Кубанский государственный университет
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики
Кафедра прикладной математики

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ.

Краснодар 2020

Введение

Достаточно часто в коммерческой деятельности одна из сторон пытается применить свои условия или решения, а при этом другая сторона противодействует или препятствует им и преследует свои цели (решения). Эти противодействия могут носить как пассивный, так и активный характер, а поэтому следует учитывать различные варианты поведения противоположной стороны и ее действия.

Возможные варианты поведения обеих сторон и их исходов для каждого сочетания альтернатив и состояний можно представить в виде математической модели, которая называется игрой.

Если в качестве противоположной стороны выступает пассивная сторона, которая явно активно не противодействует достижению намеченной цели, то такие игры называются играми с природой. В качестве такой стороны в коммерции являются погодные условия, например, при формировании и выпуске уборочной техники для сбора урожая, реакция населения на новые виды товаров, недостаточная информированность о коммерческих операциях и т. п.

Если же в качестве противоположной стороны выступает активная сторона, противодействующая достижению намеченной цели, т. е. происходит столкновение противоположных целей, решений, интересов, мнений, то такие ситуации называются конфликтными. Принятие решений в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности поведения противника. Известно только, что противник сознательно стремится предпринять наименее выгодные для вас действия, чтобы обеспечить себе наибольший успех, но при этом неизвестно, в какой мере противник оценивает обстановку, возможные последствия, ваши возможности и намерения. В таком случае принимать решения приходится каждой стороне конфликта.

Необходимость обоснования оптимальных решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр — математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу — в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Теория игр представляет раздел прикладной математики, а точнее — исследования операций. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках — социологии, политологии, психологии, этике и других. Начиная с 1970-х гг. ее взяли на вооружение биологи для исследования поведения животных и теории эволюции. Очень важное значение теория игр имеет для искусственного интеллекта и кибернетики, особенно с проявлением интереса к интеллектуальным агентам.

Математическая теория игр берет свое начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в книге Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (англ. Theory of Games and Economic Behavior, 1944).

Математическая теория игр сейчас бурно развивается, но, однако этот метод достаточно затратен. Его применяют для оправданных задач: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п. Ряд известных ученых стали нобелевскими лауреатами по экономике за достижения в области теории игр и экономической теории. Это — Роберт Ауманн, Райнхард Зелтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи, Уильям Викри, Джеймс Миррлис, Томас Шеллинг, Джордж Акерлоф, Майкл Спенс, Джозеф Стиглиц, Леонид Гурвиц, Эрик Мэскин, Роджер Майерсон.

В первой части пособия предлагаются задачи из теории игр с наиболее простыми из ситуаций так называемые конфликтные ситуации, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные (иногда противоположные) цели, причем выигрыш каждой стороны зависит от того, как себя поведут другие.

Примеры конфликтных ситуаций многообразны. Это может быть ситуация между работником автоинспекции и водителем, налоговиком и налогоплательщиком, ситуация, складывающаяся в ходе боевых действий. Столкновение противоречащих друг другу интересов наблюдается также в судопроизводстве, в спорте, взаимоотношениях различных ступеней иерархии в сложных системах и др.

Близкой по идеям и методам к теории игр является теория статистических решений, которая отличается тем, что неопределенная ситуация не имеет конфликтной окраски — никто никому не противодействует, но элемент неопределенности налицо. Здесь неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего «противника» (или других участников конфликта), а от объективной действительности, которую в теории статистических решений принято называть природой. Соответствующие ситуации часто называются играми с природой. Природа мыслится как некая незаинтересованная инстанция, «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не злонамеренно.

Принимающему решение в игре с природой «легче» добиться успеха (ведь ему никто не мешает!), но ему «труднее» обосновать свой выбор. В игре против сознательного противника элемент неопределенности отчасти снимается тем, что мы «думаем» за противника, «принимаем» за него решение, самое неблагоприятное для нас самих. В игре же с природой такая концепция, в общем случае, не подходит. Во второй части предлагаются задачи на игры с природой.

Глава 1 АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

1.1. Основные положения теории игр

Теория игр — это математическая теория конфликтных ситуаций. Основными ограничениями этой теории являются предположение о полной («идеальной») разумности противника и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного «перестраховочного» решения.

Игра — упрошенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации, в которой выработаны определенные правила действия сторон в процессе игры. В игре конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры — партией, исход игры — выигрышем или проигрышем.

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. Ходом в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают личные и случайные. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора, например, бросанием монеты.

Одну играющую сторону может представлять один игрок или группа участников игры (игровое лицо), имеющих общие интересы или некоторую общую цель, не совпадающую с интересами (целями) других групп. Разные члены участников игры могут быть по-разному информированы об обстановке проведения игры.

В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько показателей. Причем стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной по другим.

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

• комбинаторные игры, в которых правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их все перебрать и проанализировать;

• азартные игры, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Теория игр не занимается азартными играми;

• стратегические игры, в которых неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

Существуют игры, сочетающие в себе комбинаторику и свойства азартных игр, стратегичность может сочетаться с комбинаторикой и т. д.

Количество игроков. В игре могут сталкиваться интересы двух или более игровых лиц (сторон). В зависимости от количества игровых лиц игра называется парной, если в ней участвуют две стороны (игрока), а если число сторон (игроков) больше двух — множественной. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную. Наибольший интерес вызывают игры двух лиц. Они и математически более глубоко проработаны, получили наибольшее распространение в практике анализа игровых ситуаций и имеют обширную библиографию.

В последующем задачи и упражнения рассматриваются только для игр двух лиц.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра называется игрой с нулевой суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется игрой с ненулевой суммой, например, игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней.

По характеру взаимодействия игры делятся на:

1) бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

2) коалиционные (кооперативные) — могут вступать в коалиции. В кооперативных играх коалиции наперед определены.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задается выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 2, столбец — номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть легко найдено путем сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец — стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице — выигрыш игрока 2).

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определенного числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Одним из основных понятий теории игр является стратегия.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре.

Количество стратегий игры. По этому критерию игры делятся на конечные и бесконечные. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является бесконечной.

По количеству ходов, которые делают игроки для достижения своих целей, игры бывают одношаговые и многошаговые. Одношаговые игры заключаются в том, что игрок выбирает одну из доступных ему стратегий и делает всего один-единственный ход. В многошаговых играх игроки для достижения своих целей делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

В последнее время получили большое распространение так называемые деловые игры. Деловая игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей-должностей. Деловые игры предназначены для воспроизведения и согласования коммерческих интересов.

В деловых играх игрокам обычно задаются начальные условия, в которых они находятся, сообщаются правила проведения игры, представляются варианты возможных решений и оценка их последствий. В игре обязательно присутствует «ведущий», который руководит игрой, оценивает принятые игроками решения, состояния, в которых они могут находиться в процессе игры, и определяет выигрыши и проигрыши по исходам игры.

Приведенный перечень существующих игр далеко не исчерпан. Его можно найти в различных источниках по теории игр, например, [1,6,13].

Выигрыш или проигрыш сторон оценивается численно, другие случаи в теории игр не рассматриваются, хотя не всякий выигрыш в действительности можно оценивать количественно.

Теория игр занимается принятием решений в условиях конфликтных ситуаций двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других. Тем самым игра — это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации, которые устанавливают:

• выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;

• информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;

• плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

Основными вопросами теории игр, которые возникают в коммерческой деятельности, являются:

• в чем состоит оптимальность поведения каждого из игроков в игре, какие свойства стратегий следует считать признаками оптимальности;

• существуют ли стратегии игроков, которые обладали бы атрибутами оптимальности;

• существуют ли оптимальные стратегии, и если да, то как их найти?

Для игры, как правило, определен набор возможных конечных ее состояний (выигрыш, ничья, проигрыш) и игрокам (участникам игры) известны платежи в виде матрицы $C = \| c_{ij} \|$, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям игроков (номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1, номер столбца — номеру стратегии игрока 2), а ее элементы — выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется платежной матрицей или матрицей игры. В общем случае платежная матрица является прямоугольной.

Так как интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок, наоборот, минимизировать свой проигрыш. Поэтому решение игры будет состоять в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется очень «пессимистичный» критерий — минимакса-максимина.

Так, если имеются два игрока А и В. Обозначим стратегии игрока А через a_i, $i=1,2\ldots n$, т. е. А = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а стратегии игрока В через b_j, j = $1,\ldots,m$, т.е. В = $(b_1, b_2, \quad b_m)$. Количество стратегий игроков может быть различным или одинаковым. Если игрок А применяет свою i-ю стратегию, а игрок В свою j-ю стратегию, то результатом игры будет значение c_{ij}. Построим матрицу результата игры. Расположим стратегии игрока А соответственно строкам некоторой матрицы, а стратегии игрока В — столбцам матрицы. На пересечении строк и столбцов будет стоять результат игры при применении игроками различных стратегий:

A	B			
	b_1	b_2	...	b_m
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}
....	...	...	...	...
a_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}

Матрица C = (c_{ij}) называется матрицей выигрыша, платежной матрицей или матрицей цен игры.

Для однозначной определенности принято, что игрок А всегда выигрывает, а игрок В — проигрывает. Так, если $c_{ij} > 0$, то игрок А выигрывает данную сумму, а если $c_{ij} < 0$, то игрок А выигрывает сумму минус c_{ij} (т. е. проигрывает эту сумму), если $c_{ij} = 0$, то результатом игры является ничья и выигрыши игроков равны нулю.

Решить задачу по теории игр значит найти оптимальные стратегии игроков (чистые или смешанные) и выигрыш (результат игры).

Если первый игрок применяет стратегию a_i то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии b_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума:

$$\alpha_i = \min_j c_{ij}, i = \overline{1,n} \tag{1.1}$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i, обращается в максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij}. \tag{1.2}$$

Величина α называется **нижней ценой игры**. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α, т. е. является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично по каждому столбцу матрицы

$$\beta_j = \max_i c_{ij}, j = \overline{1,m} \tag{1.3}$$

найдем минимальное значение β_i:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij}. \tag{1.4}$$

Величина β называется **верхней ценой игры**. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока, придерживаясь которой он при любых стратегиях противника обеспечит себе проигрыш, не больший β, т.е. это гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Для любой матрицы $C = \| c_{ij} \|$ выполняется неравенство $\beta > \alpha$.

Если $\beta = \alpha$, т. е. верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку* (образуется стратегией игрока А и стратегией игрока В).

Величина $V = \beta = \alpha$ называется ценой игры. Она определяет средний выигрыш игрока А и средний проигрыш игрока В при использовании ими оптимальных стратегий.

Если в платежной матрице С все элементы строки $A_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$ не меньше соответствующих элементов строки $A_к = (c_{к1}, c_{к2}, \ldots, c_{кm})$, а по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется *доминирующей*, а строка $A_к$ — *доминируемой*. Аналогично можно говорить о «*доминирующем*» и «*доминируемом*» столбцах.

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки; второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы. Поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя (выбирая) чистые стратегии, т. е. используют смешанную стратегию.

Смешанной стратегией S_A игрока А называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ причем:

$$p_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Смешанные стратегии игрока А записываются в виде матрицы:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_i & \ldots & A_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

или в виде строки:

$$S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_n) .$$

Аналогично смешанные стратегии S_B игрока В обозначаются:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots B_j & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots q_j & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

или в виде строки:

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

где $q_j \geq 0,\ j = \overline{1, m},\ \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$

Платежная матрица игры имеет следующий вид:

B / A	q_1	q_2	…	q_j	…	q_m
p_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1j}	…	C_{1n}
p_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2j}	…	C_{2n}
…	…	…	…		…	
p_i	C_{i1}	C_{i2}	…	C_{ij}	…	C_{in}
…	…	…	…		…	
p_n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{11}	…	C_{nm}

Игрок А выбирает стратегию p_i , так, чтобы максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш по столбцам платежной матрицы, тогда как игрок В выбирает стратегию q_j с целью минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш по строкам. Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом. Игрок А выбирает стратегию p_i,-, дающую

$$\max_{p_i}\left\{min\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} \cdot p_i, \sum_{i=1}^{n} c_{i2} \cdot p_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} c_{im} \cdot p_i\right)\right\}$$

игрок В выбирает стратегию q_j, дающую

$$\min_{q_j}\left\{max\left(\sum_{j=1}^{m} c_{1j} \cdot q_j, \sum_{j=1}^{m} c_{2j} \cdot q_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} c_{nj} \cdot q_j\right)\right\}$$

Когда стратегии p_i^0и q_j^0 оптимальны, то выполняется строгое равенство между максиминным ожидаемым выигрышем и минимаксным проигрышем, а результирующее значение равно оптимальному (ожидаемому) значению игры.

Этот вывод следует из теоремы фон Неймана о минимаксе.

1.2. Построение платежной матрицы

Пример. Предприниматель, осуществляющий ремонт автомашин, хочет определить, какое ему надо выбрать число ремонтных мест в мастерской, чтобы в последующем получить максимальную выручку. При этом у него имеются следующие данные: выручка с каждой обслуженной машины будет составлять 9 у. е., простой (когда машин на обслуживании нет) — 6 у. е., а убыток от невозможности обслужить (нет ремонтных мест) — 5 у. е. и ремонтных машиномест может быть 2, 3, 5, 8.

Требуется составить платежную матрицу, если машины будут поступать на ремонт в количестве 2, 3, 5 и 8 шт.

Решение.

1. Число ремонтных мест в мастерской — 2.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9).

б) На ремонт поступят 3 машины. Из них обслужат 2 и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9), а одну — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 5 у. е. Тем самым общая выручка составит 13 у. е. (13 = 18 - 5).

в) На ремонт поступят 5 машин. Из них обслужат 2 и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9), а 3 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 15 у. е. Тем самым общая выручка составит 3 у. е. (3 = 18 - 15).

г) На ремонт поступят 8 машин. Из них обслужат 2 и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9), а 6 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 30 у. е. Тем самым общая выручка составит -12 у. е. (-12 = 18 - 30).

2. Число ремонтных мест в мастерской — 3.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9). Одно ремонтное место будет простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 6 у. е. Тем самым общая выручка составит 12 у. е. (12 = 18 - 6).

б) На ремонт поступят 3 машины. Из них обслужат все 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. (27 = 3-9).

в) На ремонт поступят 5 машин. Из них обслужат 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. (27 = 3 • 9), а 2 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 10 у. е. Тем самым общая выручка составит 17 у. е. (17 = 27 - 10).
г) На ремонт поступят 8 машин. Из них обслужат 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. (27 = 3 • 9), а 5 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 25 у. е. Тем самым общая выручка составит 2 у. е. (2 = 27 - 25).

3. Число ремонтных мест в мастерской — 5.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9). Три ремонтных места будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 18 у. е. Тем самым общая выручка составит 0 у. е. (0 = 18 - 18).
б) На ремонт поступят 3 машины. Из них обслужат 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. (27 = 3- 9). Два ремонтных места будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 12 у. е. Тем самым общая выручка составит 15 у. е. (15 = 27 - 12).
в) На ремонт поступят 5 машин. Их все 5 обслужат и с этого получат выручку в размере 45 у. е. (45 = 5-9).
г) На ремонт поступят 8 машин. Из них обслужат 5 и с этого получат выручку в размере 45 у. е. (45 = 5 • 9), а 3 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 15 у. е. Тем самым общая выручка составит 30 у. е. (30 = 45 - 15).

4. Число ремонтных мест в мастерской — 8.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 • 9). Шесть ремонтных мест будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 36 у. е. (36 = 6 • 6). Тем самым общая выручка составит-18 у. е. (-18 = 18 - 36).
б) На ремонт поступят 3 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 27 у. е. (27 = 3-9). Пять ремонтных мест будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 30 у. е. (30 = = 5-6). Тем самым общая выручка составит -3 у. е. (-3 = 21 - 30).
в) На ремонт поступят 5 машин. Их все 5 обслужат и с этого получат выручку в размере 45 у. е. (45 = 5 • 9). Три ремонтных места будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 18 у. е. (18 = 3-6). Тем самым общая выручка составит 27 у. е. (27 = 45 - 18).

г) На ремонт поступят 8 машин. Их все 8 обслужат и с этого получат выручку в размере 72 у. е. (72 = 8 • 9).

Полученная в процессе расчетов платежная матрица будет иметь следующий вид:

Число поступивших автомашин

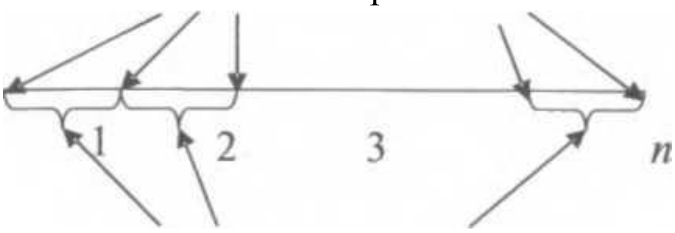
		2	3	5	8
Число машиномест	2	18	13	3	-12
	3	12	27	17	2
	5	0	15	45	30
	8	-18	-3	27	72

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.2.1. Производство и реализация товаров

Фирма «Аспект» производит некоторый сезонный товар, имеющий спрос в течение n (≥2) единиц времени, и который она может поставить на рынок в один из моментов i, где i=1,2, n (рис. 1.1).

Моменты времени



Единицы времени

Рис. 1.1

Для конкурентной борьбы с фирмой «Аспект» дочерняя фирма «Ветер» концерна «Буря», не заботясь о собственных доходах, производит аналогичный товар, который поступает на рынок в один из моментов j = 1, 2, …,n. Цель фирмы «Ветер» — разорение фирмы «Аспект», после чего, используя капитал концерна «Буря», она может легко наверстать упущенное.

Единственным законным средством фирмы «Ветер» в конкурентной борьбе является выбор момента поставки товара на рынок, так как понижение цены на поставляемый товар запрещено определенным соглашением. Для разорения фирмы «Аспект» фирма «Ветер» должна минимизировать ее доходы. Пусть технология выпуска товара такова, что чем дольше он находится в производстве и, следовательно, позже поступает на рынок, тем выше его качество (в результате, например, применения более совершенных методов производства, использования новых технологий, современного оборудования, более эффективных форм организации труда и т. п.), а реализуется товар только более высокого качества (так как цена на товары разного качества одна и та же). Доход от продажи товара в единицу времени составляет с денежных единиц.

Требуется построить выигрыш-функцию фирмы «Аспект», где под выигрышем понимается доход этой фирмы, зависящий от складывающихся ситуаций. Используя функцию выигрыша, надо сформировать платежную матрицу игры для случая $n = 4$ и записать конкретные значения элементов этой матрицы, которые она приобретает в случае, когда доход с = 6 денежным единицам.

1.2.2. Поставка товаров

Имеется две торговые базы, ассортиментный минимум которых составляет один и тот же набор из n (≥ 2) видов товаров. Каждая база должна поставить в свой магазин только один из этих видов товара. Магазины, обозначим их А и В, конкурируют между собой. Один и тот же вид товара в обоих магазинах продается по одной и той же цене. Однако товар, поставляемый в магазин В, более высокого качества. Если магазин А завезет с базы товар i -го вида, где $i=1,2, \quad n$, отличный от товара j-го вида ($j = 1, 2, \ldots, n$), завезенного в магазин В, то товар i -го вида будет пользоваться спросом и магазин А от его реализации получит прибыль c_i денежных единиц. Если же в магазины А и В завезены товары одинакового вида $i = j$, товар i -го вида в магазине А спросом пользоваться не будет, поскольку такой же товар, по такой же цене, но более высокого качества, можно купить в магазине В, и поэтому магазин А понесет убытки по транспортировке, хранению и, возможно, порче товара i -го вида в размере d_i денежных единиц.

Требуется математически формализовать данную конфликтную ситуацию и построить платежную матрицу игры для $n = 3$.

1.2.3. Уплата налога

В конфликтной ситуации участвуют две стороны: А — налоговая инспекция; В — налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет Г условных денежных единиц.

У стороны А имеется два возможных способа поведения. Первый A_1 состоит в контролировании дохода налогоплательщика В и взимании с него:

• налога в размере Т, если доход заявлен и соответствует действительному,

• налога в размере Т и штрафа в размере W, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего дохода.

Второй способ A_2 — вообще не контролировать доход налогоплательщика В.

У стороны В имеется три стратегии поведения. Первая B_1 — заявить о действительном доходе, вторая B_2 — заявить доход, меньший действительного, и, следовательно, налог С с заявленного дохода будет меньше Т, третий B_3 — скрыть доход, тогда не надо будет платить налог.

Составить платежную матрицу — матрицу выигрышей игрока А.

1.2.4. Рекламная кампания

Две фирмы А и В проводят на предполагаемых рынках сбыта (в двух соседних городах) рекламную кампанию. У фирмы А имеются средства, чтобы оплатить в этих городах четыре способа проведения рекламной кампании, а у фирмы В — три способа. Победу каждой фирмы (для определенности фирмы А) в каждом из городов будем оценивать в условных единицах (очках) следующим образом:

• если у фирмы А больше способов рекламы, чем у противника, то в качестве выигрыша она получает число очков, равное числу способов рекламы, примененных противником в данном городе, с добавлением одного очка за победу;

• если у А — меньше способов рекламы, чем у противника, то она проигрывает число очков, равное числу способов рекламы, примененных ею в данном городе, и минус одно очко — за проигрыш;

• если число способов рекламы в городе у обеих фирм одинаковое, то каждая из них получает ноль очков.

В качестве общих выигрышей каждой из фирм принимаем суммы ее очков по двум городам в различных ситуациях.

Представить модель конфликта в виде матричной игры, составив платежную матрицу — матрицу выигрышей фирмы А.

1.2.5. Страхование автомобилей

Один из самых распространенных и известных видов страхования — страхование автомобилей. В России страхование автомобилей является обязательным, и каждый автолюбитель сталкивается с данной проблемой.

Многие автолюбители хотели бы, во-первых, максимально снизить свои расходы на страховые взносы, а, во-вторых, при наступлении страхового случая получить максимальную выплату. Страховщик при этом, наоборот, хотел бы получать максимальные премии и выплачивать минимальные суммы при наступлении страхового случая. Интересы автолюбителя (страхователя) и страховщика антагонистичны, и отношения, в которые они вступают друг с другом, можно рассматривать в качестве парной антагонистической игры.

Таким образом, рассматривается конфликтная ситуация, в которой присутствует две стороны:

А — это автомобилист (страхователь), целью которого является уменьшение расходов на страхование и в случае дорожно-транспортного происшествия (ДТП) получение максимальной выплаты. При заключении договора он страхует автомобиль на полную его стоимость.

В — страховая компания (страховщик), целью которой является получение максимальной прибыли (т. е. максимальных страховых взносов и минимальных выплат при наступлении страховых случаев).

У автомобилиста существует три стратегии:

A_1 — управлять автомобилем предельно аккуратно и при заключении договора страхования указывать настоящую стоимость автомобиля (300 000 руб.). Будем предполагать, что если водитель внимателен за рулем и следит за дорогой, то вероятность наступления страхового случая практически равна нулю (возможность угона исключим);

A_2 — управлять автомобилем предельно аккуратно и при заключении договора страхования указывать заниженную стоимость автомобиля (страховую сумму) (200 000 руб.) с целью уменьшения страховых взносов;

A_3 — не следить за дорогой и указать завышенную стоимость автомобиля (400 000 руб.). Поскольку в данном случае вероятность наступления страхового случая велика, а владелец автомобиля указал завышенную стоимость, то при ДТП автомобилист получит компенсацию больше, чем если бы он указал настоящую стоимость автомобиля.

При этом следует помнить, что если страховая компания установит, что авария произошла по вине водителя или что он указал завышенную или заниженную стоимость автомобиля, то страховой выплаты может не быть и автомобилист может быть оштрафован (пусть в данном случае это является одним из условий договора страхования).

У страховой компании существует четыре стратегии:

B_1 — не проводить оценку стоимости автомобиля и поверить автомобилисту на слово, а также не заниматься расследованием в случае ДТП на предмет установления виновного с целью экономии времени;

B_2 — проводить расследование в случае наступления страхового случая, но не делать оценку стоимости автомобиля;

B_3 — проверять стоимость автомобиля, но не проводить расследования при ДТП;

B_4 — проводить расследование в случае ДТП и проверять, соответствует ли указанная стоимость автомобиля реальности.

Пусть в случае обнаружения неверно указанной стоимости автомобиля страховшик взимает штраф со страхователя в размере 15 % от реальной стоимости объекта страхования. Если установлено, что ДТП наступило по вине страхователя, то он не получает страховой выплаты. Страховой взнос за страховой период составляет 10 % от указанной страховой суммы. Будем также предполагать, что при наступлении страхового случая автомобиль разрушается полностью. За рассматриваемый страховой период производится только один взнос, и страховой случай может наступить не более одного раза.

Требуется составить платежную матрицу игры.

1.2.6

Постройте платежную матрицу системы противовоздушной обороны (игрока А), целью которой является поражение как можно большего количества самолетов противника (игрока В). Задача противника — преодолеть систему противовоздушной обороны, потеряв при этом как можно меньше самолетов.

Система противовоздушной обороны прикрывает участок территории, располагая двумя зенитно-ракетными комплексами, зоны действия которых не пересекаются. Каждый зенитно-ракетный комплекс с единичной вероятностью поражает самолет противника в зоне своего действия, если его система наведения начинает отслеживать цель и вырабатывать данные для стрельбы еще за пределами зоны. Противник располагает двумя самолетами, каждый из которых может быть направлен в зону действия любого зенитно-ракетного комплекса. В момент, когда система противовоздушной обороны решает, какому зенитно-ракетному комплексу по какой цели стрелять, самолеты противника могут применить обманный маневр и изменить маршрут.

1.2.7

Ежемесячно страховая компания «Гарантия» страхует 100 объектов фирмы «Волна». Каждый из объектов страхуется на 1000 руб. Страховщик забирает себе 10 % от страховой суммы при заключении контракта. В следующем году страховщик намерен увеличить свой доход путем повышения процентной ставки на 1, 2 или 3 процента.

Страховая компания не намерена увеличивать расходы на страхование, а поэтому готова уменьшить количество страхуемых объектов на 5, 10 или 15 штук.

Смоделируйте дальнейшее сотрудничество страховой компании со страхователем, построив платежную матрицу. При каких условиях оно остается выгодным для страховщика?

1.2.8

Два предприятия А и В производят аналогичную продукцию и поставляют ее на рынок, являясь ее единственными поставщиками в регионе. Каждое из предприятий может производить свою продукцию с применением одной из трех различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут устанавливать цену за единицу продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц (д.е.) при различных затратах на производство единицы продукции, см. табл. 1.1.

Таблица 1.1

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8

II	6	3	4
III	2	1,5	1

В результате маркетингового исследования рынка региона была определена функция спроса на эту продукцию: Y =6-0,5·X,

Таблица 1.2

Цена реализации единицы продукции, д.е.		Средняя цена реализации единицы продукции, д.е.	Спрос на продукцию, тыс. ед.	Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2			
10	10	10	1	0,31
10	6	8	2	0,33
10	2	6	3	0,18
6	10	8	2	0,70
6	6	6	3	0,30
6	2	4	4	0,20
2	10	6	3	0,92
2	6	4	4	0,85
2	2	2	5	0,72

где Y— количество продукции, которое приобретет население региона (тыс. ед.), а X — средняя цена продукции предприятия. Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации, устанавливаемых предприятиями, приведены в табл. 1.2.

Указанные в табл. 1.2 значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. Эти значения были вычислены по результатам маркетингового исследования. Поскольку на рынке региона действует всего только два предприятия, то долю продукции второго предприятия, приобретенной населением, в зависимости от соотношения цен можно определить как единица минус доля предприятия 1.

Какое предприятие в описанных условиях окажется в выигрышном положении? Составьте матрицу выигрышей для игрока А — предприятия 1. Коэффициенты выигрышей в матрице определять как значение разницы прибыли предприятий 1 и 2 от производства продукции. Если эта разница положительная, выигрывает предприятие 1 (игрок А), если отрицательная — предприятие 2 (игрок В).

Показатели прибыли каждого предприятия в данной задаче зависят:

• от цены и себестоимости продукции;
• от количества продукции, приобретаемой населением региона;
• от доли продукции, приобретенной населением у предприятия.

Поэтому коэффициенты платежной матрицы будут определяться по формуле

$$a_{ij} = q \cdot (Y \cdot P_i - y \cdot C_1) - (1 - q) \cdot (Y \cdot P_2 - y \cdot C_2),$$

где q — доля продукции игрока А, приобретаемая населением региона;

Y— количество продукции, приобретаемой населением региона; P_1 и P_2 — цена реализации единицы продукции игроками А и В; C_1 и C_2 — полная себестоимость продукции, произведенной игроками А и В (i= 1,…,n; j=1,…,m).

1.2.9

Семья Ивановых, состоящая из 5 совершеннолетних членов, располагает свободными средствами в размере 10 тыс. условных денежных единиц (у. е.) и желает их приумножить. На семейном совете рассматривается вопрос о возможности открытия срочных не пополняемых вкладов на сумму 2 тыс. у. е., 3 тыс. у. е., 5 тыс. у. е. в двух банках, в надежности которых вся семья не сомневается. С учетом особенностей условий размещения средств по указанным вкладам процентные ставки по ним в банках отличаются:
• в первом банке они составляют 12, 6 и 8 %;
• во втором — 9, 10 и 7 % соответственно.

Являются ли отношения между семьей Ивановых и банковской системой антагонистическими? Как более выгодно семье Ивановых разместить свои средства? Составьте платежную матрицу игры.

1.2.10. Планирование посева

Сельскохозяйственное предприятие может посеять одну из трех культур — A_1, A_2, A_3 Необходимо определить, какую из культур сеять, если при прочих равных условиях урожаи этих культур зависят главным образом от погоды, а статистические данные о погодных условиях отсутствуют. План посева должен обеспечить наибольший доход. Состояния погоды можно охарактеризовать тремя вариантами: B_1 — сухо, B_2 — нормально, B_3

— влажно. Показатели урожайности культур в зависимости от состояний погоды и цена каждой культуры приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Состояния погоды	Урожайность культуры в центнерах		
	A_1	A_2	A_3
B_1	20	7,5	0
B_2	5	12,5	7,5
B_3	15	5	10
Цена за 1 центнер в у. е.	2	4	8

Составить платежную матрицу задачи.

1.2.11

Торговый агент должен встретиться с иногородним клиентом и собирается лично вручить ему заказ на 3000 д.е.

Если агент поедет поездом, то потеряет рабочий день, который принес бы ему 1500 д.е.

Полет самолетом позволит сократить рабочий день, но если самолет не полетит из-за тумана, то личная встреча с клиентом не состоится и день на работе не будет потерян. В этом случае придется говорить с клиентом по телефону, что уменьшит сумму заказа до 500 д.е. Вероятность тумана оценивается как 0,1 (по статистике, в это время года 1 день из 10 — с туманом).

Составьте платежную матрицу, элементы которой будут представлять собой доход торгового агента в зависимости от принятого решения.

1.2.12

Два магазина могут продавать некоторый товар по 10 руб., по 12 руб. и по 14 руб. за шт. Каждый день покупатели приобретают в этих магазинах 100 ед. этого товара. Если цена будет одинаковая, то в обоих магазинах купят равное количество товара. Если разница в ценах будет 2 руб., то более дешевый товар купят 70 % покупателей. Если разница в ценах будет 4 руб., то более дешевый товар купят 90 % покупателей. Составить платежную матрицу, отражающую разность дохода первого и второго магазинов при любом сочетании стратегий.

1.2.13

Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок В — одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то А выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то B выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры.

1.3. Принцип доминирования

В теории игр при их исследовании большое значение имеет возможность учета предпочтения стратегий игроков, которое осуществляется с помощью принципа доминирования.

Матрицы размерностью 2 х 2, 2 х N или M х 2, которые, как будет показано далее, несложно решаются, встречаются не так часто, как нам того бы хотелось, поэтому рассмотрим принцип доминирования, позволяющий уменьшить размерность матрицы.

Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, и ему будет выгодна та стратегия, которая принесет больший выигрыш. Если элементы некоторой строки платежной матрицы C меньше соответствующих элементов другой строки, то интуитивно ясно, первую можно вычеркнуть. Сформулируем условия доминирования строк и столбцов платежной матрицы, позволяющие уменьшить ее размерность.

Определение. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ доминирует вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если все элементы векторах больше или равны соответствующим элементам вектора y. То есть $x_i > y_i$ для $\forall i = 1,..,n$ и хотя бы одно неравенство выполняется как строгое. Про вектор y говорят, что он доминируется вектором x.

Определение. Линейная комбинация векторов называется выпуклой, если существуют такие коэффициенты $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$, $\kappa_i \in [0, 1]$ $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n = 1$ для i= 1,.,n, не равные нулю одновременно, что выполнено условие

$$\kappa_1 x^1 + \kappa_2 x^2 + \ldots + \kappa_n x^n = x.$$

Теорема (о доминировании строк). Если в игре с платежной матрицей C какая-либо строка доминируется выпуклой комбинацией остальных строк, то она будет входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию первого игрока и ее можно вычеркнуть.

Замечания.

1. Если в матрице существуют несколько одинаковых срок, то все, кроме одной, можно вычеркнуть, и они будут входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию первого игрока.
2. Если какая-либо строка доминируется другой строкой, то меньшую можно вычеркнуть.

Теорема (о доминировании столбцов). Если в игре с платежной матрицей С какой-либо столбец доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов, то он будет входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию второго игрока и его можно вычеркнуть.

Пример. Используя принцип доминирования, найти оптимальную стратегию.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Третий и четвертый столбцы доминируют над вторым, поэтому, в соответствии с утверждением о доминировании столбцов, их можно вычеркнуть (они будут входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию второго игрока).

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} \end{pmatrix} \text{ получаем: } \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Из оставшихся трех строк и двух столбцов можно вычеркнуть первую строку, так как она доминируется третьей строкой. Таким образом, получаем игру с платежной матрицей 2 х 2: $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, которая решается просто.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В заданиях 1.3.1 — 1.3.15 получить новые платежные матрицы, там, где это возможно, используя принцип доминирования:

1.3.1 $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1.3.2 $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

1.3.3 $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1.3.4

1.3.5

1.3.6

$$C=\begin{pmatrix}5&3&8&2\\2&6&4&3\\9&5&3&7\\8&7&5&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5&8&7&6\\10&11&5&7\\12&10&8&4\\7&11&10&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}8&7&10&5\\6&4&11&3\\10&5&9&7\\4&8&3&12\end{pmatrix}$$

1.3.7 1.3.8 1.3.9

$$C=\begin{pmatrix}4&8&-1&-2\\5&9&3&2\\5&-7&-2&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&-5&1&-2\\4&2&-4&3\\2&-3&5&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&5&4&1\\4&6&3&5\\2&3&4&6\end{pmatrix}$$

1.3.10 1.3.11 1.3.12

$$C=\begin{pmatrix}5&3&8&2\\2&6&4&3\\9&5&3&7\\8&7&5&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5&8&7&6\\10&11&5&7\\12&10&8&4\\7&11&10&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}8&7&10&5\\6&4&11&3\\10&5&9&7\\4&8&3&12\end{pmatrix}$$

1.3.13 1.3.14

$$C=\begin{pmatrix}0{,}5&0{,}3&0{,}6&0{,}7&0{,}8\\0{,}6&0{,}2&0{,}4&0{,}9&1{,}0\\0{,}7&0{,}4&0{,}7&1{,}2&0{,}9\\1{,}1&0{,}6&0{,}5&1{,}0&0{,}6\\0{,}3&0{,}5&0{,}9&0{,}7&1{,}0\\1{,}2&0{,}4&0{,}3&0{,}2&0{,}6\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&3&-2&4\\3&2&4&1\\-4&3&-1&-2\\-5&2&-3&-4\end{pmatrix}$$

1.3.15

$$C=\begin{pmatrix}2&5&6&7&3\\9&3&6&5&7\\7&6&8&1&10\\9&5&4&7&4\end{pmatrix}$$

1.4. Определение границ выигрыша и наличия седловой точки

Пример 1. Следует найти верхнюю и нижнюю границы игры, имеющей следующую платежную матрицу:

$$C=\begin{pmatrix}6&2&8&15\\9&4&11&5\\5&3&7&4\end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цены игры, определим наличие седловой точки.

1. По строкам сначала находим минимальные значения, а потом из них максимальное значение:

$$\alpha=\max_i\alpha_i=\max_i\min_j c_{ij}.$$

2. По столбцам сначала находим максимальные значения, а потом из них минимальное значение:

$$\beta=\min_j\beta_j=\min_j\max_i c_{ij}$$

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & & Min & Max \\ & \left(\begin{matrix} 6 & 2 & 8 & 15 \\ 9 & 4 & 11 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{matrix}\right. & & & \left.\right) & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \mathbf{4} \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} Max & 9 & 4 & 11 & 15 \\ Min & & \mathbf{4} & & \end{array}$$

Так как $\alpha = \beta$, то седловая точка присутствует и определяется координатами (2, 2), при этом выигрыш V равен 4.

Пример 2. Следует найти верхнюю и нижнюю границы игры, имеющей следующую платежную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры, определим наличие седловой точки.

1. По строкам сначала находим минимальные значения, а потом из них максимальное значение:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij}.$$

2. По столбцам сначала находим максимальные значения, а потом из них минимальное значение:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij}$$

$$\begin{array}{r|c|cc} & & Min & Max \\ & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{matrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{\alpha = -1} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Max & 5 & 4 & 6 \\ Min & & \boldsymbol{\beta = 4} & \end{array}$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет. Задачу следует решать в смешанных стратегиях.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.4.1 — 1.4.30 определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, седловую точку и значение выигрыша.

1.4.1

$$C=\begin{pmatrix}2&4&1&5\\1&-1&3&2\\5&2&-4&0\\-2&5&-3&-4\end{pmatrix}$$

1.4.2

$$C=\begin{pmatrix}2&3&-1&4\\3&2&4&1\\-4&3&-1&-2\\-5&5&-3&-4\end{pmatrix}$$

1.4.3

$$C=\begin{pmatrix}2&2&6&5\\3&3&7&7\\4&3&4&2\\5&6&2&4\end{pmatrix}$$

1.4.4

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0{,}5&0{,}3&0{,}6&0{,}7&0{,}8\\0{,}6&0{,}2&0{,}4&0{,}9&1{,}0\\0{,}7&0{,}4&0{,}7&1{,}2&0{,}9\\1{,}1&0{,}6&0{,}5&1{,}0&0{,}6\\0{,}3&0{,}5&0{,}9&0{,}7&1{,}0\\1{,}2&0{,}4&0{,}3&0{,}2&0{,}6\end{pmatrix}$$

1.4.5

$$C=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\3&5&4&6\\4&3&2&3\\1&5&3&4\end{pmatrix}$$

1.4.6

$$C=\begin{pmatrix}2&0&1&4\\1&2&5&3\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$

1.4.7

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0{,}3&-0{,}3&0{,}5&0{,}1&0{,}7\\0{,}6&0{,}4&0{,}2&0{,}9&0{,}8\\0{,}7&0{,}5&0{,}7&1{,}1&0{,}6\\1{,}2&0{,}2&0{,}4&0{,}7&0{,}6\\0{,}2&0{,}4&0{,}8&0{,}7&1{,}1\\1{,}3&0{,}5&0{,}3&0{,}2&0{,}6\end{pmatrix}$$

1.4.8

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}6&2&8&7\\9&4&8&5\\5&3&7&4\end{pmatrix}$$

1.4.9

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&4&6&5\\5&6&3&9\\7&3&5&4\end{pmatrix}$$

1.4.10

$$C=\begin{pmatrix}4&8&-1&-2\\5&9&3&2\\5&-7&-2&4\end{pmatrix}$$

1.4.11

$$C=\begin{pmatrix}3&-5&1&-2\\4&2&-4&3\\2&-3&5&4\end{pmatrix}$$

1.4.12

$$C=\begin{pmatrix}3&5&4&1\\4&6&3&5\\2&3&4&6\end{pmatrix}$$

14.13

$$C=\begin{pmatrix}2&9&10&5\\3&4&8&7\\-4&3&-4&-2\\8&5&-3&-4\end{pmatrix}$$

1.4.14

$$C=\begin{pmatrix}7&10&8&5\\5&4&10&7\\4&3&-2&-3\\6&5&-3&-4\end{pmatrix}$$

1.4.15

$$C=\begin{pmatrix}1&2&8&4\\3&4&5&7\\4&3&2&0\\8&5&1&2\end{pmatrix}$$

1.4.16

$$C=\begin{pmatrix}-2&9&5&7\\-3&8&3&5\\4&2&2&6\\8&-1&-3&3\end{pmatrix}$$

1.4.17

$$C=\begin{pmatrix}2&7&10&6\\3&8&7&3\\-4&3&-4&-2\\8&5&-3&4\end{pmatrix}$$

1.4.18

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 10 & -4 & -2 \\ 7 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.4.19

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.4.20

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.21

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1.4.22

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.23

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 5 & 7 \\ 12 & 10 & 8 & 4 \\ 7 & 11 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4.24

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 11 & 3 \\ 10 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

1.4.25

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 12 & 9 \\ 11 & 5 & 5 & 10 & 7 \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 12 & 4 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.26

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 11 & 7 \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.27

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 1{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1{,}0 \\ 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

1.4.28

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 9 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.29

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 40 & 70 & 10 \\ 15 & 70 & 10 & 30 & 40 & 20 \\ 80 & 50 & 40 & 25 & 80 & 70 \\ 45 & 90 & 25 & 55 & 69 & 50 \end{pmatrix}$$

1.4.30

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1.5. Игра 2x2

Рассмотрим игру размерностью 2x2, которая является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение — это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр *оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий* $S^*_A = (p^*_1, p^*_2)$ и $S^*_B = (q^*_1, q^*_2)$.

Пусть игра задана платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Средний выигрыш игрока А, если он использует оптимальную смешанную стратегию $S^*_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$, а игрок В — чистую стратегию B_1, (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы С), равен цене игры V, т. е.:

$$c_{11}p_1^* + c_{21}p_2^* = V$$

Тот же средний выигрыш получает игрок А, если игрок В применяет стратегию B_2 т. е. $c_{12}p_1^* + c_{22}p_2^* = V$. Учитывая, что $p_1 + p_2 = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S^*_A и цены игры V:

$$\begin{cases} c_{11}p_1^* + c_{21}p_2^* = V \\ c_{12}p_1^* + c_{22}p_2^* = V \\ \quad p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию $S^*_A = (p^*_1, p^*_2)$:

$$p_1^* = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})} \tag{1.6}$$

$$p_2^* = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})} \tag{1.7}$$

и цену игры:

$$V = \frac{c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})} \tag{1.8}$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S^*_B — оптимальной стратегии игрока В, получаем аналогичную систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}q_1^* + c_{12}q_2^* = V \\ c_{21}q_1^* + c_{22}q_2^* = V \\ \quad q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

Тогда оптимальная стратегия $S^*_B = (q^*_1, q^*_2)$ определяется формулами:

$$q_1^* = \frac{c_{22}-c_{12}}{c_{11}+c_{22}-(c_{12}+c_{21})} \quad (1.10)$$

$$q_2^* = \frac{c_{11}-c_{21}}{c_{11}+c_{22}-(c_{12}+c_{21})} \quad (1.11)$$

Решение игры 2x2 приведенной выше платежной матрицы допускает наглядную геометрическую интерпретацию. По оси абсцисс (рис. 1.2) надо отложить единичный отрезок A_1A_2; точка $A_1(X= 0)$ изображает стратегию A_1 а все промежуточные точки отрезка A_1A_2 — смешанные стратегии S_A первого игрока, причем расстояние от S_A до правого конца отрезка — это вероятность p_1, стратегии A_1, расстояние до левого конца — вероятность p_2 стратегии A_2. На перпендикулярных осях Y Y' откладываем выигрыши при стратегиях A_1 и A_2 соответственно. Если 2-й игрок примет стратегию B_1, то она дает выигрыши c_{11} и c_{21} на осях Y и Y', соответствующие стратегиями, A_1 и A_2. Обозначим эти точки на осях Y и Y' буквой B_1.

Средний выигрыш V, соответствующий смешанной стратегии S_A, определяется по формуле математического ожидания $V_1 = c_{11}p_1 + c_{21}p_1$ и равен ординате точки D_1, которая лежит на отрезке B_1B_1 и имеет абсциссу S_A (рис. 1.2).

Аналогично строим отрезок B_2B_2, соответствующий применению вторым игроком стратегии B_2 (рис. 1.3). При этом средний выигрыш $V_2 = c_{12}p_1 + c_{22}p_1$ — ордината точки D_2.

В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия S^*_A такова, что минимальный выигрыш игрока A (при наихудшем поведении игрока B) обращается в максимум. Ординаты точек, лежащих на ломаной (см. рис. 1.4), показывают минимальный выигрыш игрока A при использовании им любой смешанной стратегии (на участке B_1N — против стратегии B_1, на участке NB_2 — против стратегии B_2). Оптимальную стратегию $S_A = (p^*_1, p^*_2)$ определяет точка N, в которой минимальный выигрыш достигает максимума; ее ордината равна цене игры V. На рис. 1.4 обозначены также верхняя и нижняя цены игры α и β.

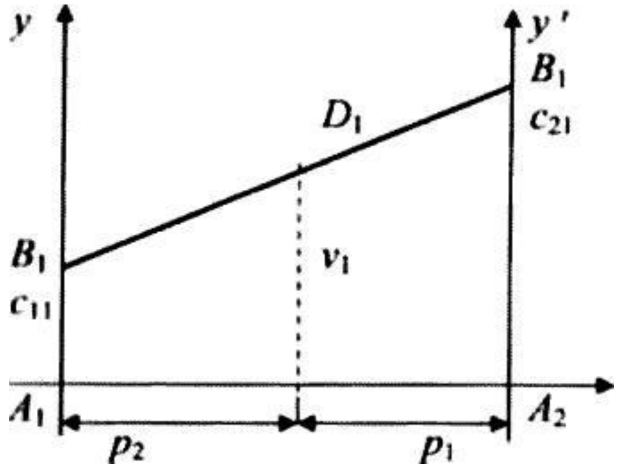


Рис. 1.2

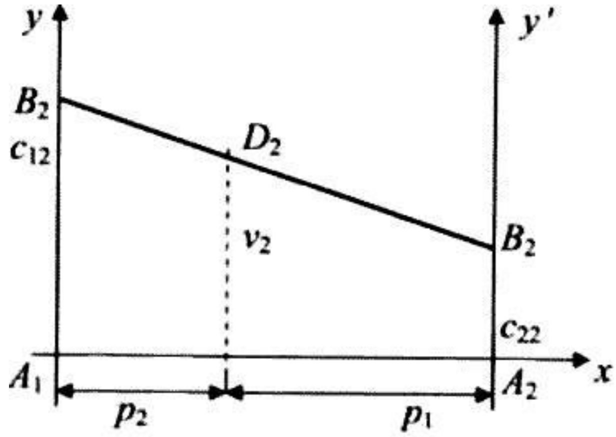


Рис. 1.3

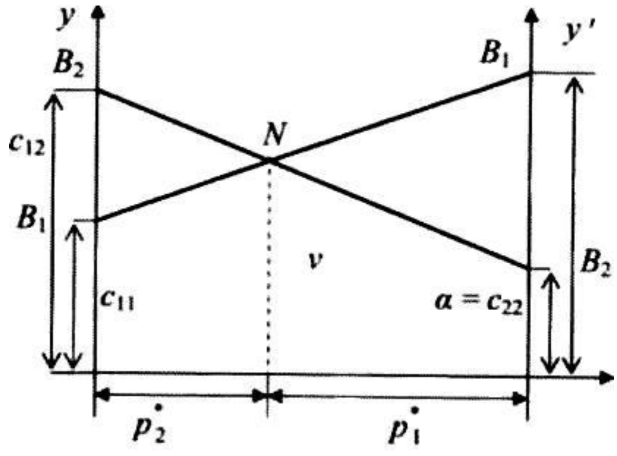


Рис. 1.4

Пример 1. Найти оптимальную смешанную стратегию руководителя предприятия и гарантированный средний выигрыш (V) при выборе из двух новых проектов оснащения предприятия новым оборудованием. Известны выигрыши каждого проекта по сравнению с имеющимся состоянием, которые представлены в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдем минимальные элементы по строкам: $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha = \max \alpha_i = 5$.

Найдем максимальные элементы по столбцам: $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = 6$, $\beta = = \min \beta_j = 6$.

$\alpha \neq \beta$. Решение надо искать в смешанных стратегиях. (p_1,p_2) и V определим графически (рис. 1.5). V=5,7; p_1=0,33; p_2=0,67.

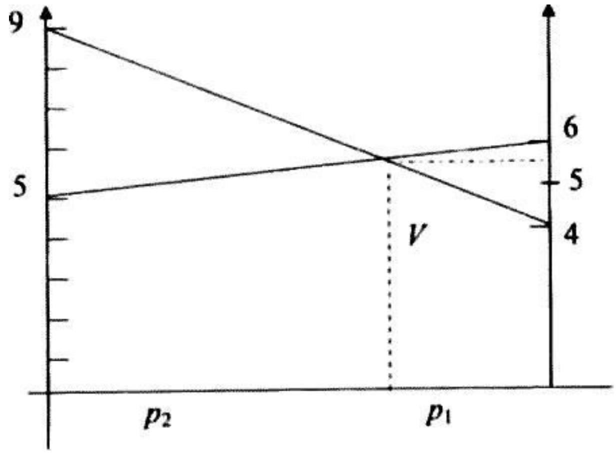


Рис. 1.5

Аналогично находим значение q_1 и q_2: V=5,7; q_1 = 0,17; q_2 = 0,83.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.5.1—1.5.32 дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их со значениями, полученными геометрически.

1.5.1	1.5.2	1.5.3	1.5.4
$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
1.5.5	1.5.6	1.5.7	1.5.8
$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
1.5.9	1.5.10	1.5.11	1.5.12
$C = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
1.5.13	1.5.14	1.5.15	1.5.16
$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
1.5.17	1.5.18	1.5.19	1.5.20

$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

1.5.21 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.22 $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

1.5.23 $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

1.5.24 $C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

1.5.25 $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.5.26 $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

1.5.27 $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

1.5.28 $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.29 $C = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

1.5.30 $C = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

1.5.31 $C = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.32 $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

1.6. Игра 2 x N

Рассмотрим игру с платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3		B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	…	C_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2n}

Игрок А обладает двумя чистыми стратегиями A_1 и A_2 а игрок В — n чистыми стратегиями B_1, B_2, B_3, … ,B_n. Показатель эффективности стратегии $P = (p_1,p_2)$.

$$\alpha(P) = \min_{1\le j\le n}\left(p_1 c_{1j} + p_2 c_{2j}\right) \qquad (1.12)$$

Так как $p_1 + p_2 = 1$, то, выразив p_2 через p_1, и подставив его в предыдущее уравнение, получим:

$$\alpha(P) = \min_{1\le j\le n}\left(p_1 c_{1j} + (1-p_1)c_{2j}\right) = \min_{1\le j\le n}\left(\left(c_{1j} - c_{2j}\right)p_1 + c_{2j}\right) \qquad (1.13)$$

Таким образом, $\alpha(P)$ представляет собой нижнюю огибающую n линейных функций, график каждой из которых есть прямая, соответствующая возрастающей или убывающей функции, или горизонтальная прямая, в зависимости от того, положителен, отрицателен или равен нулю угловой коэффициент $k_j = c_{2j} - c_{1j}$ этой линейной функции. Стратегия $P^\circ=(1 - p^\circ, p^\circ)$, удовлетворяющая равенству

$$\max_{P\in S_A}\alpha(P^0) = \alpha(P) = \min_{1\le j\le n}\left[\left(c_{1j} - c_{2j}\right)p_1 + c_{2j}\right],$$

где S_A — множество всех смешанных стратегий игрока А, является (по основной теореме матричных игр фон Неймана) оптимальной, т. е. абсцисса $p^\circ \in [0, 1]$ максимальной (наивысшей) точки нижней огибающей $\alpha(P)$. Определяет оптимальную стратегию $P^\circ = (1 - p^\circ, p^\circ)$, придерживаясь которой игрок А выбирает свои чистые стратегии случайным образом, причем стратегию A_1, с вероятностью $1 - p°$, а стратегию A_2 — с вероятностью $p°$. Цена игры при этом будет $V = \alpha(P°)$, т. е. цена игры V равна ординате максимальной точки нижней огибающей.

Приведем здесь алгоритм геометрического (графического) нахождения оптимальных стратегий игрока А и цены игры V.

Алгоритм А

1. Берем горизонтальный отрезок [0, 1].

2. Через концы отрезка [0, 1] проводим к нему два перпендикуляра — левый и правый.

3. На левом перпендикуляре от точки 0 (его пересечения с отрезком [0, 1]) откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первой строки матрицы А (рис. 1.6).

4. На правом перпендикуляре от точки 1 (его пересечения с отрезком [0, 1]) аналогично откладываем все элементы второй строки матрицы А. При этом масштабы на левом и правом перпендикулярах должны быть одинаковы, не обязательно совпадающие с масштабом горизонтального отрезка |0, 1]) (см. рис. 1.6).

5. Каждую пару точек, соответствующих элементам c_{1j} и c_{2j} , $j = 1,...,n$, стоящим в j-м столбце матрицы А, соединяем отрезком c_{1j} c_{2j} . Таким образом, будет построено n отрезков, представляющих собой графики n линейных функций:

$$(c_{1j} - c_{2j})p + c_{2j}, \quad p \in [0,1], \; j = 1,2, \dots, n \tag{1.14}$$

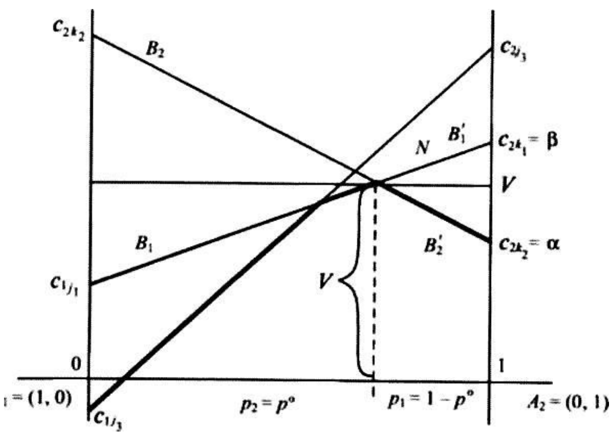


Рис. 1.6

6. Если все отрезки c_{1j} c_{2j}, $j = 1,...,n$ — неубывающие (имеют неотрицательный угол наклона), то стратегия A_2 доминирует стратегию A_1.

Если все отрезки c_{1j} c_{2j}, $j = 1,...,n$ — возрастающие (имеют положительный угол наклона), то стратегия A_2, строго доминирует стратегию A_1.

Если все отрезки c_{1j} c_{2j}, $j = 1,...,n$ — невозрастающие (имеют неположительный угол наклона), то стратегия A_1, доминирует стратегию A_2.

Если все отрезки c_{1j} c_{2j}, $j = 1,...,n$ — убывающие (имеют отрицательный угол наклона), то стратегия A_1 строго доминирует стратегию A_2.

7. Если отрезок c_{1j1} c_{2j1} лежит не ниже отрезка c_{1j2} c_{2j2}, $j_1 \neq j_2$, $j1,j2 \in \{1,2,\ldots,n\}$, то стратегия B_{j2} доминирует стратегию B_{j1}

Если отрезок c_{1j1} c_{2j1} лежит выше отрезка c_{1j2} c_{2j2}, $j_1 \neq j_2$, $j1,j2 \in \{1,2,\ldots,n\}$, то стратегия B_{j2} строго доминирует стратегию B_{j1}.

8. Находим (выделяем) нижнюю огибающую семейства отрезков, которая в общем случае будет представлять собой выпуклую вверх ломаную, а в частности, может быть и отрезком.

9. На нижней огибающей находим максимальную (наивысшую) точку (точки).

10. Абсцисса p° этой точки (удовлетворяющая равенству (1.13)) является вероятностью выбора игроком А чистой стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии $P^\circ=(1 - p^\circ, p^\circ)$.

11. Ордината наивысшей точки нижней огибающей является ценой игры V.

12. Верхний из двух концов нижней огибающей (лежащих на перпендикулярах) — это нижняя цена игры в чистых стратегияхα.

13. Нижний из верхних концов отрезков c_{1j} c_{2j}, $j = 1,...,n$ есть верхняя цена игры в чистых стратегиях β.

14. Элемент матрицы А, которому на рис. 1.6 соответствует точка пересечения отрезков $B_1B'_1$ и $B_2B'_2$, будет седловой точкой игры.

В этом случае чистая стратегия игрока В, номер которой совпадает со вторым индексом седловой точки, является оптимальной.

На рис. 1.6 из n отрезков c_{1j} c_{2j}, $j = 1,...,n$ указаны три, которые принимают участие в конструировании нижней огибающей, выделенной жирной линией; N — максимальная точка этой огибающей; p° — абсцисса точки N, следовательно, $P^\circ = (1 - p^\circ, p^\circ)$ — оптимальная смешанная стратегия игрока А; цена игры V равна ординате точки N; нижняя цена игры в чистых стратегиях $\alpha = c_{2j2}$; верхняя цена игры в чистых стратегиях $\beta = c_{2j1}$; на рисунке видно, что $\alpha < V < \beta$.

Пример. Найти графически оптимальную стратегию игрока А, цену игры V, нижнюю α и верхнюю β цены игры в чистых стратегиях, если матрица игры имеет следующий вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	-1	1	-2	6	3
A_2	4	3	2	7	1	4

Решение. Используя алгоритм А, найдем графически (рис. 1.7) значение $p^\circ = 5/6$, а потому $P^\circ = (1/6, 5/6)$ является оптимальной смешанной стратегией, придерживаясь которой игрок А случайным образом выбирает свои чистые стратегии A_1 и A_2 соответственно с вероятностями $p^\circ_1 = 1/6$ и $p^\circ_2 = 5/6$. Нижней ценой игры в чистых стратегиях является $\alpha = c_{25} = 1$, а верхней ценой игры в чистых стратегиях является $\beta = c_{23} = 2$. Ценой игры является ордината наивысшей точки *N* нижней огибающей (выделена жирной линией на рис. 1.7) V= 1,8.

Так как нижняя огибающая не имеет максимальных точек, лежащих на перпендикулярах к отрезку [0, 1] в его концах, то у данной игры нет седловых точек.

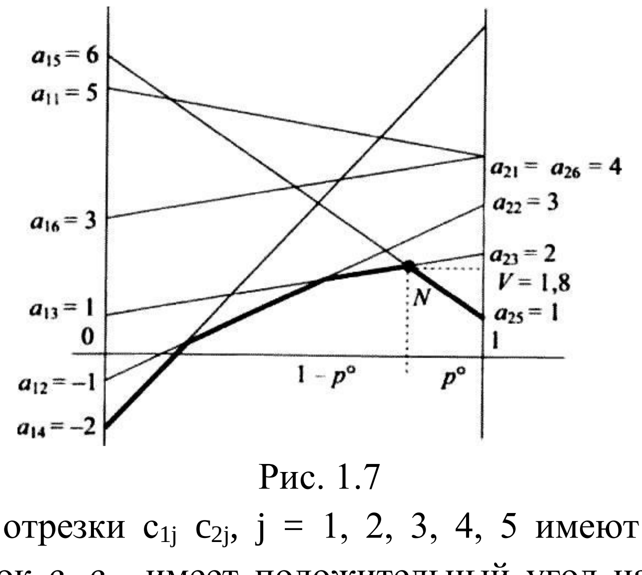


Рис. 1.7

Поскольку отрезки $c_{1j}\ c_{2j}$, j = 1, 2, 3, 4, 5 имеют разные наклоны (например, отрезок $c_{14}c_{24}$ имеет положительный угол наклона, а отрезок $c_{15}c_{25}$ — отрицательный), то ни одна из стратегий игрока А не доминирует другую.

Так как отрезок $c_{11}c_{21}$ лежит не ниже отрезка $c_{16}c_{26}$ (правые концы лих отрезков совпадают) и они оба лежат выше отрезков $c_{12}c_{22}$ и $c_{13}c_{23}$, то стратегия B_6 не строго доминирует стратегию B_1, и они обе строго доминируются каждой из стратегий B_2 и B_3, поэтому стратегии B_1 и B_6 игрока В являются заведомо невыигрышными и их нужно отбросить. Это обстоятельство на рис. 1.6 проявляется в том, что отрезки $c_{11}c_{21}$ и $c_{16}c_{26}$, определяемые соответственно стратегиями B_1, и B_6, в конструировании нижней огибающей всех отрезков не участвуют.

Вывод формул, выражающих $p°_1 = p°$, $p_1 = 1 - p°$ и цену игры V через элементы матрицы игры, подробно рассмотрен в [14]. Здесь же приведем их окончательное выражение:

$$p_1^0 = \frac{c_{2j2}-c_{2j1}}{(c_{1j1}+c_{2j2})-(c_{1j2}+c_{2j1})} \qquad (1.15)$$

$$p_2^0 = \frac{c_{1j1}-c_{1j2}}{(c_{1j1}+c_{2j2})-(c_{1j2}+c_{2j1})} \qquad (1.16)$$

$$V = \frac{c_{1j1}c_{2j2}-c_{1j2}c_{2j1}}{(c_{1j1}+c_{2j2})-(c_{1j2}+c_{2j1})} \qquad (1.17)$$

Пример 2. В примере 1 оптимальная стратегия P° = (1/6, 5/6) и цена игры V= 1,8 были найдены графическим методом. Найдем их, используя формулы (1.15), (1.16) и (1.17).

Через максимальную точку N нижней огибающей проходят два отрезка $c_{13}c_{23}$ и $c_{15}c_{25}$. Тогда по формуле (1.16) при $j_1 = 3$ и $j_2 = 5$ получаем:

$$p_2^0 = \frac{c_{13}-c_{15}}{(c_{13}+c_{25})-(c_{15}+c_{23})} = \frac{1-6}{(1+1)-(6+2)} = \frac{5}{6}.$$

Тогда $p_1 = 1 - p°_2 = 1/6$.

По формуле (1.17) цена игры:

$$V = \frac{c_{13}c_{25}-c_{15}c_{23}}{(c_{13}+c_{25})-(c_{15}+c_{23})} = \frac{1\cdot 1-6\cdot 2}{(1+1)-(6+2)} = \frac{11}{6} \approx 1{,}8.$$

В [12, 16] подробно рассмотрены все случаи, возникающие при графическом решении игры 2 х N.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.6.1 — 1.6.30 дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их с результатами, полученными геометрическим способом.

1.6.1 1.6.2

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}1 \end{pmatrix}$$

1.6.3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.5

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.8

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

1.6.9

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.6.11

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.12

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6.13

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.6.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.15

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6.16

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.17

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.6.18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.6.19

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.20

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.21

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.23

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.24

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6.25

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.6.26

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.27

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.28

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.29

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

1.6.30

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.7. Игра M x 2

Рассмотрим игру Mx2, в которой игрок A обладает m чистыми стратегиями $A_1,A_2,\ldots,A_m$, а игрок B — двумя чистыми стратегиями B_1 и B_2. Матрица игры имеет вид:

	B_1	B_2
A_1	c_{11}	c_{12}
A_2	c_{21}	C_{22}
…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}

Для данного варианта игры запишем следующий алгоритм геометрического нахождения оптимальных стратегий игрока B и цену игры V.

Алгоритм B

1. Берем горизонтальный отрезок [0, 1].

2. Через концы отрезка [0, 1] проводим к нему два перпендикуляра: левый и правый.

3. На левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с отрезком [0, 1] откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первого столбца матрицы A.

4. На правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком |0, 1| откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы второго столбца матрицы A.

5. Каждую пару точек, соответствующих элементам c_{i1} и c_{i2}, $i=1,...m$, стоящим в i-й строке матрицы A, соединяем отрезком $c_{i1}c_{i2}$, в результате чего построим m отрезков, представляющих собой графики m линейных функций (рис. 1.8):

$$\left((c_{i1}-c_{i2})q+c_{i1}\right),\qquad q\in[0,1],\qquad i=1,\ldots,m$$

6. Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...m$ имеют неотрицательный, положительный или нулевой угол наклона, то стратегия B_1 доминирует стратегию B_2.

Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...m$ имеют положительный угол наклона, то стратегия B_1 строго доминирует стратегию B_2.

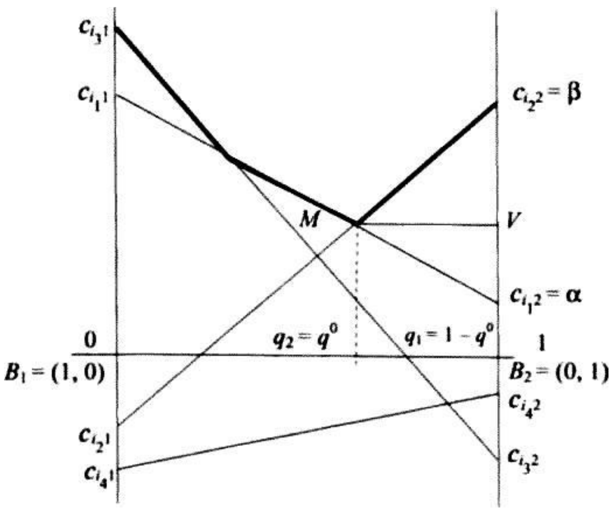


Рис. 1.8

Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...m$ имеют неположительный угол наклона, т. е. отрицательный или нулевой, то стратегия B_2 доминирует стратегию B_1

Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...m$ имеют отрицательный угол наклона, то стратегия B_2 строго доминирует стратегию B_1.

7. Если отрезок $c_{i11}c_{i12}$ лежит не ниже отрезка $c_{i21}c_{i22}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1,2,...,m\}$, то стратегия A_{i1} доминирует стратегию A_{i2}.

Если отрезок $c_{i11}c_{i12}$ лежит выше отрезка $c_{i21}c_{i22}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1,2,...,m\}$, то стратегия A_{i1} строго доминирует стратегию A_{i2}.

8. Находим (выделяем) верхнюю огибающую из полученного семейства отрезков, представляющую собой в общем случае выпуклую вниз ломаную, которая, в частности, может быть и отрезком.

9. На верхней огибающей находим минимальную (наинизшую) точку (точки).

10. Абсцисса q° минимальной точки является вероятностью случайного выбора игроком B чистой стратегии B_2 в оптимальной смешанной стратегии Q° = (1 - q°, q°).

11. Ордината минимальной точки верхней огибающей является ценой игры V (рис. 1.7).

12. Верхний из нижних концов отрезков $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...m$, т является нижней ценой игры в чистых стратегиях α.

13. Нижний из концов верхней огибающей (лежащих на перпендикулярах) является верхней иеной игры в чистых стратегиях β.

Элемент матрицы A, изображающая точка которого является нижним концом отрезка, на котором она лежит, и верхней на перпендикуляре, на котором она лежит, является седловой точкой игры. В этом случае чистая стратегия игрока А, номер которой совпадает с первым индексом седловой точки, является оптимальной.

На рис. 1.7 из m отрезков, $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...,m$, указаны четыре с $c_{i11}c_{i12}$, $c_{i21}c_{i22}$; $c_{i31}c_{i32}$, $c_{i41}c_{i42}$ первые три из которых принимают участие в конструировании верхней огибающей, выделенной жирной линией. Точка М — минимальная точка этой верхней огибающей, имеющая своей абсциссой q°. Поэтому Q° = (1 - q°, q°) — оптимальная смешанная стратегия игрока В. Ордината точки М есть цена игры V. Нижняя цена игры в чистых стратегиях $\alpha = c_{i12}$; верхняя цена игры в чистых стратегиях $\beta = c_{i22}$. Так как среди отрезков $c_{i1}c_{i2}$, $i=1,...,m$ имеются отрезки с положительным и отрицательным углом наклона (например, отрезок $c_{i21}c_{i22}$ имеет положительный угол наклона, а отрезок $c_{i31}c_{i32}$ — отрицательный), то стратегия B_2 не доминирует и не доминируется стратегией B_1,. Так как отрезки $c_{i11}c_{i12}$ и $c_{i21}c_{i22}$ лежат выше отрезка $c_{i41}c_{i42}$, то каждая из стратегий A_{i1} и A_{i2} строго доминирует стратегию A_{i4}. Оптимальную стратегию Q° = (1 - q°, q°) игрока В и цену игры V можно подсчитать и по следующим формулам:

$$q_1^0 = \frac{c_{i12}-c_{i22}}{(c_{i12}+c_{i21})-(c_{i11}+c_{i22})} \tag{1.18}$$

$$q_2^0 = \frac{c_{i21}-c_{i11}}{(c_{i12}+c_{i21})-(c_{i11}+c_{i22})} \tag{1.19}$$

$$V = \frac{c_{i12}c_{i21}-c_{i11}c_{i22}}{(c_{i12}+c_{i21})-(c_{i11}+c_{i22})} \tag{1.20}$$

Пример. Найти решение игры 5 x 2 с матрицей

	B_1	B_2
A_1	3	1
A_2	-2	4
A_3	5	-5
A_4	1	2
A_5	-3	-1

Согласно алгоритму В строим геометрическую интерпретацию данной игры (рис. 1.9).

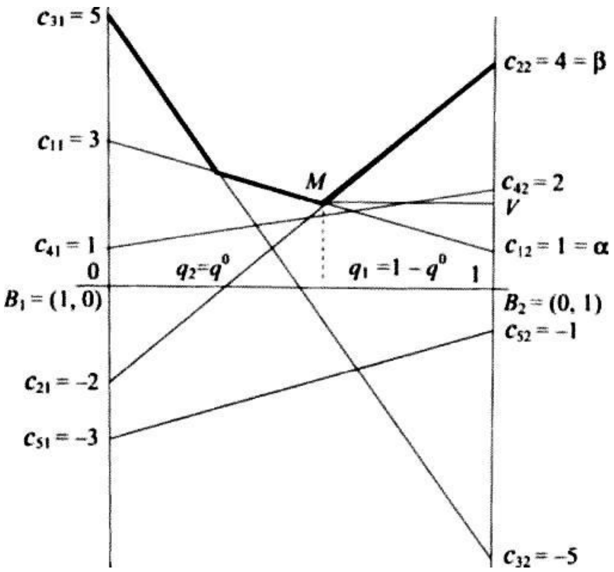


Рис. 1.9

Минимальная точка верхней огибающей дает нам цену игры, которая равна 1,8.

Значения $q_1 \approx 0{,}4$, $q_2 \approx 0{,}6$ и $V \approx 1{,}8$, найденные графически, подтверждаются результатом вычисления их по формулам (1.18), (1.19) и (1.20) (q_1=0,375, q_2=0,625 и V= 1,75).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.7.1 —1.7.30 дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их результаты с геометрическими.

1.7.1 1.7.2 1.7.3 1.7.4 1.7.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 9 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 9 \\ 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1.7.6 1.7.7 1.7.8 1.7.9 1.7.10

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 2 & -8 \\ -1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

1.7.11 1.7.12 1.7.13 1.7.14 1.7.15

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1.7.16 1.7.17 1.7.18 1.7.19

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

1.7.20

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1.7.21 1.7.22 1.7.23 1.7.24 1.7.25

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 3 \\ 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7.7.26 7.7.27 7.7.28 7.7.29

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 5 & 4 \\ -4 & 8 \\ 7 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 8 \\ 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1.7.30

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Список рекомендуемой литературы

1. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. М.: Физматлит, 1961.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. М: Мир, 1972.
3. Деркач Д. В. Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ: учеб.-метод, пособие. Армавир, 2010.
4. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С и др. Математические методы исследования операций. Киев: Выш. шк., 1979.
5. Кремер Н.Ш., Путко Б. А. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 2003.
6. Крушевский А. В. Теория игр. Киев: Вища школа, 1977.
7. Лабскер Л. Г., Ященко Н.А. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач): учеб. пособие. М.: КноРус, 2012.
8. Лавринов СМ. Excel: сборник примеров и задач. М.: Финансы и статистика. 2000.
9. Невежин В.П., Кружилов СИ. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование». М.: Городец, 2005.
10. Невежин В.П., Кружилов СИ., Невежин Ю.В. Исследование операций и принятие решений в экономике. Сборник задач и упражнений: учеб. пособие для вузов/под общ. ред. В. П. Невежина. М.: ФОРУМ, 2012.
11. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
12. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
13. Серегин Р.А. Теория игр и динамическое программирование / Методическая разработка. М.: ФА, 1996.
14. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. М.: МЦНМО, 2007
15. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений / пер с англ. под ред. член-корр. РАН И. И. Елисеевой. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
16. Экономико-математическое моделирование: учебник для студентов вузов / под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. М.: Экзамен, 2006.

Оглавление