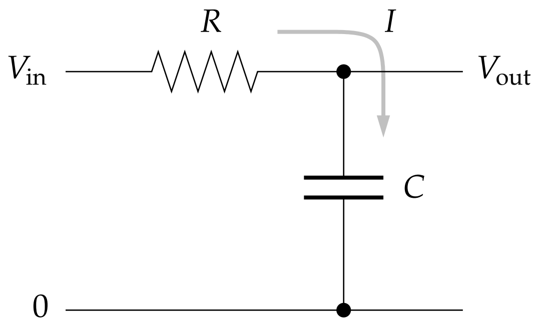
Tarea-Práctica 6. Métodos de solución numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias

Fecha de entrega: **15 de diciembre de 2023**

1. **Un filtro pasa bajos**

El siguiente, es un circuito electrónico simple con una resistencia y un capacitor:



Este circuito actúa como un filtro pasa bajos: envías una señal por la izquierda y sale filtrada por la derecha.

Usando la *ley de Ohm*, la *ley de capacitor* y suponiendo que la carga de salida tiene una impedancia muy alta, de modo que una cantidad insignificante de corriente fluye a través de ella, es posible escribir las ecuaciones que gobiernan el circuito de la siguiente manera. Sea I la corriente que fluye a través de R y dentro del capacitor, y sea Q la carga en el capacitor. Entonces:

$$IR = V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\,, \qquad Q = CV_{\text{out}}\,, \qquad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la tercera y luego sustituyendo el resultado en la primera ecuación; encontramos que $V_{\text{in}} - V_{\text{out}} = RC\,(\mathrm{d}V_{\text{out}}/\mathrm{d}t)$, o equivalentemente:

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{out}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\big(V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\big).$$

a) Escribe un programa (o modifica algunos de los vistos en clase) para resolver esta ecuación para $V_{\text{out}}(t)$ usando

1) el método de Euler y
2) el método de Runge-Kutta de cuarto orden

cuando la señal de entrada es una onda cuadrada con frecuencia 1 y amplitud 1:

$$V_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lfloor 2t \rfloor \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } \lfloor 2t \rfloor \text{ es inpar,} \end{cases} \tag{1}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ significa x redondeado hacia abajo al siguiente entero más bajo. Utiliza el programa para graficar la salida del circuito del filtro desde $t = 0$ hasta $t = 10$ cuando $RC = 0{,}01$, $0{,}1$ y 1, con la condición inicial $V_{\text{out}}(0) = 0$.
Tendrás que tomar una decisión sobre qué valor de h usar para tu cálculo. Los valores pequeños dan resultados más precisos, pero el programa tardará más en ejecutarse.

b) Con base en las gráficas producidas por tu programa, describe lo que ves y explica qué está haciendo el circuito.

c) Describe brevemente cómo se compara (es decir cuáles son las mayores diferencias, si es que las hay), resolver el sistema. con el método de Euler y el de Runge-Kutta

2. **El modelo de Lotka-Volterra (*predador-presa*)**

Como vimos en clase, un caso particular del *modelo de Lotka-Volterra* son un las ecuaciones de interacciones *depredador-presa* entre especies dos biológicas. Sean las variables x e y proporcionales al tamaño de las poblaciones de dos especies, tradicionalmente llamadas "conejos" (la presa) y "zorros" (los depredadores).
Se puede pensar que x y y son la población en miles, digamos, de modo que $x = 2$ significa que hay 2000 conejos. Estrictamente, los únicos valores permitidos de x y y serían múltiplos de 0,001, ya que sólo se puede tener números enteros de conejos o zorros. Pero 0,001 es un espacio de valores bastante cercano, por lo que es una aproximación decente tratar x e y como números reales continuos siempre que ninguno se acerque mucho a cero.

Así, en el modelo de Lotka-Volterra (*predador-presa*), los conejos se reproducen a un ritmo proporcional a su población, pero los zorros se los comen a un ritmo proporcional tanto a su propia población como a la población de zorros, es decir:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta x y,$$

donde α y β son constantes. Al mismo tiempo, los zorros se reproducen a un ritmo proporcional al ritmo al que comen conejos, porque necesitan alimento para crecer y reproducirse, pero también mueren de viejos a un ritmo proporcional a su propia población:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma xy - \delta y,$$

donde γ y δ también son constantes.

a) Escribe un programa para resolver estas ecuaciones usando

1) el método de Euler y
2) el método de Runge-Kutta de cuarto orden

para el caso $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0{,}5$ y $\delta = 2$, comenzando desde la condición inicial $x = y = 2$.

b) Haz que el programa realice gráficas que muestren

1) el espacio fase del sistema ((*i.e.* x vs y), así como el *campo de pendientes* del sistema en el mismo gráfico y también
2) en un gráfico diferente x e y como función del tiempo en los mismos ejes desde $t = 0$ hasta $t = 30$.

c) Describe con tus propias palabras lo que está sucediendo en el sistema, en términos de conejos y zorros.

d) Describe brevemente cómo se compara resolver el sistema con el método de Euler y el de Runge-Kutta.

3. **Las ecuaciones de Lorenz**

Uno de los conjuntos de ecuaciones diferenciales más famosos en el estudio de los *sistemas dinámicos* y los *sistemas complejos* son las *ecuaciones de Lorenz*:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = rx - y - xz, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz,$$

donde σ, r y b son constantes. (Los nombres σ, r y b son extraños, pero tradicionales; siempre se usan en estas ecuaciones por razones históricas).
Estas ecuaciones fueron estudiadas por primera vez por Edward Lorenz en 1963, quien las derivó de un modelo simplificado de patrones climáticos. La razón de su fama es que fueron uno de los primeros ejemplos incontrovertibles de *caos determinista*, la ocurrencia de movimiento aparentemente aleatorio aunque no haya aleatoriedad incorporada en las ecuaciones. Otro ejemplo de caos es el *mapeo logístico* que vimos anteriormente en el curso.

a) Escribe un programa para resolver las ecuaciones de Lorenz para el caso $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = \frac{8}{3}$ en el rango de $t \in (0, 50)$ con condición inicial $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ (puedes ampliar tus programas anteriores de los métodos Euler y/o Runge-Kutta).

b) Haz que tu programa muestre una gráfica de y en función del tiempo. Ten en cuenta la naturaleza impredecible del movimiento.

c) Haz que tu programa también muestre una gráfica de z contra x. Deberías de ver una imagen del famoso *"atractor extraño"* de las ecuaciones de Lorenz (que también vimos en clase), un diagrama desequilibrado en forma de mariposa que nunca se repite.

4. **El péndulo simple**

Considere un péndulo con un brazo de longitud l que sostiene una masa con valor m:

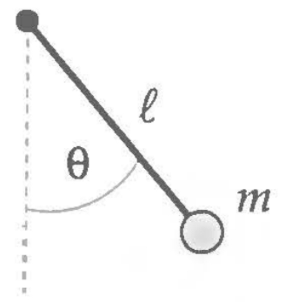


Figura 1: Péndulo simple

En términos del ángulo θ de desplazamiento del brazo respecto de la vertical, la aceleración de la masa es $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ en la dirección tangencial. Mientras tanto, la fuerza sobre la masa (el peso) es en dirección vertical hacia abajo y con magnitud mg, donde $g = 9{,}81ms^{-2}$ es la aceleración debida a la gravedad y (por simplicidad) ignoraremos la fricción y asumiremos que el brazo no tiene masa. La componente de esta fuerza en la dirección tangencial es $mgsen\theta$, siempre hacia el punto de reposo en $\theta = 0$ y, por tanto, la segunda ley de Newton nos da una ecuación de movimiento para el péndulo de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}sen\theta$$

Como vimos, en clase, dado que está ecuación es no lineal, aún no es posible resolver esta ecuación analíticamente y no se conoce una solución exacta. Sin embargo, podemos resolverla con la computadora de manera sencilla.

Usando el truco visto en clase (para convertir una ecuación de segundo orden, en dos ecuaciones de primer orden); definimos una nueva variable ω como:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$$

Entonces la ecuación de nuestro sistema se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l} sen\theta$$

De esta forma, tenemos un sistema de dos ecuaciones de primer orden, que es equivalente a la ecuación de segundo orden con la que comenzamos. Al combinar las dos variables θ y ω en un solo vector $\vec{r} = (\theta, \omega)$ es posible resolver las dos ecuaciones simultáneamente, usando uno de los métodos que hemos visto, para dos dimensiones.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = f(\vec{r}, t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = f((\theta, \omega), t)$$

a) Escribe un programa para resolver el sistema, usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden para un péndulo con un brazo de $l = 10\,\mathrm{cm}$.

b) Usa tu programa para mostrar en una sola figura

1) la gráfica del espacio fase del sistema (θ vs ω) para varias condiciones iniciales del ángulo (θ_0) y
2) el *campo de pendientes*.

c) Usa el programa para graficar θ en función del tiempo, para varias condiciones iniciales (en el mismo gráfico).

d) Describe con tus propias palabras lo que está sucediendo en el sistema.

5. **El péndulo doble**

Ahora consideremos el *péndulo doble*, que consta de un péndulo normal del que cuelga otro péndulo en su extremo. Y al igual que en el ejercicio anterior, para simplificar, ignoramos la fricción y suponemos que ambos péndulos tienen pesas de la misma masa m y brazos sin masa de la misma longitud ℓ.

La configuración del sistema se ve como en la figura 2. En el que la posición de los brazos en cualquier momento está especificada únicamente por los dos ángulos θ_1 y θ_2.

A diferencia del péndulo simple, que aunque es no lineal, su movimiento es perfectamente regular y periódico; el péndulo doble, es completamente lo contrario: caótico e impredecible. Las ecuaciones de movimiento para los ángulos se derivan más fácilmente utilizando el formalismo Lagrangiano y que puedes revisar en el Apéndice A.

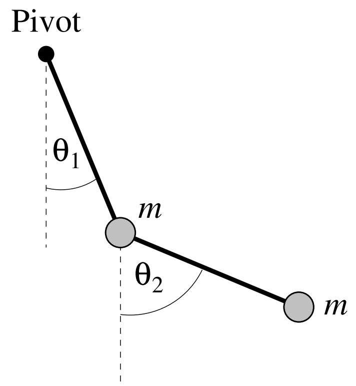


Figura 2: Un péndulo doble

De donde obtienen las siguientes cuatro ecuaciones de primer orden que definen el movimiento del péndulo doble:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2,$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\omega_1^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2\omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (g/\ell)\left[\sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 3\sin\theta_1\right]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)},$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{4\omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2(g/\ell)\left[\sin(2\theta_1 - \theta_2) - \sin\theta_2\right]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}.$$

a) Deriva una expresión para la energía total $E = T + V$ del sistema en términos de las variables θ_1, θ_2, ω_1 y ω_2, más las constantes g, ℓ y m.

b) Escribe un programa usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para resolver las ecuaciones de movimiento para el caso donde $\ell = 40\,\text{cm}$, con las condiciones iniciales $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ y $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Usa tu programa para calcular la energía total del sistema suponiendo que la masa de las pesas es 1 kg cada una, y haz una gráfica de la energía en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 100$ segundos.

Debido a la conservación de la energía, la energía total debería ser constante en el tiempo (en realidad debería ser cero para este conjunto particular de condiciones iniciales), pero encontrarás que no es perfectamente constante debido a la naturaleza aproximada de la solución de la ecuación diferencial. Elije un valor adecuado del tamaño del paso h para garantizar que la variación de energía sea inferior a 10^{-5}*Jules* en el transcurso del cálculo.

Apéndice A Derivación de ecuaciones de movimiento del pendulo dobe

Las alturas de los dos pesas, medidas desde el nivel del pivote, son

$$h_1 = -\ell \cos\theta_1, \qquad h_2 = -\ell(\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

entonces la energía potencial del sistema es:

$$V = mgh_1 + mgh_2 = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Las velocidades (lineales) de las dos pesas están dadas por:

$$v_1 = \ell\dot{\theta}_1, \qquad v_2^2 = \ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right],$$

donde $\dot{\theta}$ significa la derivada de θ con respecto al tiempo t. (Si no ves de dónde viene la segunda ecuación de velocidad, es un buen ejercicio que la derives tu mismo de la geometría del péndulo). Ahora la energía cinética total es:

$$T = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = m\ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right],$$

Y el Lagrangiano del sistema es:

$$\mathscr{L} = T - V = m\ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Así entonces las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta_1}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta_2},$$

que en este caso dan:

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\frac{g}{\ell} \sin\theta_1 = 0,$$
$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin\theta_2 = 0,$$

donde la masa m se ha cancelado.

Estas son ecuaciones de segundo orden, pero podemos convertirlas a de primer orden mediante el método habitual, definiendo dos nuevas variables, ω_1 y ω_2, así:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2.$$

En términos de estas variables, nuestras ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$2\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\frac{g}{\ell} \sin\theta_1 = 0,$$
$$\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin\theta_2 = 0.$$

Finalmente tenemos que reordenar los términos en la forma estándar; con una única derivada en el lado izquierdo de cada una, lo que da:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\omega_1^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2\omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (g/\ell)\big[\sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 3\sin\theta_1\big]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)},$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{4\omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2(g/\ell)\big[\sin(2\theta_1 - \theta_2) - \sin\theta_2\big]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}.$$

(Este último paso es bastante complicado e implica algunas identidades trigonométricas. Si no estás seguro de cómo se realizó el cálculo, puede que te resulte útil realizar la derivación por ti mismo).

Estas dos ecuaciones, junto con las ecuaciones $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ y $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, nos dan cuatro ecuaciones de primer orden que definen el movimiento del péndulo doble.