Abstract

1 Introducción

La masa tiene dos mecanismos de transporte **difusión**(conducción) y **advección**, el término que se refiere como **convección** es aquel que considera estos mecanismos al mismo tiempo.

2 Definitions

2.1 Concentration

La concentración de una sustancia, tal como el aire didolvido en el agua, se define como la cantidad de sutancias por unaidad de volumenn que la contiene

$$c = \frac{\text{amount of substance}}{\text{volumen of fluid}} = \frac{m}{V} \tag{1}$$

La cantidad de sustancia es usualmente tomada como su masa. En ese caso las unidades de c son masa por volumen.

Cuando el agua es el ambient fluid y reacciones quimicas ocurren, es conveniente expresar la concentración en moles por volumen. Las unidad moles/L es llamada molaridad.

2.2 Flujo

3 Difusión

Los procesos de difusión son causados por el movimiento termico de las moleculas (Movimineto Browniano) y solo puede ser descrito de manera estadistica. Considerando el caso unidimensional y diviendo el eje x en celdas de ancho Δx, y sección transversal de area A en el que las moleculas están.

Debido a una temperatura termodinamica $T > 0$ las moleculas están en movimiento termico. La densidad de particulas (particulas por volumen) en la coordinada x está denotada por $n(x)$. Describimos el movimiento aleatorio con una probabilidad p de que la particula salte de una celda a una vecina. Asumiremos que la difusipón es un proceso isotropico. Por lo tanto la probabilidad p es uniforme e independiente de la dirección que se mueva la particula.

Determinaremos la densidad de flujo de las particulas (particulas por unidad de area y tiempo) en la frontera de la celda $i|i+1$ para un intervalo de tiempo Δt. Para la celda i, un número $pn(x_i)A\Delta x$ particulas saltan hacia la derecha, mientras que para la celda $i+1$, un número $pn(x_i+1)A\Delta x$ particulas saltan hacia la izquierda. Por lo tanto la densidad neta de flujo de las particulas en la forntera está dada por:

$$F = \frac{pn(x_i)A\Delta x - pn(x_i + \Delta x)A\Delta x}{A\Delta t}$$

$$= -p\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{n(x_i + \Delta x) - n(x_i)}{\Delta x}$$

Tomando el limite $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$, tomando a $\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$ como constante, obtenemos la primera Ley de Fick

$$F = -(\frac{\Delta x^2}{\Delta t})\frac{\partial n}{\partial x} = -D\frac{\partial n}{\partial x} \tag{2}$$

La cantidad D es la constante de Difusión, el coeficiente de difusión, o de difusiviad LOL con unidades $m^2 s^{-1}$, este coeficiente depende en las propiedades fisicas de las particulas y del medio que las contiene.

La forma general de esta ley, tomando en cuenta $C = C(x, y, z)$ como la concentración de una cntidad fisica arbitraria:

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}C \tag{3}$$

3.1 EJEMPLO

4 Advección

Para la derivación de la formulación de densidades de flujo advectivas de cantidades fisicas, primero considermaos el caso unidimensional, Asumimos un flow $u(x, t)$ el cual transporta la cantidad a considerar. El fluido se mueve a través de un area fija A. La cantidad física a transportar se da como una concentración $C(x, t)$, por lo tanto, la cantidad se refiere a un volumen, En un corto intervalo de tiempo Δt, un volumen d $A\Delta x$ de largo $\Delta x = u\Delta t$ pasa através de la sección transversal de area A y transporta la cantidad $A\Delta xC$ por ahí. La densidad de flujo advectiva está dada por:

$$F = \frac{A\Delta xC}{A\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}C = uC$$

En tres dimensiones, se ve así

$$\vec{F} = \vec{u}C \tag{4}$$

4.1 EJEMPLO

5 ADVECTION-DIFFUSION

Consideraremos un volumen de control pequeño y fijo $\Delta V = A\Delta x$, La densidad media C dentro del columen de control cambia con el tiempo debido a los flujos que entran, los flujos que salen, las fuentes, los sumideros dentro del volumen de control. Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C\Delta V) = F(x)A - F(x+\Delta x)A + P\Delta V \tag{5}$$

donde F es la densidad de flujo de la cantidad C y P es la densidad neta de la fuente (sources minus sinks per unit volume) de esta cantidad. Si insertamos 3 y 4 en 5 y dividimos por ΔV

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{u(x+\Delta x)C(x+\Delta x) - u(x)C(x)}{\Delta x} + \frac{D\frac{\partial C}{\partial x} - D\frac{\partial C}{\partial x}}{\Delta x} + P \tag{6}$$

tomando el limite $\Delta x \to 0$ entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial (uC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial C}{\partial x}) + R \tag{7}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}C) + \nabla \cdot (D\nabla C) + R \tag{8}$$

6 Ecuación de transferencia de masa

Considerando un fluido incompresible, es decir, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, y expandiendo 8

$$\nabla \cdot (\vec{u}C) = \vec{u} \cdot (\nabla C) + C \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\nabla C)$$

entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\vec{u} \cdot (\nabla C) + \nabla \cdot (D\nabla C) + R \tag{9}$$

6.1 CHORO FISICO

7 Adimensionalizacion

Joder, eso es si es física. Aquí va a salir un numerito que nos va a decir cuando domina Advección y cuando domina Difusión

8 Aplicaciones

9 Método de Diferencias Finitas

El propósito de esta sección es el introducir a alguien que no haya visto esto en su vida, o al menos no le haya puesto atención, la mayoria de esta información viene del libro **Computational Physics by Mark Newman** y la deducción para el algoritmo de puntos bidimensionales es por la solución del ejercicio **x.x** resuelto por (Max et.al 2023)

Recordando la definición de derivada

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{10}$$

Numéricamente podemos tomar el límite si hacemos h muy pequeño y entonces aproximamos:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dependiendo de si tomamos el paso en la dirección positiva o negativa es como le llamaremos a la diferencia

$$\frac{df}{dx}_{Foward} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{11}$$

$$\frac{df}{dx}_{Backward} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{12}$$

Bueno, si recordamos la definicíon de Derivada Central (CD):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}$$

Pero en la práctica no tenemos acceso a este tipo de puntos, por loq ue tomaremos $h = 2$ entonces tenemos que:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{13}$$

que es la que estaremos usando.

9.1 Segunda Derivada

No vamos a ir más allá de una aproximación $O(h)$, por lo que para conseguir las segundas derivadas vamos a derivar las expresiones obtenidas en la sección anterior.

9.1.1 Foward

Entonces, para 11 tenemos que:

$$f''(x)_{Foward} = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\left(\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h}\right) - \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\right\}$$

$$f''(x)_{Foward} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \tag{14}$$

9.1.2 Backward

Para 12 tenemos que:

$$f''(x)_{Backward} = \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right) - \left(\frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}\right)\right\}$$

$$f''(x)_{Backward} = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \tag{15}$$

9.1.3 Central

Para 13 tenemos que:

$$f''(x) = \frac{f'(x+h/2) - f'(x-h/2)}{h}$$

con:

$$f'(x+h/2) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'(x-h/2) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

entonces:

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - (\frac{f(x) - f(x-h)}{h})\right\}$$

$$f''(x)_{Central} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{16}$$

9.2 Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h/2, y) - f(x-h/2, y)}{h} \tag{17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+h/2) - f(x, y-h/2)}{h} \tag{18}$$

10 Nuestro problema

Aquí hay que hacer una breve advertencia, dependiendo de como tomemos nuestro mallado nos puede facilitar, y esto es dependiente del lenguaje de programación.

Supongamos que tenemos una malla $2D$, y W un campo escalar. Como ya vimos en la sección 9.1, necesitamos al menos 2 puntos si es que queremos calcular su segunda derivada ya sea central, backward o foward de un solo punto (y eso eso es para una dimensión), eso quiere decir que necesitamos 4 puntos en total para describir un punto $W(x, y)$.

No sólo eso, también tenemos **9 tipos de nodos**

$$\begin{bmatrix} W(x_0,y_j) & W(x_1,y_j) & W(x_2,y_j) & \dots & W(x_{i-2},y_j) & W(x_{i-1},y_j) & W(x_i,y_j) \\ W(x_0,y_{j-1}) & W(x_1,y_{j-1}) & W(x_2,y_{j-1}) & \dots & W(x_{i-2},y_{j-1}) & W(x_{i-1},y_{j-1}) & W(x_i,y_{j-1}) \\ W(x_0,y_{j-2}) & W(x_1,y_{j-2}) & W(x_2,y_{j-2}) & \dots & W(x_{i-2},y_{j-2}) & W(x_{i-1},y_{j-2}) & W(x_i,y_{j-2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W(x_0,y_2) & W(x_1,y_2) & W(x_2,y_2) & \dots & W(x_{i-2},y_2) & W(x_{i-1},y_2 & W(x_i,y_2) \\ W(x_0,y_1) & W(x_1,y_1) & W(x_2,y_1) & \dots & W(x_{i-2},y_1) & W(x_{i-1},y_1) & W(x_i,y_1) \\ W(x_0,y_0) & W(x_1,y_0) & W(x_2,y_0) & \dots & W(x_{i-2},y_0) & W(x_{i-1},y_0) & W(x_i,y_0) \end{bmatrix}$$

Como podemos ver hay 9 casos posibles para poder obtener el valor del punto usando sus vecinos, usaremos las definiciones de la sección

10.1 Ecuación de transporte de masa para fluidos incompresibles en diferencias finitas a orden $O(h)$.

Tenemos que 9 con $R = 0$ en $2D$ se ve como:

$$\underbrace{\frac{\partial C(x,y,t)}{\partial t}}_{temporal} + \underbrace{u\frac{(x,y,t)}{\partial x} + v\frac{(x,y,t)}{\partial y}}_{advección} = \underbrace{D\left(\frac{\partial^2 C(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x,y,t)}{\partial y^2}\right)}_{difusión} \tag{19}$$

Vamos a usar la siguiente notación $C(x,y,t) = C^n_{i,j}$ donde i,j expresan la dimensión espacial y n la temporal. Expresaremos los incrementos o decrementos como:

$$C(x+\Delta x, y-\Delta y, t+2\Delta t) = C^{n+2}_{i+1,j-1}$$

Para poder describir estos 9 tipos de puntos, vamos a usar las siguientes expresiones que corresponden nuestra ecuación en su representación de diferencias finitas por orden de aparición.

Para el lado izquierdo de nuestra ecuación, solo podemos aproximar mediante la Foward, entonces:

$$\frac{\partial c}{\partial t}_{Foward} = \frac{C^{n+1}_{i,j} - C^n_{i,j}}{\Delta t} \tag{20}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}_{Foward} = \frac{C^n_{i+1,j} - C^n_{i,j}}{\Delta x} \tag{21}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}_{Foward} = \frac{C^n_{i,j+1} - C^n_{i,j}}{\Delta y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}_{Backward} = \frac{C^n_{i,j} - C^n_{i-1,j}}{\Delta x} \tag{23}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}_{Backward} = \frac{C^n_{i,j} - C^n_{i,j-1}}{\Delta x} \tag{24}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}_{Central} = \frac{C^n_{i+1,j} - C^n_{i-1,j}}{2\Delta x} \tag{25}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}_{Central} = \frac{C^n_{i,j+1} - C^n_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}_{Foward} = \frac{C^n_{i+2,j} - 2C^n_{i+1,j} + C^n_{i,j}}{(\Delta x)^2} \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}_{Foward} = \frac{C^n_{i,j+2} - 2C^n_{i,j+1} + C^n_{i,j}}{(\Delta y)^2} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}_{Backward} = \frac{C^n_{i,j} - 2C^n_{i-1,j} + C^n_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}_{Backward} = \frac{C^n_{i,j} - 2C^n_{i,j-1} + C^n_{i,j-2}}{(\Delta y)^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}_{Central} = \frac{C^n_{i+1,j} - 2C^n_{i,j} + C^n_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}_{Central} = \frac{C^n_{i,j+1} - 2C^n_{i,j} + C^n_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \tag{32}$$

10.1.1 Tipo 1

Este punto sólo puede aproximarse usando la derivada **Foward** para ambas dimensiones x y y, con $i = 0$ y $j = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} C^{n+1}_{i,j} = C^n_{i,j} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\{C^n_{i+1,j} - C^n_{i,j}\} - \frac{v\Delta t}{\Delta y}\{C^n_{i,j+1} - C^n_{i,j}\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\left\{C^n_{i+2,j} - 2C^n_{i+1,j} + C^n_{i,j}\right\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C^n_{i,j+2} - 2C^n_{i,j+1} + C^n_{i,j}\} \end{aligned}$$

Reagrupando, y definiendo como $a = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $b = \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}$, $p = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$, y $q = \frac{v\Delta t}{\Delta y}$ entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C^{n+1}_{i,j} = C^n_{i+2,j} * (-p - 2a) + C^n_{i+1,j} * (-q - 2b) + \\ C^n_{i+2,j} * (a) + C^n_{i,j+2} * (b) + \\ C^n_{i,j} * (1 + p + q + a + b) \end{aligned} \tag{33}$$

10.1.2 Tipo 2

Este es backward para x y foward para y $i = -1$, $j = 0$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\{C_{i,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\} - \frac{v\Delta t}{\Delta x}\{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i,j}^{n} - 2C_{i-1,j}^{n} + C_{i-2,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j+2}^{n} - 2C_{i,j+1}^{n} + C_{i,j}^{n}\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 - p + q + a + b) + C_{i-1,j}^{n} * (p - 2a) + \\ C_{i,j+1}^{n} * (-q - 2b) + C_{i-2,j}^{n} * (a) \\ + C_{i,j+2}^{n} * (b) \end{aligned} \tag{34}$$

10.1.3 Tipo 3

Para describir este punto, usamos Backward para x y Backward para y. $i = -1$, $j = -1$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\{C_{i,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\} - \frac{v\Delta t}{\Delta y}\{C_{i,j}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i,j}^{n} - 2C_{i-1,j}^{n} + C_{i-2,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j}^{n} - 2C_{i,j-1}^{n} + C_{i,j-2}^{n}\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 - p - q + a + b) + C_{i-1,j}^{n} * (p - a) + \\ C_{i,j-1}^{n} * (q - 2b) + C_{i-2,j}^{n} * (a) + \\ C_{i,j-2}^{n} * (b) \end{aligned} \tag{35}$$

10.1.4 Tipo 4

Foward x y Backward y $i = 0$ y $j = -1$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\{C_{i+1,j}^{n} - C_{i,j}^{n}\} - \frac{v\Delta t}{\Delta y}\{C_{i,j}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i+2,j}^{n} - 2C_{i+1,j}^{n} + C_{i,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j}^{n} - 2C_{i,j-1}^{n} + C_{i,j-2}^{n}\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 + p - q + a + b) + C_{i+1,j}^{n} * (-p - 2a) + \\ C_{i,j-1}^{n} * (q - b) + C_{i+2,j}^{n} * (a) + \\ C_{i,j-2}^{n} * (b) \end{aligned} \tag{36}$$

10.1.5 Tipo 5

Central x y Foward y $i \in [1, L_x - 1]$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\{C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\} - \frac{v\Delta t}{\Delta x}\{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j}^{n}\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i+1,j}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i-1,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j+2}^{n} - 2C_{i,j+1}^{n} + C_{i,j}^{n}\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 + q - a + b) + C_{i+1,j}^{n} * (-\frac{p}{2} + a) + \\ C_{i-1,j}^{n} * (\frac{p}{2} + a) + C_{i,j+1}^{n} * (-q - 2b) + \\ C_{i,j+2}^{n} * (b) \end{aligned} \tag{37}$$

10.1.6 Tipo 6

Backward x y central y $i = -1$, $j \in [1, L_y - 1]$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\{C_{i,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\} - \frac{v\Delta t}{2\Delta y}\{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i,j}^{n} - 2C_{i-1,j}^{n} + C_{i-2,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j+1}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i,j-1}^{n}\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 - p + a - 2b) + C_{i-1,j}^{n} * (p - 2a) + \\ C_{i,j+1}^{n} * (-\frac{q}{2} + b) + C_{i,j-1}^{n} * (\frac{q}{2} + b) + \\ C_{i-2,j}^{n} * (a) \end{aligned} \tag{38}$$

10.1.7 Tipo 7

Central x y Backward y $i \in [1, L_x - 1]$,j= -1

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\{C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\} - \frac{u\Delta t}{2\Delta y}\{C_{i,j}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i+1,j}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i-1,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j}^{n} - 2C_{i,j-1}^{n} + C_{i,j-2}^{n}\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 - q - 2a + b) + C_{i+1,j}^{n} * (-\frac{p}{2} + a) + \\ C_{i-1,j}^{n} * (\frac{p}{2} + a) + C_{i,j-1}^{n} * (q - 2b) + \\ C_{i,j-2}^{n} * (b) \end{aligned} \tag{39}$$

10.1.8 Tipo 8

Foward x y Central y $i = 0$, $j \in [1, L_y - 1]$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\{C_{i+1,j}^{n} - C_{i,j}^{n}\} - \frac{u\Delta t}{2\Delta y}\{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i+2,j}^{n} - 2C_{i+1,j}^{n} + C_{i,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j+1}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i,j-1}^{n}\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 + p + a - 2b) + C_{i+1,j}^{n} * (-p - 2a) + \\ C_{i,j+1}^{n} * (-\frac{q}{2} + b) + C_{i,j-1}^{n} * (\frac{q}{2} + b) + \\ C_{i+2,j}^{n} * (a) \end{aligned} \tag{40}$$

10.1.9 Tipo 9

Central x y Central y

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\{C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\} - \frac{u\Delta t}{2\Delta y}\{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\{C_{i+1,j}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i-1,j}^{n}\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}\{C_{i,j+1}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i,j-1}^{n}\}$$

Figure 1: Caption

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^{n} * (1 - 2a - 2b) + C_{i+1,j}^{n} * (-\frac{p}{2} + a) + \\ C_{i-1,j}^{n} * (\frac{p}{2} + a) + C_{i,j+1}^{n} * (-\frac{q}{2} + b) + \\ C_{i,j-1}^{n} * (\frac{q}{2} + b) \end{aligned} \tag{41}$$

11 Condiciones de Frontera

Vamos a resolver varios arreglos de fuentes con distintos campos de velocidad con el objetivo de mostrar las ventajas que nos ofrecen cada tipo de condiciones de frontera. Debido a la estabilidad numérica y aproximación que hicimos no podemos hacer cosas tan complejas.

11.1 Sin condiciones de Frontera

Consideremos los siguientes parametros:

$$L_x = 2[m],\ L_y = 1[m],\ \Delta x = 0.02[m],\ \Delta y = 0.02[m],\ D = 0.0001[m^2 s^- 1]$$

Tomando el campo de velocidad como $\vec{u} = (0, 0)$

11.2 Dirichlet

C está definida en la frontera

11.3 Neuman

$\dfrac{\partial C}{\partial n} =$

11.3.1 Mix

11.4 Periodicas

Le entendí un poco más a lo ciclico

References

[1] Socolofsky, S. A., & Jirka, G. H. (2002). *Environmental fluid mechanics: Part 1. Retrieved from* https://www.hailienene.com/resources/Environmental%20Fluid%20Mechanics%20Part%201.pdf

[2] Newman, M. E. J. (2013). *Computational Physics*. Createspace Independent Publishing Platform.

[3] Stocker, T. (2011). Introduction to Climate Modelling. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. http://doi.org/https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-00773-6