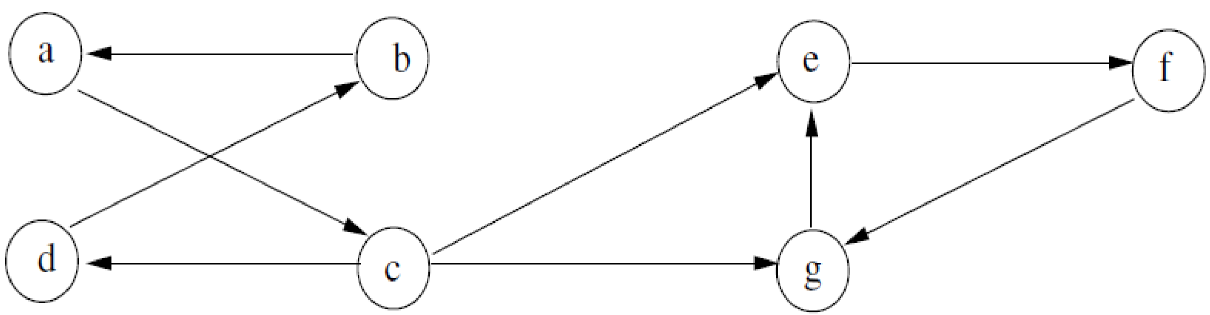
ASD2 : CC2
Fermeture transitive d'un graphe orienté

- On appelle fermeture transitive d'un graphe $G=(S,A)$, le graphe $G^f=(S,A^f)$ tel que pour tout couple de sommets $(s_i,s_j) \in S^2$, l'arc/arête (s_i,s_j) appartient à A^f si et seulement s'il existe un chemin/chaine de s_i vers s_j .
- *Le calcul de la fermeture transitive d'un graphe peut se faire en additionnant les "puissances" successives de sa matrice d'adjacence.*



ASD2 : CC2
Fermeture transitive d’un graphe orienté

- Dans la matrice d’adjacence, M(i,j) = 1 ssi il existe un chemin de longueur 1 pour aller de i à j.
- Pour qu’il existe un chemin de longueur 2 pour aller d’un sommet k à un sommet r:
  - Il faut qu’il existe un sommet i tel qu’il existe un chemin de longueur 1 de k vers i et un autre chemin de longueur 1 de i vers r.
  - Pour tester cela, il s’agit de parcourir simultanément la ligne k et la colonne r de la matrice M et de regarder s’il y a un 1 à la même position dans la ligne k et la colonne r.
  - Par exemple, il y a un chemin de longueur 2 allant de a vers d car il y a un 1 en troisième position à la fois dans la ligne a et dans la colonne d.
- Ainsi, en multipliant cette matrice par elle-même, on obtient la matrice M^2 des chemins de longueur 2!

$$M = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

ASD2 : CC2
Fermeture transitive d'un graphe orienté

- Dans cette matrice, $M^2(i,j) = 1$ ssi il existe un chemin de longueur 2 pour aller de i à j. Par exemple, M (a,d) = 1 car il existe un chemin (< a, c, d >) de longueur 2 allant de a à d.
- De façon plus générale, M^k (la matrice obtenue en multipliant M par elle même k fois successivement) est la matrice des chemins de longueur k.

$$M^2 = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

- En additionnant M et M^2, on obtient la matrice $M + M^2$ des chemins de longueur inférieure ou égale à 2 :

$$M + M^2 = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ASD2 : CC2
Fermeture transitive d'un graphe orienté

- En multipliant M + M² par M, et en additionnant la matrice résultante avec M, on obtient la matrice $M + M^2 + M^3$ des chemins de longueur inférieure ou égale à 3.
- La matrice $M + M^2 + M^3 + M^4$ des chemins de longueur inférieure ou égale à 4.
- La matrice $M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5$ des chemins de longueur inférieure ou égale à 5.
- Si on recommence une fois de plus,et que l'on calcule la matrice $M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6$ des chemins de longueur inférieure ou égale à 6, on constate que cette matrice est égale à celle des chemins de longueur inférieure ou égale à 5.
- Par conséquent $M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5$ est la matrice d'adjacence de la fermeture transitive G^f du graphe G de départ.

$$M + M^2 + M^3 = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ASD2 : CC2
Fermeture transitive d'un graphe orienté

- Comme pour les graphes non orientés, une façon (naïve) de déterminer si un graphe orienté est fortement connexe consiste à calculer sa fermeture transitive : si la fermeture transitive du graphe est le graphe complet, alors il est fortement connexe.

  - C'est le sujet de ce second exercice *Codecheck*.
  - Nous n'allons pas effectuer de multiplication et d'addition de matrices $O(|V|^4)$
  - Nous allons utiliser l'algorithme de *Warshall* qui est équivalent $O(|V|^3)$

- Notons qu'il existe un algorithme bien plus efficace pour déterminer les composantes fortement connexes d'un graphe orienté.

- Kosaraju $O(|V| + |E|)$ si implémentation avec listes d'adjacence
- Tarjan $O(|V| + |E|)$ si implémentation avec listes d'adjacence

ASD2 : CC2
Fermeture transitive d’un graphe orienté

- Disponible sur Moodle à partir du lundi *05.10.2015*
- A rendre **individuellement** jusqu’au dimanche **01.11.2015** à **23h55**
- Vous devez rendre uniquement l’archive signée générée par le service *Codecheck.*