

Ecuación de transporte de masa en diferencias finitas

Una solución numérica 2D para fluidos incompresibles en MATLAB.

Fernando M. L. Villegas¹

¹Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Dinamica de Medios Deformables, Mayo 2024

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 Nuestro problema
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 Nuestro problema
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Concentración

La concentración de una sustancia, como el aire disuelto en el agua, se define como la cantidad de sustancia por unidad de volumen que la contiene:

$$c = \frac{\text{cantidad de sustancia}}{\text{volumen de fluido}} = \frac{m}{V} \quad (1)$$

La cantidad de sustancia suele tomarse como su masa. En este caso, las unidades de c son masa por volumen.

Cuando el agua es el fluido en el que ocurren reacciones químicas, es conveniente expresar la concentración en moles por volumen. La unidad moles/L se denomina molaridad.



Figure 1: Petróleo en el mar

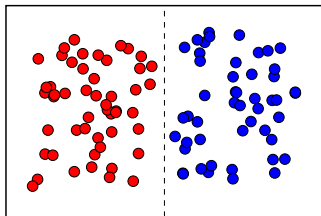


Figure 2: Dos sustancias separadas

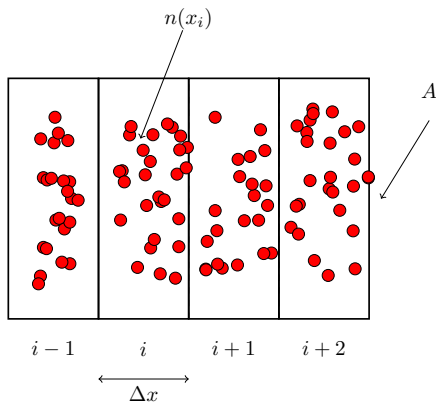


Figure 3: Difusión de una sustancia

Difusión

El proceso de difusión puede ser descrito de manera estadística. Considerando el caso unidimensional y dividiendo el eje x en celdas de ancho Δx , con sección transversal de área A en el que las partículas están. Tomando $T > 0$ (una temperatura) las partículas están en movimiento térmico. La densidad de partículas (partículas por volumen) en la coordenada x está denotada por $n(x)$. Describimos el movimiento aleatorio con una probabilidad p de que la partícula salte de una celda a otra. Asumiendo que la difusión es un proceso isotópico nos da una probabilidad p uniforme e independiente de la dirección que se mueva la partícula.

Determinaremos la densidad de flujo de las partículas (partículas por unidad de área y tiempo) en la frontera de la celda $i|i+1$ para un intervalo de tiempo Δt . Para la celda i , un número $pn(x_i)A\Delta x$ partículas saltan hacia la derecha, mientras que para la celda $i+1$, un número $pn(x_{i+1})A\Delta x$ partículas saltan hacia la izquierda. Por lo tanto la densidad neta de flujo de las partículas en la frontera está dada por:

$$\begin{aligned} F &= \frac{pn(x_i)A\Delta x - pn(x_{i+1})A\Delta x}{A\Delta t} \\ &= -p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{n(x_{i+1}) - n(x_i)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, y a $\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$ como constante, obtenemos la primera Ley de Fick

$$F = -\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right) \frac{\partial n}{\partial x} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2)$$

La cantidad D es la constante de Difusión con unidades $m^2 s^{-1}$, este coeficiente depende en las propiedades físicas de las partículas y del medio que las contiene. La generalización a tres dimensiones, y tomando $C = C(x, y, z)$ como la concentración de una cantidad física arbitraria:

$$\vec{F} = -D \vec{\nabla} C \quad (3)$$

Advección

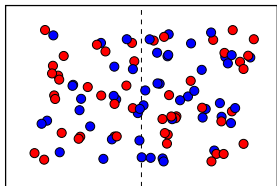


Figure 4: Advección de una sustancia en otra

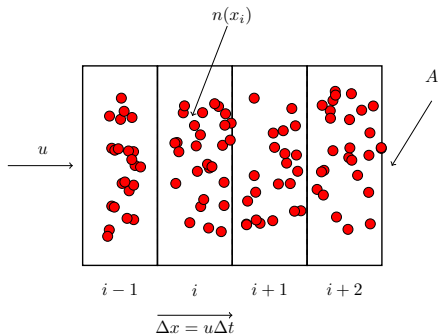


Figure 5: Advección de una sustancia

Advección

Para derivar la densidad de flujo advectiva de cantidades físicas, consideramos el caso unidimensional, Asumimos un flujo $u(x, t)$ que transporta la cantidad a considerar. El fluido se mueve a través de un área fija A . La cantidad física a transportar se expresa como una concentración $C(x, t)$, por lo tanto, la cantidad se refiere a un volumen, En un corto intervalo de tiempo Δt , un volumen $A\Delta x$ de longitud $\Delta x = u\Delta t$ pasa a través de la sección transversal de área A y transporta la cantidad $A\Delta x C$. La densidad de flujo advectiva está dada por:

$$F = \frac{A\Delta x C}{A\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} C = uC$$

En tres dimensiones, se ve así

$$\vec{F} = \vec{u}C \quad (4)$$

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 Nuestro problema
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Considerando un volumen de control pequeño y fijo $\Delta V = A\Delta x$, La densidad media C dentro del volumen de control cambia con el tiempo debido a los flujos que entran, los flujos que salen, las fuentes, y los sumideros dentro del mismo. Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C\Delta V) = F(x)A - F(x + \Delta x)A + R\Delta V \quad (5)$$

donde F es la densidad de flujo de la cantidad C y R es la densidad neta de la fuentes de esta cantidad. Si insertamos 3 y 4 en 5 y dividimos por ΔV

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{u(x + \Delta x)C(x + \Delta x) - u(x)C(x)}{\Delta x} + \frac{D\frac{\partial C}{\partial x} - D\frac{\partial C}{\partial x}}{\Delta x} + R \quad (6)$$

tomando el limite $\Delta x \rightarrow 0$ entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right) + R \quad (7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}C) + \nabla \cdot (D\nabla C) + R \quad (8)$$

Considerando un fluido incompresible, es decir, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, y expandiendo.

$$\nabla \cdot (\vec{u}C) = \vec{u} \cdot (\nabla C) + C \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\nabla C)$$

entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\vec{u} \cdot (\nabla C) + \nabla \cdot (D\nabla C) + R \quad (9)$$

Los términos de advección y difusión están caracterizados por las siguientes expresiones respectivamente

$$\frac{U\Delta c}{L} \quad \frac{D\Delta c}{L^2} \quad (10)$$

donde U es la velocidad, D el coeficiente de difusión, L la longitud, Δc la diferencia de concentración.

Si dividimos el termino de advección por el termino de difusión obtenemos que:

$$\frac{U\Delta c/L}{D\Delta c/L^2} = \frac{UL}{D} = Pe \quad (11)$$

Índice

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 Nuestro problema
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Una breve introducción

Supongamos que tenemos un conjunto de puntos atribuidos a una función los cuales están separados una distancia h , y queremos encontrar la derivada de estos mismos, como no conocemos la función debemos encontrar otra manera de describir la derivada

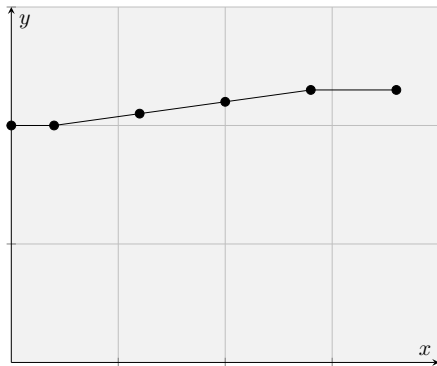


Figure 6: Mallado

Derivada hacia adelante

Recordando la definición de derivada podemos hacer esto:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (12)$$

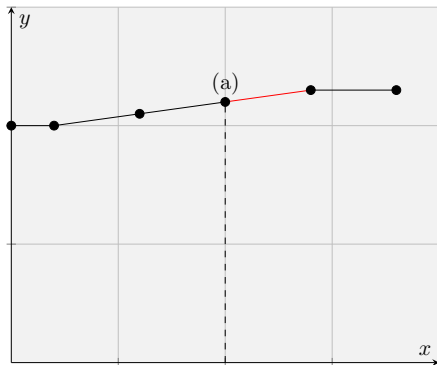


Figure 7: Derivada hacia adelante

Numéricamente podemos tomar el límite si hacemos h muy pequeño y entonces aproximamos:

$$\frac{df}{dx} \text{ Hacia adelante} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

es decir, solo necesitamos saber la separación entre los puntos y un punto hacia adelante del que necesitamos.

También podemos hacer esto hacia atrás, es decir,

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (13)$$

Primera derivada hacia atrás

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ Hacia Atrás} \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (14)$$

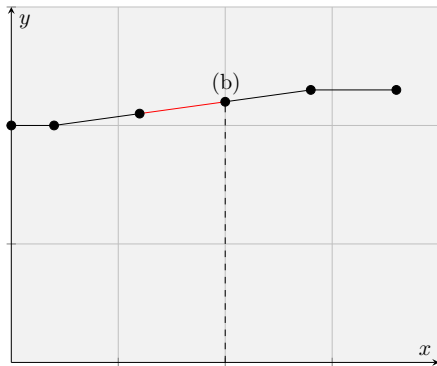


Figure 8: Derivada hacia atrás

Primera derivada central

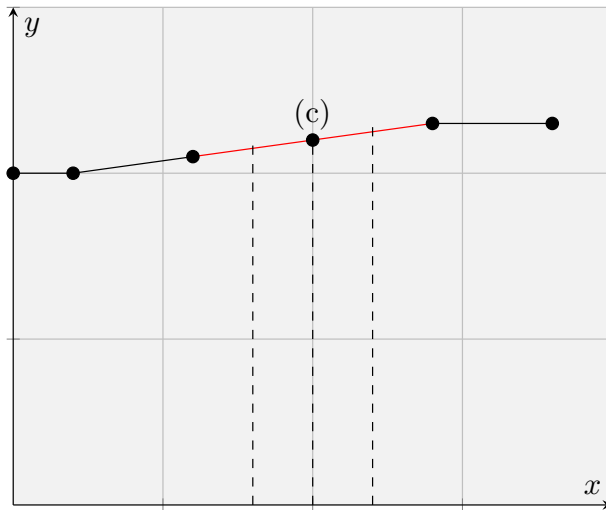


Figure 9: Derivada central

Primera derivada central

Si tomamos la expansión de Taylor para los dos siguientes puntos:

$$f(x + h/2) = f(x) + \frac{1}{2}hf'(x) + O(h^2)$$

$$f(x - h/2) = f(x) - \frac{1}{2}hf'(x) + O(h^2)$$

Substrayendo de la primera expresión la segunda, y despejando $f'(x)$ tenemos que:

$$f'(x) = \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{h} \quad (15)$$

Pero no tenemos acceso a ellos, lo podemos solucionar tomando $h = 2h$ entonces:

$$\frac{df}{dx}_{Central} \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} \quad (16)$$

Segunda derivada hacia delante

No solo vamos a usar derivadas de primer orden para nuestro problema, debemos usar un orden mayor. Afortunadamente no tenemos que hacer un análisis cualitativo y solo debemos derivar las expresiones que ya tenemos para obtener lo que queremos.

$$\begin{aligned} f''(x)_{\text{Hacia delante}} &= \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} \right) - \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \right\} \\ f''(x)_{\text{Hacia delante}} &= \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Segunda derivada hacia atras

$$\begin{aligned} f''(x)_{\text{Hacia atras}} &= \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right) - \left(\frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h} \right) \right\} \\ f''(x)_{\text{Hacia atras}} &= \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Segunda derivada central

$$f''(x) = \frac{f'(x + h/2) - f'(x - h/2)}{h}$$

con:

$$f'(x + h/2) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad f'(x - h/2) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

entonces:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \left(\frac{f(x) - f(x - h)}{h} \right) \right\} \\ f''(x)_{Central} &= \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} \end{aligned} \quad (19)$$

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 **Nuestro problema**
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Nuestro problema

Supongamos que tenemos una malla $2D$, y W un campo escalar. Como ya vimos, necesitamos al menos 2 puntos si es que queremos calcular su segunda derivada ya sea central, hacia delante o hacia atrás de un solo punto (y eso solo es para una dimensión), eso quiere decir que necesitamos 4 puntos en total para describir un punto $W(x, y)$.

Y no sólo eso, también tenemos **9 tipos de puntos diferentes (nodos)**.

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$...	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$...	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$...	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$...	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$...	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$...	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tenemos que (insert eq) con $R = 0$ en $2D$ se ve como:

$$\underbrace{\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t}}_{\text{temporal}} + \underbrace{u \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} + v \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y}}_{\text{advección}} = \underbrace{D \left(\frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} \right)}_{\text{difusión}} \quad (20)$$

Vamos a usar la siguiente notación $C(x, y, t) = C_{i,j}^n$ donde i, j expresan la dimensión espacial y n la temporal. Expresaremos los incrementos o decrementos como:

$$C(x + \Delta x, y - \Delta y, t + 2\Delta t) = C_{i+1,j-1}^{n+2}$$

Para poder describir estos 9 tipos de puntos, vamos a usar las siguientes expresiones que corresponden nuestra ecuación en su representación de diferencias finitas por orden de aparición.

Para el primer término, solo podemos aproximar hacia delante porque el tiempo no va hacia atrás.

$$\frac{\partial c}{\partial t}_{Forward} = \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (21)$$

Para los que siguen:

$$\frac{\partial C}{\partial x}_{Forward} = \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}_{Forward} = \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (23)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}_{Backward} = \frac{C_{i,j}^n - C_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}_{Backward} = \frac{C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n}{\Delta x} \quad (25)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}_{Central} = \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}_{Central} = \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}_{Foward} = \frac{C_{i+2,j}^n - 2C_{i+1,j}^n + C_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}_{Foward} = \frac{C_{i,j+2}^n - 2C_{i,j+1}^n + C_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}_{Backward} = \frac{C_{i,j}^n - 2C_{i-1,j}^n + C_{i-2,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}_{Backward} = \frac{C_{i,j}^n - 2C_{i,j-1}^n + C_{i,j-2}^n}{(\Delta y)^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}_{Central} = \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}_{Central} = \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (33)$$

Tipo 1

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 1

Este punto sólo puede aproximarse usando la derivada **Foward** para ambas dimensiones x y y , con $i = 0$ y $j = 0$ entonces:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^n\} - \frac{v\Delta t}{\Delta y} \{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i+2,j}^n - 2C_{i+1,j}^n + C_{i,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j+2}^n - 2C_{i,j+1}^n + C_{i,j}^n\}$$

Reagrupando, y definiendo como $a = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $b = \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}$, $p = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$, y $q = \frac{v\Delta t}{\Delta y}$ entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i+2,j}^n * (-p - 2a) + C_{i+1,j}^n * (-q - 2b) + \\ C_{i+2,j}^n * (a) + C_{i,j+2}^n * (b) + \\ C_{i,j}^n * (1 + p + q + a + b) \quad (34)$$

Tipo 2

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 2

Este es backward para x y forward para y $i = -1, j = 0$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \{C_{i,j}^n - C_{i-1,j}^n\} - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i,j}^n - 2C_{i-1,j}^n + C_{i-2,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j+2}^n - 2C_{i,j+1}^n + C_{i,j}^n\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 - p + q + a + b) + C_{i-1,j}^n * (p - 2a) + \\ C_{i,j+1}^n * (-q - 2b) + C_{i-2,j}^n * (a) \\ + C_{i,j+2}^n * (b) \quad (35)$$

Tipo 3

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 3

Para describir este punto, usamos Backward para x y Backward para y .

$$i = -1, j = -1$$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \{C_{i,j}^n - C_{i-1,j}^n\} - \frac{v\Delta t}{\Delta y} \{C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i,j}^n - 2C_{i-1,j}^n + C_{i-2,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j}^n - 2C_{i,j-1}^n + C_{i,j-2}^n\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 - p - q + a + b) + C_{i-1,j}^n * (p - a) + \\ C_{i,j-1}^n * (q - 2b) + C_{i-2,j}^n * (a) + \\ C_{i,j-2}^n * (b) \quad (36)$$

Tipo 4

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 4

Foward x y Backward y $i = 0$ y $j = -1$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^n\} - \frac{v\Delta t}{\Delta y} \{C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i+2,j}^n - 2C_{i+1,j}^n + C_{i,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j}^n - 2C_{i,j-1}^n + C_{i,j-2}^n\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 + p - q + a + b) + C_{i+1,j}^n * (-p - 2a) + \\ C_{i,j-1}^n * (q - b) + C_{i+2,j}^n * (a) + \\ C_{i,j-2}^n * (b) \quad (37)$$

Tipo 5

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 5

Central x y Foward y $i \in [1, L_x - 1]$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n\} - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j+2}^n - 2C_{i,j+1}^n + C_{i,j}^n\}$$

Reagrupando, entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 + q - a + b) + C_{i+1,j}^n * (-\frac{p}{2} + a) + \\ C_{i-1,j}^n * (\frac{p}{2} + a) + C_{i,j+1}^n * (-q - 2b) + \\ C_{i,j+2}^n * (b) \quad (38)$$

Tipo 6

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 6

Backward x y central y $i = -1, j \in [1, L_y - 1]$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \{C_{i,j}^n - C_{i-1,j}^n\} - \frac{v\Delta t}{2\Delta y} \{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i,j}^n - 2C_{i-1,j}^n + C_{i-2,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 - p + a - 2b) + C_{i-1,j}^n * (p - 2a) + \\ C_{i,j+1}^n * (-\frac{q}{2} + b) + C_{i,j-1}^n * (\frac{q}{2} + b) + \\ C_{i-2,j}^n * (a) \quad (39)$$

Tipo 7

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 7

Central x y Backward y $i \in [1, L_x - 1], j = -1$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n\} - \frac{u\Delta t}{2\Delta y} \{C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j}^n - 2C_{i,j-1}^n + C_{i,j-2}^n\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 - q - 2a + b) + C_{i+1,j}^n * (-\frac{p}{2} + a) + \\ C_{i-1,j}^n * (\frac{p}{2} + a) + C_{i,j-1}^n * (q - 2b) + \\ C_{i,j-2}^n * (b) \quad (40)$$

Tipo 8

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

Tipo 8

Foward x y Central y $i = 0, j \in [1, L_y - 1]$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^n\} - \frac{u\Delta t}{2\Delta y} \{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i+2,j}^n - 2C_{i+1,j}^n + C_{i,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 + p + a - 2b) + C_{i+1,j}^n * (-p - 2a) + \\ C_{i,j+1}^n * (-\frac{q}{2} + b) + C_{i,j-1}^n * (\frac{q}{2} + b) + \\ C_{i+2,j}^n * (a) \quad (41)$$

Tipo 9

$W(x_0, y_j)$	$W(x_1, y_j)$	$W(x_2, y_j)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_j)$	$W(x_{i-1}, y_j)$	$W(x_i, y_j)$
$W(x_0, y_{j-1})$	$W(x_1, y_{j-1})$	$W(x_2, y_{j-1})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-1})$	$W(x_{i-1}, y_{j-1})$	$W(x_i, y_{j-1})$
$W(x_0, y_{j-2})$	$W(x_1, y_{j-2})$	$W(x_2, y_{j-2})$	\dots	$W(x_{i-2}, y_{j-2})$	$W(x_{i-1}, y_{j-2})$	$W(x_i, y_{j-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$W(x_0, y_2)$	$W(x_1, y_2)$	$W(x_2, y_2)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_2)$	$W(x_{i-1}, y_2)$	$W(x_i, y_2)$
$W(x_0, y_1)$	$W(x_1, y_1)$	$W(x_2, y_1)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_1)$	$W(x_{i-1}, y_1)$	$W(x_i, y_1)$
$W(x_0, y_0)$	$W(x_1, y_0)$	$W(x_2, y_0)$	\dots	$W(x_{i-2}, y_0)$	$W(x_{i-1}, y_0)$	$W(x_i, y_0)$

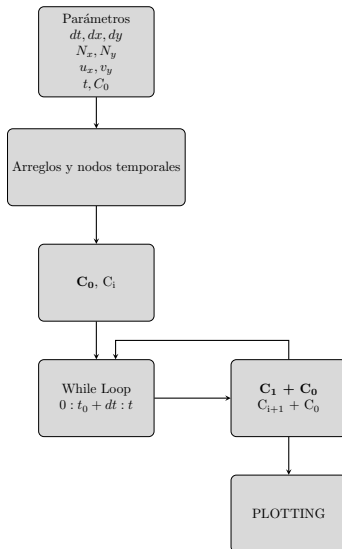
Central x y Central y

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n\} - \frac{u\Delta t}{2\Delta y} \{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n\} + \\ \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n\} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n\}$$

Reagrupando entonces la expresión se reduce a:

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n * (1 - 2a - 2b) + C_{i+1,j}^n * \left(-\frac{p}{2} + a\right) + \\ C_{i-1,j}^n * \left(\frac{p}{2} + a\right) + C_{i,j+1}^n * \left(-\frac{q}{2} + b\right) + \\ C_{i,j-1}^n * \left(\frac{q}{2} + b\right) \quad (42)$$

Implementación en MATLAB



DIFUSIÓN

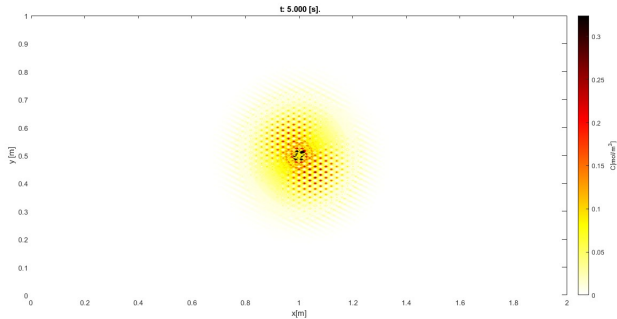


Figure 10: Difusión diverge

ADVECCIÓN

Advección en MATLAB

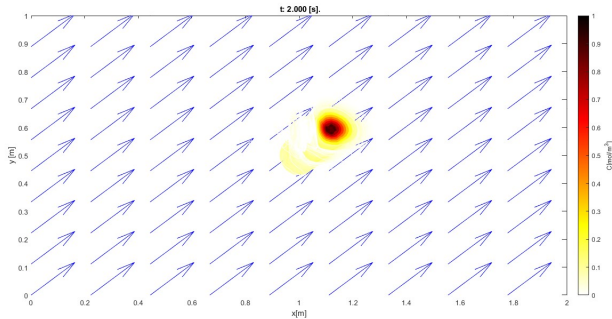


Figure 11: Advección diverge

Tomaremos los siguientes parámetros: Todo es lo mismo, lo único que cambio fue el tiempo, usamos el paso de tiempo que nos dio la maestra en la corrección.

TRANSPORTE

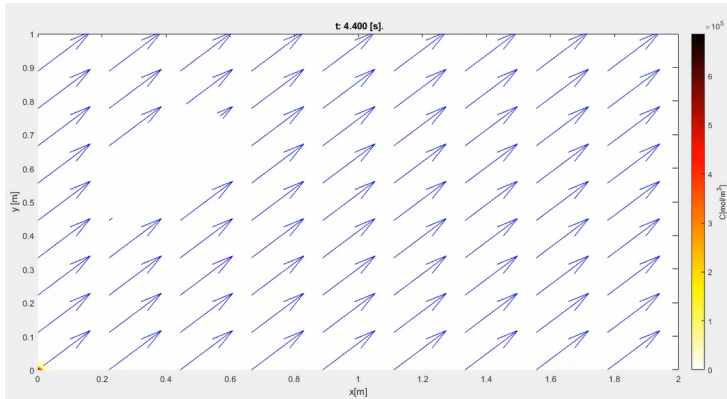


Figure 12: Transporte diverge

Podemos ver que nuestras simulaciones no son exitosas después de cierto tiempo, ¿por qué?

Para responder esa pregunta vamos a hacer una breve transcripción del *Capítulo 2* del libro: **Kajishima, T., & Taira, K. (2017).**

Computational fluid dynamics: Incompressible turbulent flows.
Springer International Publishing.

Tomando la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (43)$$

donde c es una velocidad y a el coeficiente de difusión.

Sea

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \exp(ik) \quad (44)$$

una función del tiempo y espacio expandida en su serie de Fourier en la dirección espacial asumiendo que x , t son separables, donde k es el número de onda y $A_k(t)$ una amplitud en función del tiempo.

Se necesita que $A_k(t)$ sea acotada para que el esquema sea numéricamente estable, en concreto:

$$|A| = \begin{cases} < 1 & \text{estable,} \\ = 1 & \text{neutralmente estable,} \\ > 1 & \text{inestable} \end{cases}$$

Para el caso de **advección** se llega a que:

$$C \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta} \leq 1 \quad (45)$$

a C se lo conoce como el número o condición *Courant-Friedrichs-Lewy* (**CFL**).

Estabilidad numérica

Para la **difusión** con $a > 0$:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta^2}{2a} \quad (46)$$

si tomamos a (a/Δ) como una velocidad de difusión característica podemos escribir esto como:

$$\frac{(a/\Delta)\Delta t}{\Delta} \leq \frac{1}{2} \quad (47)$$

Considerando ambos procesos encontramos que:

$$C = \frac{c\Delta t}{\Delta} \quad y \quad R = \frac{c\Delta}{a} \quad (48)$$

donde R es el numero de *Reynolds* y si se usa el método explícito de Euler se llega a que la condición de estabilidad es:

$$C \leq \frac{2}{R} \quad (49)$$

Nuevos parámetros

Por cuestiones de organización el autor de este proyecto no hizo el análisis de estabilidad numérica para la ecuación en 2D, pero se logro tener simulaciones más estables considerando los siguientes parámetros:

Nuevos parámetros

$D = 0.0001 [m^2/s]$, $N_x = 100$, $N_y = 100$, $L_x = 2 [m]$, $L_y = 1 [m]$,
 $\Delta x = L_x/N_x [m]$, $\Delta y = L_y/N_y [m]$, $t = 45 [s]$, $\Delta t = 1 [s]$,
 $u = 0.007 [m/s]$, $v = 0 [m/s]$ y
 $C = \exp(-1000((x - L_x/8)^2 + (y - L_y/2)^2))$ como la concentración inicial.

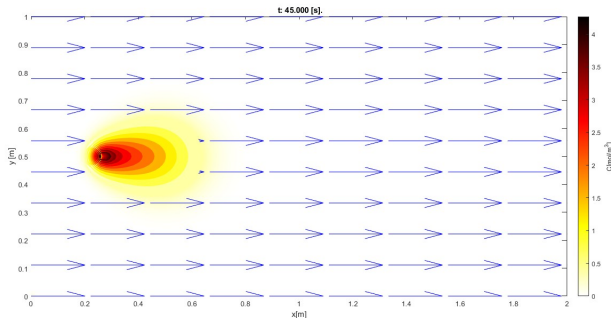


Figure 13: Transporte después de 45 segundos

Nuevos parámetros

$D = 0.0001 [m^2/s]$, $N_x = 100$, $N_y = 100$, $L_x = 2 [m]$, $L_y = 1 [m]$,

$\Delta x = L_x/N_x [m]$, $\Delta y = L_y/N_y [m]$, $t = 45 [s]$, $\Delta t = 1 [s]$,

$u = 0.007 [m/s]$, $v = 0.005 [m/s]$ y

$C = \exp(-1000((x - L_x/8)^2 + (y - L_y/2)^2))$ como la concentración inicial.

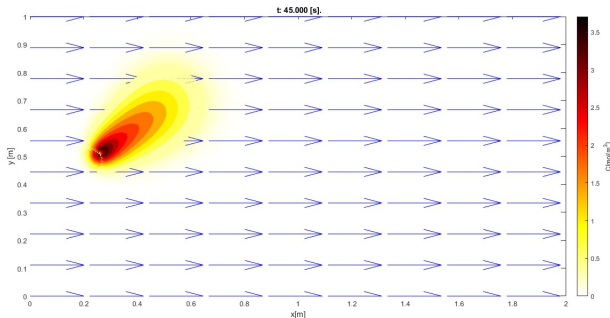


Figure 14: Transporte después de 45 segundos

Condiciones de Frontera

Dirichlet: Concentración constante $C = cte$

Neumann: $\frac{\partial C}{\partial n}$ donde n es la normal a la superficie, en este caso representa flujo de entrada o salida dependiendo el signo, y en el caso de ser cero representa una pared impermeable.

Periódicas: Si sale algo por una frontera debe regresar por la otra. Usando este hecho los cálculos computacionales se reducen significativamente.

Simétricas: Se aplican cuando el dominio del problema presenta un grado de simetría, tal que la frontera en la que se refleja debe cumplir con la condición de que no presente flujo o haya una velocidad distinta a cero normal a la misma. El uso de estas condiciones reduce considerablemente el tiempo de computo.

Dirichlet

$D = 0.001 \text{ [m}^2/\text{s]}$, $N_x = 100$, $N_y = 100$, $L_x = 2 \text{ [m]}$, $L_y = 3 \text{ [m]}$,
 $\Delta x = L_x/N_x \text{ [m]}$, $\Delta y = L_y/N_y \text{ [m]}$, $t = 20 \text{ [s]}$, $\Delta t = 0.0138 \text{ [s]}$,
 $u = 0 \text{ [m/s]}$, $v = 0.05 \text{ [m/s]}$, la concentración inicial está dada tal que $C = 1$ en la cara de abajo.

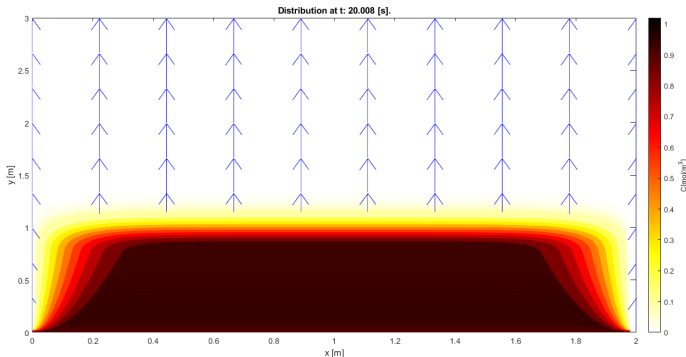


Figure 15: Difusión con condiciones de Dirichlet después de 20 segundos

$D = 0.001 [m^2/s]$, $N_x = 100$, $N_y = 100$, $L_x = 2 [m]$, $L_y = 1 [m]$,
 $\Delta x = L_x/N_x [m]$, $\Delta y = L_y/N_y [m]$, $t = 15 [s]$, $\Delta t = 0.1 [s]$,
 $u = 0.07 [m/s]$, $v = 0 [m/s]$ y
 $C = \exp(-1000((x - L_x/1.1)^2 + (y - L_y/2)^2))$ como la concentración
inicial.

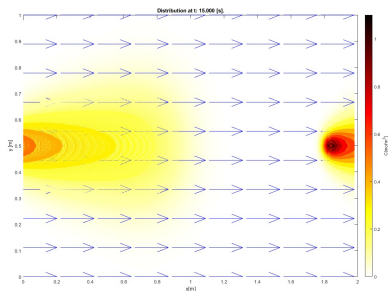


Figure 16: Transporte con condiciones periódicas después de 15 segundos

Índice

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 Nuestro problema
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

La ecuación de transporte de masa es una herramienta fascinante y extremadamente útil para describir fenómenos ambientales. Los números adimensionales asociados a esta ecuación aportan una gran utilidad en su análisis. En este trabajo, hemos empleado el método de diferencias finitas para obtener soluciones numéricas en un dominio bidimensional para fluidos incompresibles.

A pesar de su simplicidad y facilidad de implementación, el método de diferencias finitas presenta limitaciones significativas, especialmente en cuanto a la estabilidad numérica. Estas limitaciones restringen su aplicabilidad a ciertos casos específicos antes de que aparezcan problemas de inestabilidad numérica.

Existen otros métodos numéricos que no se abordaron en este trabajo, como el método de volúmenes finitos y el método implícito de Euler. Estos métodos pueden superar algunas de las deficiencias del método de diferencias finitas, aunque también presentan nuevos desafíos que deben ser estudiados. La exploración de estos métodos podría ofrecer soluciones más robustas y precisas para la ecuación de transporte de masa, permitiendo una mejor modelización de fenómenos complejos en el campo de la dinámica de fluidos y la ingeniería ambiental.

Índice

- 1 Conceptos
 - Concentración
 - Difusión
 - Advección
- 2 Ecuación
 - Advección-Difusión
 - Número de Péclet
- 3 Método de Diferencias Finitas
 - Una breve introducción
 - Derivadas de segundo orden
- 4 Nuestro problema
 - Implementación en MATLAB
 - Resultados
 - Estabilidad numérica
 - Condiciones de Frontera
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

- Majumdar, P. (2005). *Computational methods for heat and mass transfer*. CRC Press.
- Newman, M. (2012). *Computational physics*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Versteeg, H., & Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Cushman-Roisin, B., & Beckers, J.-M. (2011). *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects* (2nd ed.). Academic Press. *Computational physics: Problem solving with Python*. Wiley-VCH.
- Mazumder, S. (2016). *Numerical methods for partial differential equations: Finite difference and finite volume methods*. Academic Press.

- Chapra, S. C. (2017). *Applied numerical methods with MATLAB*. McGraw-Hill.
- Kajishima, T., & Taira, K. (2017). *Computational fluid dynamics: Incompressible turbulent flows*. Springer International Publishing.
- Çengel, Y. A., & Ghajar, A. J. (2020). *Heat and mass transfer: Fundamentals and applications*. McGraw-Hill Education.
- Socolofsky, S. A., & Jirka, G. H. (2002). *Environmental fluid mechanics: Part 1*. Retrieved from: (<https://www.hailienene.com/resources/Environmental%20Fluid%20Mechanics%20Part%201.pdf>)
- Stocker, T. (2011). Introduction to Climate Modelling. *Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics*.