CHƯƠNG 2: TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên $[a,b]\times[c,d]$.

$f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$ với mọi $y\in[c,d]$.

Tích phân $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ gọi là tích phân phụ thuộc tham số y.

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Định lí: Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$

thì $I(y)$ là hàm số của y liên tục trên $[c,d]$.

Định lí: Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$

thì $$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

nghĩa là: $$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Định lí: Nếu

* $f(x,y)$ liên tục theo biến x trên $[a,b]$ với mọi $y \in [c,d]$

* $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$

thì
$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

hay
$$\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)' = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Ví dụ: Tính $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \qquad (0<a<b)$

Giải:

Có $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,dy$

Hàm số $f(x,y)=x^y$ liên tục trên $[0,1]\times[a,b]$

$$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^y\,dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y\,dx\right)dy$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy$$

$$= \ln|y+1| \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Ví dụ:

Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $\quad (y \neq 0)$

Giải:

Xét hàm số $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$f(x,y)$ liên tục theo x trên $[0,1]$ với mọi $y \neq 0.$

$f'_y=\dfrac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$

$\forall[c,d]$ mà $0\notin[c,d].$

Có $I(y)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1=\frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y}.$

$$I'(y)=-\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}$$

Mặt khác:

$$I'(y)=\int_0^1 f'_y\,dx=\int_0^1 \frac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=-2y\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Vậy $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2\left(1+y^2\right)}.$

Định lí:

Xét tích phân phụ thuộc tham số $I(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$

trong đó $f(x,y)$ xác định trên $[a,b]\times[c,d]$

$$a \le a(y) \le b$$

$$a \le b(y) \le b \qquad\qquad \forall y \in [c,d]$$

Khi đó: Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ và các hàm $a(y),b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ thì $I(y)$ liên tục trên $[c,d]$.

2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

1. Khái niệm tích phân hai lớp

a) Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Cho $f(x,y)$ là hàm số liên tục, không âm, xác định

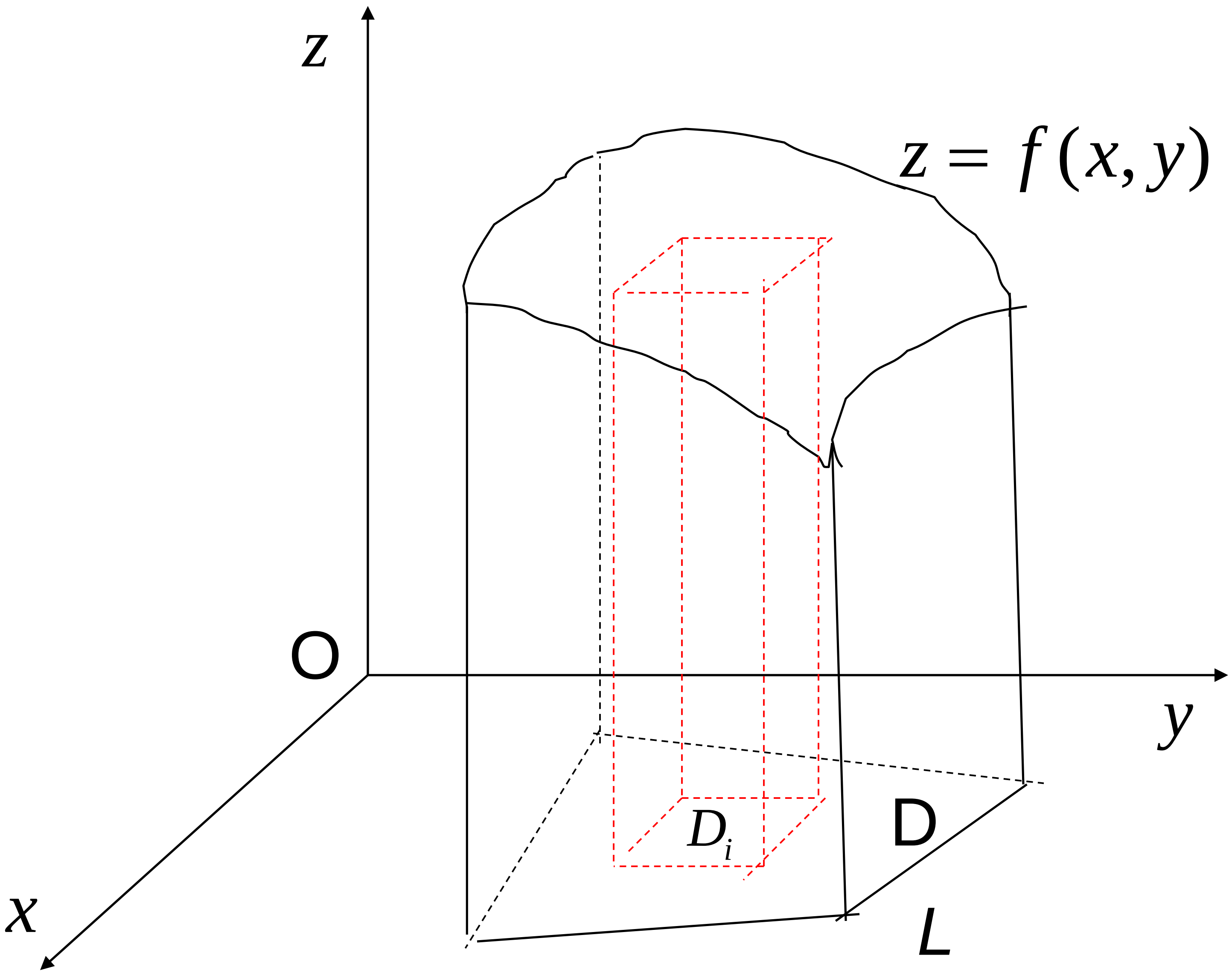
trên miền D đóng, bị chặn, có biên là đường kín *L*.

Tính thể tích vật thể hình trụ có đáy dưới là miền D,

mặt trên có PT $z = f(x,y)$, các đường sinh tựa trên *L*

và song song với oz.

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Chia D thành n miền $D_1, D_2, ..., D_n$ tùy ý.

Gọi $s(D_i)$ là diện tích miền D_i

V_i là vật thể hình trụ giới hạn bởi D_i và mặt $z = f(x, y)$

Đặt $d_i = \max\left\{d(M, N) /\ M, N \in D_i\right\}$

d_i được gọi là đường kính của miền D_i

Trên mỗi miền D_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Khi các miền D_i rất nhỏ, có thể coi mỗi hình trụ V_i

có thể tích là: $f(x_i, y_i).s(D_i)$

Như vậy, thể tích vật thể cần tìm là:

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).s(D_i)$$

b) Định nghĩa tích phân hai lớp

Cho $f(x, y)$ là hàm số xác định trên miền đóng, bị chặn D.

Chia D thành n miền $D_1, D_2, ..., D_n$ tùy ý.

Gọi $s(D_i)$ là diện tích miền D_i

Đặt $d_i = \max\left\{d(M, N) / \ M, N \in D_i\right\}$

Trên mỗi miền D_i chọn một điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).s(D_i)$ tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia D, phép chọn các điểm

$(x_i, y_i) \in D_i$ thì giới hạn này được gọi là tích phân

hai lớp của hàm $f(x, y)$ trên miền $D.$

Kí hiệu: $\iint\limits_D f(x, y)dS$ hay $\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$

Khi đó ta nói f khả tích trên $D.$

c) Nhận xét:

Nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D

thì f khả tích trên D.

d) Tính chất của tích phân hai lớp

Giả sử các tích phân sau tồn tại, ta có:

$1^0)\ \iint\limits_D dxdy = s(D)$ (Diện tích miền D)

$2^0)\ \iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy =$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$3^0)$ $$\iint_D \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$4^0)$ Nếu D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$5^0)$ Nếu $f(x,y) \le g(x,y)$ với $\forall (x,y) \in D$

thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

$6^0)$ Nếu $m \le f(x,y) \le M$ với $\forall (x,y) \in D$

thì $mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS$

2. Cách tính tích phân hai lớp

* Tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (f liên tục trên D)

a) Nếu D là miền hình chữ nhật

$$D=\{(x,y)/\,a\le x\le b,\ \ c\le y\le d\}$$

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx \overset{k/h}{=} \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

$$=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy \overset{k/h}{=} \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Chứng minh:

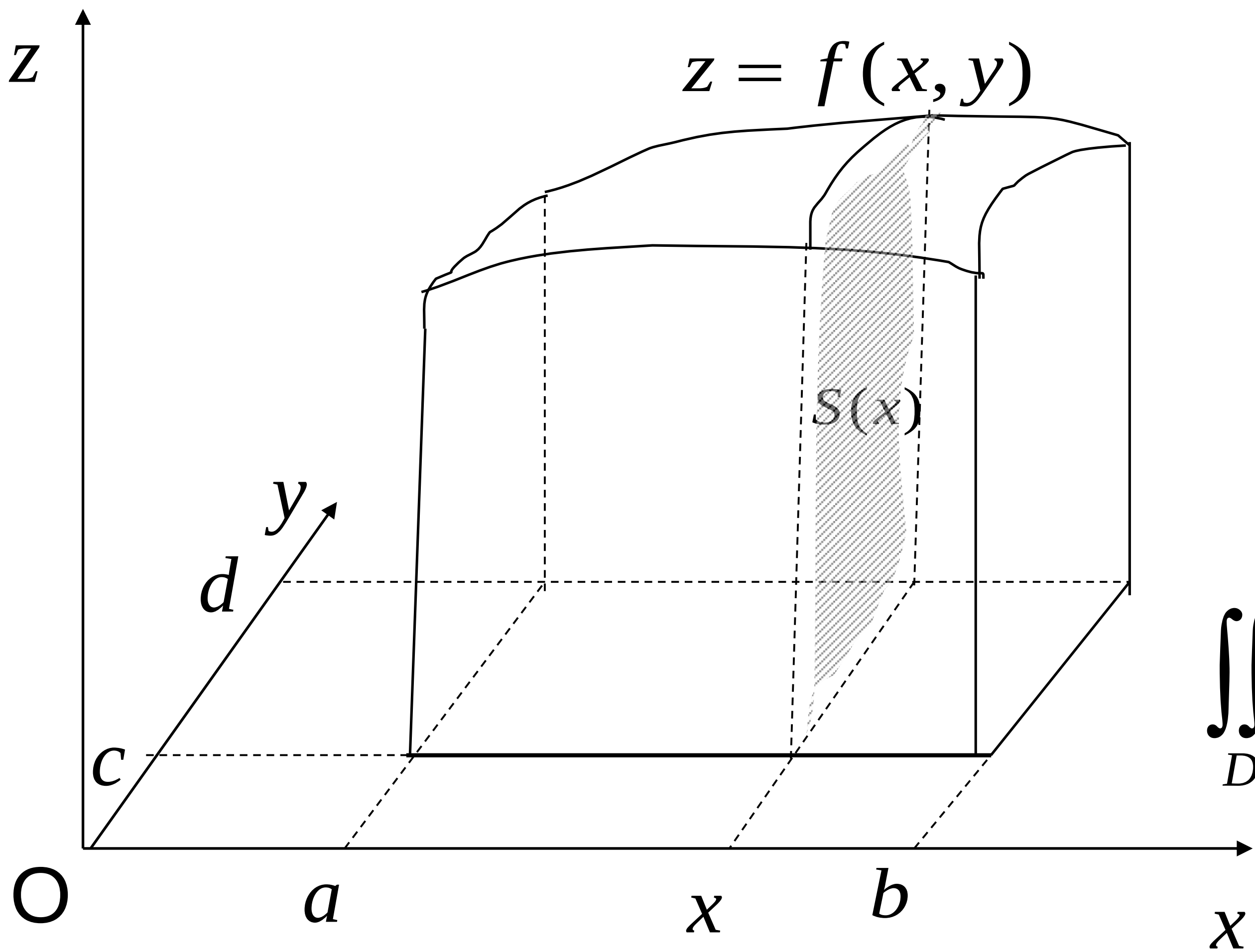
Giả sử $f(x,y)$ không âm trên D.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V$$

V là thể tích hình trụ đứng có đáy là miền D,

mặt trên có PT $z = f(x,y)$.

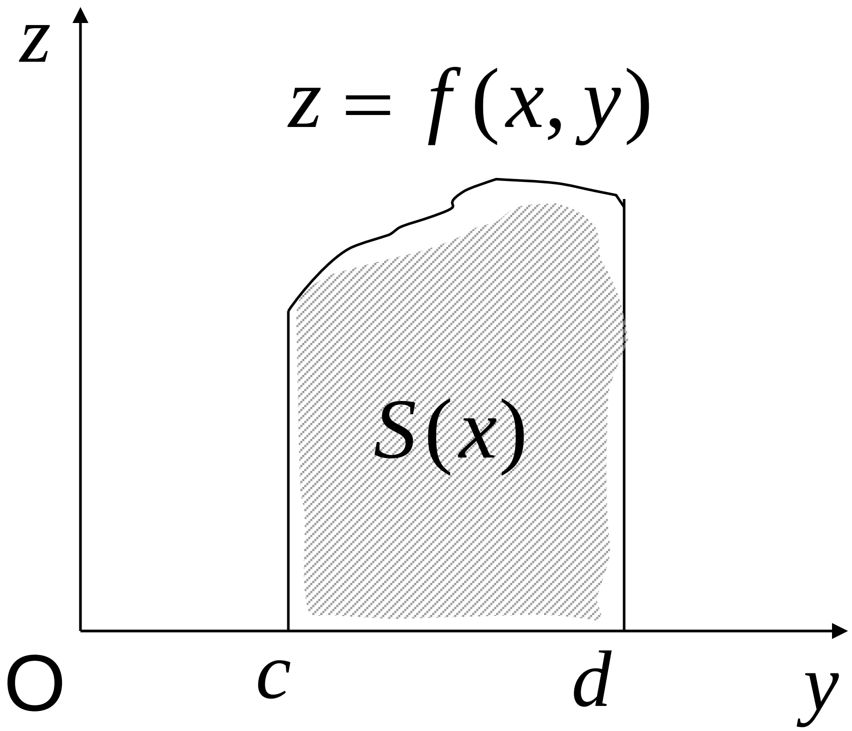
§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx$$

$S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



Với mỗi x cố định, ta có:

$$S(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Vậy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Công thức vẫn đúng khi f âm trên *D*.

*** Nhận xét:**

Khi $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx.\int_c^d f_2(y)dy$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$

$$D = \{(x,y) / 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$$

Giải:

$$I = \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y} \Big|_0^1 \right) dx = \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \quad \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^2 = \ln \frac{4}{3}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$

D xác định bởi: $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$

Giải:

$$I = \left(\int_1^2 x\,dx\right).\left(\int_0^1 y\,dy\right) = \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2\right).\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right) =$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

b) Nếu miền D xác định bởi:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

trong đó $y_1(x), y_2(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\overset{k/h}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

**** Tương tự, nếu miền D xác định bởi:***

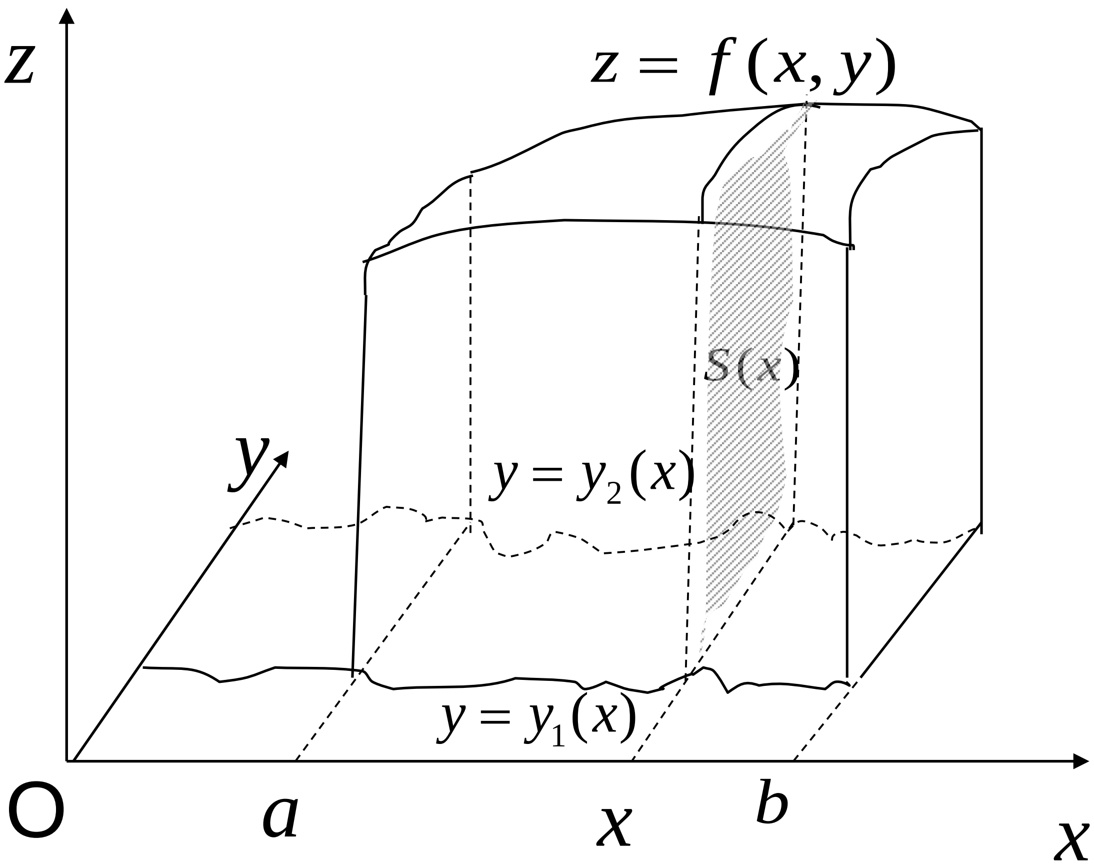
$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

trong đó $x_1(y),\ x_2(y)$ là các hàm số liên tục trên $[c, d]$

thì $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

$$\overset{k/h}{=} \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

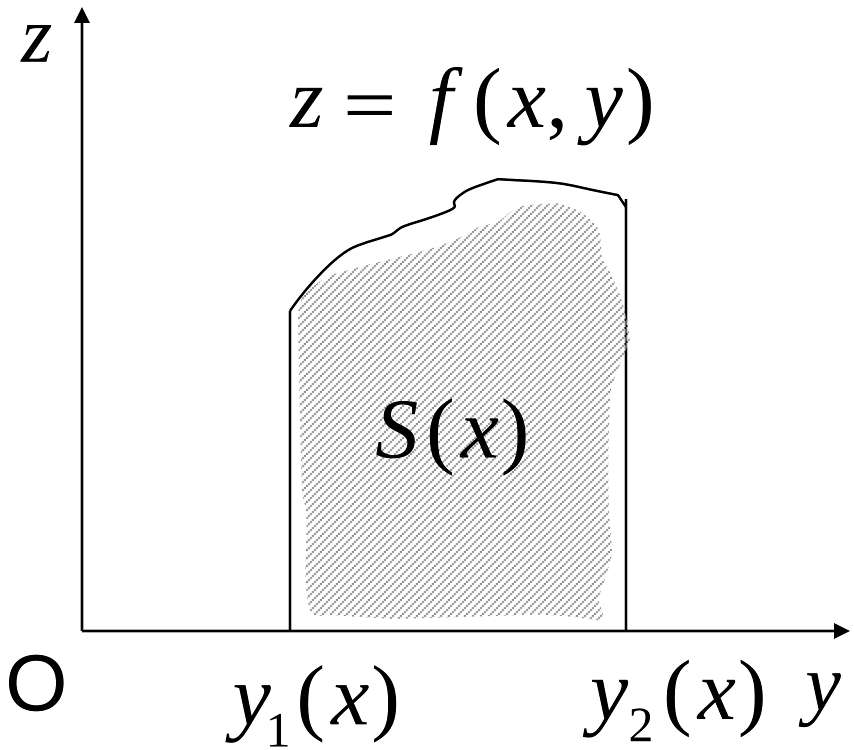
Chứng minh: (Tương tự khi D là miền hình chữ nhật)



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx$$

$S(x)$ là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



Với mỗi x cố định, ta có:

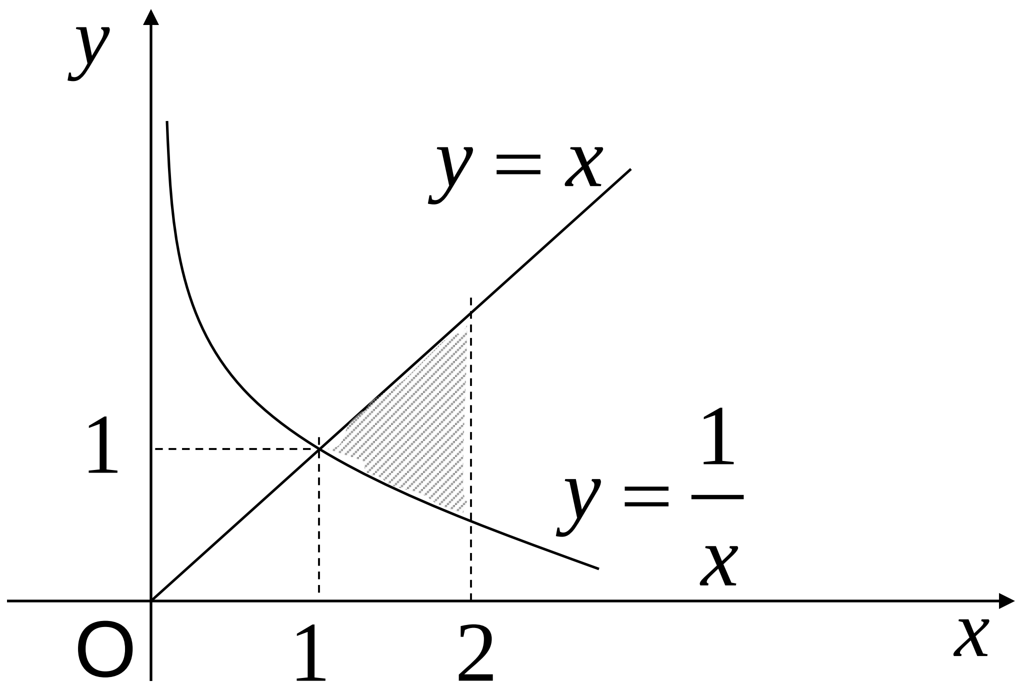
$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Vậy $$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Ví dụ: Tính tích phân sau: $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$

D giới hạn bởi các đường $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2.$

Giải:



§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Miền D xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x} \le y \le x \end{cases}$

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y} \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^3 - x \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

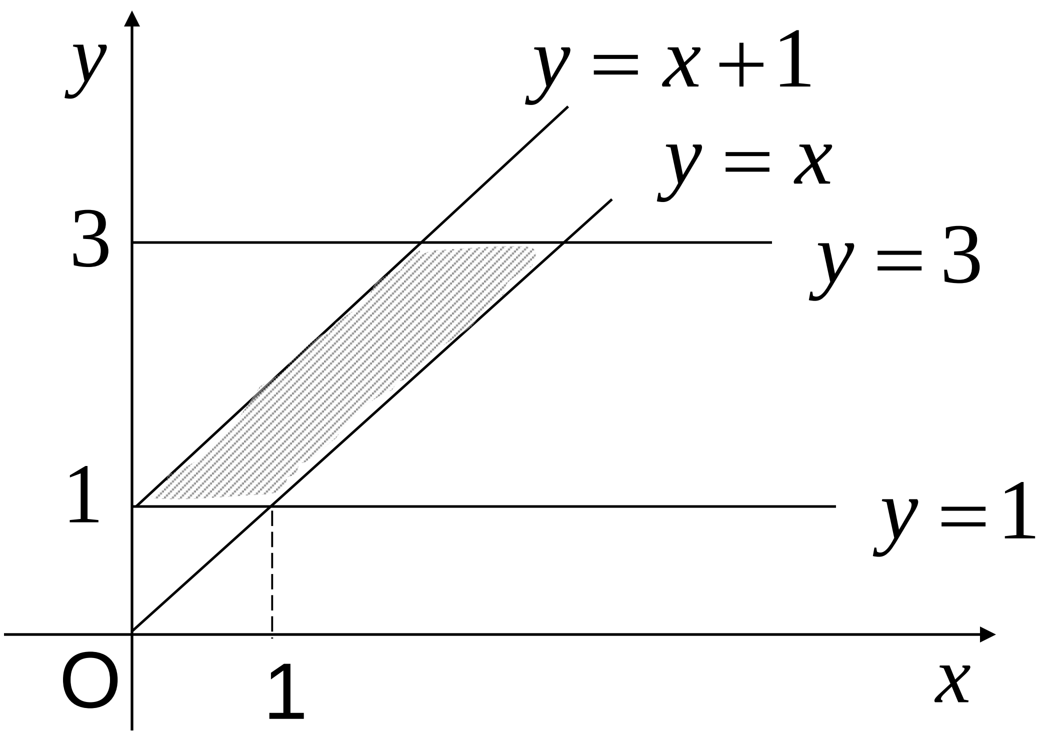
§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường

$$y = x,\ \ y = x + 1,\ y = 1,\ y = 3.$$

Giải:



Miền D xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ y-1 \le x \le y \end{cases}$

$$I = \int_1^3 dy \int_{y-1}^{y} xy\,dx = \int_1^3 \left(\int_{y-1}^{y} xydx \right) dy = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{y-1}^{y} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \left[y^3 - y(y-1)^2 \right] dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[2y^2 - y \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

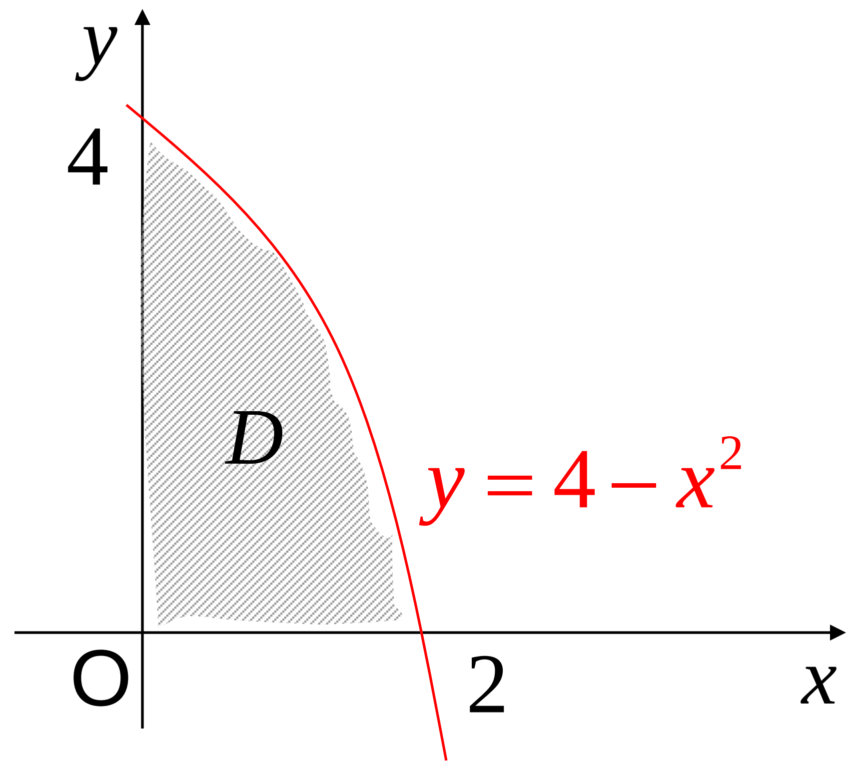
Ví dụ:

Tính tích phân sau: $I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy$

Giải:

$$I = \iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy$$

D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$



Hay D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \sqrt{4-y} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx \quad = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} \Bigg|_0^{\sqrt{4-y}} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{4-y}{2} \cdot \frac{e^{2y}}{4-y} dy \quad = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy = \frac{1}{4} e^{2y} \Bigg|_0^4 = \frac{1}{4}\left(e^8 - 1\right).$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

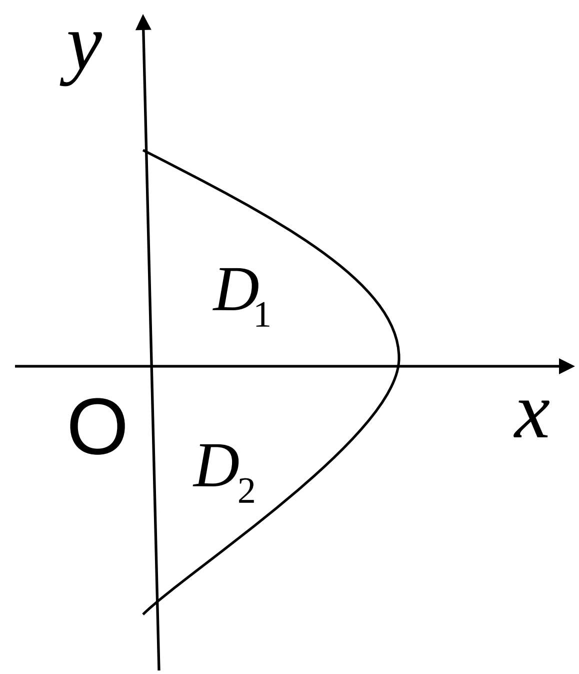
*** Nhận xét:** *Giả sử miền D có tính đối xứng qua trục Ox.*

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với y

(nghĩa là $f(x,y) = f(x,-y)$ với mọi $(x,y) \in D$)

thì $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

$= 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$



(D_1, D_2 lần lượt là nửa trên, nửa dưới của D)

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân lẻ đối với y

(nghĩa là $f(x,y) = -f(x,-y)$ với mọi $(x,y) \in D$)

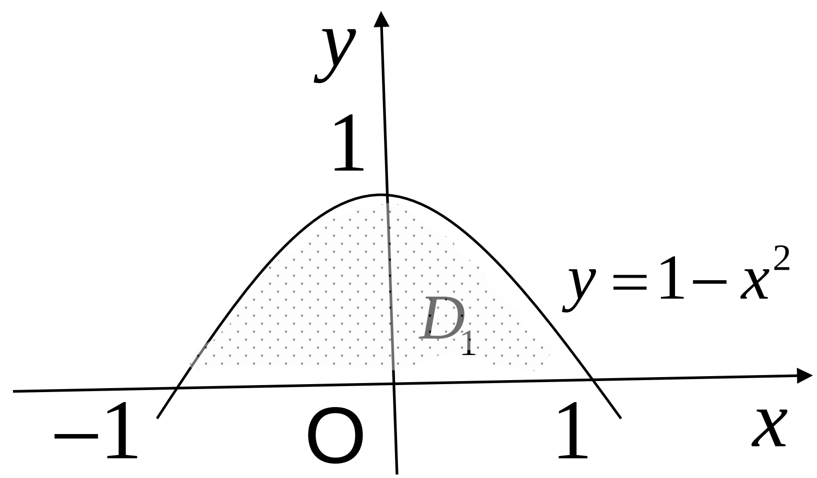
thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0.$

* Nhận xét trên được phát biểu tương tự trong trường hợp miền D có tính đối xứng qua trục Oy.

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{x}{\cos y + 2} - y \right) x^2 dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường: $y = 0,\ y = -x^2 + 1.$

Giải:



§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$I = \iint\limits_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dxdy - \iint\limits_D yx^2 dxdy$$

Do miền D có tính đối xứng qua trục Oy và biểu thức

$\dfrac{x^3}{\cos y + 2}$ lẻ đối với x nên $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^3}{\cos y + 2} dxdy = 0.$

Tương tự, biểu thức yx^2 chẵn đối với x nên

$$\iint\limits_D yx^2 dxdy = 2\iint\limits_{D_1} yx^2 dxdy.$$

D_1 xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

$$I = -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} yx^2 dy = -2\int_0^1 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} \right) dx$$

$$= -\int_0^1 x^2 (1 - x^2)^2 dx = -\int_0^1 \left(x^6 - 2x^4 + x^2 \right) dx$$

$$= -\left(\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{8}{105}.$$

3. Công thức đổi biến số trong tích phân hai lớp

a) Công thức đổi biến số

Xét $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (f liên tục trên D)

Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ sao cho:

* $x(u,v),\ y(u,v)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền $D' \subset mp(Ouv)$

* Tương ứng $(u,v) \mapsto (x(u,v),\ y(u,v))$ là một song ánh từ D' lên D.

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

* Định thức Jacobi

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\neq 0 \qquad \text{tại} \quad \forall (u,v)\in D'$$

Khi đó:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

<u>Chú thích:</u> Công thức trên vẫn đúng khi $J=0$ tại một số điểm $(u,v)\in D'$.

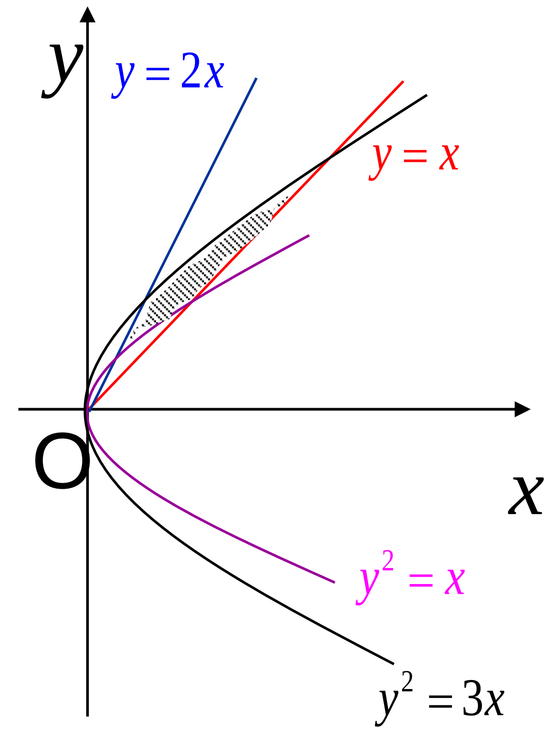
Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$

D giới hạn bởi các đường $y^2 = x,\ y^2 = 3x,\ y = x,\ y = 2x.$

Giải:

Đặt $\dfrac{y^2}{x} = u,\ \dfrac{y}{x} = v$

Có $x = \dfrac{u}{v^2},\ y = \dfrac{u}{v}$



Miền D tương ứng với miền D' *giới hạn bởi các đường* $u = 1, u = 3, v = 1, v = 2$

hay D' xác định bởi: $\begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2} & \dfrac{-2u}{v^3} \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4} > 0 \quad \text{tại } \forall (u,v) \in D'.$$

$$I = \int_1^3 du \int_1^2 \frac{u}{v^2} . \frac{u}{v} . \frac{u}{v^4}\, dv = \left(\int_1^3 u^3 du \right) . \left(\int_1^2 \frac{1}{v^7} dv \right) =$$

$$\left(\frac{u^4}{4} \Bigg|_1^3 \right) . \left(\frac{-1}{6v^6} \Bigg|_1^2 \right) = \frac{105}{32}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D x^3\, dxdy$

D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x},\ y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2}.$$

Giải:

Đặt $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x^2}$

Có $$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3v},$$

Có $\quad x^3 = \dfrac{u}{v}$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ \dfrac{1}{2} \le v \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 du \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{u}{v}.\frac{1}{3v}dv \quad = \frac{1}{3}\left(\int_1^2 u du\right).\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{v^2}dv\right) = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$

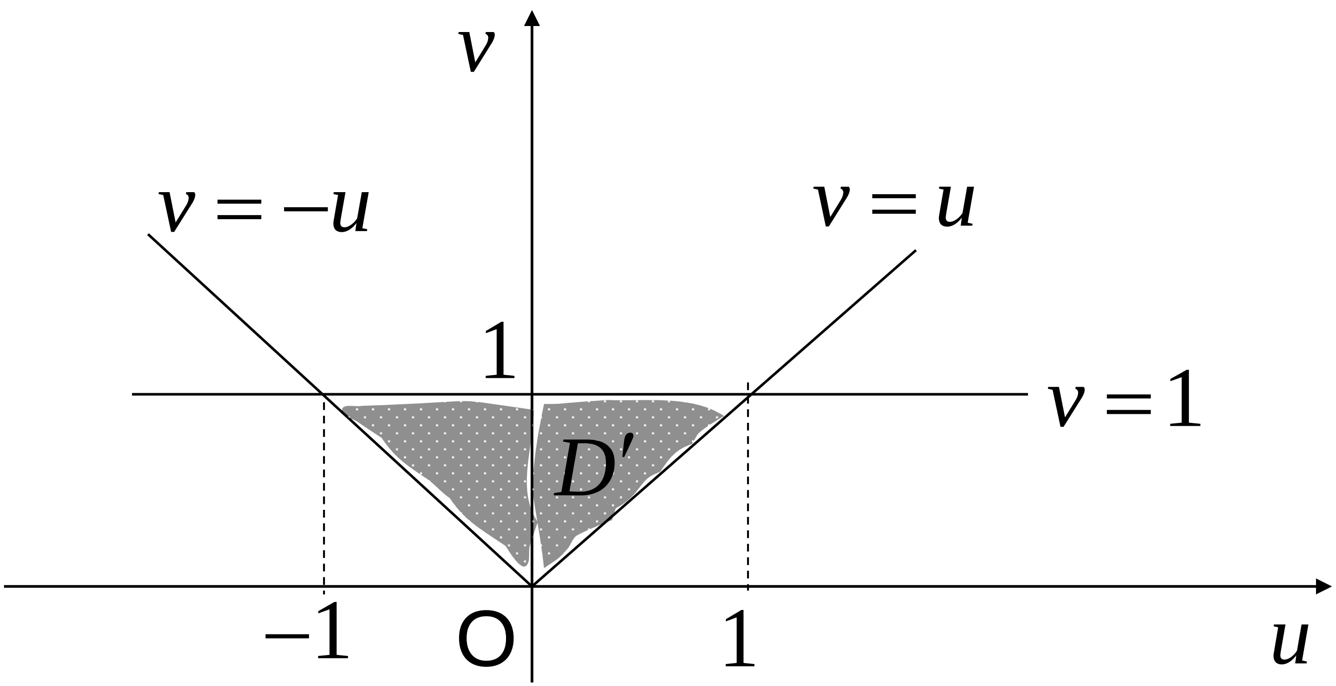
D là miền giới hạn bởi các đường $x=0, y=0, x+y=1.$

Giải:

Đặt $x-y=u,\ x+y=v.$

$$\Rightarrow x = \frac{u+v}{2},\ \ y = \frac{v-u}{2}$$

Miền D' giới hạn bởi các đường $u+v=0, v-u=0, v=1$



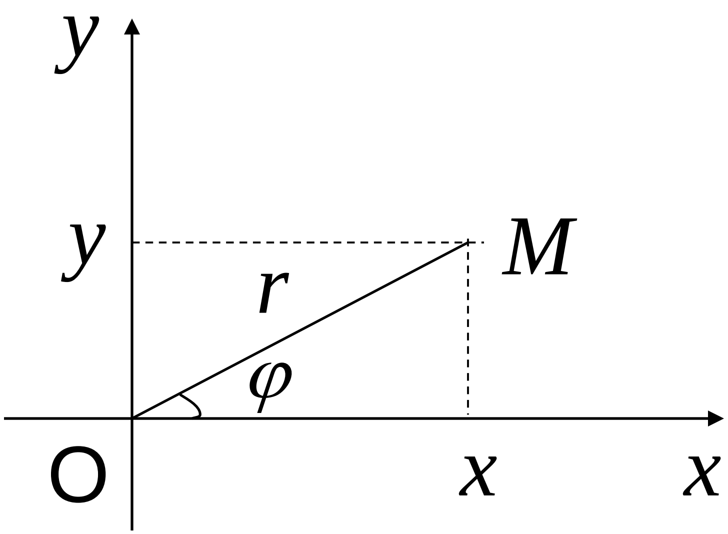
D' xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ -v \le u \le v \end{cases}$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

$$I=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}.\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^1\left(ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(ve-\frac{v}{e}\right)dv=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{v^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

b) Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ cực



* Tọa độ cực của điểm M là (r,φ) *trong đó:*

$$\varphi = (\mathrm{O}x, \overrightarrow{OM}),\ r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$$

Trong cả hệ tọa độ cực: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ r \ge 0.$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

* Giả sử M có tọa độ (x, y) trong hệ trục $\mathrm{O}xy$

Ta có: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

** Công thức tính tích phân trong tọa độ cực là:*

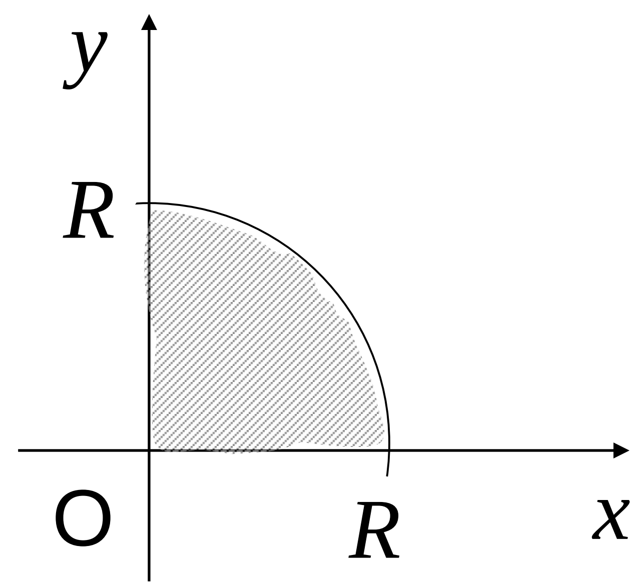
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Nhận xét:

Thường đổi biến sang tọa độ cực khi miền lấy tích phân là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D x\,dx\,dy$

D là một phần tư hình tròn tâm O, bán kính R, nằm trong góc phần tư thứ nhất.



Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r\cos\varphi . r dr = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \right) . \left(\int_0^R r^2 dr \right) =$$

$$= \left(\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) . \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}.$$

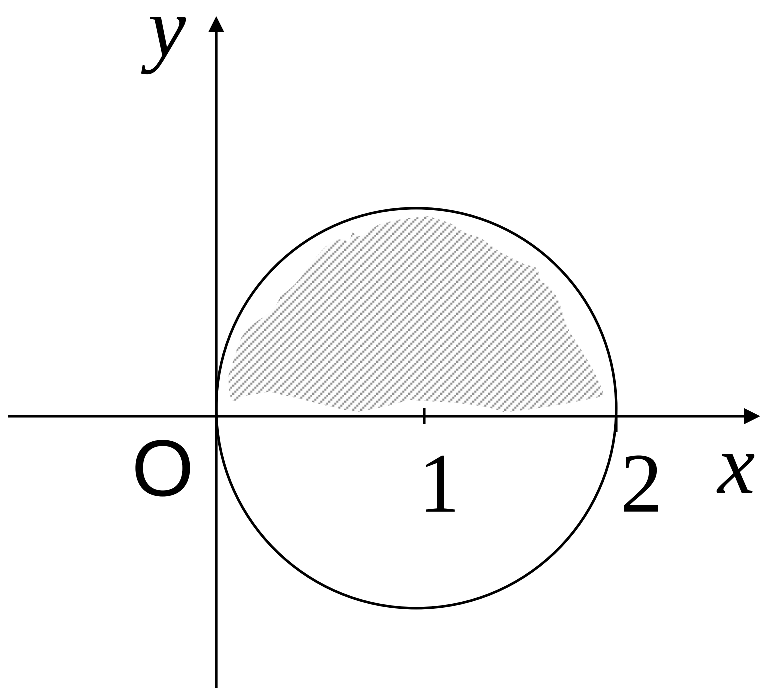
Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_D y dx dy$

D là miền xác định bởi:

$$x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0.$$

Giải:

$* \ x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$

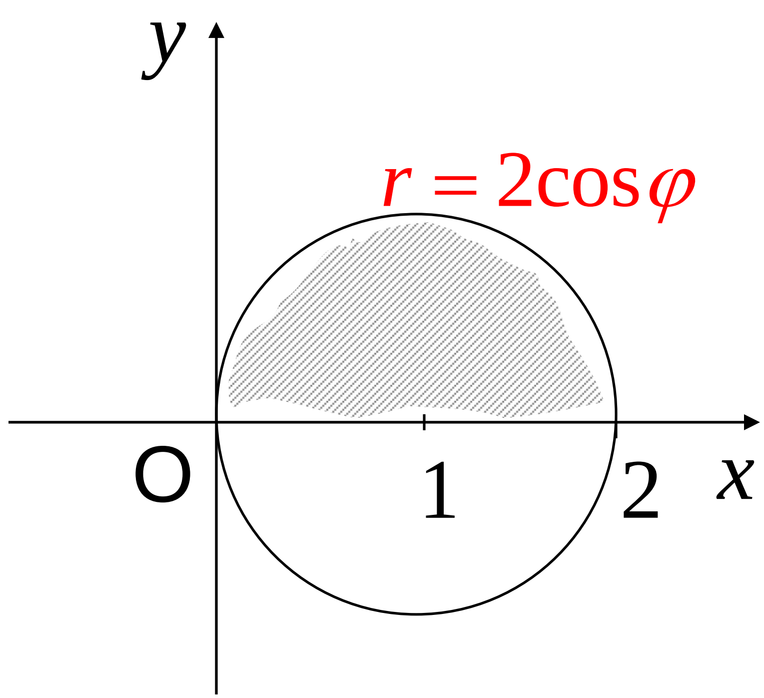


Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$



$$*x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow r = 2\cos\varphi$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\sin\varphi . r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\sin\varphi \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ: Tính $I = \iint_D y\,dxdy$

D là miền xác định bởi: $x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0.$

Giải:

Cách 2: $* \ x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r\sin\varphi . r dr = \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \right) . \left(\int_0^1 r^2 dr \right) =$$

$$= \left(\cos\varphi \Big|_{\pi}^{0} \right) . \left(\frac{r^3}{3} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{2}{3}$$

Ví dụ: Tính $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$

D là miền xác định bởi:

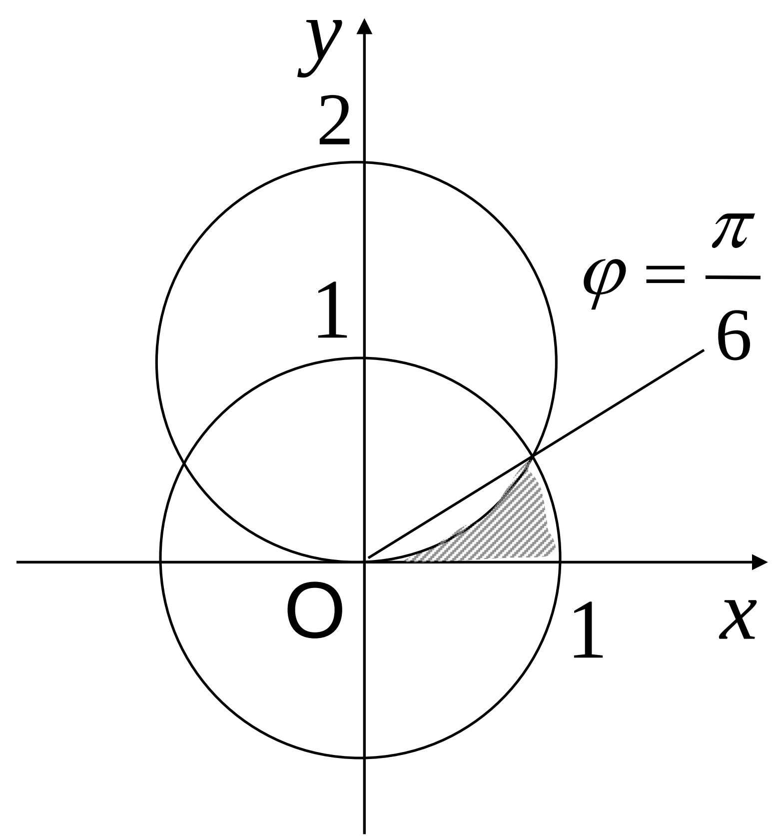
$$x^2 + y^2 - 2y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Giải:

$$* \ x^2 + y^2 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \geq 1$$

$$* x^2 + y^2 - 2y = x^2 + y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

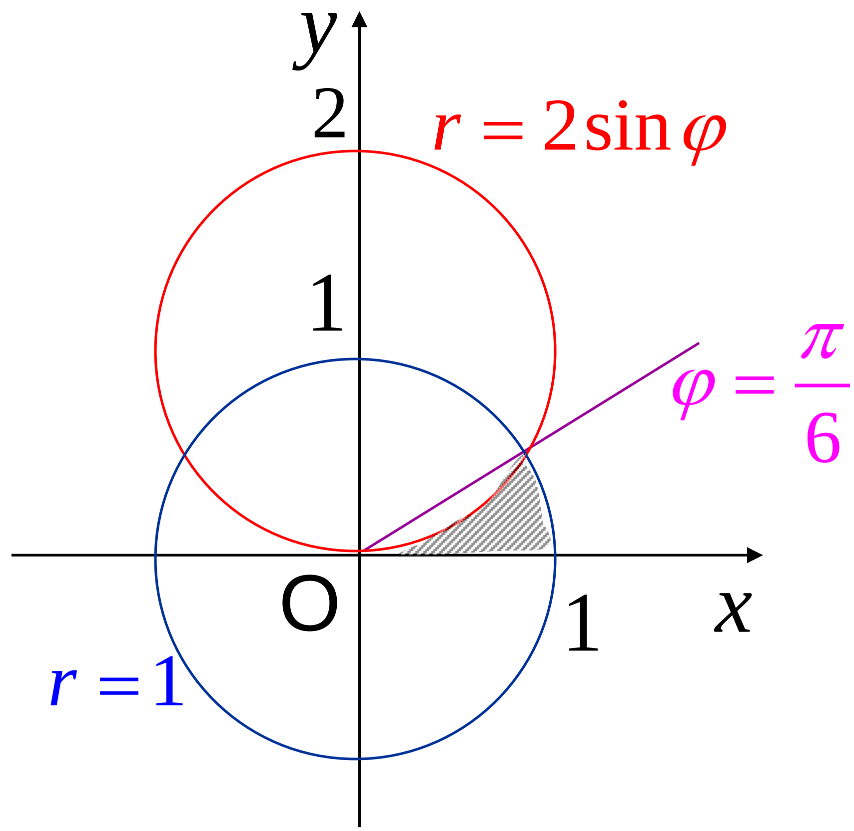


Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Miền D tương ứng với:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6} \\ 2\sin\varphi \le r \le 1 \end{cases}$$



$$*\, x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow r^2 = 2r\sin\varphi$$
$$\Leftrightarrow r = 2\sin\varphi$$

$$*\, x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow r = 1.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{1}r^2dr=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_{2\sin\varphi}^{1}\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\sin^3\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{18}+\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{24}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}-\frac{16}{9}.$$

4. Ứng dụng của tích phân hai lớp

1^0) Tính thể tích vật thể hình trụ

Cho vật thể hình trụ có đáy là miền $D \subset mp(\mathrm{O}xy)$, mặt trên có phương trình $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$, liên tục trên D), đường sinh tựa trên biên của D, song song với Oz.

Thể tích vật thể là: $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$

$2^0)$ Tính diện tích hình phẳng

Diện tích hình phẳng xác định trên miền D là:

$$S = \iint_D dx\,dy$$

$3^0)$ Tính diện tích mặt cong

Cho mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$

$f(x, y)$ liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D.

(D là hình chiếu của S lên mặt phẳng xOy)

Diện tích mặt S là:

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$$

4^0) Ứng dụng trong cơ học

Cho bản phẳng xác định trên miền D.

Giả sử khối lượng riêng của bản phẳng tại (x, y) là $\rho(x, y)$.

Khi đó:

* Khối lượng bản phẳng là: $m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy$

* Trọng tâm của bản phẳng là: (x_0, y_0)

trong đó:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy$$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

* Mô men quán tính của bản phẳng đối với các trục Ox, Oy và gốc tọa độ O lần lượt là:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)dxdy$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)dxdy$$

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)dxdy$$

Ví dụ 1:

Tính thể tích của phần hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

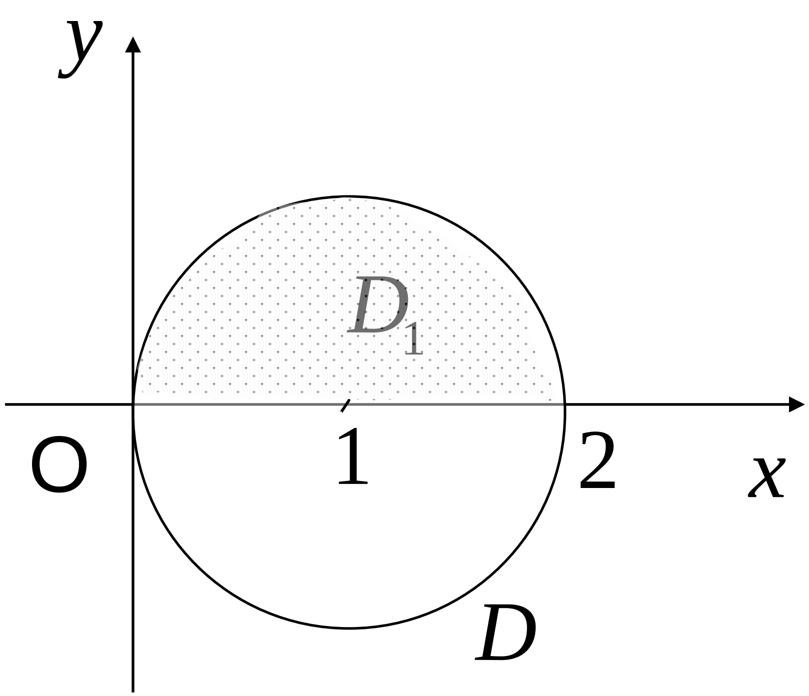
Giải:

Phần hình trụ có tính đối xứng qua mặt phẳng $z = 0.$

Thể tích phần hình trụ là: $V = 2\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$

D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 2x.$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP



Do miền D có tính đối xứng qua trục Ox và biểu thức dưới dấu tích phân chẵn đối với y

nên $V = 4\iint\limits_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ dxdy$

D_1 xác định bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{cases}$

Đổi biến sang tọa độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4 - r^2}.r\,dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (4 - r^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) d(4 - r^2)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin^3\varphi - 8\right) d\varphi$$

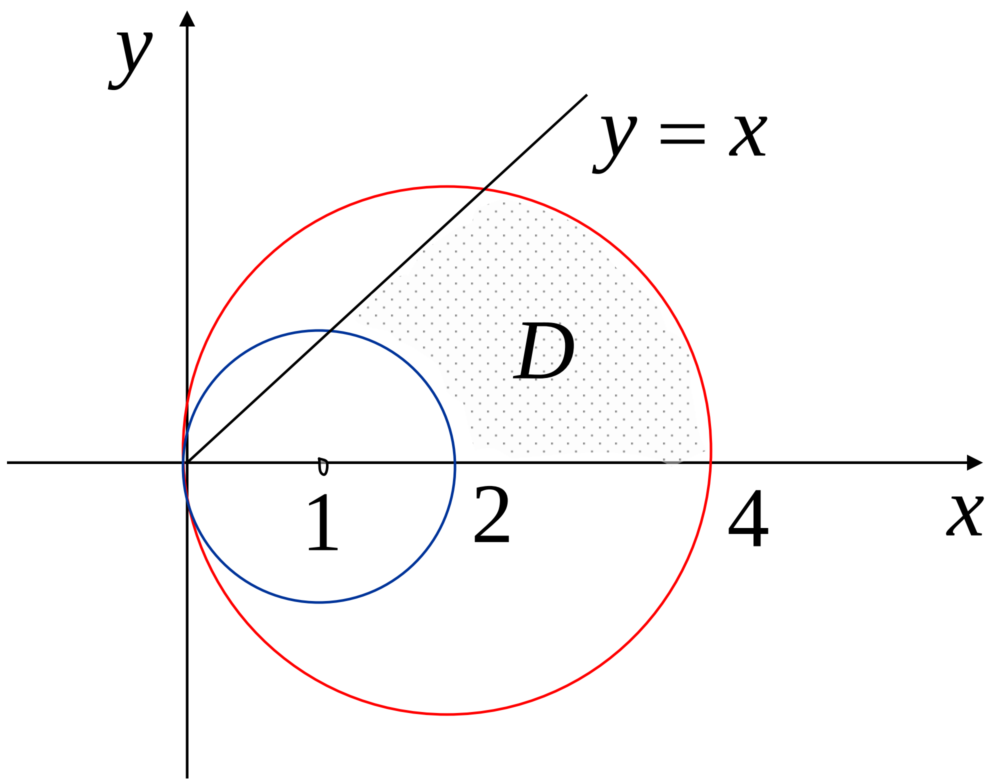
$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{2!!}{3!!} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$ (đvtt)

Ví dụ:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(x-1)^2+y^2=1, \qquad (x-2)^2+y^2=4, \qquad y=x, \quad y=0.$$

Giải:



Diện tích $S = \iint\limits_D dxdy$

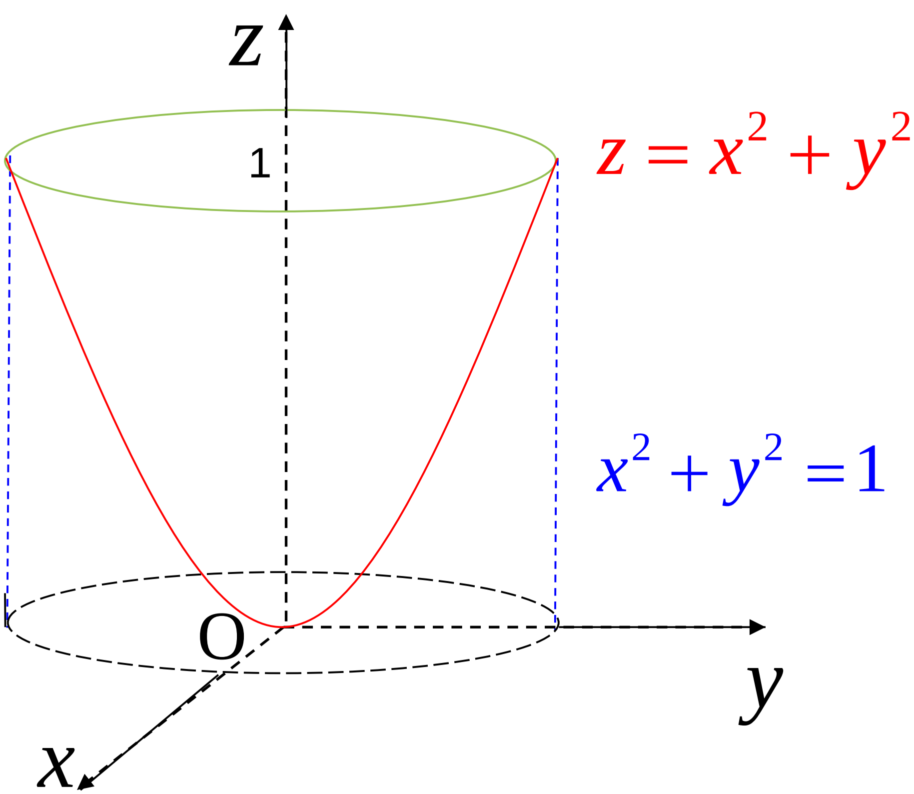
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \right) d\varphi = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$ (đvdt)

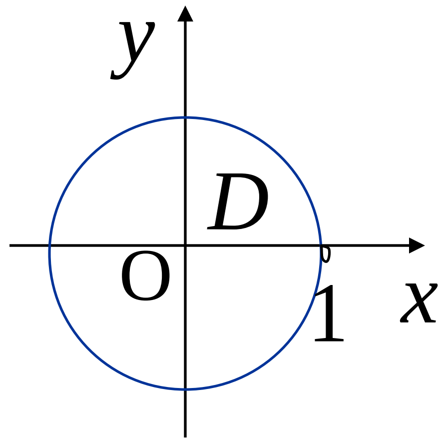
Ví dụ: Tính diện tích phần mặt $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1.$

Giải:



Hình chiếu của phần mặt $z = x^2 + y^2$ lên mặt phẳng xOy

là miền $D: x^2 + y^2 \le 1.$



Diện tích:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

§2. TÍCH PHÂN HAI LỚP

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}.rdr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right).\left(\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\ rdr\right)$$

$$= 2\pi.\frac{1}{8}\int_0^1 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}.\frac{2}{3}.(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \qquad = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \quad \text{(đvdt)}$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

1. Khái niệm tích phân ba lớp

a) Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên miền đóng, bị chặn V.

Chia V thành n miền nhỏ $V_1, V_2, ..., V_n$ tùy ý.

Gọi ΔV_i là thể tích miền V_i

d_i là đường kính miền V_i

Trên mỗi miền V_i chọn một điểm (x_i, y_i, z_i) tùy ý $(i = \overline{1,n})$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta V_i$ tồn tại hữu hạn,

không phụ thuộc phép chia V, phép chọn các điểm

$(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân

ba lớp của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V.

Kí hiệu: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ hoặc $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$

Khi đó ta nói f khả tích trên V.

b) Nhận xét:

Nếu $f(x,y,z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V

thì f khả tích trên V.

c) Tính chất

Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự tích phân hai lớp.

Chẳng hạn:

$1^0)\quad \iiint\limits_V dxdydz = v$ (v là thể tích miền V)

$$2^0)\ \iiint\limits_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dxdydz =$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

…

2) Cách tính tích phân ba lớp

a) Công thức

Cho $f(x,y,z)$ là hàm số liên tục trên V.

Giả sử miền V xác định bởi:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

trong đó $y_1(x),\ y_2(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$

$z_1(x,y),\ z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên D

(D là hình chiếu của V lên mặt phẳng xOy)

Khi đó:

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

hay $$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy$$

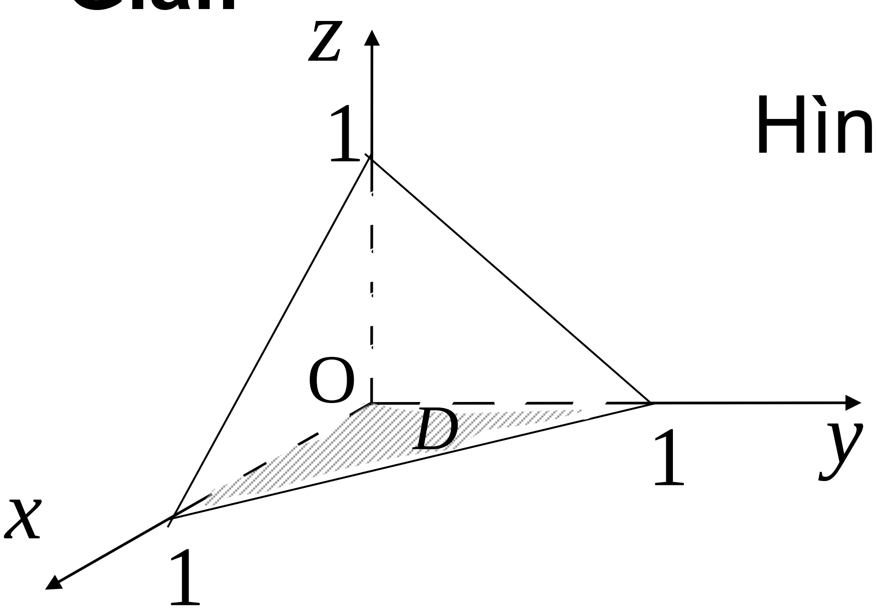
$$\overset{k/h}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

b) Ví dụ:

Tính $I = \iiint\limits_V (1 - x - y)dxdydz$

V giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1.$

Giải:



Hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền *D*.

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

V xác định bởi: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \quad = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \right) dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 \, dy \quad = \int_0^1 \left. \frac{(1 - x - y)^3}{3} \right|_{1-x}^{0} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x)^3}{3} dx \quad = \frac{1}{3} . \left. \frac{(1 - x)^4}{4} \right|_1^0 = \frac{1}{12} .$$

3) Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Công thức đổi biến số

Xét $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ (f liên tục trên V)

Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),$

$z = z(u,v,w)$ sao cho:

* $x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)$ là các hàm số liên tục,

có các ĐHR cấp một liên tục trên miền V' *trong KG* $Ouvw$

* Tương ứng $(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$

là một song ánh từ V' lên V.

* Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{tại } \forall (u,v,w) \in V'$$

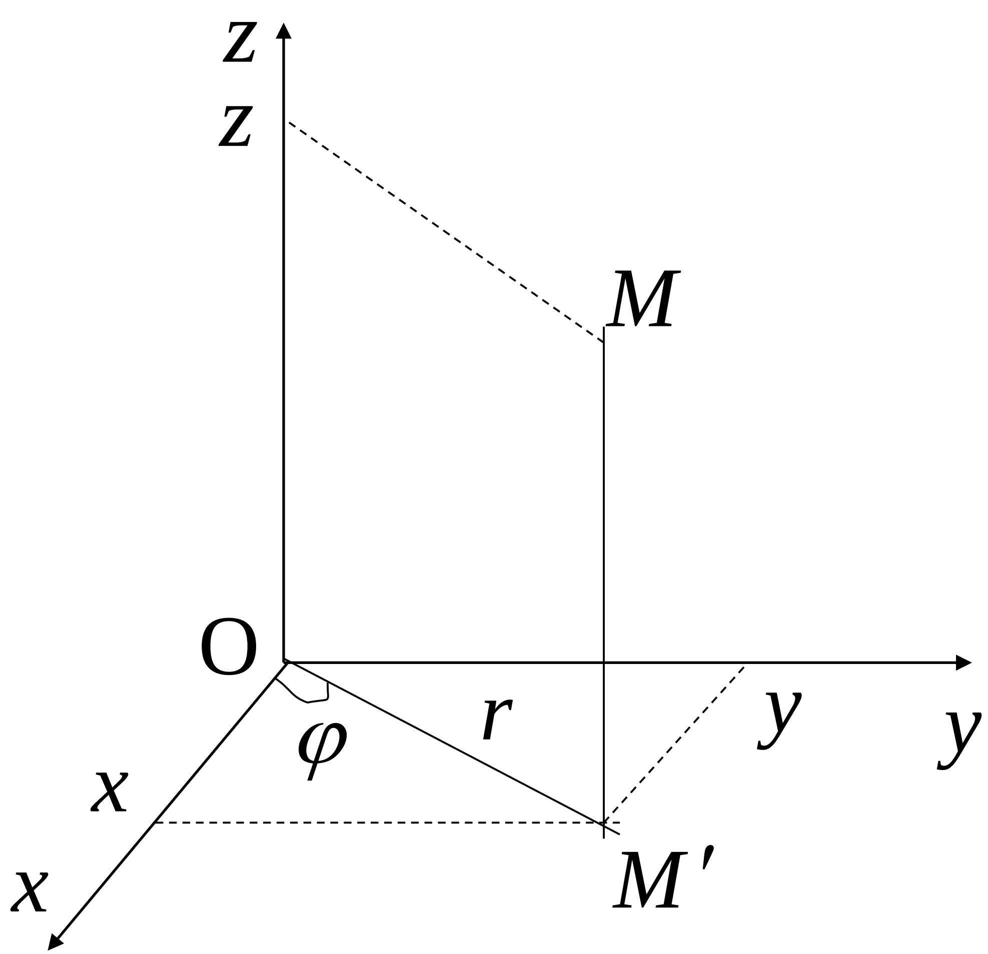
Khi đó:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J\right|dudvdw.$$

Chú thích: Công thức trên vẫn đúng khi $J = 0$ tại một số điểm $(u,v,w) \in V'$.

b) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trụ



* Tọa độ trụ của điểm M

là bộ (r, φ, z) <u>*trong đó:*</u>

(r, φ) *là tọa độ cực của* M'

(M' là hình chiếu của M

lên mặt phẳng Oxy)

z là cao độ của M

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

* Trong cả hệ tọa độ trụ:

$$r \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ -\infty < z < +\infty$$

* Giả sử M có tọa độ (x, y, z) trong hệ trục $\mathrm{O}xyz$

Có $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

* Công thức tính tích phân trong tọa độ trụ là:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

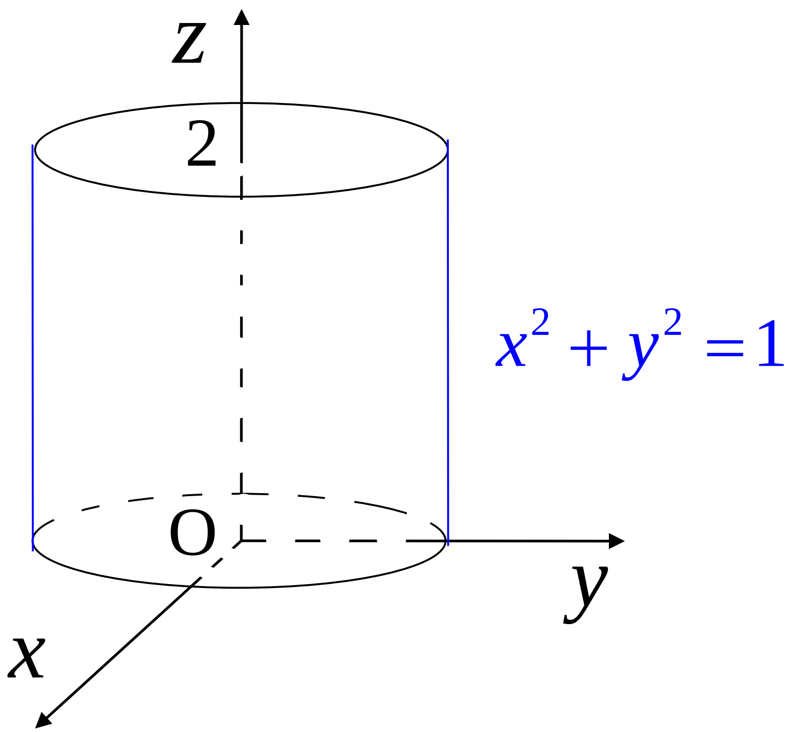
Nhận xét:

Thường đổi biến sang tọa độ trụ khi V có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn hoặc một phần hình tròn.

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) z \, dxdydz$

V là miền giới hạn bởi các mặt: $x^2 + y^2 = 1, z = 0, \ z = 2.$

Giải:



* Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Miền V tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 r^2 z.r dz = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^1 r^3 dr\right).\left(\int_0^2 z dz\right)$$

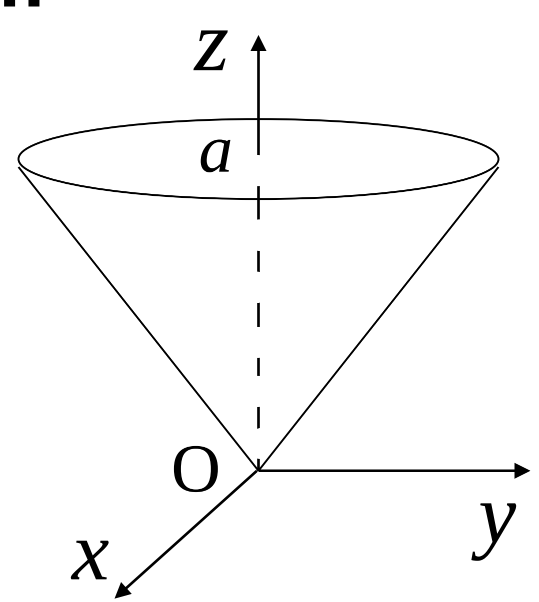
$$= 2\pi.\frac{1}{4}.\frac{z^2}{2}\bigg|_0^2 = \pi.$$

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$

V là miền hình nón tròn xoay giới hạn bởi các mặt

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z = a \quad (a > 0)$$

Giải:



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

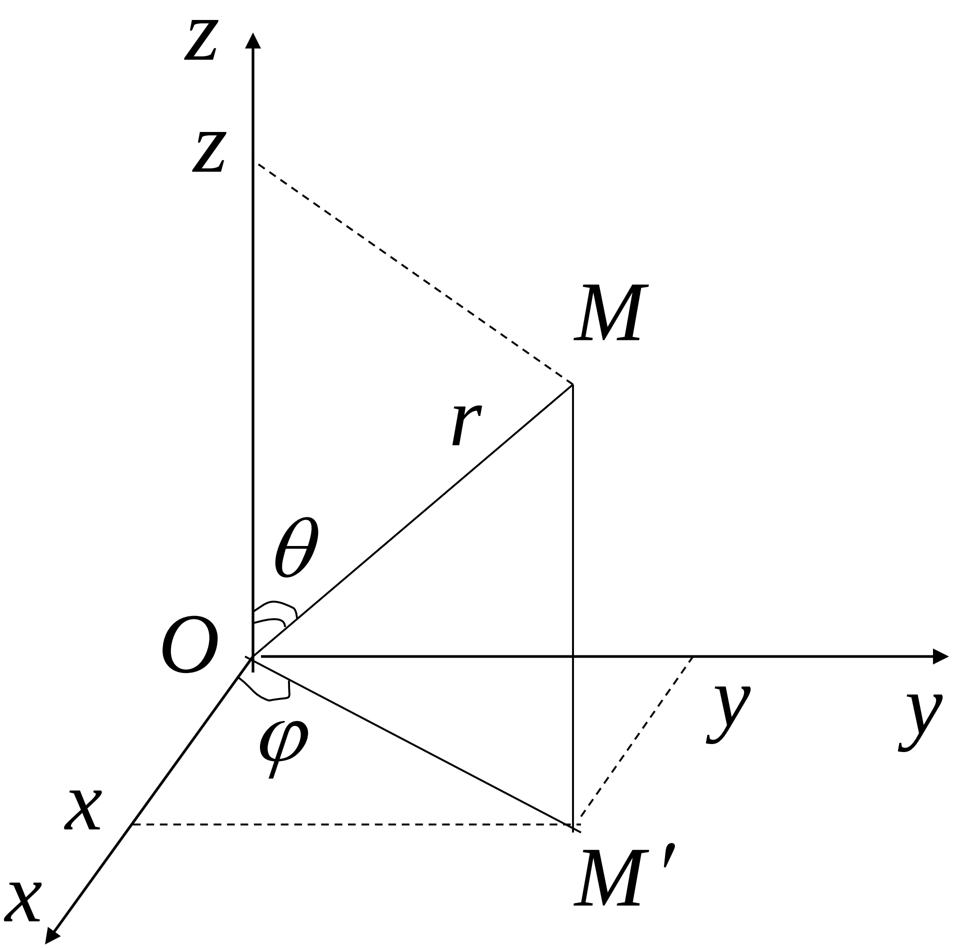
Miền V tương ứng với: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ r \le z \le a \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_r^a \left(r^2 + z^2\right) r dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\left(r^3 z + r \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_r^a \right] dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r^3 a + r \frac{a^3}{3} - \frac{4}{3} r^4 \right) dr =$$

$$= 2\pi \left(a \frac{r^4}{4} + \frac{a^3 r^2}{6} - \frac{4}{15} r^5 \right) \Bigg|_0^a = \frac{3\pi a^5}{10}.$$

c) Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu



* Tọa độ cầu của điểm M là bộ (r,θ,φ) ***trong đó:***

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$$

$$\theta = \left(Oz, \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\varphi = \left(Ox, \overrightarrow{OM'}\right)$$

(M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy)

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

* Trong cả hệ tọa độ cầu:

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ r \ge 0$$

* Giả sử M có tọa độ (x, y, z) trong hệ trục $\mathrm{O}xyz$

Có $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta.\cos\varphi & r\cos\theta.\cos\varphi & -r\sin\theta.\sin\varphi \\ \sin\theta.\sin\varphi & r\cos\theta.\sin\varphi & r\sin\theta.\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta \geq 0.$$

Công thức tính tích phân trong tọa độ cầu là:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Nhận xét:

Thường đổi biến sang tọa độ cầu khi V là hình cầu hoặc một phần hình cầu.

Ví dụ: Tính $I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz.$

V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2+z^2=4.$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$1 \le r \le 2$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r}.r^2 \sin\theta \, dr$$

$$= 2\pi.\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right).\left(\int_1^2 rdr \right)$$

$$= 2\pi.\left(\cos\theta\Big|_{\pi}^{0} \right).\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2 \right) = 6\pi.$$

3. Ứng dụng của tích phân ba lớp

$1^0)$ Tính thể tích vật thể

Thể tích vật thể xác định trên miền V là:

$$\iiint_V dxdydz.$$

2^0) Tính khối lượng và trọng tâm của vật thể

Cho vật thể xác định trên miền V.

Giả sử vật thể có khối lượng riêng tại (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$.

Khi đó: * Khối lượng vật thể là: $m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$

* Trọng tâm của vật thể là: $M_0(x_0, y_0, z_0)$

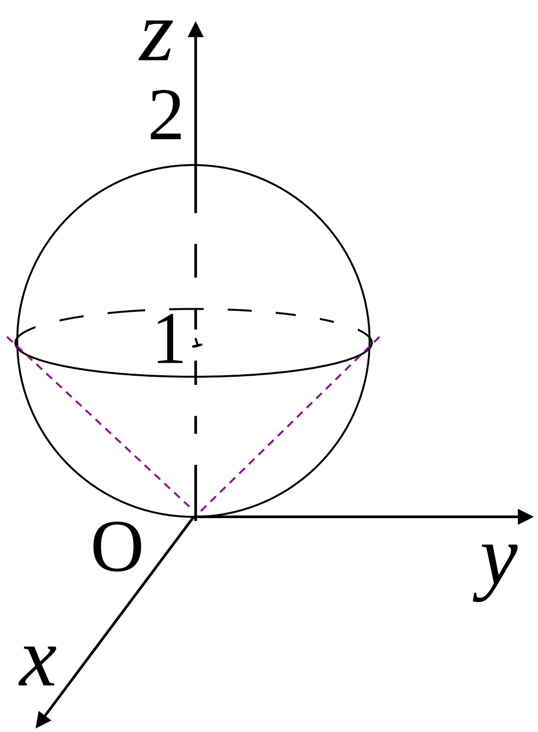
trong đó: $x_0 = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz, \quad z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Ví dụ:

Tính thể tích vật thể chứa điểm $(0,0,2)$ và giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 = z^2.$

Giải:



$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

Thể tích vật thể là: $v = \iiint\limits_V dxdydz$

Hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng Oxy là miền

$D: x^2 + y^2 \le 1.$

Đổi biến sang tọa độ trụ:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad$ $\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r \le z \le 1 + \sqrt{1 - r^2} \end{array}$

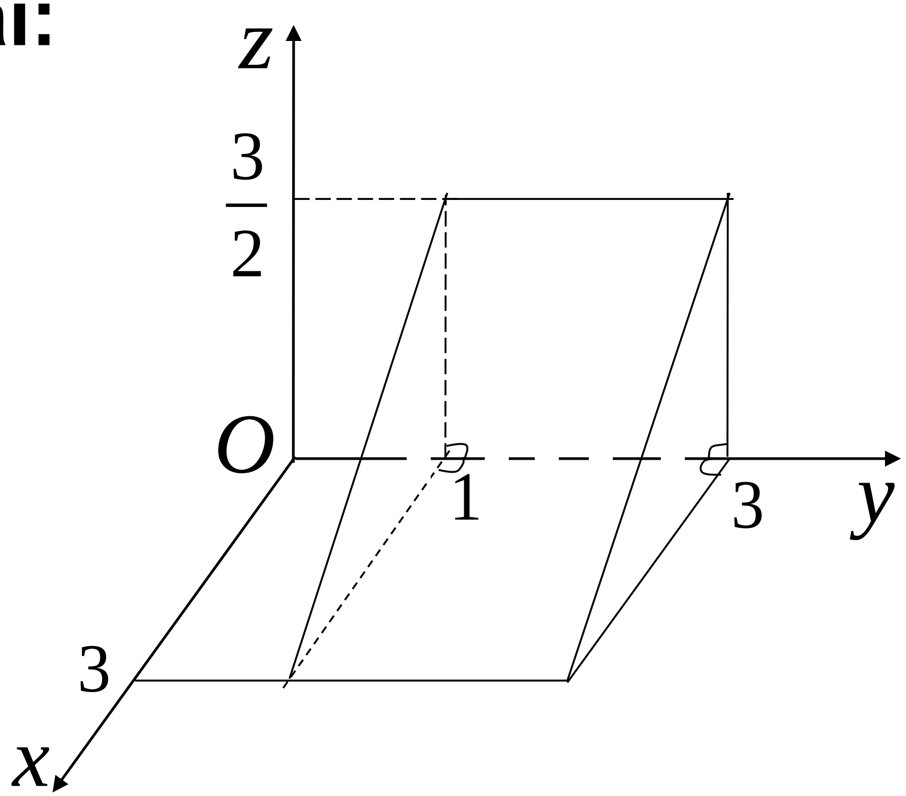
$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1+\sqrt{1-r^2}-r\right) r dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \pi \quad \text{(đvtt)}$$

Ví dụ: Tính khối lượng và trọng tâm của hình lăng trụ V giới hạn bởi các mặt $x=0,\ z=0,\ y=1,\ y=3,\ x+2z=3,$ biết khối lượng riêng $\rho(x,y,z)=1.$

Giải:



Miền V xác định bởi:

$$0\le x\le 3$$

$$1\le y\le 3$$

$$0\le z\le \frac{3-x}{2}$$

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

** Khối lượng:*

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{\frac{3-x}{2}} dz = 2\int_0^3 \frac{3-x}{2}dx$$

$$= \frac{(3-x)^2}{2}\Bigg|_3^0 = \frac{9}{2}.$$

* Trọng tâm: $M_0(x_0, y_0, z_0)$

trong đó

§3. TÍCH PHÂN BA LỚP

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} x\,dz$$

$$= \frac{2}{9}.2\int_0^3 x.\frac{3-x}{2}dx = \frac{2}{9}\int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 1.$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\,dxdydz \;= \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} y\,dz$$

$$= \frac{2}{9}\left(\int_1^3 y\,dy\right).\left(\int_0^3 \frac{3-x}{2}dx\right)$$

$$= \frac{2}{9}\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^3\right).\left(\left.\frac{(3-x)^2}{4}\right|_3^0\right) = \frac{2}{9}.4.\frac{9}{4} \;= 2.$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V zdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} zdz$$

$$= \frac{2}{9}.2.\int_0^3\left(\int_0^{\frac{3-x}{2}} zdz\right)dx = \frac{4}{9}\int_0^3\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{3-x}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}dx = \frac{4}{9}.\frac{(3-x)^3}{24}\Bigg|_3^0 = \frac{4}{9}.\frac{27}{24} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập về nhà: 2.7 $\longrightarrow$ 2.17