

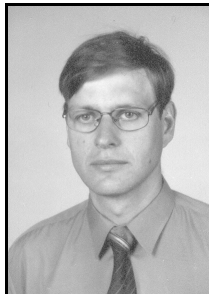
Janusz P. PAPLIŃSKI, Michał J. ŻÓŁTOWSKI

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin

Modelowanie ruchu drogowego z zastosowaniem automatów komórkowych

Dr inż. Janusz Piotr PAPLIŃSKI

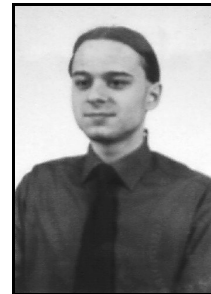
Pracuje w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej na stanowisku adiunkta. Jego zainteresowania naukowe koncentrują się w dziedzinach sztucznej inteligencji, identyfikacji dynamiki systemów liniowych, sterowania procesami dyskretnymi, optymalizacji.



e-mail: janusz.papliński@zut.edu.pl

Inż. Michał Jakub ŻÓŁTOWSKI

Absolwent kierunku Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrycznym Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie.



e-mail: zoltowski.michal@gmail.com

Streszczenie

W artykule przedstawiono możliwość zastosowania automatów komórkowych do modelowania ruchu ulicznego. Jako przykład zastosowań rozpatrzono skrzyżowanie równorzędne, z pierwszeństwem przejazdu, oraz z sygnalizacją świetlną. Przedstawione wyniki badań symulacyjnych pokazują możliwość doboru odpowiedniego sterowania w funkcji natężenia ruchu na poszczególnych drogach. Szczególnie zapewniają dobór odpowiedniego programu sygnalizacji świetlnej zapewniającego uzyskanie maksymalnej przepustowości skrzyżowania.

Słowa kluczowe: sterowanie ruchem ulicznym, automaty komórkowe, modelowanie.

The modeling of traffic using the cellular automata

Abstract

Development of road infrastructure and the increasing traffic, resulting more complex traffic control problems, and increasing the requirement of the optimal selection. It is possible to build models of road traffic based on cellular automata, which have simple rules of operation specified by transition function and state of self and nearest neighbors. Despite their simplicity they allow to build complex models. The article presents a model of traffic based on the stochastic cellular automata. The model allows the analysis of the capacity of crossroad, depending on the traffic intensity. The paper presents models of intersections with equality streets and with some dominant streets. The crossroads with the traffic lights are presented too. At all intersections, there is the ability to determine the probability distribution of choosing particular courses of vehicles at intersections, and the likelihood of the vehicle at the beginning of the access road. The proposed model for crossing with traffic lights, allows to select the appropriate control sequences providing street lights for maximum throughput junction. Models of intersections presented in the paper can be easily combined into a larger model that maps a real transportation system.

Keywords: traffic control, cellular automata, modeling.

1. Wstęp

Rozbudowa infrastruktury drogowej i zwiększanie się natężenia ruchu skutkuje wzrostem złożoności problemów sterowania ruchem, oraz zwiększa potrzebę jego optymalnego doboru. Ze względu na złożoność problemu do znalezienia efektywnego sterowania wykorzystuje się różnego rodzaju modele matematyczne [13, 15, 19].

Zastosowanie w latach 90 paradygmatu automatów komórkowych do modelowania ruchu ulicznego pozwoliło na oddanie jego charakteru przy niewielkiej złożoności obliczeniowej [3, 6]. W modelu tym droga, po której poruszają się pojazdy, jest podzielona na szereg pojedynczych komórek – automatów. Każdy automat przyjmuje wartość wskazującą czy jest zajęty przez pojazd czy nie. Stan automatu zależy tylko od bieżącego własnego stanu, oraz od stanu sąsiadujących z nim komórek. Skrzyżowanie ze

sobą dwóch niezależnych dróg pozwoliło też na uzyskanie prostego modelu skrzyżowania [1].

Za twórcę automatów komórkowych uważa się Johna von Neumanna, który pod koniec lat czterdziestych próbował stworzyć model samo reprodukującego się organizmu biologicznego [2, 12]. Idea ta została później rozwinięta przez Ulama i Friendkina, oraz Conway'a, który spopularyzował ideę tworząc „grę w życie” [8, 10]. Dziś istnieją modele komórkowe stosowane m.in. w biologii, matematyce, fizyce czy socjologii [9, 20].

W pracy przedstawiono model ruchu drogowego oparty na stochastycznych automatach komórkowych pozwalający na analizę ruchu drogowego, a w szczególności przepustowości skrzyżowań w zależności od organizacji ruchu, oraz programu sygnalizacji świetlnej. Jako przykład zastosowania przedstawiono wyniki badań dla modelu skrzyżowania równorzędnego, z drogą pierwszeństwa, oraz z sygnalizacją świetlną.

2. Definicja automatu komórkowego

Automat komórkowy jest pojęciem matematycznym. W jego skład wchodzi [9, 20]:

- D -wymiarowa przestrzeń, podzielona na określoną ilość $\{i\}$ komórek;
- S_i skończona liczba możliwych stanów, w jakich może znajdować się dana komórka;
- zbiór reguł F , które określają przejście komórki z jednego stanu do drugiego:

$$s_i(t+1) = F(s_j(t)), j \in O_i \quad (1)$$

Stan automatu, w chwili $t+1$ jest ściśle zależny od reguł przejścia dla stanu komórki i oraz sąsiadujących z nią komórek w chwili t . Tak zdefiniowany automat komórkowy to automat deterministyczny. Można określić stan w jakim znajdzie się w dowolnej chwili w przyszłości. Uruchomiany wielokrotnie, po takiej samej ilości kroków zawsze wygeneruje takie same wyniki. Można wprowadzić również zależności losowe, i w ten sposób otrzymać automat probabilistyczny, którego stan w n -tym kroku da się przewidzieć jedynie z pewnym prawdopodobieństwem.

Stochastyczne automaty komórkowe znajdują zastosowanie w modelowaniu ruchu drogowego gdyż pozwalają na uwzględnienie zaistnienia zdarzeń losowych skutkujących zmniejszeniem prędkości jazdy poszczególnych pojazdów. Wprowadzenie losowości pozwala też na modelowanie skrzyżowania, w którym poszczególne pojazdy przemieszczają się w różnych, losowo wybranych kierunkach. Wybór drogi dla poszczególnych pojazdów odbywa się na zasadzie losowego wyboru drogi spośród dróg dostępnych w ramach przyjętej organizacji ruchu. Przez odpowiedni dobór wartości prawdopodobieństw, w łatwy sposób można zamodelować różne natężenia ruchu na poszczególnych drogach.

Ważnymi parametrami tak zdefiniowanych modeli jest siatka, na której przetwarzane są automaty komórkowe, oraz rodzaj i wielkość sąsiedztwa biorącego udział w definiowaniu nowego stanu komórki (1) [18]. Do modelowania ruchu ulicznego stosuje się siatkę jednowymiarową liniową i dwuwymiarową kwadratową.

3. Symulacja ruchu drogowego z wykorzystaniem automatów komórkowych

3.1. Automaty jednowymiarowe – ruch po prostej

Przy konstruowaniu reguł dla automatu jednowymiarowego, każda komórka ma dwóch sąsiadów. Ponieważ przyszły stan komórki zależy od stanu jej oraz sąsiadów, to o wartości stanu w kolejnej iteracji decydują trzy komórki. Każda z tych komórek, może przyjąć wartości 0 lub 1, istnieje więc $2^3=8$ różnych kombinacji stanów komórki i jej sąsiedztwa. Jeżeli przyjmie się, iż każdy taki stan wskazuje na określoną pozycję w ośmiobitowej liczbie, a jej wartość na danej pozycji, równa 0 lub 1, opisuje stan wyjściowy komórki, to reguły dla takich automatów można w pełni opisać przy pomocy ośmiobitowej liczby (patrz tab. 1). Daje to $2^8=256$ różnych możliwych kombinacji stanów i reguł. Każda reguła ma swój numer będący reprezentacją tej liczby w systemie dziesiętkowym [14, 21]. Automatem dobrze modelującym ruch po jednym pasie jest automat o regule 184 co można zapisać jako $184_{10}=10111000_2$ w systemie dwójkowym. Reguły dla takiego automatu zostały przedstawione w tab. 1.

Tab. 1. Reguły przejścia dla jednowymiarowego automatu o kodzie $184_{10}=10111000_2$

Tab. 1. The transition rules for one-dimensional cellular automata coded as 184

1	Stan wyjściowy komórki i jej sąsiedztwa	111	110	101	100
2	Pozycja w ośmiobitowej liczbie wynikająca ze stanu wyjściowego komórki i jej sąsiedztwa	8	7	6	5
3	Stan końcowy – wartość na danej pozycji	1	0	1	1
4	Aktywność komórek w kroku k oraz $k+1$				
5					
6	Stan wyjściowy komórki i jej sąsiedztwa	011	010	001	000
7	Pozycja w ośmiobitowej liczbie wynikająca ze stanu wyjściowego komórki i jej sąsiedztwa	4	3	2	1
8	Stan końcowy – wartość na danej pozycji	1	0	0	0
9	Aktywność komórek w kroku k oraz $k+1$				

Do modelowania ruchu po prostej może być stosowany losowy model Nagela-Schreckenberga [11] pozwalający na definiowanie różnych prędkości pojazdów, oraz wprowadzenie zaburzeń losowych. Dla każdego pojazdu definiuje się jego długość określając ile pojedynczych automatów komórkowych zajmuje, oraz prędkość, która przyjmuje skończone wartości od 0 do V_{\max} . Obliczenia wykonywane są jednocześnie dla każdego pojazdu zgodnie z poniższym schematem:

- (1) **Przyspieszanie:** jeżeli prędkość v pojazdu jest mniejsza niż V_{\max} , i jeżeli odległość od poprzedzającego go pojazdu jest większa niż $v+1$, to prędkość jest zwiększana o jeden, $v_i(k+1)=v_i(k)+1$.
- (2) **Zwalnianie:** jeżeli pojazd na polu i , ma na drodze pojazd, który zajmuje komórkę $i+j$, i jeżeli $j \leq v$, to pojazd na polu i , zmniejsza swoją prędkość do wartości $j-1$.
- (3) **Zdarzenia losowe:** Prędkość każdego z pojazdów zmniejszana jest o 1, z pewnym prawdopodobieństwem p .
- (4) **Ruch pojazdów:** Każdy pojazd jest przesuwany o v pól.

Krok pierwszy i drugi można sprowadzić do jednej reguły: kierowca jedzie tak szybko jak to tylko możliwe, biorąc pod uwagę warunki na drodze. W regule trzeciej zawarte są naturalne zmiany prędkości, zależne od ludzkiej psychiki oraz różnych nieprzewidywalnych zdarzeń na drodze, które zmuszają kierowcę do zmniejszenia prędkości. Reguła czwarta pozwala na przemieszczenie pojazdu z uwzględnieniem jego prędkości chwilowej.

4. Skrzyżowanie równorzędne

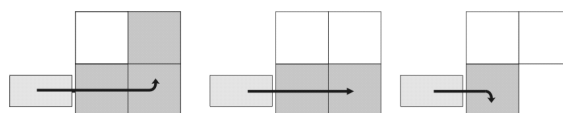
Podstawowym skrzyżowaniem jest skrzyżowanie równorzędne typu X (cztery wloty). Dla takiego skrzyżowania istnieje w modelu możliwość ustalania natężenia ruchu pojazdów na poszczególnych drogach przez określenie prawdopodobieństwa pojawienia się pojazdu na wlocie skrzyżowania, oraz prawdopodobieństwo wyboru określonego kierunku na skrzyżowaniu. Pozwala to na dowolne kształtowanie natężenia ruchu na poszczególnych drogach jak również na symulację skrzyżowania typu T przez zamknięcie jednej z dróg za pomocą wyzerowania prawdopodobieństw z nią związanych [6].

Kolejność przejazdu przez skrzyżowanie określana jest na podstawie obowiązujących przepisów ruchu drogowego. Jeżeli na wjazd na skrzyżowanie oczekuje więcej niż jeden pojazd, w pierwszej kolejności przejeżdżają pojazdy skręcające w prawo, następnie pierwszeństwo określone jest na podstawie reguły prawej dłoni. Jeżeli na skrzyżowaniu spotkają się dwa pojazdy jadące z naprzeciwka i skręcające w lewo, przejadą równocześnie ponieważ ich drogi nie krzyżują się.

Każdemu z pojazdów wjeżdżających na skrzyżowanie przypisany zostaje w sposób losowy kierunek, w jakim będzie skręcał po wjeździe na skrzyżowanie.

Dla pojazdów, które dopiero dojechały do skrzyżowania, po określeniu kierunku w jakim będą jechać, ustalone jest pierwszeństwo przejazdu. Jeżeli na trasie przejazdu pojazdu nie znajduje się inny pojazd, pojazd rozpoczyna przejazd przez skrzyżowanie.

Skrzyżowanie podzielone jest na cztery pola. W zależności od trasy przejazdu, dany pojazd będzie zajmować przez określony czas jedno, dwa lub trzy pola na skrzyżowaniu w sposób pokazany na rys. 1. Po wjeździe pojazdu na skrzyżowanie, pola te zostają zajęte i żaden inny pojazd nie może na nie wjechać dopóki pojazd przejeżdżający nie opuści skrzyżowania. Na skrzyżowaniu może znajdować się kilka pojazdów, pod warunkiem, że ich trasy się nie pokrywają.



Rys. 1. Trasy przejazdu przez skrzyżowanie z zaznaczonymi zajętymi przez pojazd polami

Fig. 1. The car tracks in the crossroad with marked fields engaged by the vehicle

5. Skrzyżowania z pierwszeństwem przejazdu i sygnalizacją świetlną

Odpowiedni dobór prawdopodobieństw na poszczególnych drogach pozwala uzyskać skrzyżowanie na którym natężenie ruchu na poszczególnych drogach jest nierównomierne. W takim przypadku uzasadnione jest nadanie bardziej obciążonym drogom pierwszeństwa przejazdu. Skrzyżowania takie stanowią większość wszystkich skrzyżowań jednopoziomowych. Model skrzyżowania z pierwszeństwem to rozszerzenie modelu skrzyżowania równorzędnego. Zmienione zostały reguły wyboru kolejności przejazdu. Przy ustalaniu kolejności wjazdu na skrzyżowanie w pierwszej kolejności brane są pod uwagę pojazdy na drogach z pierwszeństwem przejazdu, zgodnie z zasadami ruchu drogowego [17].

Skrzyżowanie z sygnalizacją podobnie jak skrzyżowanie z pierwszeństwem oparto na zasadzie działania skrzyżowania równorzędnego. Dodany został warunek wjazdu na skrzyżowanie tylko przy sygnale zezwalającym (zielonym świetle) na danym wlocie [7, 4, 16].

6. Wyniki badań symulacyjnych

Celem zobrazowania możliwości stosowania automatów komórkowych do modelowania ruchu drogowego przeprowadzono badania symulacyjne dla następujących parametrów:

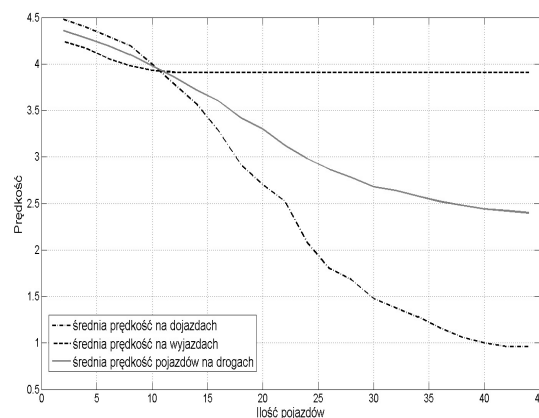
- długości dróg dojazdowych i wyjazdowych ze skrzyżowania: 100 jednostek,
- prędkość maksymalna: 5 jednostek/iterację,
- maksymalna ilość pojazdów : 45,
- długość pojazdu: 5 jednostek,
- żądany odstęp: 6 jednostek,
- prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia losowego zmieniającego prędkość pojazdu: 0,
- ilość iteracji: 30 000. Przy czym jedna jednostka odpowiada polu zajętemu przez pojedynczy automat komórkowy.

Przyjęto, iż ilości pojazdów biorących udział w symulacji są stałe, tzn. po opuszczeniu drogi wyjazdowej, nowy pojazd pojawi się na jednej z losowo wybranych dróg dojazdowych, o ile początek jej jest pusty. W przeciwnym przypadku pojazd zostanie wygenerowany w kolejnej iteracji. W badaniach pominięto wpływ losowych zmian prędkości pojazdów na odcinkach międzywęzłowych. Stochastyczne automaty komórkowe zostały wykorzystane do losowego wyboru kierunku jazdy na skrzyżowaniu.

Na rys. 2 przedstawiono prędkość pojazdów na drogach dojazdowych i wyjazdowych dla skrzyżowania równorzędnego w funkcji stałej liczby pojazdów znajdujących się w układzie skrzyżowania wraz z drogami dochodzącymi, a na rys. 3 przepustowość skrzyżowania, liczoną jako sumaryczna ilość pojazdów przejeżdżających przez skrzyżowanie w trakcie wszystkich iteracji. Maksymalna przepustowość skrzyżowania osiągnięta jest dość szybko, już przy około 20 pojazdach. Powyżej tej ilości, przepustowość skrzyżowania nie rośnie. Zwiększa się za to gęstość ruchu, skutkiem czego pojazdy poruszają się wolniej. W miarę wzrostu ilości pojazdów maleje prędkość na drogach dojazdowych. Prędkość na drogach wyjazdowych pozostaje bez zmian, pojazdy poruszają się po nich w sposób niezakłócony. Każdy pojazd który wjechał na drogę wyjazdową, może bez przeszkód przyspieszać, aż jego prędkość osiągnie maksymalną wartość.

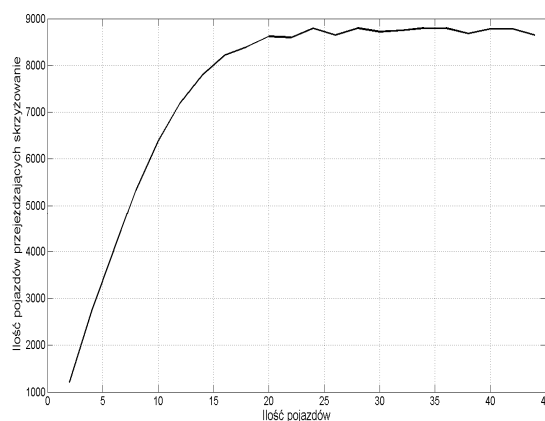
Dla skrzyżowania z określonym pierwszeństwem przejazdu prędkość pojazdów zależy od drogi, na jakiej się znajdują (rys. 4). Dla drogi z pierwszeństwem utrzymuje się ona na w miarę równym poziomie, aż do uzyskania maksymalnej przepustowości. Dla zbyt dużej ilości pojazdów tworzą się korki i prędkość spada.

Dla drogi podporządkowanej zwiększanie się ilości pojazdów na skrzyżowaniu skutkuje tym, że pojazdy mają coraz większe trudności z włączeniem się do ruchu i prędkość ich szybko maleje praktycznie do zera.



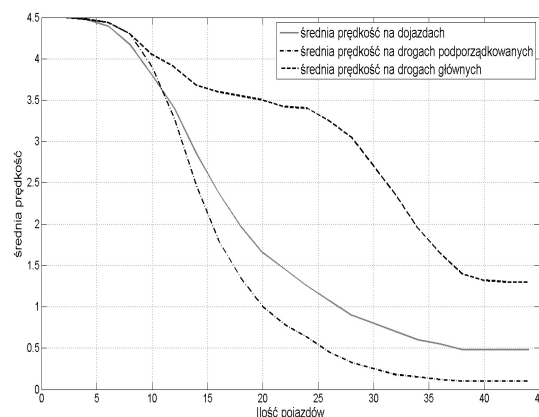
Rys. 2. Prędkości pojazdów na skrzyżowaniu równorzędnym w funkcji stałej ilości pojazdów znajdujących się w układzie skrzyżowania wraz z drogami dochodzącymi

Fig. 2. The speed of vehicles at the crossroad, with all direction equivalent, vs. the number of vehicles



Rys. 3. Przepustowość skrzyżowania równorzędnego w funkcji stałej ilości pojazdów znajdujących się w układzie skrzyżowania wraz z drogami dochodzącymi

Fig. 3. The capacity of the crossroad, with all direction equivalent, vs. the number of vehicles



Rys. 4. Prędkości pojazdów na skrzyżowaniu z określonym pierwszeństwem przejazdu w funkcji stałej ilości pojazdów znajdujących się w układzie skrzyżowania wraz z drogami dochodzącymi

Fig. 4. The speed of vehicles at the crossroad with a specific priority transit vs. the number of vehicles

Dla skrzyżowania z sygnalizacją świetlną przepustowość zależy od programu sygnalizacji. Wpływa na nią zarówno Split czyli proporcje czasu trwania poszczególnych faz w ramach cyklu, jak i długość trwania cyklu. Dla potrzeb symulacji przyjęto, iż:

- czas świecenia światła czerwonego t_r na jednej z osi odpowiada sumie czasów świecenia się światła czerwonego z żółtym t_{ry} , zielonego t_g i żółtego t_y

$$t_r = t_{ry} + t_g + t_y \quad (2)$$

- czas trwania światła czerwonego z żółtym, oraz żółtego są sobie równe $t_{ry}=t_y$. Przyjmują one wartość minimalną wynikającą z czasu ewakuacji - koniecznego na opuszczenie skrzyżowania przez pojazdy.

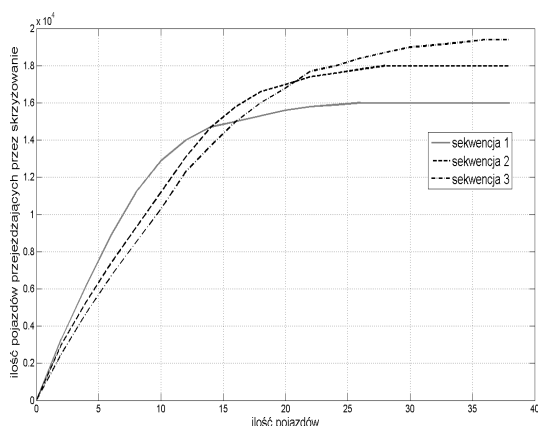
Przy założeniu jednakowych splitów na obu osiach WE i NE rozpatrzono trzy sekwencje sygnałów świetlnych przedstawione w tab. 2, a na rys. 5 przedstawiono przepustowość skrzyżowania dla tych sekwencji.

Tab. 2. Czasy trwania, w ilościach pojedynczych iteracji, sygnałów sterujących sygnalizacją świetlną

Tab. 2. Durations the traffic lights, in the number of iterations

	Sekw.1	Sekw.2	Sekw.3
t_g	5	5	5
$t_y=t_{ry}$	25	50	100

Z analizy przepustowości wynika, że dla małej ilości pojazdów wskazany jest krótki czas trwania cyklu. Im większe natężenie ruchu tym lepiej sprawdzają się długie cykle. Wynika to z faktu, iż przy małym natężeniu ruchu pojazdy stoją na czerwonym świetle nawet przy pustym skrzyżowaniu. Natomiast przy dużym natężeniu ruchu długie sekwencje sprzyjają większemu rozpędzeniu się pojazdów, a tym samym przejechaniu ich większej ilości przez skrzyżowanie. Jest to efekt inercji występującej przy włączaniu się do ruchu stojącej kolumny pojazdów, oraz maleniu intensywności dopływów przy zbyt długim sygnale zezwalającym. Uzyskane wyniki są zgodne z zasadą minimalizacji średnich strat czasu pojazdów na skrzyżowaniu [5].



Rys. 5. Przepustowość skrzyżowania z sygnalizacją świetlną o sekwencjach opisanych w tab.1 w funkcji ilości pojazdów w układzie skrzyżowania

Fig. 5. The capacity of the crossroad with traffic lights described in the Tab. 1 vs. the number of vehicles

7. Wnioski końcowe

Zastosowanie automatów komórkowych pozwala na modelowanie ruchu ulicznego. Przedstawione w pracy przykłady prostych

skrzyżowań mogą być składową dowolnie złożonego modelu układu drogowego.

Zbudowane modele z rzeczywistymi parametrami ruchu drogowego mogą pozwolić na analizę różnych wariantów sterowania.

Przedstawione w pracy różne warianty sterowania stałoczasowego mogą służyć do zaprojektowania sygnalizacji stałoczasowej wieloprogramowej, lub mogą zostać zmodyfikowane do postaci cyklicznej akomodacyjnej, czy też acyklicznej. Zastosowanie automatów komórkowych może pozwolić na znalezienie optymalnego programu sygnalizacji w oparciu o model symulacyjny.

8. Literatura

- [1] Brockfeld E., Barlovic R., Schadschneider A., Schreckenberg M.: Optimizing traffic lights in a cellular automaton model for city traffic. *Physical Review E*, Volume: 64, Issue: 5, 2001.
- [2] Charney J. G., Fjörtoft R. and von Neumann J.: Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation, *Tellus*, Vol. 2, 1950, pp. 237-254.
- [3] Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A.: Statistical Physics of Vehicular Traffic and Some Related Systems. *Physics Reports* 329, 2000.
- [4] Chowdhury D., Schadschneider A.: Self-organization of traffic jams in cities: effects of stochastic dynamics and signals periods. *Physical Review E* vol 59, 1999, pp. 1311-1314.
- [5] Datka S., Suchorzewski W., Tracz M.: Inżynieria ruchu. WKŁ, Warszawa, 1999.
- [6] De Moor B., Maerivoet S.: Cellular Automata Models of Road Traffic *Physics Reports*, Volume 419, pp. 1-64.
- [7] Ding Z.J., Sun X.Y., Liu R.R., Wang Q.M., Wang B.H.: Traffic flow at a signal controlled T-Shaped intersection. *International Journal of modern physics C* Volume: 21, Issue: 3, 2010, pp. 443-455.
- [8] Gardner M.: Mathematical games – The fantastic combination of John Conway's new solitaire game „life”, *Scientific American*, October 1970.
- [9] Kułakowski K.: Automaty komórkowe. Akademia Gorniczo-Hutnicza im. St. Staszica, Ośrodek Edukacji Niestacjonarnej, Krakow 2000.
- [10] Langton C.G.: Studying Artificial Life With Cellular Automata *Physica* 22D, 1986, pp. 120-149.
- [11] Nagel K., Schreckenberg M.: A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 1992.
- [12] Von Neumann John and Arthur W. Burks: *Theory of Self-Reproducing Automata*. Univ. of Illinois Press, Urbana IL 1966.
- [13] Prigogine I., Herman R.: *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Elsevier, Amsterdam, 1971.
- [14] Rennard J. P.: Introduction to Cellular automata Ph.D 12/2000, <http://www.rennard.org/alife/english/acgb.pdf>
- [15] Sierpiński G., Macioszek E.: Pół wieku komputerowej symulacji potoków ruchu. *Infrastruktura transportu* 4, 2008, s. 52-55.
- [16] Tan H.L., Zhang C.Y., Kong L.J., Liu M.R.: Traffic flow influenced by traffic light and turning probability for a crossroad. *International Journal of Modern Physics B*. Volume: 18, 2004, Issue: 17-19, pp.: 2658-2662.
- [17] Wastavino L.A., Toledo B.A., Rogan J., Zarama R., Munoz V., Valdivia J.A.: Modeling traffic on crossroads. *Physica A Statistical Mechanics and Its Application*. Volume: 381, 2007, pp: 411-419.
- [18] Weisstein, Eric W.: Von Neumann Neighborhood. *Z Math World A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/vonNeumannNeighborhood.html>
- [19] Wolf D. E., Schreckenberg A.: *Traffic and Granular Flow*. Springer, Berlin, 1998.
- [20] Wolfram S.: *A New Kind of Science*, str. 876, Wolfram Media, 2002.
- [21] Wolfram S.: *Universality and complexity in cellular automata*, *Physica D* 10. 1984.

otrzymano / received: 12.10.2010

przyjęto do druku / accepted: 05.08.2011

artykuł recenzowany