \int_c^d dyf(x, y)X_D(x, y) =$$
$$\int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dyf(x, y)$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : g(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

11.3 $D \subset \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varPhi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\}$$

$$f : D \to \mathbb{R}, f \in R(D)$$

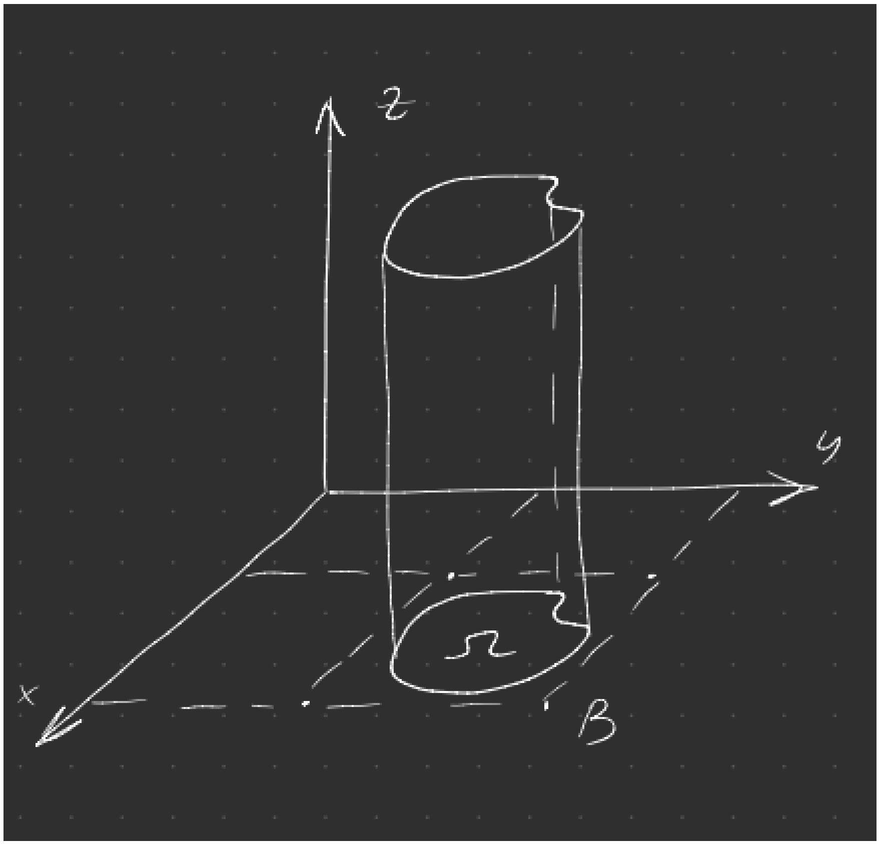
$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \supset D$$

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \supset \Omega - \text{проекция A на } xOy$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_A f(x, y, z) X_D(x, y, z) dxdydz =$$

$$\iint_B dxdy \int_{a_3}^{b_3} dz f(x, y, z) X_D(x, y, z) =$$

$$\iint_\Omega dxdy \int_{\varPhi(x,y)}^{\varPsi(x,y)} dz f(x, y, z) = \iint_\Omega g(x, y) dxdy$$


z
y
x
Ω
B

12 Объём цилиндрического тела.

12.0.1 Теорема

Пусть D-брус в $\mathbb{R}^n$ и f-неотрицательная функция $D \to \mathbb{R}$. Пусть O_f—подграфик функции f, то есть
$O_f = \{Q \in \mathbb{R}^{n+1} : Q = (P, u),\ P \in D,\ 0 \le u \le f(P)\}$.
Тогда
O_f—жарданово множество в $\mathbb{R}^{n+1} \iff f-$ интегрируема на D, при этом
$V(O_F) = \int\limits_D f$.
Доказательство
Предположим, что f-интегрируема и пусть E- множество точек разрыва. Пусть $M = \sup\limits_{P \in D} |f(P)|$ и $A_1, A_2, ...$-брусы такие, что
$E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overset{o}{A}_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} V(A_k) < \frac{\varepsilon}{2M}$.
Тогда брусы $B_k = A_k \times [0, M],\ k = 1, 2, ...$ покрывают часть графика функции f, где f-разрывна и
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} V(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} V(A_k) \cdot M \le \frac{\varepsilon}{2}$
(подчеркнем, что здесь в левой части равенства суммируются $(n+1)$-мерный объемы, а справа n-мерные).

Отметим далее, что множество $F = D \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{o}{A}_k$—замкнутое и, следовательно, компактное, причем на нем функция f непрерывна и, следовательно, -равномерно непрерывна. Пусть число $\delta > 0$ характеризуется условием:
$|P_1P_2| < \delta \Rightarrow\ |f(P_2) - f(P_1)| < \frac{\varepsilon}{2V(D)}$.
Пусть ранг разбиения λ руса D сделан меньше δ. Если через S обозначить произвольную ячейку разбиения λ, то брусы $S \times [m_S(f), M_S(f)]$ будут покрывать оставшуюся часть графика функции f, при этом
$\sum\limits_{\text{по S из } \lambda} V(S \times [m_S(f), M_S(f)]) \le \sum\limits_{\text{по S из } \lambda} V(s) \cdot \frac{\varepsilon}{2V(D)} = \frac{\varepsilon}{2}$.
Таким образом верхнаяя часть границы подграфика функции f оказывается покрыта системой брусов, суммарный объем которых не превосходит произвольно взятого положительного ε, то есть имеет меру-ноль. С учетом того факта, что гиперплоские грани подграфика O_f имеют $(n+1)$-мерный объем-ноль, получаем, что граница подграфика O_f имеет меру ноль, то есть характеристическая функция χ_{O_f}-интегрируема, а подграфик O_f-является жордановым множеством.
Предположим, теперь, O_f-измеримо по Жордану. Тогда по теореме Фубини

$V(O_f) = \int\limits_{D \times [0, M]} \chi_{O_f} = \int\limits_D dp \int\limits_0^M \chi_{O_f}(P, u) du = \int\limits_D f(P) dP = \int_D f$

13 Дифференциальные уравнения (ДУ1) 1-го порядка: определение, формы записи ДУ1. Примеры.

13.1 Определение

ДУ называется уравнение, которое кроме неизвестных переменных и неизвестных функций содержит ещё и производные неизв. функций или их дифференциалы.

ДУ$_1$ называется уравнение

$$F(x, y, y')$$

где F - некоторая заданная функция 3-х переменных, $y \in C^1_{<a,b>}, < a, b >$ - интервал.

13.2 Формы записи

1. **Неявная**: $F(x, y, y') = 0$
2. **Нормальная**: $y' = f(x, y)$
3. **Симметричная**: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

14 Общее, частное и особое решения ДУ1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка).

14.1 Общее решение

Семейство функций $\{y = \phi(x, C)\}_{C \in R}$ задаёт общее решение ДУ в области D, если: - для $\forall C = C_0$ - допустимого соотв. функ. $y = \phi(x, C_0)$ – решение:

$$\phi'(x, C_0) \equiv f(x, \phi(x, C_0))$$

- $\forall (x_0, y_0) \in D \ \exists! \ C_0 \in R : y_0 = \phi(x_0, C_0)$, т.е функция $y = \phi(x, C_0)$ - Решение задачи Коши с начальными условиями $y(x_0) = y_0$

14.2 Частное решение

Частным решением ДУ$_1$ наз решение, полученное из общего решения фиксацией произвольной постоянной С.

14.3 Особое решение

Решение y = $\tilde{\phi}(x)$ ДУ$_1$ называется особым решением ДУ, если через каждую точку $(x_0 \tilde{\phi}(x_0))$ соответствующей итегральной кривой проходит другая инт.кривая – график решения y = $\tilde{\phi}(x)$

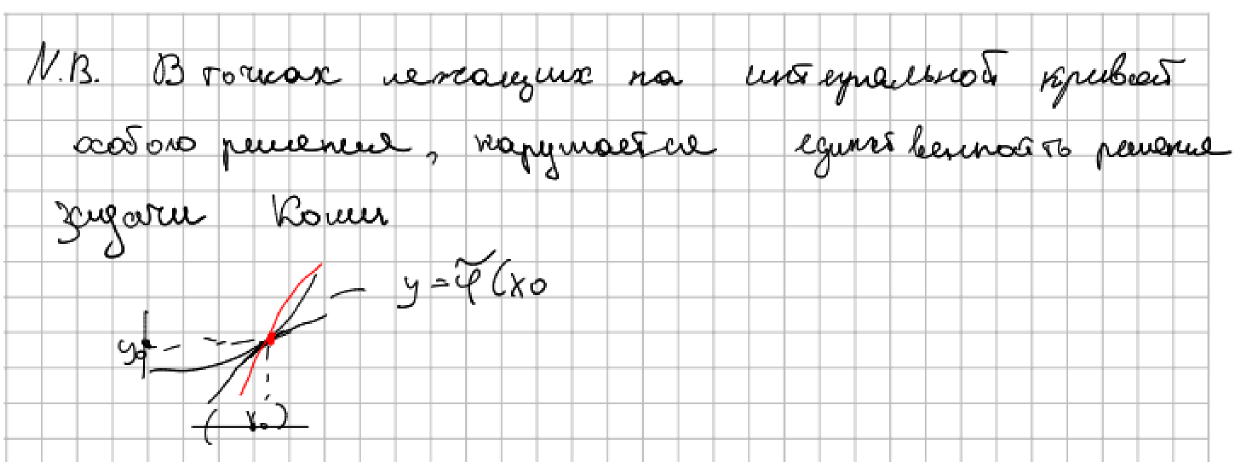


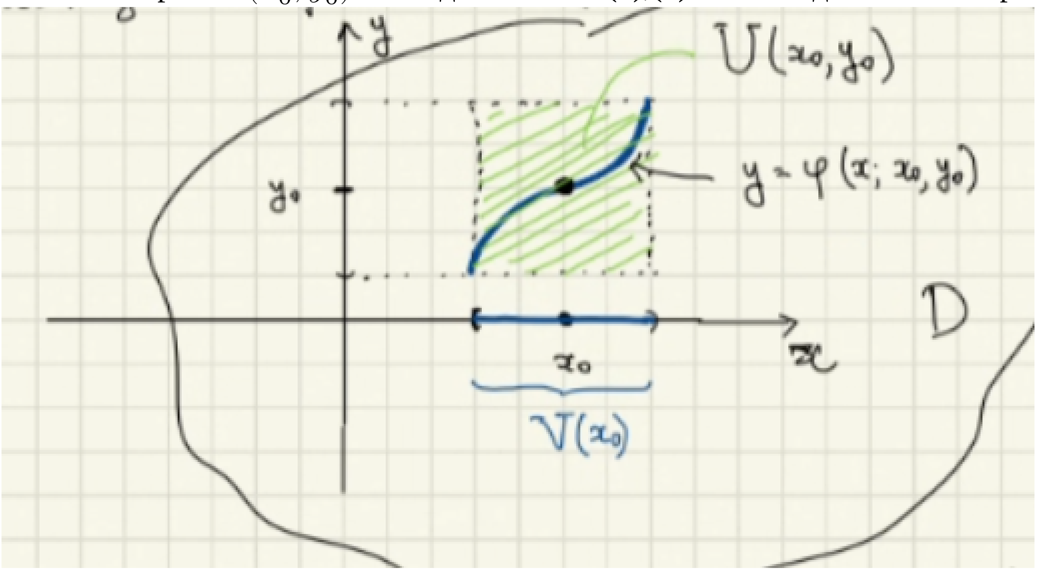
Figure 4: К определению особого решения

14.4 Теорема ($\exists$ и ! решения задачи Коши)

$$(1)\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Если f непр в $U(x_0, y_0)$ то задача Коши (1),(2) имеет единственное решение в $V(x_0)$



15 ДУ 1-го порядка с разделенными и разделяющимися переменными: определение, формы записи, общий интеграл, решение задачи Коши.

15.1 ДУ с разделенными переменными

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C - \text{общий интеграл}$$

15.2 ДУ с разделяющимися переменными

Ду вида:

$$(1)\ M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$
$$(2)\ y' = f(x) * g(y)$$

15.3 Общие интегралы ДУ с разделяющимися переменными

$$(1')\ \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

$$(2')\ \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

15.4 Решение задачи Коши

$$(1)\ \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(1')\ \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$$(2')\ \int_{x_0}^{x} \frac{M_1(t)}{M_2(t)}dt + \int_{y_0}^{y} \frac{N_2(s)}{N_1(s)}ds = 0$$

16 Однородные ДУ первого порядка: определение, формы записи, общий интеграл, решение задачи Коши.

16.1 Определение

Функция наз однородной степени $m \in R$ для любого

$$\forall \lambda \neq 0 : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m \cdot f(x,y)$$

ДУ наз однородным, если в НФ оно имеет вид

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

В симметричной форме:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

если, P и Q однородные функции одного порядка

16.2 Общий интеграл

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln(C|x|), u = \frac{y}{x}$$

$$dy = udx + xdu$$

$$y' = u'x + x'u = u'x + u$$

17 Линейные ДУ 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной

17.1 Определение

ДУ вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $y \in C'(X), p, q \in C(X), X \subset R$

ЛНДУ: $y' + py = q$

ЛОДУ: $y' + py = 0$

17.2 Метод Лагранжа

Решаем ЛОДУ от данного:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \text{ — общее решение ЛОДУ,}$$

где C заменено на $C(x)$

От получившегося берём производуную и подставляем в исходное уравнение

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C1$$

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C1\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

18 Линейные ДУ 1-го порядка. Метод Бернулли.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Замена $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$v(u' + p(x)u) + uv' = q(x)$$

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0 \\ v' = \frac{q(x)}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = e^{-\int p(x)dx} \\ v' = q(x)e^{\int p(x)dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = e^{-\int p(x)dx} \\ v = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \end{cases}$$

Потом подставляем в $y = uv$

19 Уравнение Бернулли.

ДУ вида $y' + p(x)y = q(x)y^a$, где а $\neq 1, a \neq 0, a \in Q$

19.1 Метод Бернулли

$$]y = uv, u' + p(x)u = 0 \Rightarrow u(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$
$$u'v + v'u + puv = qu^a v^a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' + pu = 0 \\ v'u = qu^a v^a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = e^{-\int p(x)dx} \\ v' = qu^{a-1}v^a \end{cases}$$

$$dv = v'dx \Rightarrow dv = qu^{a-1}v^a dx \Rightarrow \frac{dv}{v^a} = q(x)e^{(1-a)\int p(x)dx}dx \Rightarrow$$

$$\frac{v^{1-a}}{1-a} = \int (q(x)e^{(1-a)\int p(x)dx})dx + C_1 \Rightarrow v(x) = C_1 + \left[(1-a)\int (q(x)e^{(1-a)\int p(x)dx})dx\right]^{\frac{1}{1-a}}$$

$$y = uv = ...$$

19.2 Метод вариации

$$y' + p(x)y = q(x)y^a$$
$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow C'(x) = q(x)C^a(x)e^{1-a\int p(x)dx}$$

19.3 Пример

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$

Метод бернулли:

$$y = uv \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{C}{x}$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = xu^2v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{C}{x} \\ v' = xuv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{x} \\ v' = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{C_1 - x} \end{cases} \Rightarrow y = uv$$

Метод вариации:

$$]y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} \Rightarrow$$
$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = xC^2(x)\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$
$$C'(x) = C^2(x) \Rightarrow C(x) = \frac{1}{C_1 - x} \Rightarrow y = \frac{1}{x(C_1 - x)}$$

20 ДУ высших порядков, задача Коши. Теорема существовании и единственности решения задачи Коши.

20.1 Определение

ДУ$_n$ - ДУ имеющие производные высших порядков

20.2 Задача Коши

$$\left\{\begin{array}{r} y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \in D \subset R^n \end{array}\right.$$

20.3 Теорема (∃ и ! решения задачи Коши)

$$\text{Если } f \in C(U(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}))$$

$$\text{и имеет } \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \in C(U(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})),$$

то в окрестности $U(x_0)$, задача Коши иеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

21 ДУ, допускающие понижение порядка. Примеры

21.1 Не содержащиее производной до к-той

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, n > 0$$
$$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$$

Замена для решения: $z = y^k$

21.2 Не содержащиее независимой переменной

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Замена для решения:

$$z = y' : y' = z(y),$$
$$y'' = \frac{d}{dx} z(y) = z'(y)y' = zz'$$

и т.д. до $y^{(n)}$

21.3 Однородное относительно искомой ф-ии и её производных

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \text{где} F(x, \lambda y, \lambda y', ..., \lambda y^{(n)}) = \lambda^k * F(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

Замена для решения:

$$z = \frac{y'}{y}, y'' = (yz)'$$

и т.д. до $y^{(n)}$

22 Линейные однородные ДУ высших порядков: основные определения

22.1 Определение

ЛОДУ$_n$:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

$$\text{где } y \in C^n(X), p_k \in C(X), k = \overline{1, n}$$

22.2 Линейный диф. оператор n-го порядка

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + P_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + ... + P_n(x)I$$

$$L : C^n(X) \to C(X)$$

$$\frac{d^k}{dx^k} \equiv D^k : y^{(k)} = D^k_y, k = \overline{0, n}, D^0 = I : D^0_y = I_y = y$$

22.3 Ядро оператора

$$\ker L = \{y \in C^n(X) : Ly = 0\} - \text{множество решений ЛОДУ}_n$$

$\dim \ker L = n$ – размерность ядра

23 Линейная независимость решений, определитель Вронского.

23.1 Определение (Вронскиан)

Определитель Вронского системы функций (вронскиан):

$$W(x) := \begin{vmatrix} \phi_1(x)...\phi_n(x) \\ \phi_1'(x)...\phi_n'(x) \\ ... \\ \phi_1^{(n-1)}(x)...\phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

23.2 Теорема

Для того, чтобы ЛК $\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n$, где y_k - решение ($k = \overline{1, n}$) являлось общим решением ЛОДУ$_n$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x)...y_n(x) \\ y_1'(x)...y_n'(x) \\ ... \\ y_1^{(n-1)}(x)...y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

23.3 Определение (Линейная независимость)

Функции $\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на промежутке X, если существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$, одновременно не обращающиеся в 0, что

$$(1)\ \alpha_1\phi_1(x) + ... + \alpha_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in X$$

Если (1) справедливо **только** при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то $\phi_1(x), ..., \phi_n(x)$ называются **линейно независимыми** на X

24 Фундаментальная система решений (ФСР) линейного ДУ.

$$(1)\ \alpha_1\phi_1(x) + ... + \alpha_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in X$$

Если (1) справедливо **только** при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то $\phi_1(x), ..., \phi_n(x)$ наз **ЛНЗ** на X

$\forall$ совокупность (набор, система) n ЛНЗ решений ЛОДУ$_n$ называется его ФСР

24.1 Теорема 1

$$\forall y_1, ..., y_n - \text{ФСР} \Leftrightarrow W(y_1, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 ... y_n \\ y_1' ... y_n' \\ ... \\ y_1^{(n-1)} ... y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

24.2 Теорема 2

Для любого ЛОДУ существует ФСР

Найдём n решений дифференциального уравнения, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

■

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = ... = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, y_2''(x_0) = ... = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$..................$$

$$y_n(x_0) = ... = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{решения ЛНЗ} \Rightarrow \text{образуют ФСР} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x) \qquad ■$$

25 Примеры построения ФСР для линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

$$(1) y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, a_k \in R;\ k = \overline{1, n};\ y \in C^n(X)$$

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n I$$

$$(2) Ly = 0$$

$$\exists \text{ФСР} \{y_k\}_{k=1}^n - \text{ частные ЛНЗ решения}$$

$$\dot{y} = C_1 y_1 + ... + C_n y_n$$

25.1 Метод Эйлера

Ищем частные решения (1), (2) в виде $y = e^{\lambda x}$

$$D^k e^{\lambda k} = (e^{\lambda k})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda k}$$

$$L e^{\lambda k} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n - \text{характеристический полином}$$

$$L e^{\lambda x} = P_n(\lambda) e^{\lambda x}$$

$$L e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \Lambda - \text{множество корней}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \{\lambda_k \in C : mult(\lambda_k) = m_k, k = \overline{1, l}\}; m_1 + m_2 + ... + m_l = n$$

25.2 Структура ФСР и общее решение

25.2.1 Вид 1.

Структура Λ

$$mult(\lambda_n) = 1$$
$$\lambda_k \in RP_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)$$

Структура ФСР и общее решение

$$\text{ФСР}\{y_k = e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{n}$$
$$\dot{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$$

25.2.2 Вид 2.

Структура Λ

$$\lambda_k : mult(\lambda_n) = m_k$$

Структура ФСР и общее решение

$$\lambda_1(m_1) : y_1^{(1)} = e^{\lambda_1 x},$$

$$y_1^{(2)} = xe^{\lambda_1 x}, ..., y_1^{(m_1)} = x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}$$

$$\lambda_2(m_2) : y_2^{(1)} = e^{\lambda_2 x}, y_2^{(2)} = xe^{\lambda_2 x}, ..., y_2^{(m_2)} = x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x}$$

$$......$$

$$\lambda_l(m_l) : y_l^{(1)} = e^{\lambda_l x}, y_l^{(2)} = xe^{\lambda_l x}, ..., y_l^{(m_l)} = x^{m_l - 1} e^{\lambda_l x}$$

$$\dot{y} = (C_1 + C_2 x + ... + C_{m_1} x^{m_1 - 1}) e^{\lambda_1 x} + ... + (C_{n-m_l} + C_{n-m_l+1} x + ... + C_n) x^{m_l - 1}) e^{\lambda_l x}$$

25.2.3 Вид 3.

Структура Λ

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$$
$$\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$$
$$mult(\lambda_n) = 1$$

Структура ФСР и общее решение

$$\text{ФСР: } \{y_k^{(1)} = e^{\alpha_k x} cos\beta_k x;\ y_k^{(2)} = e^{\alpha_k x} sin\beta_k x\}_{k=1}^{2n}$$

$$\dot{y} = e^{\alpha_1 x}(C_1 cos\beta_1 x + D_1 sin\beta_1 x) + ... + e^{\alpha_m x}(C_m cos\beta_n x + D_n sin\beta_n x)$$

25.2.4 Вид 4.

Структура Λ

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$$
$$mult(\lambda_n) = r_n$$

Структура ФСР и общее решение

$$\text{ФСР: } \{y_k^{(1)} = e^{\alpha_k x} \cos\beta_k x;\ z_k^{(1)} = e^{\alpha_k x} \sin\beta_k x,\ ..., y_k^{(r_n)} =$$
$$x^{r_n - 1} e^{\alpha_k x} \cos\beta_k x;\ z_k^{(r_n)} = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta_1 x + x^{r_n - 1} e^{\alpha_k x} \sin\beta_k x\}_{k=1}^{n}$$

$$\dot{y} = ... + C_{r_1} x^{r_1 - 1} \cos\beta_1 x) + e^{\alpha_1 x}(D_1 \sin\beta_1 x + ... + D_{r_1} x^{r_1 - 1} \sin\beta_1 x) + ...$$

26 Теорема о структуре общего решения однородного ДУ. Теорема о структуре общего решения неоднородного ДУ.

26.1 Для однородного

Общее решение представляется в виде $y = \mathring{y}$, где $L\mathring{y} = 0, \mathring{y}$ - общее решение

26.1.1 Теорема

Если все коэфф. ЛОДУ: $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ непрерывны на $[a, b]$, а $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ образуют ФСР этого уравнения, то $\mathring{y} = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x)$

26.2 Для неоднородного

26.2.1 Теорема Общее решение представляется в виде

$y = \mathring{y} + \dot{y}$, где $L\mathring{y} = 0, \mathring{y}$ - общее решение ЛОДУ, $\dot{y}$ - частное решение $Ly = f$

■

$$\sphericalangle Ly = L(\mathring{y} + \dot{y}) = L\mathring{y} + L\dot{y} = o + f = f$$

Требуется проверить, что $\mathring{y} + \dot{y}$ - даёт общее решение ЛНДУ

$$\mathring{y} = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x), \text{где} y_1...y_n - \text{ФСР} \Rightarrow y = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x) + \dot{y}$$

$$](\cdot)x_0 \in X : y(x_0) = y_0, \dot{y}'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Составим систему:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + ... + C_ny_n(x_0) + \dot{y}(x_0) = y_0 \\ C_1y_1'(x_0) + ... + C_ny_n'(x_0) + \dot{y}'(x_0) = y_0' \\ .... \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) + \dot{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Запишем в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0)...y_n(x_0) \\ y_1'(x_0)...y_n'(x_0) \\ .... \\ y_1^{(n-2)}(x_0)...y_n^{(n-2)}(x_0) \\ y_1^{(n-1)}(x_0)...y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ .... \\ ...... \\ .... \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - \dot{y}(x_0) \\ y_0' - \dot{y}'(x_0) \\ ... \\ ... \\ y_0^{(n-1)} - \dot{y}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Т.к. $W[y_1...y_n](x_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_1^0 \\ .... \\ C_n = C_n^0 \end{cases}$ определяется однозначно ■

27 Линейные неоднородные ДУ n-го порядка, решение методом вариации произвольных постоянных.

$$Ly = f, L\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = C_1 y_1 + ... + C_n y_n \Rightarrow \{y_1, ..., y_n\} - \text{ФСР}$$

$$]y = C_1(x)y_1 + ... + C_n(x)y_n$$

$$Ly = f \Leftrightarrow L(\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k) = f \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}[LC_k(x)y_k + C_k(x)Ly_k] = f \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(LC_K)y_k = f$$

Имеем n неизв. ф-и $C_k(x), k = \overline{1,n}$, они должны быть выбраны т.е., чтобы y удовлетв. ЛНДУ, поэтому $n-1$ условий можно задать произвольно Выберем эти $n-1$ условий так, чтобы производные от y имели такой вид.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k' = 0 \\ .... \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-2)} = 0 \end{cases} (n-1) - \text{усл}$$

$$\text{n-ое условие} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)} = f$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 ... y_n \\ y_1' ... y_n' \\ .... \\ y_1^{(n-2)} ... y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} ... y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ .... \\ ...... \\ .... \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ f \end{pmatrix} W(x) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ .... \\ ...... \\ .... \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 ... y_n \\ y_1' ... y_n' \\ .... \\ y_1^{(n-2)} ... y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} ... y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ f \end{pmatrix}$$

$$C_k'(x) = \phi_k(x)$$

$$C_k(x) = \int \phi_k(x)dx + \sim C_k$$

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k = \sum_{k=1}^{n}(\sim C_k + \int \phi_k(x)dx)y_k = \sum_{k=1}^{n} \sim C_k y_k + \sum_{k=1}^{n}(\int \phi_k(x)dx)y_k,$$

где $\sum_{k=1}^{n} \sim C_k y_k = \dot{y}$ – общ. реш,

$\sum_{k=1}^{n}(\int \phi_k(x)dx)y_k = \mathring{y}$ – частн. реш

28 Метод вариации произвольных постоянных для линейного ДУ 2-го порядка. Примеры.

$$I)\ y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\Lambda = \{\lambda_{1,2} = \pm i, m_{1,2} = 1\} \Rightarrow \text{ФСР:}\{y_1 = \cos x, y_2 = \sin x\}$$

$$\mathring{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$]y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} W(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin x}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1(x) = \int \frac{d \cos x}{\cos x} + \tilde{C}_1 = \ln(\cos x) + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = x + \tilde{C}_2$$

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x * \ln(\cos x) + x \sin x$$

29 Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Построение частного решения методом неопределенных коэффициентов

29.1 Определение

$f(x) = e^{\nu x}[P_n(x)\cos\mu x + Q_m(x)\sin\mu x]$, где $\mu, \nu \in R,\ n = deqP_n,\ m = degQ_m$

наз. правой частью специального вида (Квазиполиномом)

$$I.\ \nu = \mu = 0 \Rightarrow f(x) = P_n(x)$$

$$II.\ \mu = 0, \nu \neq 0 \Rightarrow f(x) = e^{\nu x}P_n(x)$$

Правая часть

$]\xi = \nu + i\mu$ - тестовое число

$$1)\xi \in \Lambda(mult\xi = r)$$

$$2)\xi \notin \Lambda(r = 0)$$

Вид частного решения

$$s = max(n, m)$$

$$1)\dot{y} = x^r e^{\nu x}(\tilde{P}_s(x)\cos\mu x + \tilde{Q}_s(x)\sin\mu x)$$

$$\tilde{P}_s(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_s x^s$$

$$\tilde{Q}_s(x) = q_0 + q_1 x + ... + q_s x^s$$

$$2)\dot{y} = e^{\nu x}(\tilde{P}_s(x)\cos\mu x + \tilde{Q}_s(x)\sin\mu x)$$

29.2 Метод неопр. коэф

Пример:

$$\dot{y}'' + y' = x + 2$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\Lambda = \{\lambda_1 = 0(m_1 = 1), \lambda_2 = -1(m_2 = 1)\} \subset R$$

$$\mathring{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

$$f(x) = x + 2$$

$$n = 1, \xi = 0 \Rightarrow \xi \in \Lambda \Rightarrow r = 1$$

$$\dot{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

$$\dot{y}' = 2Ax + B$$

$$\dot{y}'' = 2A$$

Подставляем в исходное

$$2A + 2Ax + B = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \dot{y} = 0.5x^2 + x$$

$$y = \mathring{y} + \dot{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + 0.5x^2 + x$$

30 Системы линейных ДУ: определение формы записи, задача Коши

30.1 Обозначения и соглашения

$t \in T \subset R -$ интервал
$x_1(t), x_2(t)...$-функции (t)
$y_1(t), y_2(t)...$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in M^{n,t} = \mathbb{R}^n(C^n)$$

$X : t \in T -> X(t) \in \mathbb{R}^n$
вектор ф-я = векторозначная функция если,
$x_k \in C^1(T, \mathbb{R}^n) <=> X \in C^1(T, R^n)$
$k = 1...n$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{X}, \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ . \\ . \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\int X(t)dt = \int \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int x_1(t) \\ . \\ . \\ \int x_n(t) \end{pmatrix} ; \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau$$

$$X(t) + Y(t) : \begin{pmatrix} x_1(t) + y_1(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) + y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha * X(t) = \begin{pmatrix} \alpha x_1(t) \\ . \\ . \\ \alpha x_n(t) \end{pmatrix}$$

$X^T(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ $X \in M^{n,1}; Y^T \in M^{1,n} =>$
$=> X * Y^T = M^n$ $X^T =< X, Y >_{\mathbb{R}^n} = x_1(t)y_1(t) + ...x_n(t)y_n(t)$ $||X|| =$

$\sqrt{< X, X >_{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{x_1^2(t) + ...x_n^2(t)}$

$$\left[l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ..., l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

ОНБ в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}(X^T * Y = \frac{d}{dt} < X, Y >_{\mathbb{R}^n} = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n})x_k(t)y_k(t)) = < \dot{X}, Y > + < X, \dot{Y} >$$

30.2 Опр 1 СДУ называется система связывающая t неизв. фу-ции $x_1(t)$...$x_n(t)$ и их производные $x_1'(t), x_1''(t)...x_1^{m_1}(t), x_2'(t)...x_2^{m_2}(t), x_n'(t)...x_n^{m_n}$

$F_k(t, x_1(t), ..., x_1^{m_1}(t), x_2(t), ..., x_2^{m2}(t), ..., x_n^{m_n}(t))) = 0$

30.2.1 $max(m_1...m_n)$ наз порядком СДУ

$$F_k(t, \dot{X}(t), \ddot{X}(t)...,) = \mathbb{0}, k = 1...l$$

если $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$ то СДУ$_1$

$$\begin{cases} x_1(t) := f_1(t, x_1(t)...(x_n(t))) \\ \quad .... \\ x_n(t) := f_n(t, x_1(t)...(x_n(t))) \end{cases} \text{— нормальная форма СДУ}_1$$

$\dot{X}(t) = F(t, X(t))(1')$ — Векторная(матричная) форма записи СДУ$_1$ в нормальной форме

$$F : T \times \mathbb{R}^n -> \mathbb{R}\text{(Векторное поле)}$$

$X : T -> \mathbb{R}^n$—вектор функция

30.2.2 Если $F = F(x)$, то СДУ$_1$: $\dot{X} = F(x)$ называется автономной

30.2.3 Опр2 Если $F(t, X(t)) = A(t) * X(t) + B(t)$, где $A \in M^n; A : T -> M^n; B : T -> \mathbb{R}$ то СДУ$_1$ наз Линейной Системой Дифференциальных Уравнений 1 порядка ЛСДУ$_1$

$\dot{X} = A(t)X + B(t)$- неоднородная ЛСДУ$_1$

$\dot{X} = A(t)X$- однородная ЛСДУ$_1$

$A \in M^n$:
$\dot{X} = AX + B(t),$ ЛСДУ$_1$ с постоянными коэффициентами неоднородная
$\dot{X} = AX,$ ЛСДУ$_1$ с постоянными коэффициентами однородная

30.2.4 Опр3 Решением системы ДУ:

$F(t,X,\dot{X}) = \mathbb{O}$ называется набор из n-функций
$x_1(t), x_2(t)...x_n(t)$или в-р фукнция $X(t) X \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$; когда при подстановку в СДУ обращает в тожд
$F[t, X(t), \dot{X}(t) = \mathbb{O}]$

30.2.5 Задача Коши

$$\begin{cases} F(t, x_1(t)...x_n(t), \dot{x}_1(t)...\dot{x}_n(t)) = \mathbb{O} \\ x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \ (2) \\ ... \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

$$F(t,X,\dot{X}) = \mathbb{O}$$

$X|_{t=t_0} = X_0$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ . \\ . \\ x_n^0 \end{pmatrix} (2')$$

$(2)(2')-$ Задача Коши для СДУ$_1$

30.2.6 $Th1(\exists n!$ решения задачи Коши)

Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t,X) \\ X_{|t=t_0} = X_0 \end{cases} -\text{ имеет единственное решение в } D = V(t_0) \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

а) $F \in C(\overline{D})$;

б) $F \in C^1(D)$ и $||\frac{\partial F}{\partial x_k}|| \leqslant C_k, k = \overline{1,n} (C_k > 0)$

в) $(t_0, X_0) \in D$

$N.B.$
1) $a, b) \Leftrightarrow a')F \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$
2) $b) ||F'_{x_k}|| \leqslant C_k, k = \overline{1,n} \Rightarrow ||F(*,X) - F(*,Y)|| \leqslant L||X-Y||-$ называется условие Линница (более сильное условие, чем условие ограничен F'_{x_k})

31 Системы линейных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. Нормальная форма записи системы

31.0.1 Опр2 Если $F(t, X(t)) = A(t) * X(t) + B(t)$, где $A \in M^n; A : T- > M^n; B : T- > \mathbb{R}$ то СДУ$_1$ наз Линейной Системой Дифференциальных Уравнений 1 порядка ЛСДУ$_1$

$\dot{X} = A(t)X + B(t)$- неоднородная ЛСДУ$_1$

$\dot{X} = A(t)X$- однородная ЛСДУ$_1$

$A \in M^n :$
$\dot{X} = AX + B(t),$ ЛСДУ$_1$ с постоянными коэффициентами неоднородная
$\dot{X} = AX,$ ЛСДУ$_1$ с постоянными коэффициентами однородная

$$\begin{cases} x_1(t) := f_1(t, x_1(t) ... (x_n(t))) \\ \quad .... \\ x_n(t) := f_n(t, x_1(t) ... (x_n(t))) \end{cases} \text{— нормальная форма СДУ}_1$$

32 Система линейных ДУ и её матричная форма записи. Однородная система линейных ДУ первого порядка

32.0.1 Опр2 Если $F(t, X(t)) = A(t) * X(t) + B(t)$, где $A \in M^n; A : T- > M^n; B : T- > \mathbb{R}$ то СДУ$_1$ наз Линейной Системой Дифференциальных Уравнений 1 порядка ЛСДУ$_1$

$\dot{X} = A(t)X + B(t)$- неоднородная ЛСДУ$_1$ $\dot{X} = A(t)X$- однородная ЛСДУ$_1$ $A \in M^n$:
$\dot{X} = AX + B(t),$ ЛСДУ$_1$ с постоянными коэффициентами неоднородная
$\dot{X} = AX,$ ЛСДУ$_1$ с постоянными коэффициентами однородная

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t))(1') - \text{Векторная(матричная) форма записи СДУ1 в нормальной форме}$$

$$F : T \times \mathbb{R}^n- > \mathbb{R}\text{(Векторное поле)}$$

33 Решение системы линейных ДУ для случаев различных вещественных корней, различных комплексных корней, кратных вещественных корней характеристического уравнения

33.0.1 Метод собственных векторов и собственных значений матрицы коэффициентов

$$\dot{X} = AX, A \in M^n, X \in C^1(T, R^n)$$

$]X(t) = e^{\lambda * t} * h, h \in \mathbb{R}^n : h \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$\dot{X} = \lambda * e^{\lambda t}h \Rightarrow \lambda e^{\lambda t}h = A(e^{\lambda t} * h)$

$$\Leftrightarrow Ah = \lambda h, h \neq \mathbb{0}$$

h - собственный вектор, A отвечающ. с. з. λ

$$(A - \lambda)h = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow h \neq 0$, то $det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow rang(A - \lambda I) = r < n$
$P_a(\lambda) := det(A - \lambda I)$ - характеристический полином матрицы

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n * (\lambda - \lambda_1)^{k_1} * (\lambda - \lambda_2)^{k_2} * ... * (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

$k_1 + k_2 + ... + k_m = n, k_j = mult(\lambda_j)$

33.0.2 Опр1 Число k_j наз алгебраической кратностью с.з. $\lambda_j(\lambda - \lambda_j)k_j$ Число $s_j = n - r_j = n - rang(A - \lambda_j I)$-геометрическая кратность λ_j- количество ЛНЗ с. векторов, отвечающих λ_j

$\lambda_j \leftrightarrow \{h_{1j}, h_{2j}, ..., h_{s_j j}\}$

$$s_j = dim\ Span\{h_1, ..., h_{s_j j}\}$$

33.0.3 Th1 $0 < s_j \leqslant k_j$

33.0.4 I случай : $s_j = k_j = 1$

$$I.1.\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq .... \neq \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$\lambda_i \to h_j \Rightarrow \{X_j(t) = e^{\lambda_j t}h_j\}$−ФСР

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} * h_2 + ... + C_n e^{\lambda_n t} * h_n$$

$I.2\ \lambda = \alpha_j + ib_j, \overline{\lambda_j} = \alpha_j - ib_j \in C$
Рассмотрим $X_j(t) = e^{(\alpha_j + ib_j)t}h_j = e^{\alpha_j t}e^{ib_j t}h_j = e^{\alpha_j t}cos(b_j)t * h_j + ie^{\alpha_j t}sin(b_j)t * h_j$
$h_j = u_j + iv_j$

$X_j(t) = e^{\lambda_j t}(cos(b_j)t*u_j - sin(b_j)tv_j) + ie^{\alpha_j t}(cos(b_j)t*v_j - sin(b_j)t*u_j) = U_j(t) + iV_j(t)$
$\dot{X} = AX \Leftrightarrow (D*I - A)X = 0 \Leftrightarrow LX = 0$

$$LX_j(t) = 0 \Leftrightarrow LU_j + iLV_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} LU_j = 0 \\ LV_j = 0 \end{cases}$$

$U_j = Re(e^{\lambda_j t}h_j); V_j = Im(e^{\lambda_j t}h_j)$

$$X_j(t) = C_j^{(1)}Re(e^{\lambda_j t}h_j) + C_j^{(2)}Im(e^{\lambda_j t}h_j)$$

33.0.5 II случай : $s_j = k_j > 1$

$II.1\ \lambda \in \mathbb{R} : mult(\lambda_j) = k_j$
$\lambda_j \leftrightarrow \{h_1, h_2, ..., h_{kj}\}$

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t}(C_j^{(1)}h_1 + C_j^{(2)}h_2 + ... + C_j^{(k_j)}h_{kj})$$

$II.\,2\ mult(\lambda_j) = k_j, \lambda_j = \alpha_j + ib_j \in C$

$$X_j(t) = \sum_{k=1}^{k_j} C_j^{(k)}Re(e^{\lambda_j t}h_j) + \sum_{k=1}^{k_j} D_j^{(k)}Im(e^{\lambda_j t}h_j)$$

33.0.6 $III\ s_j < k_j\ p_j := k_j - s_j$

$mult(\lambda_j) = k_j > s_j$

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t}(A_{j1} + A_{j2}t + ... + A_{jp_j}t^{p_j})$$

неопр. коэф-ты $A_{jq} \in \mathbb{R}^n$

34 ФСР линейной системы. Фундаментальная матрица (ФМ) линейной системы. Свойства ФСР и ФМ

34.1 ФСР

Фундаментальной системой решений однородного линейного дифференциального уравнения называется упорядоченный набор из n линейно независимых решений уравнения.

$$X_1, ..., X_n - \text{базис(ЛНЗ) в } KerL$$

34.2 Св-ва ФСР

Lm1 Если $\{X_1, ..., X_n\}$- ЛНЗ $\Rightarrow$ $W[X_1, ..., X_n] \neq 0$
Lm2 Если $W[X_1, .., X_n] \neq 0 \Rightarrow \{X_k\}_{k=1}^{n} -$ ЛНЗ
Lm3 $]X_1, ..., X_n$- вектор фунции является решением $\dot{X} = A(t)X$

34.3 Th1 О структуре общего решения СЛОДУ$_1$

Если $X_1, ..., X_n$ ЛНЗ реш $\dot{X} = A(t)X$, то $X(t) = C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t)$-общее решение системы; $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$

34.4 Опр2 ФМС

Фундаментальной матрицей системы(ФМС) или матрицантом $\dot{X} = A(t)X$ называется матрица , стобцы которой образованы ФСР

$$M(t) = (X_1(t), ..., X_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t)...x_{1n}(t) \\ .... \\ x_{n1}(t)...x_{nn}(t) \end{pmatrix} : detM = W$$

$$X(t) = M(t) * C, C = (C_1, ..., C_n)^T$$

34.5 Th2

М удовл системе ЛДУ: $\dot{M} = A(t)M$

34.5.1 Док-во:

$$\dot{X} = AX;\ \dot{X} = \dot{M}(t)C \Rightarrow \dot{M}C = A(MC) \Leftrightarrow \dot{M}C = (AM)C \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow \dot{M} = AM$$

34.5.2 Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ .... \\ \dot{x}_n(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = C_2 t + C_2 \\ .... \\ \dot{x}_n(t) = 0 \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} M(t) = \begin{pmatrix} 1\ t \\ 0\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

34.6 Th3

$]M(t) -$ ФМС,$\dot{X} = AX \Rightarrow S(t) = M(t) * B,$ где $B \in M^n, det(B) \neq 0 -$ ФМС $\dot{X} = AX$

34.6.1 Док-во:

$\dot{S} = \dot{M}B = (AM)B = A(MB) = ASdetS = det(M(t)B) = detM{*}detB = W{*}detB \Rightarrow detB \neq 0$

35 Нормальная фундаментальная матрица линейной системы. Свойства.

36 Метод вариации произвольной постоянной для решения неоднородных линейных систем

36.1 Метод вариации

$(1)\dot{X} = A(t)X + B(t)$

$\dot{X} = AX,\ X(t) = M(t)C$

$]X(t) = M(t) * C(t) \Rightarrow (1)$

$\dot{X} = \dot{M}(t)C(t) + M(t)\dot{C}(t)$

$\dot{M}(t)C(t) + M(t)\dot{C}(t) = AM(t)C(t) + B(t)$

$\dot{M}(t) = AM(t)$

$\cancel{AM(t)C(t)} + M(t)\dot{C}(t) = \cancel{AM(t)C(t)} + B(t)$

$M(t)\dot{C}(t) = B(t)$

$$detM = W \neq 0\underline{\dot{C}(t) = M^{-1}(t)B(t)}$$

I)$\dot{X} = AX + B -$ общее решение
$C(t) = \int M^{-1}(t)B(t)$
$X(t) = M(t)C_0 + M(t) * \int M^{-1}(t)B(t)dt$
$\overset{o}{X}(t) - M(t)C_0$
$\overset{*}{X}(t) - \int M^{-1}(t)B(t)dt$

$$\text{II)} \begin{cases} \dot{X} = AX + B \\ \dot{X}_{|t=t_0} = X_0 \end{cases} (1)\ C(t) = \int_{t0}^{t} M^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

$$X(t) = M(t) * \int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau - \text{Решение задачи Коши}$$

36.2 Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\sqrt{\frac{1}{t}} \\ \dot{y} = -2x + 2y + \sqrt{\frac{1}{t}} \end{cases} (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} B(t) = \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ t^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 =$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1 = 0(k_1 = 1); \lambda_2 = 3(k_2 = 1)\}$$

$$(A - \lambda_1 I)h_1 = \mathbb{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \sim (1 \ \ -1)$$

$$\Rightarrow h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)h_2 = \mathbb{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \sim (2 \ \ 1)$$

$$2x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1, x_1 = \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow h_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{o}{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 * e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = C_2 * e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 1 & -2e^{3t} \end{pmatrix}; W = -2^{3t} - e^{3t} = -3e^{3t} \neq 0$$

$$M^{-1}(t) = -1/3e^{-3t} \begin{pmatrix} -2e^{3t} & -e^{3t} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} & \frac{-1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}(t)B(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} & \frac{-1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ t^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} t^{\frac{-1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} dt + C_0 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ 1 \end{pmatrix} + C_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{t} + e^{3t} \\ 2\sqrt{t} - 2e^{3t} \end{pmatrix} + C_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2^0 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} + e^{3t} \\ 2\sqrt{t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

37 Числовой ряд. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.

37.1 Определения

$\{a_n\}$ – последовательность членов ряд
$\{S_n\}$ – последовательность частных сумм

$$S_n := a_1 + ...a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k S_1 = a_1;\ S_2 = a_1;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$a_1 = S_1;\ a_2 = S_2 - S_1;\ a_3 = S_3 - S_2 a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := a_1 + ... + a_n + ...\ (1)$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim\ S_n$$

Если $\exists\ \lim\ S_n = S < \infty$, то ряд (1) называется сходящимся, а число $S \in \mathbb{R}$ называется его суммой, в противном случае (если $\overline{\exists}\ \lim\ S_n$или $\lim\ S_n = \infty$) ряд называется расходящимся.

37.1.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n + ...$$

$q^{n-1} = a_n\ S_n = a_1 + ... + a_n = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

$$\text{Рассмотрим } q^n \to \left[\begin{array}{l} 0,\ |q| < 1; \\ +\infty, |q| > 1, \end{array}\right.$$

$$S = \lim\ S_n = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{q-1},\ |q| < 1; \\ +\infty, |q| > 1, \end{array}\right.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + ... = \infty$$

$\{q^{n-1}\}_{n\in N}$-геометрическая прогрессия.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \text{ — геометрический ряд.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \frac{1}{1-q},\ |q| < 1$$

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^{n-1} \frac{q^m}{1-q},\ |q| < 1$$

37.2 Теорема (необходимое условие сходимости)

$$\text{Если} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится, то} \lim\ a_n = 0\ (a_n \to 0)$$

Доказательство:

$$\lim\ a_n = \lim\left(S_N - s_{n-1}\right) = \lim\ S_n - \lim\ S_{n-1} = S - S = 0$$

NB: Необходимое условие сходимости еще называют “достаточным условием расходимости”.

37.2.1 Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+7} a_n = \frac{3n^2+1}{4n^2+7} = \frac{n^2(3+\frac{1}{n^2})}{n^2(4+\frac{7}{n^2})} \to \frac{3}{4}] \neq 0 \Rightarrow \text{ряд} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+7} \text{ — расходится.}$$

38 Свойства сходящихся числовых рядов.

38.1 Основные свойства рядов

$$(1)\,]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S < \infty - \text{сходится}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to \alpha S < \infty$$

$$(2)\,]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A < \infty \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha A + \beta B < \infty$$

Со сходящимися рядами можно работать как с конечными суммами.
(3)
Члены сходящегося ряда можно, не меняя их местами, группировать. От этого сходимость ряда не изменится, величина суммы тоже не изменится. (работает ассоциативность)

NB: в расходящихся рядах группировать члены нельзя.

$(1-1)+(1-1)+...=S=0$
$1-(1+1)-1+...\neq 0$

$$(4)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ m \in \mathbb{N} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + ... + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + ...$$

$$a + 1 + .. + a_{m-1} + a_m = S_m a_{m+1} + ... = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = R_m - \text{остаток (хвост)}$$

38.2 Теорема (об остатке числового ряда / о “хвосте”)

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и его остаток $\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$ сходятся и расходятся одновременно

(Отбрасывание/дописывание конечного числа членов на сходимость не влияет)

38.2.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{c}{n^\alpha} + b_n),\ c \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{Q},\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S < \infty$$

$\alpha > 1$ – сходится
$\alpha < 1$ – неопределен

39 Ряды с положительными членами. Признаки сравнения в разных формах и следствия. Примеры.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \geq 0\ (1)$$

39.1 Теорема (Необходимое и достаточное словие сходимости ряда)

Для сходимости ряда (1) ⇔ (необходимо и достаточно) $\exists M > 0 : S_n \leq M\ \forall\ n \in N$
NB: Критерий сходимости знакопостоянного ряда по ограниченности частных сумм.
$S_n \leq S_{n+1} \Rightarrow \{S_n\} \nearrow,\ S_n \in M \Rightarrow$ ряд сходится.

39.2 Теорема 2 (первый признак сравнения в форме неравенства)

$$]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ (1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ (2)$$

$\exists\ a_n \leq b_n\ \forall\ n > N_0 \in \mathbb{N}$
$0 \leq A_n \leq B_n \to B \Rightarrow$ 1) если (2) сходится, то (1) сходится
2) если (1) расходится, то (2) расходится

39.3 Теорема 3 (второй признак сравнения в предельной форме)

$$]\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ (1) \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ (2)]\ \exists\ l = \lim\ \frac{a_n}{b_n} (l \neq 0, l \neq +\infty)$$

$\Rightarrow$ (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно

39.3.1 Пример:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \text{гармонический ряд}\ a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$$

$$l = \lim\ \frac{a_n}{b_n} = \lim\ \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} = |\ \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}; n \to \infty| = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{расходят}$$

39.4 Следствия

1. $a_n = \overline{\overline{o}}(b_n) \Rightarrow$ (1) и (2) имеют одинаковую сходимость
2. $a_n \sim b_n \Rightarrow$ (1) и (2) имеют одинаковую сходимость
3. $$\begin{cases} p > 1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{сходится} \\ p \leq 1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{расходится} \end{cases}$$
4. $a_n \sim b_n \overset{def}{\iff} \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$
5. $a_n = \overline{\overline{o}}(b_n) \overset{def}{\iff} \lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, \phi_n : |a_n| \leq \phi_n |b_n|,\ \phi_n -$ ограничена

40 Признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.

40.1 Теорема (Признак Даламбера)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0)\text{если } \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \begin{cases} <1 - \text{сходится} \\ >1 - \text{расходится} \end{cases}$$

40.2 Теорема (Признак Коши радикальный)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0) \ (1)\text{если } \lim \sqrt[n]{a_n} = c \begin{cases} <1 - \text{сходится} \\ >1 - \text{расходится} \end{cases}$$

40.3 Теорема (Признак Коши интегральный)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n > 0), \ f \searrow, \ x \in [m, \ +\infty)$$

$$f(n) = a_n$$

$$\Rightarrow \int_m^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \sum_{n=m}^{+\infty} a_n - \text{сходится или расходится однолвременно}$$

40.4 Примеры:

1. $$\text{Признак Даламбера: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \ a_n = \frac{a^n}{n!}, \ a_{n+1} = \frac{a * a^n}{n!(n+1)}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{сходится}$$

2. $$\text{Признак Коши радикальный: } \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{7n+1}{6n+5})^{3n+2}, \ a_n = \ (\frac{7n+1}{6n+5})^{3n+2}$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{(\frac{7n+1}{6n+5})^{3n+2}} = \lim(\frac{7n+1}{6n+5})^{\frac{3n+2}{n}} =$$

$$= \lim(\frac{n(7+1/n)}{n(6+5/n)})^{\frac{n(3+2/n)}{n}} = (\frac{7}{6})^3 = \frac{343}{216} > 1 \Rightarrow \text{рассходится}$$

3.

Признак Коши интегральный: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\,ln^{\alpha}n},\ a_n=\frac{1}{n\,ln^{\alpha}n}=f(n)$

Рассмотрим $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\,ln^{\alpha}x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{d(lnx)}{ln^{\alpha}x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{(lnb)^{1-\alpha}-(ln\,2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\left[\begin{array}{l}+\infty,\ \alpha<1;\\ \frac{(ln\,2)^{1-\alpha}}{\alpha-1},\alpha>\end{array}\right.$

$\alpha=1:\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\,lnx}=...=\lim\limits_{b\to+\infty}(ln(lnb)-ln(ln2))=+\infty-$ расходится

41 Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость.

41.0.1 Определение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \text{ если } a_n \text{произвольного знака газывается знакопеременным.}$$

$$\text{Рассмотрим} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \ (2); \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (1)$$

если (2) сходится, то (1) называется сходящимся абсолютно,

если (2) расходится, а (1) сходится, то (1) называется сходящимся условно.

41.0.2 Теорема

Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он сходится.

42 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда (теорема Лейбница).

42.0.1 Определение

Ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$ - **знакопеременный**, если u_n произвольного знака.

42.0.2 Определение

Знакопеременный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$ - **знакочередующийся**, если соседние члены ряда различного знака, то есть $u_n \cdot u_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Знакочередующийся ряд удобно записывать в виде $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n > 0$.

42.0.3 Теорема (признак Лейбница)

Для того, чтобы знакочередующийся ряд сходился, достаточно выполнения следующих условий:

1. $a_n \geq a_{n+1}$ начиная с некоторого номера n;
2. $\lim a_n = 0$.

42.0.3.0.1 Пример: Ряд $\Sigma_{n=1}^{n}(-1)^n \frac{1}{n}$ - сходится, так как:

1. $1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}...$
2. $lim \frac{1}{n} = 0$

42.0.4 Теорема Лейбница

$S = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^n$
$S = S_n + R_n,$
$S_n = \Sigma_{m=1}^{n}(-1)^m a^m$

Остаток сход. знакочередующегося ряда $R_n = S - S_n$ будет меньше по модулю его первого члена: $|R_n| < b_{n+1}$

(прим.: запись $\lim$ *означает* $\lim_{n\to\infty}$*)*

Доказательства теорем можно посмотреть тут. Если надо, оформлю в билете.

43 Определение функционального ряда. Поточечная сходимость. Область сходимости функционального ряда.

43.0.1 Определение

Пусть дана бесконечная последовательность $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая определена на множестве X. *Функциональным рядом* называется бесконечная сумма, соответствующая этой последовательности: $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in X$.

43.0.2 Определение

Каждой точке $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд, который может сходиться или расходиться. Если ряд сходится, то x_0 – *точка сходимости*.

43.0.3 Определение поточечной сходимости

Пусть ряд сходится при всех $x \in X$. Тогда существует предел частичных сумм $\lim S_n(x) = S(x)$.

Более крутыми словами: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(x, \varepsilon) : \forall n > N, |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, x \in X$

43.0.4 Определение

Множество всех *точек сходимости* называется *областью сходимости ряда* $X_{\text{сх}}$. Понятно, что $X_{\text{сх}} \subset X$

44 Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Пусть ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ имеет область сходимости $X_{\text{сх}}$.

44.0.1 Определение

Функциональный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ и всех точек $x \in [a, b]$ существует такое число $N_0(\varepsilon)$, что для любого $N > N_0(\varepsilon)$ справедливо: $|S(x) - \Sigma_{n=1}^{N} u_n(x)| < \varepsilon, x \in X_{\text{сх}}$.

44.0.2 Свойства

1. Если ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отвезке $[a, b]$, то сумма ряда $S(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна на этом отрезке.
2. Если ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отвезке $[a, b]$, то ряд можно почленно интегрировать, то есть справедливо равенство:

$$\int_a^x (\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(t))dt = \Sigma_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$$

3. Если на отрезке $[a, b]$ члены функционального ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеют непрерывные производные и ряд, составленный из производных $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то справедливо равенство:

$$(\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

45 Признак Вейерштрасса.

45.1 Определение (мажорантный ряд)

Ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ называется *мажорантным* для функционального ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X, если в каждой точке $x \in X$, выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$.

45.2 Теорема Вейерштрасса

Функциональный ряд сходится **равномерно** на множестве X, если его мажорантный ряд сходится.

$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ – сх $\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – сх равномерно, $x \in X$

Для доказательства достаточно проверить равномерную сходимость ряда по определению (критерий Коши).

45.2.1 Пример

Исследуем функциональный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на равномерную сходимость на множестве $X = [-1; 1]$.

На этом множестве можно составить мажорантный ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится как гармонический с $\alpha > 1$. Следовательно, ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ – сходится равномерно на отрезке $[-1; 1]$.

46 Степенные ряды. Первая теорема Абеля.

46.1 Определение (степенной ряд)

Функциональный ряд вида $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ называется *степенным рядом.*

Понятно, что заменой переменной $t = x - x_0$ можно свести степенной ряд к виду $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (t)^n$, поэтому далее рассматриваются ряды вида $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$. Такой ряд полностью определяется последовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

46.2 Теорема Абеля

Если степенной ряд $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$ сходится в точке x_1, то он сходится **абсолютно** в каждой точке интервала $(-|x_1|, |x_1|)$. Если ряд расходится в точке x_2, то он расходится в каждой точке интервала $(-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$.

Скорее всего её можно доказать с помощью признака сравнения в форме неравенства.

47 Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формулы для радиуса сходимости.

В этом ответе рассматривается степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

47.1 Определение (радиус сходимости)

$R > 0$ называют *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд сходится при всех $x : |x| < R$ и расходится при всех $x : |x| > R$. Если ряд расходится во всех точках кроме $x = 0$, то $R = 0$. Если ряд сходится во всех точках $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

47.2 Определение (интервал сходимости)

Интервал $(-R, R)$ называюется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Замечание: интервал сходимости не следует путать с областью сходимости $X_{\text{сх}}$. Как следствие из теоремы Абеля: область сходимости степенного ряда совпадает с одним из следующих интервалов:

1. $(-R; R)$;
2. $[-R; R]$;
3. $(-R; R]$;
4. $[-R; R)$;

47.3 Теорема (формула Даламбера)

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Для доказательства этой формулы можно исследовать ряд из абсолютных величин $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ с помощью признака Даламбера.

Ряд сходится абсолютно:

$$d = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Ряд расходится:

$$d = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1 \Leftrightarrow |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

47.4 Теорема (формула Коши-Адамара)

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Доказать эту формулу можно так же, как и формулу Даламбера: просто исследовать степенной ряд с помощью признака Коши.

48 Свойства радиуса сходимости степенных рядов при их интегрировании и дифференцировании.

48.1 Теорема

Радиус сходимости степенного ряда при его интегрировании или дифференцировании не изменяется.

Доказать это можно, если просто почленно проинтегрировать или продифференцировать ряд. В результате получится новый степенной ряд, у которого a_n будет такой же, как у исходного. По формуле Даламбера или формуле Коши-Адамара можно найти радиус сходимости нового ряда, и он совпадёт с областью сходимости исходного ряда.

Да, это весь билет. Тут написано даже больше, чем нужно

49 Ряды Тейлора и Маклорена.

Пусть $f(x)$ - дифференцируемая бесконечная число раз функция в окрестности точки $x = x_0$. То есть $f(x) \in C^{\infty}_{U(x_0)}$.

49.1 Определение (ряд Тейлора)

Рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

49.2 Определение (ряд Маклорена)

Ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = 0$ называется *рядом Маклорена*.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Рекомендуется ознакомиться со следующими двумя билетами для более чёткого понимания темы.

50 Теорема о представлении функции сходящимся рядом Тейлора.

Пусть дана функция $f(x) \in C^{\infty}_{U(x_0)}$ и её ряд Тейлора в точке $x = x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$.

50.1 Теорема

Если в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ функция $f(x)$ имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, то есть $|f^{(n)}(x)| \leq M (n = 1, 2, ...)$, то ряд Тейлора этой функции сходится к $f(x)$ для любого x из интервала $(x_0 - R; x_0 + R)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n, x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Следует отметить, что если функция разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора. Такое разложение единственно.

50.2 Определение

Функция, для которой существует ряд Тейлора называется *аналитической*.

51 Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

51.1 Вывод ряда Маклорена для функции

Для примера разложим функцию e^x в ряд Тейлора в точке $x = 0$ (то есть в ряд Маклорена):

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x; f^{(n)}(0) = 1$$

Получаем ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Все производные e^x ограничены на любом отрезке $[-a; a]$, то есть $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq M = e^a$. Поэтому согласно о теореме о разложении можно записать:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Радиус сходимости вычислим по формуле Даламбера.

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty$$

Тогда интервал сходимости ряда – $(-\infty; +\infty)$

51.2 Разложения основных функций

Следующие разложения и интервалы их сходимости следует запомнить.

$$1.\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$2.\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$3.\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$4.\ (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} \cdot x^n, x \in (-1; 1)$$

$$5.\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x \in (-1;1)$$

$$6.\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1;1)$$

$$7.\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n, x \in (-1;1)$$

52 Ортогональная система функций (ОГС). Разложение функции в ряд по ортогональной системе. Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.

52.1 Определение (ОГС)

Функции f_i и f_j называются *ортогональными* на измеримом множестве X, если:

$$\int_X f_i(x) \cdot f_j(x) dx = 0$$

Ортогональная система функция – множество попарно ортогональных функций на множестве.

52.1.1 Пример

Функции $\sin nx$ и $\cos kx$ образуют ОГС на отрезке $[-\pi, \pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx = 0$$

52.2 Определение (Ряд по ОГС)

Пусть φ_n образуют ОГС на множестве X. Тогде функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) - \text{ряд по ОГС}$$

52.3 Теорема

Пусть ряд по ОГС на множестве X сходится к функции $\varphi(x)$. Тогда коэффециенты a_n ряда по ОГС можно вычислить следующим образом:

$$a_n = \frac{\int_X f(x) \cdot \varphi_n(x) dx}{\int_X \varphi_n^2(x) dx}$$

А сама функция раскладывается в ряд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x), x \in X$$

В этом случае эти коэффециенты называются *коэффециентами Фурье*, а сам ряд называется *рядом Фурье*

53 Полнота и замкнутость ОГС. Неравенство Бесселя, Равенство Парсеваля.

53.1 Определение (замкнутость ОГС)

ОГС на множестве X называется *замкнутой*, если не существует такой функции f, что

$$\int f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \forall n$$

53.2 Определение (полнота ОГС)

Пусть дана ОГС $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ на множестве X. Такая система называется полной, если каждая кусочно-неприрывная функция f её ряд Фурье сходится к этой функции на множестве X, т.е.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left[f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \right] dx = 0$$

В действительности, если ОГС замкнутая, она является полной и наоборот: полная ОГС является замкнутой.

53.3 Определение (равенство Парсеваля)

$$\int_X f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_X \varphi_n^2(x)dx$$

53.4 Теорема (критерий полноты ОГС)

Для того, чтобы ОГС являлась полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции f_n кусочно-непрерывной на множестве X выполнялось равенство Парсеваля.

53.5 Теорема (неравенство Бесселя)

$$||f||^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle f, \frac{\varphi_n}{||\varphi_n||} \right\rangle \right|$$

$$||f||^2 = < f, f >$$

54 Основная система тригонометрических функций. Ее ортогональность. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.

54.1 Определение (Основная система тригонометрических функций)

Система функций $1, \sin lx, \cos kx$ называется *основной системой тригонометрических функций* (далее ОСТФ).

54.2 Теорема (ортогональность ОСТФ)

ОСТФ является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Для доказательства проверим попарную ортогональность функций.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin lx dx = -\frac{1}{l} \cos lx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{l} - \frac{1}{l} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \cdot \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(lx + kx) + \cos(lx - kx)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{l+k} \cos(lx + kx) + \frac{1}{l-k} \sin(lx + kx) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{l+k} + \frac{1}{l+k} \right] = 0$$

54.3 Определение (тригонометрический ряд)

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

54.4 Определение (тригонометрический ряд Фурье)

Тригонометрический ряд сходится к $f(x)$ на множестве $[-\pi, \pi]$, то он называется её *тригонометрическим рядом Фурье*

54.5 Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

Для разложение функции в тригонометрический ряд Фурье необходимо найти коэффециенты Фурье a_0, a_n, b_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Тогда $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

55 Теорема Дирихле. Ряды Фурье для четной и нечетной функций. Ряд Фурье для функций произвольного периода.

55.1 Определение (условия Дирихле)

Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на $[a, b]$ или имеет конечное число точек разрыва I-рода.
2. Кусочно-монотонная на $[a, b]$, т.е. отрезок $[a, b]$ можно разделить на конечное число отрезков, на которых $f(x)$ монотонна.

55.2 Теорема Дирихле

Если функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом отрезке из $\mathbb{R}$ условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится при любых x. При этом, в каждой точке непрерывности функции сумма ряда $S(x) = f(x)$, а в каждой точке разрыва $x = \xi$ сумма $S(\xi) = \frac{f(\xi-0)+f(\xi+0)}{2}$, где запись $f(\xi - 0)$ означает $\lim_{x\to\xi-0} f(x)$, а $f(\xi + 0)$ означает $\lim_{x\to\xi+0} f(x)$.

55.3 Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Известно, что такое тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

Под знаком суммы мы видим чётную функцию cos и нечётную функцию sin. В действительности, если $f(x)$ - чётная, то для её разложение будет содержать только косинусы, а если нечётная - только синусы. То есть:

$$f - \text{чётная} \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \Leftrightarrow a_n = 0$$
$$f - \text{нечётная} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow b_n = 0$$

Доказать это совсем несложно, если применить формулы для a_n и b_n для тригонометрического ряда и использовать свойство чётности f.

56 Комплексная форма ряда Фурье.

Известны следующие факты:

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin$$
$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin$$

Откуда можно получить:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$
$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Подставим эту форму синуса и косинуса в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{inx} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{inx} \right)$$

где $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Коэффециенты этого ряда можно найти по формулам для тригонометрического ряда Фурье:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$
$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Таким образом, получается комплексная форма ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{inx}\right) \text{ или } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$