ИДЗ №1, Вариант 17

Альберт Шефнер ИВБ-211

1 мая 2023 г.

Содержание

1 Задание.

Дано комплексное число $z = \frac{\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}$

а) представить z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах и изобразить его на комплексной плоскости;

б) возвести число z в степень $n = 9$

в) найти все корни уравнения $w^3 = z$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение:

а) Умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряжённое к знаменателю число:

$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})1+i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}{1^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i\sqrt{3}).$

$z = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i\sqrt{3})$ - алгебраическая форма записи.

Для определения тригонометрической формы записи надо найти модуль и аргумент числа z.
Модуль: $r = \sqrt{(\Re ez)^2 + (\Im mz)^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1+3} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Аргумент: $\phi = \arctan(\frac{\Im mz}{\Re ez}) = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1}) = \frac{\pi}{3}$

Таким образом, тригонометрическая форма записи числа z:
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$

Показательная форма записи комплексного числа выглядит так: $re^{i\phi}$. Подставим в эту форму найденные значения аргумента и модуля: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ - показательная форма записи

Изобразим число z на комплексной плоскости. На оси OX будем откладывать действительную часть, а на OY - мнимую. Изображением числа будет вектор $(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4})$.

б) Для возведения числа z в степень $n = 9$ воспользуемся показательной формой записи.

$z^9 = (\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}})^9 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i9\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i3\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) Для решения уравнения $w^3 = z$ извлечём из числа z комплексный корень:

$w^3 = z$
$w_k = (\sqrt[3]{z})_k; k = \overline{0,2}$
$w_k = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\frac{1}{3}(\frac{\pi}{3}+2\pi k)}; k = \overline{0,2}$
$w_k = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{i(\frac{\pi}{3\cdot 3}+\frac{2\pi k}{3})}; k = \overline{0,2}$
$w_k = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3})}.$

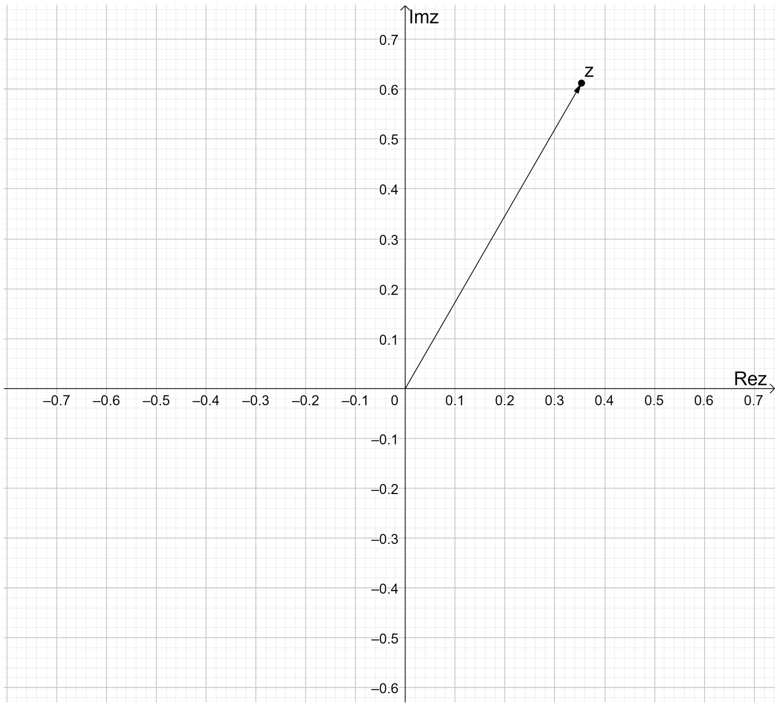

Рис. 1: Изображение числа z на комплексной плоскости

Теперь вычислим корни для конкретных k:

$k=0:\ w_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}2e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi\cdot 0}{3})} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{\pi}{9}}$

$k=1:\ w_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi\cdot 1}{3})} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{6\pi}{9})} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{7\pi}{9}}$

$k=2:\ w_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi\cdot 2}{3})} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{12\pi}{9})} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{13\pi}{9}}$

Убедимся в правильности найденных корней путём перемножения их друг на друга: $w_0\cdot w_1\cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{\pi}{9}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{7\pi}{9}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{13\pi}{9}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2}}e^{(i\frac{\pi}{9}+i\frac{7\pi}{9}+i\frac{13\pi}{9})} =$
$= \frac{1}{(\sqrt[6]{2})^3}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{9}+\frac{13\pi}{9})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi+7\pi+13\pi}{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{21\pi}{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(2\pi+\frac{3\pi}{9})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}$ - результат совпал с числом z, значит корни уравнения найдены верно.

Ответ:

а) Алгебраическая форма записи: $z=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i\sqrt{3})$.
Тригонометрическая форма записи: $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$.
Показательная форма записи: $z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

б) $z^9=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) $w_0=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{\pi}{9}}$
$w_1=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{7\pi}{9}}$
$w_2=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{13\pi}{9}}$

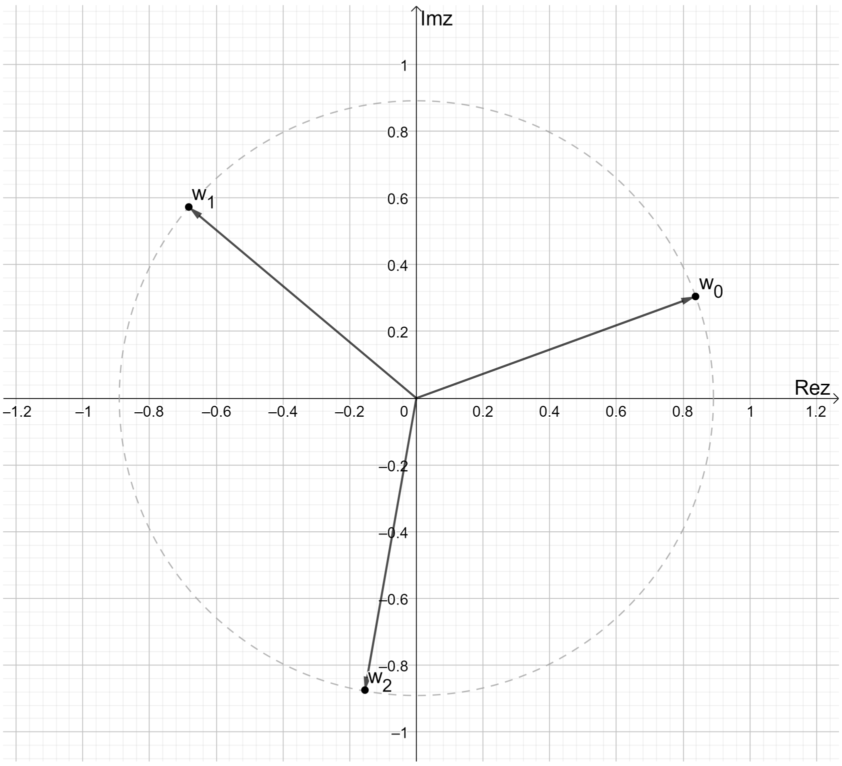

Рис. 2: Изображение $\sqrt[3]{z}$ на комплексной плоскости

2 Задание.

Изобразить на плоскости:

$\Re e(\frac{i}{z}) - \frac{\Im m(iz)}{z\overline{z}} = 0$

Решение:

Поскольку z и $\overline{z}$ в знаменателе, они не должны быть равны 0, то есть $\Re ez \neq 0$ и $\Im mz \neq 0$, или $|z| \neq 0$.
Так же вспомним, что по свойствам комплесных чисел $z\overline{z} = |z|^2$
$\Re e(\frac{i}{z}) - \frac{\Im m(iz)}{z\overline{z}} = 0 \Leftrightarrow \Re e(\frac{i\overline{z}}{z\overline{z}}) - \frac{\Im m(iz)}{z\overline{z}} = 0 \Leftrightarrow \Re e(\frac{i\overline{z}}{|z|^2}) - \frac{\Im m(iz)}{|z|^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\Re e(i\overline{z})}{|z|^2} - \frac{\Im m(iz)}{|z|^2} = 0 \Leftrightarrow \Re e(i\overline{z}) - \Im m(iz) = 0$.

Пусть $z = x + iy$. Тогда:
$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$
$\Re e(i\overline{(x+iy)}) - \Im m(i(x+iy)) = 0 \Leftrightarrow \Re e(i(x-iy)) - \Im m(ix-y) = 0 \Leftrightarrow \Re e(ix+y) - \Im m(ix-y) = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \Leftrightarrow y = x$.
Графиком этой функции будет прямая с выколотой точкой $(0;0)$

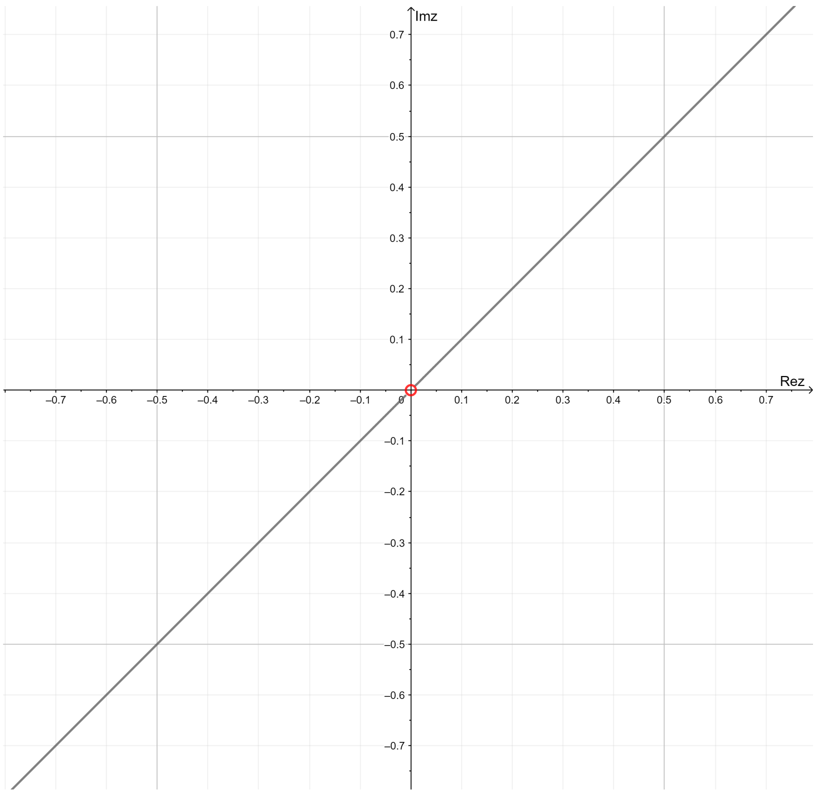

Рис. 3: Изображение $\Re e(\frac{i}{z}) - \frac{\Im m(iz)}{z\overline{z}} = 0$ на плоскости

3 Задание.

Найти x и y, считая их вещественными:

$(-6+i)x+(11-2i)y=3-4i$

Решение:

$(-6+i)x+(11-2i)y=3-4i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6x+ix+11y-2iy=3-4i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6x+11y+i(x-2y)=3-4i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+11y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6(2y-4)+11y=3 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12y+24+11y=3 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -y=-21 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=21 \\ x=2\cdot 21-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=21 \\ x=38 \end{cases}$

Ответ:

$x=38$;
$y=21$

4 Задание.

Графически изобразить множества точек, удовлетворяющих следующим неравенствам:

a) $-4 \leq \Re ez \leq 2$

b) $1 \leq \Im mz \leq 4$

c) $2 < |z| \leq 5$

d) $|z| < 3$

e) $2 < |z + 3 - i| < 3$

f) $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{2}$

Решение:

а) $-4 \leq \Re e z \leq 2$
Пусть $z = x + iy$. Тогда:
$-4 \leq \Re e(x+iy) \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$
Графическим изображением данного неравенства будет вертикальная полоса.

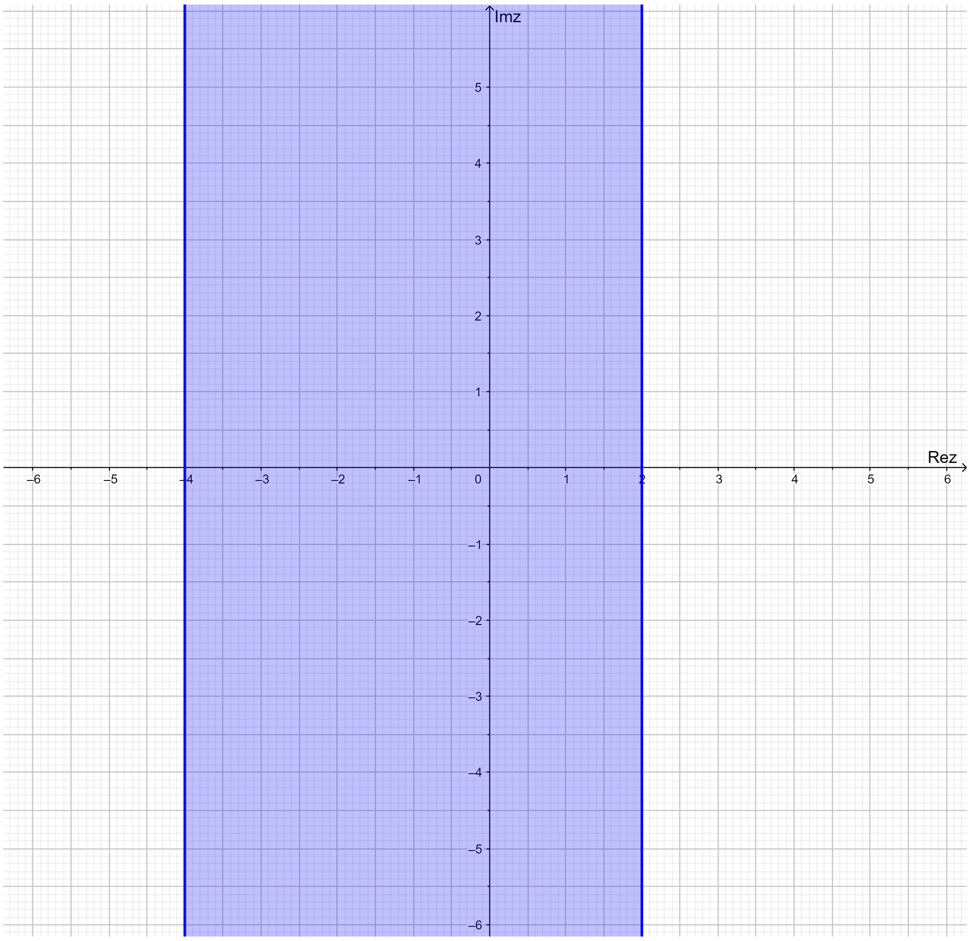

Рис. 4: Графическое изображение $-4 \leq \Re e z \leq 2$

b) $1 \leq \Im m z \leq 4$

Пусть $z = x + iy$. Тогда:

$1 \leq \Im m(x+iy) \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 4$

Графическим изображением данного неравенства будет горизонтальная полоса.

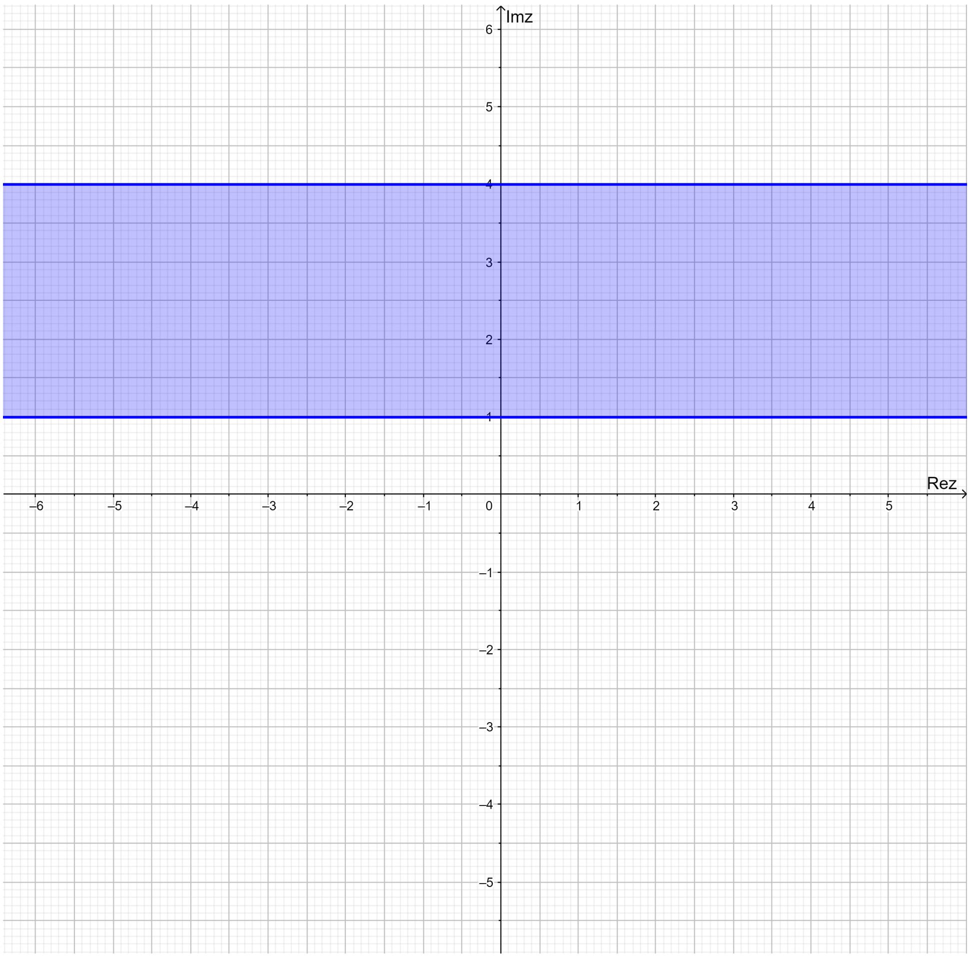

Рис. 5: Графическое изображение $1 \leq \Im m z \leq 4$

c) $2 < |z| \leq 5$

Пусть $z = x + iy$. Тогда:

$2 < |z| \leq 5 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5 \Leftrightarrow 2^2 < x^2 + y^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 < x^2 + y^2 \leq 25.$

Графическим изображением данного неравенства будет кольцо, у которого малый радиус равен 2, а больший радиус равен 5.

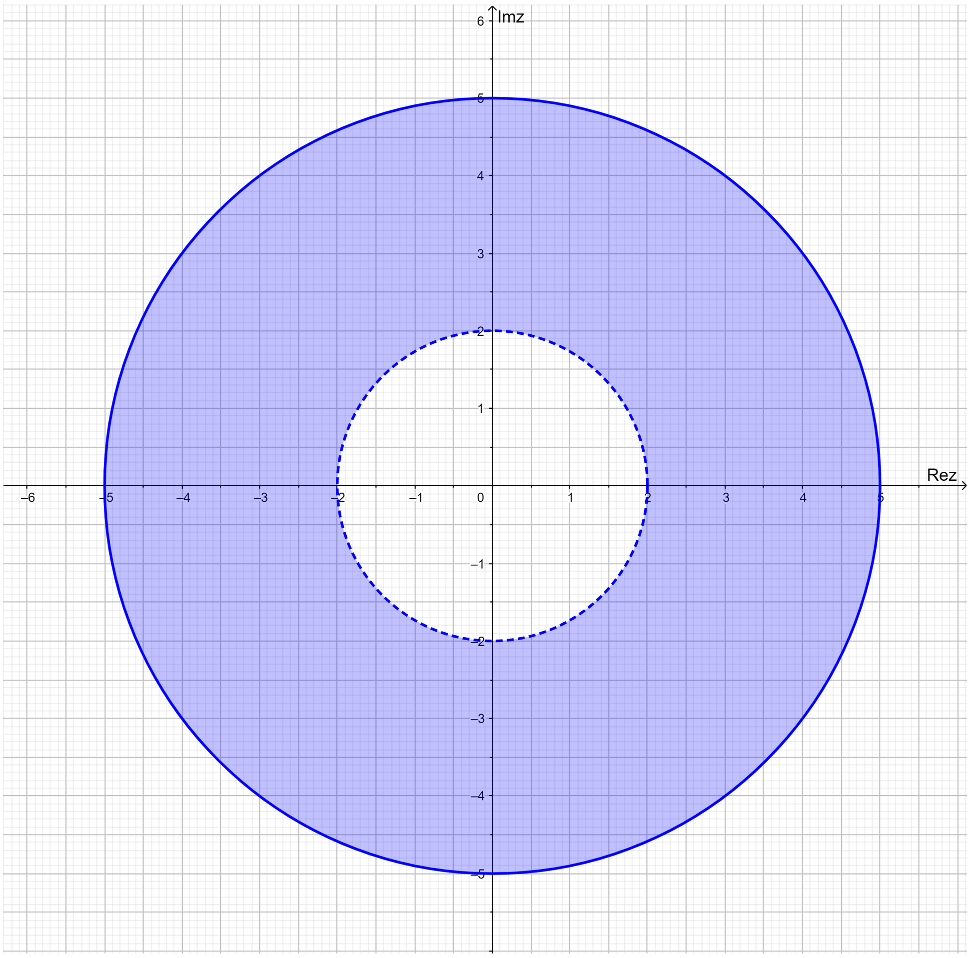

Рис. 6: Графическое изображение $2 < |z| \leq 5$

d) $|z| < 3$
Пусть $z = x + iy$. Тогда:
$|z| < 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 3^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 9$.
Графическим изображением данного неравенства будет круг с радиусом 3.

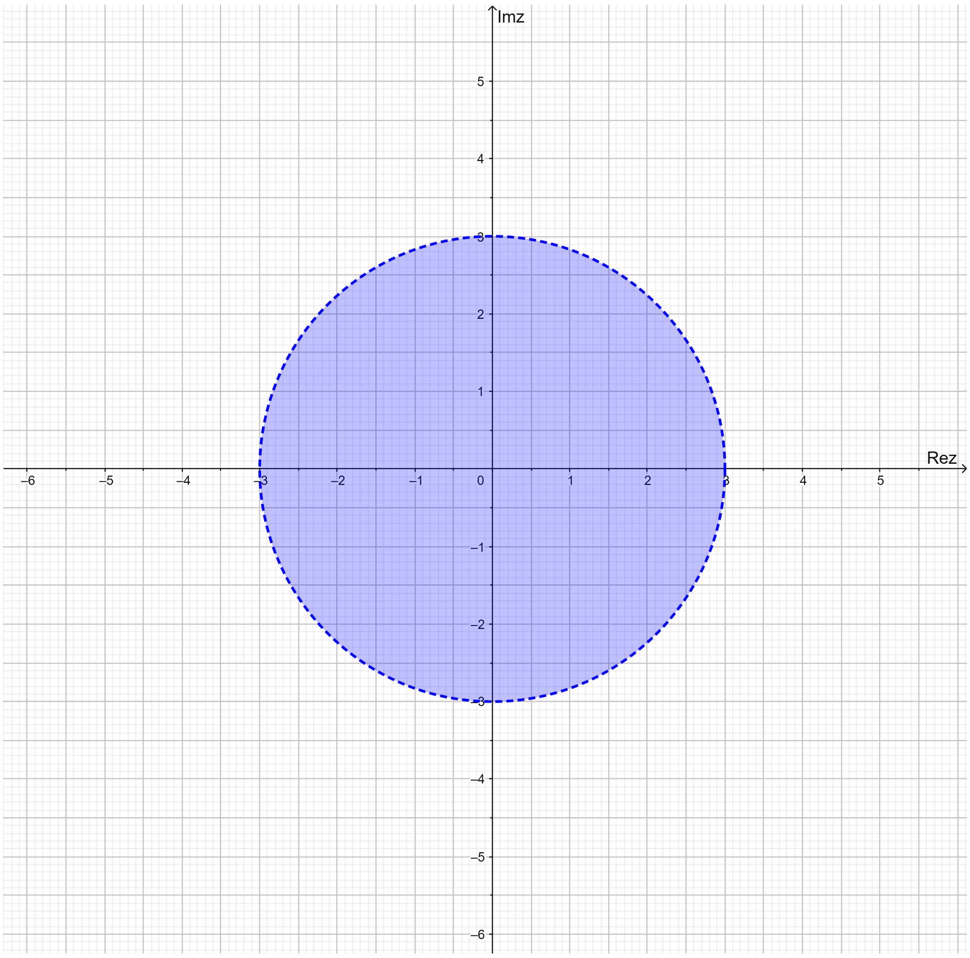

Рис. 7: Графическое изображение $|z| < 3$

е) $2 < |z+3-i| < 3$

Пусть $z = x + iy$. Тогда:

$2 < |z+3-i| < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < |x+iy+3-i| < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < |x+3+i(y-1)| < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < \sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^2 < (x+3)^2+(y-1)^2 < 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 < (x+3)^2+(y-1)^2 < 9$

Графическим изображением данного неравенства будет кольцо с центром в точке $(-3;1)$, малым радиусом 2 и большим радиусом 3.

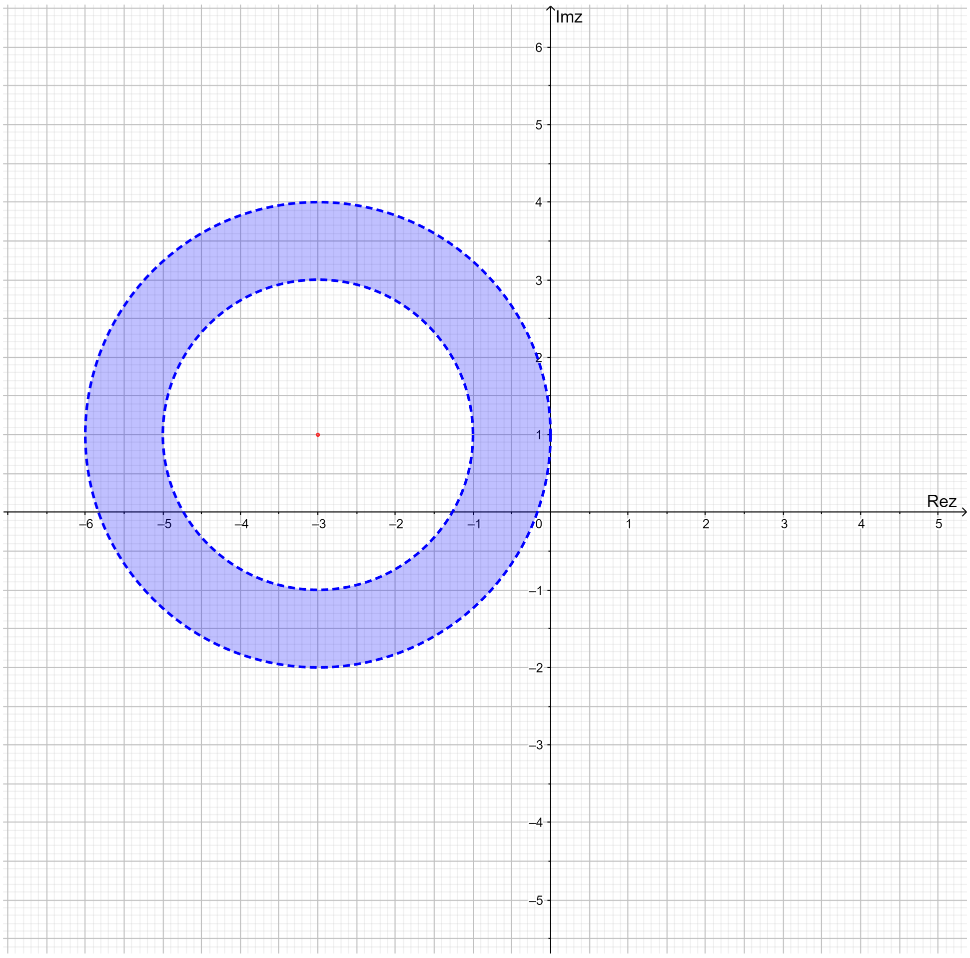

Рис. 8: Графическое изображение $2 < |z+3-i| < 3$

f) $\frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$
Графическим изображением данного неравенства будет бесконечный сектор на плоскости, ограниченный двумя прямыми (в третьей четверти, так как отрезок $(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2})$ целиком лежит в третьей четверти):
$y = \arctan(\frac{5\pi}{4})x$ или $y = x$; и
$x = 0$ (поскольку функция арктангенса не оперделена в точке $\frac{3\pi}{2}$)

Также стоит отметить, что точка $(0, 0)$ не входит в график, так как аргумент числа $z = 0$ не определён.

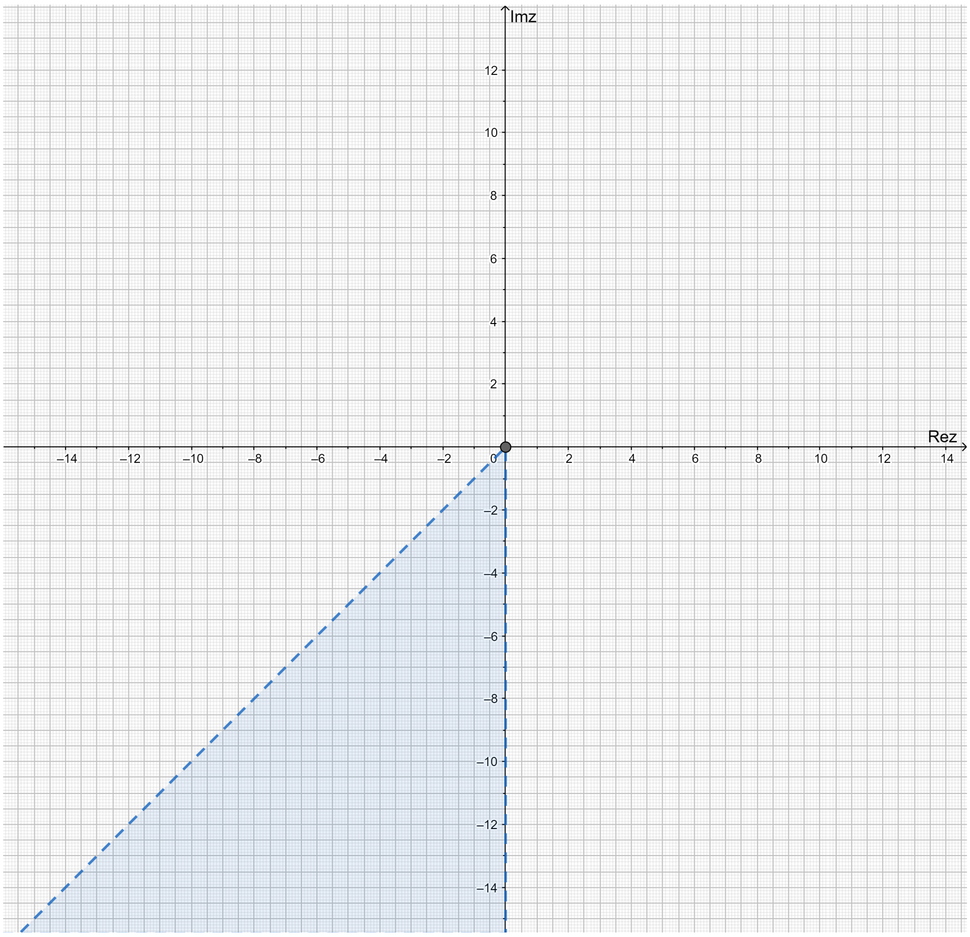

Рис. 9: Графическое изображение $\frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$

5 Задание.

Выполнить разложение на простейшие дроби неправильной рациональной дроби:
$R(z) = \frac{z^5-7z^4+11z^3-5z^2}{4z^3+5z^2-23z-6}$

решение:

Поскольку степень числителя больше степени знаменателя, сначала нужно выделить целую часть. Для этого выполним деление числителя на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l}
z^5 - 7z^4 + 11z^3 - 5z^2 & 4z^3 + 5z^2 - 23z - 6 \\ \cline{2-2}
- \quad z^5 + \frac{5}{4}z^4 - \frac{23}{4}z^3 - \frac{3}{2}z^2 & \frac{1}{4}z^2 - \frac{33}{16}z + \frac{433}{64} \\ \cline{1-1}
- \frac{33}{4}z^4 + \frac{67}{4}z^3 - \frac{7}{2}z^2 \qquad & \\
- \quad - \frac{33}{4}z^4 - \frac{165}{16}z^3 + \frac{759}{16}z^2 + \frac{99}{8}z & \\ \cline{1-1}
\frac{433}{16}z^3 - \frac{615}{15}z - \frac{99}{8} & \\
- \quad \frac{433}{16}z^3 + \frac{2165}{64}z^2 - \frac{9959}{64}z - \frac{2598}{64} & \\ \cline{1-1}
- \frac{5425}{64}z^2 + \frac{9167}{64}z + \frac{2598}{64} &
\end{array}$$

В результате деления получаем:
$R(z) = \frac{1}{4}z^2 + \frac{33}{16}z + \frac{433}{64} + \frac{-\frac{5425}{64}z^2+\frac{9167}{64}z+\frac{2598}{64}}{4z^3+5z^2-23z-6}$

Нам остаётся выполнить разложение правильной рациональной дроби
$M(z) = \frac{-\frac{5425}{64}z^2+\frac{9167}{64}z+\frac{2598}{64}}{4z^3+5z^2-23z-6}$

Теперь разложим знаменатель. Поскольку у нас полином третьей степени, стоит сначала попробовать найти целый корень с помощью схемы Горнера. Делители свободного члена $6 : 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Начнём перебор с 1:

	4	5	-23	-6
1	4	9	-14	-20
-1	4	5	-19	-1
2	4	13	3	0

$b_3 = 0$, значит 2 - корень. Таким образом,
$4z^3+5z^2-23z-6 = (z-2)(4z^2+13z+3)$ Остаётся решить квадратное уравнение $4z^2+13z+3$.
Решим его через дискриминант:
$D = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121 = 11^2 z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-13\pm\sqrt{11^2}}{8}$
$z_1 = -3, z_2 = -\frac{1}{4}$

Таким образом, разложение знаменателя на множители выглядит так:
$(z-2)(z+3)(4z+1)$
Тогда $M(z)$ примет вид:

$M(z) = \frac{-\frac{5425}{64}z^2+\frac{9167}{64}z+\frac{2598}{64}}{(z-2)(z+3)(4z+1)}$

Можно заметить, что если поделить числитель и знаменатель на 4, все множители разложения знаменателя станут неприводимыми линейными. Тогда можно применить формулу Лагранжа:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z_k)}{g'(z_k)(z - z_k)}$$

.

В нашем случае: $f(z) = -\frac{5425}{256}z^2 + \frac{9167}{256}z + \frac{2598}{256}$ и

$g(z) = (z-2)(z+3)(z+\frac{1}{4}) = z^3 + \frac{5}{4}z^2 - \frac{23}{4}z - \frac{3}{2}$

Найдём производную $g(x)$.
$g'(z) = (z^3 + \frac{5}{4}z^2 - \frac{23}{4}z)' = (z^3)' + (\frac{5}{4}z^2)' - (\frac{23}{4}z)' =$
$3z^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}z - \frac{23}{4} - 0 = 3z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{23}{4}$

Подставим найденные значения в формулу Лагранжа. Таким образом, $M(z)$ примет следующий вид:
$M(z) = \frac{f(2)}{g'(2)(z-2)} + \frac{f(-3)}{g'(-3)(z+3)} + \frac{f(-\frac{1}{4})}{g'(-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{4})} =$

$= \frac{-\frac{5425}{256}(2)^2+\frac{9167}{256}(2)+\frac{2598}{256}}{(3\cdot(2)^2+\frac{5}{2}\cdot(2)-\frac{23}{4})(z-2)} + \frac{-\frac{5425}{256}(-3)^2+\frac{9167}{256}(-3)+\frac{2598}{256}}{(3\cdot(-3)^2+\frac{5}{2}\cdot(-3)-\frac{23}{4})(z+3)} + \frac{-\frac{5425}{256}(-\frac{1}{4})^2+\frac{9167}{256}(-\frac{1}{4})+\frac{2598}{256}}{(3\cdot(-\frac{1}{4})^2+\frac{5}{2}\cdot(-\frac{1}{4})-\frac{23}{4})(z+\frac{1}{4})} =$

$= \frac{-\frac{5425}{64}+\frac{9167}{128}+\frac{2598}{256}}{(12+5-\frac{23}{4})(z-2)} + \frac{-\frac{48825}{256}-\frac{27501}{256}+\frac{2598}{256}}{(27-\frac{15}{2}-\frac{23}{4})(z+3)} + \frac{-\frac{5425}{4096}-\frac{9167}{1024}+\frac{2598}{256}}{\frac{3}{16}-\frac{5}{8}-\frac{23}{4}} =$

$= \frac{-3}{\frac{45}{4}(z-2)} - \frac{-288}{\frac{55}{4}(z+3)} + \frac{-\frac{525}{4096}}{-\frac{99}{16}(z+\frac{1}{4})} =$

$= -\frac{4}{15(z-2)} - \frac{1152}{55(z+3)} + \frac{175}{2112(4z+1)}$

Ответ:

$R(z) = \frac{1}{4}z^2 + \frac{33}{16}z + \frac{433}{64} - \frac{4}{15(z-2)} - \frac{1152}{55(z+3)} + \frac{175}{2112(4z+1)}$