
Modellierung eines Roboters

Nicolas Schäfer
Saarbrücken, 8. Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Modellierung eines Roboters	1
1.1 Two Link Revolute Manipulator	2
1.1.1 Formulierung der Massenmatrix	2
1.1.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix	4
1.1.3 Gravitationsterme	5
1.2 Einfaches Greifobjekt	6
2 Theorie optimaler Steuerungsprobleme	9
2.1 Herleitung des Minimumprinzips	10
2.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme	10
2.2.1 Finite time problem	10
2.2.2 infinite time problem	12
3 Numerische Lösungsverfahren	13
3.1 Gradientenverfahren	13
3.1.1 Sensitivity Approach	13
3.1.2 Praktische Implementierung	15
3.2 Riccati Regler	17
3.2.1 Implementierung	18
4 Linearisierung der Dynamik	19
4.1 Linearisierung des two link revolute manipulators	20

1 Modellierung eines Roboters

$$\begin{aligned}
 \underbrace{f - mg}_{\text{Kräftebilanz}} &= \underbrace{\frac{d}{dt} [m\dot{x}]}_{\text{Newtons 2nd Law}} = \frac{d}{dt} [m\dot{x}] \\
 f - \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{[mgx(t)]}_{\text{Potenzielle Energie } V} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \underbrace{\left[m \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 \right]}_{\text{kinetische Energie } T} \\
 f - \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \Rightarrow f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Wobei $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - mgx(t)$ gilt. Für generalisierte Koordinaten $\mathbf{q} = \theta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n$$

Für die kinetische Energie eines starren Körpers gilt:

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega}$$

Wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit und I der Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts ist. Für den Trägheitstensor gilt:

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r})[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]dV \quad (1)$$

Für ein Mehrkörpersystem mit generalisierten Koordinaten \mathbf{q} lässt sich die Gesamtenergie in kompakter Form schreiben als:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

wobei $M(\mathbf{q})$ die konfigurationsabhängige Massenmatrix ist, die alle Massen und Trägheiten der einzelnen Glieder erfasst. Für die Geschwindigkeiten gilt mittels der Kettenregel:

$$\mathbf{v} = J_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = J_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad J_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{und} \quad J_\omega = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Einsetzen in die kinetische Energie liefert:

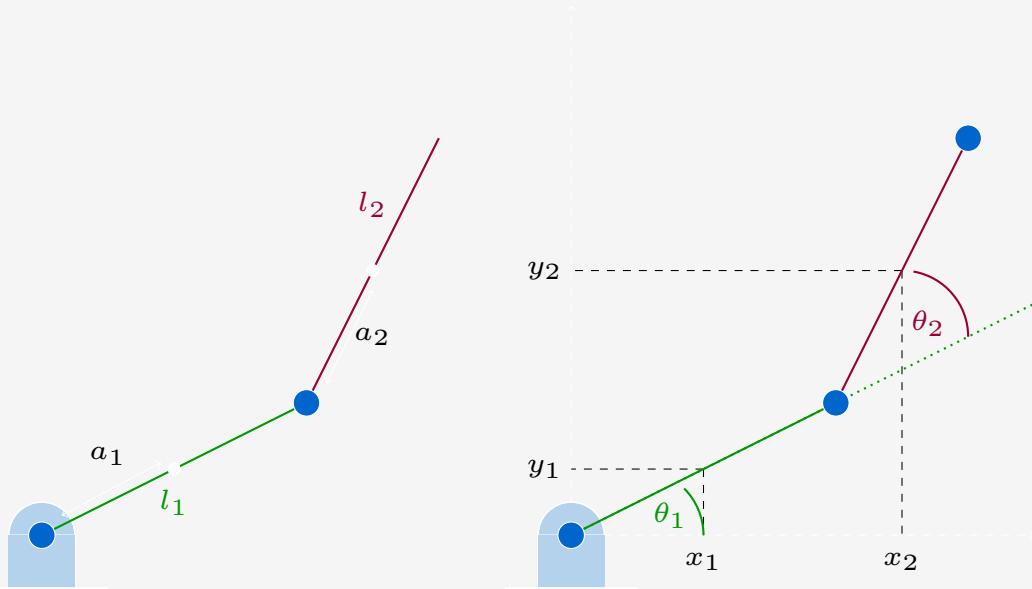
$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m(J_v\dot{\mathbf{q}})^T (J_v\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}(J_\omega\dot{\mathbf{q}})^T I (J_\omega\dot{\mathbf{q}}) \\
 &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T (mJ_v^T J_v)\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T (J_\omega^T I J_\omega)\dot{\mathbf{q}} \\
 &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{(mJ_v^T J_v + J_\omega^T I J_\omega)}_{M(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Summe der Energien aller n Glieder:

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I_i J_{\omega_i}$$

1.1 Two Link Revolute Manipulator

Wir bezeichnen $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ als die generalisierten Koordinaten des Systems. Die Schwerpunkte der beiden Links bezeichnen wir mit (x_1, y_1) und (x_2, y_2) . Die Abstände der Schwerpunkte von den Gelenken werden mit a_1 und a_2 bezeichnet.



Für die Koordinaten der Schwerpunkte gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ a_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Formulierung der Massenmatrix

Für die Massenmatrix gilt hier:

$$M(\mathbf{q}) = m_1 J_{v_1}^T J_{v_1} + J_{\omega_1}^T I_1 J_{\omega_1} + m_2 J_{v_2}^T J_{v_2} + J_{\omega_2}^T I_2 J_{\omega_2}$$

Hierbei bezeichnet J die Jacobi-Matrix, I_i das Trägheitstensor und m_i die Masse des i -ten Links.

$$J_{v_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial z_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) & 0 \\ a_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{v_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(x_2, y_2, z_2)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z_2}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für das Matrizenprodukt $J_{v_1}^T J_{v_1}$ gilt:

$$\begin{aligned} J_{v_1}^T J_{v_1} &= \begin{pmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) & a_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) & 0 \\ a_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 \sin^2(\theta_1) + a_1^2 \cos^2(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für das Matrizenprodukt $J_{v_2}^T J_{v_2}$ gilt:

$$\begin{aligned} J_{v_2}^T J_{v_2} &= \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) & (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) \\ (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) & a_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten setzen wir $\omega_1 = (0 \ 0 \ \theta'_1)^T$ und $\omega_2 = (0 \ 0 \ \theta'_1 + \theta'_2)^T$.

$$\begin{aligned} J_{\omega_1} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial (\omega_1)}{\partial (\theta'_1, \theta'_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta'_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta'_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ J_{\omega_2} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial (\omega_2)}{\partial (\theta'_1, \theta'_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta'_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta'_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für den Trägheitstensor I_i gilt:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int yx dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int zx dm & -\int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

Für symmetrische Körper (z.B. Zylinder, Kugel, Quader) gilt: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ also erhalten wir eine Diagonalmatrix.

$$I_i = \begin{pmatrix} \int_y^2 dm & 0 & 0 \\ 0 & \int x^2 dm & 0 \\ 0 & 0 & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \rho y^2 dV & 0 & 0 \\ 0 & \int_V \rho x^2 dV & 0 \\ 0 & 0 & \int_V \rho (x^2 + y^2) dV \end{pmatrix}$$

Für die Massenmatrix $M(\mathbf{q})$ gilt somit:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= m_1 J_{v_1}^T J_{v_1} + J_{\omega_1}^T I_1 J_{\omega_1} + m_2 J_{v_2}^T J_{v_2} + J_{\omega_2}^T I_2 J_{\omega_2} \\ &= m_1 \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{1,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1,zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{1,zz} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &\quad + m_2 \begin{pmatrix} (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) & (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) \\ (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) & a_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2,zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{2,zz} \\ 0 & 0 & I_{2,zz} \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 a_1^2 + I_{1,zz} + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_{2,zz} & m_2 (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_{2,zz} \\ m_2 (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_{2,zz} & m_2 a_2^2 + I_{2,zz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Trägheitselemente $I_{i,xx}$ und $I_{i,yy}$ sind nicht relevant. Für unser Model verwenden wir den Standardansatz eines dünnen Stabes der Länge l_i und Masse m_i . Somit gilt $z = y \approx 0$ und wir erhalten: $I_{i,xx} = I_{i,yy} = 0$

$$I_{i,zz} \approx \int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \underbrace{\rho}_{\frac{m_i}{l_i}} x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_i}{l_i} \cdot \left[\left(\frac{l_i}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l_i}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} m_i l_i^2 \Rightarrow I_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_i l_i^2 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix

Für die partiellen Ableitungen der kinetischen Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_2(t)^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2(t)^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} &= M_{11} \theta'_1 + M_{12} \theta'_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} &= M_{12} \theta'_1 + M_{22} \theta'_2 \end{aligned}$$

Für die zeitlichen Ableitungen der Größen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} &= \underbrace{\frac{d}{dt} M_{11}}_{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_1 + M_{11} \theta''_1 + \underbrace{\frac{d}{dt} M_{12}}_{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_2 + M_{12} \theta''_2 \\ &= \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + M_{11} \theta''_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2{}^2 + M_{12} \theta''_2 \\ &= \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2{}^2 + M_{11} \theta''_1 + M_{12} \theta''_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} &= \underbrace{\frac{d}{dt} M_{12}}_{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_1 + M_{12} \theta''_1 + \underbrace{\frac{d}{dt} M_{22}}_{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_2 + M_{22} \theta''_2 \\ &= \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + M_{12} \theta''_1 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2{}^2 + M_{22} \theta''_2 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_1{}^2 + \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \right] \theta'_2{}^2 \\ &\quad + M_{11} \theta''_1 + M_{12} \theta''_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_1{}^2 + \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_2{}^2 \\ &\quad + M_{12} \theta''_1 + D_{22} \theta''_2 \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \right]}_{C_{21}} \theta'_1 + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \right]}_{C_{22}} \theta'_2 + M_{12} \theta''_1 + M_{22} \theta''_2 \end{aligned}$$

Für die Einträge der Matrix C gilt

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 + \underbrace{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta'_2 = -2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 \\
 C_{12} &= \underbrace{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2}}_{=-m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta'_2 - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 = -m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 \\
 C_{21} &= \underbrace{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta'_2 = m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_1 \\
 C_{22} &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2}}_{=0} \theta'_2 + \underbrace{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 = 0
 \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 & -m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 \\ m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Gravitationsterme

Für die potenzielle Energie V gilt:

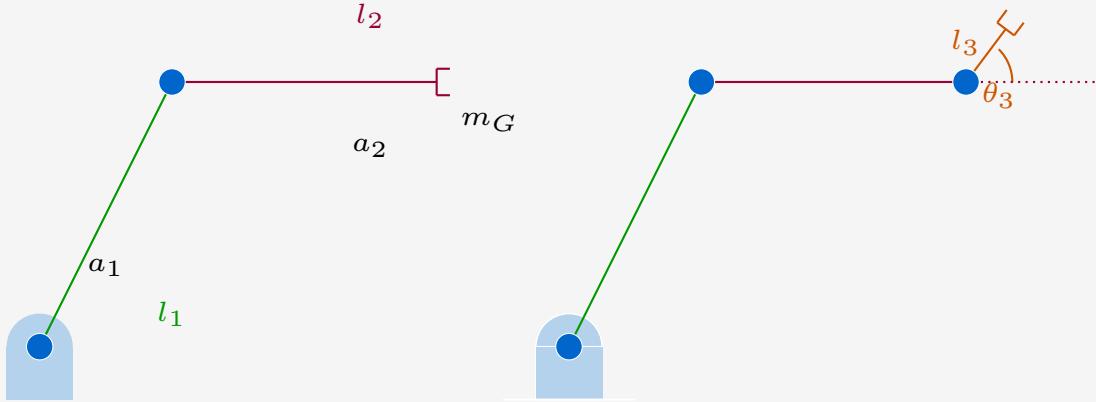
$$V = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 = m_1 g a_1 \sin(\theta_1) + m_2 g (l_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$G(\mathbf{q}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 g a_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{pmatrix}$$

1.2 Einfaches Greifobjekt

Wir modellieren ein Variables Greifobjekt, welches am Ende von Link 2 gehalten wird. Wir betrachten nachfolgend das Greifobjekt als Punktmasse mit Masse m_G .



Für die Masse von Link 2 inklusive Greifobjekt gilt:

$$m'_i = m_i + m_G$$

Für den Schwerpunkt von Link 2 inklusive Greifobjekt gilt:

$$\mathbf{a}'_2 = \frac{m_i \cdot \mathbf{a}_2 + m_G \cdot \mathbf{d}}{m_i + m_G} \quad \mathbf{d}(\theta_3) = \begin{pmatrix} l_2 + r \cdot \cos(\theta_3) \\ r \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Trägheitstensor von Link 2 inklusive Greifobjekt gilt:

$$I'_i = I_i + m_i \cdot S(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}'_i) + m_G \cdot S(\mathbf{d} - \mathbf{a}'_i) \quad S(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_y^2 + v_z^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_x v_y & v_x^2 + v_z^2 & -v_y v_z \\ -v_x v_z & -v_y v_z & v_x^2 + v_y^2 \end{pmatrix}$$

Wobei $S(\mathbf{v})$ die Steiner-Matrix ist. Wir erhalten die Matrix direkt aus der Definition des Trägheitstensors einer Punktmasse mit $\rho(\mathbf{r}) = m \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})$. Für die Verschiebungsvektoren gilt:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}'_2 = \frac{l_2}{m_2 + m_G} \begin{pmatrix} \frac{m_2}{2} + m_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Steiner-Matrizen gilt entsprechend

$$S(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\frac{l_2}{2} - a'_2]^2 & 0 \\ 0 & 0 & [\frac{l_2}{2} - a'_2]^2 \end{pmatrix} \quad S(\mathbf{d} - \mathbf{a}'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [l_2^2 - a'_2]^2 & 0 \\ 0 & 0 & [l_2^2 - a'_2]^2 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für den Trägheitstensor von Link 2 inklusive Greifobjekt:

$$I'_2 = \begin{pmatrix} I_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,yy} + m_2 \cdot \left[\frac{l_2}{2} - a'_2 \right]^2 + m_G \cdot \left[\frac{l_2}{2} - a'_2 \right]^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2,zz} + m_2 \cdot \left[\frac{l_2}{2} - a'_2 \right]^2 + m_G \cdot \left[\frac{l_2}{2} - a'_2 \right]^2 \end{pmatrix}$$

Für die Koordinaten des Schwerpunktes von Link 3 gilt:

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Jacobi-Matrizen für Link 3 bezüglich der Geschwindigkeiten:

$$J_{v_3} = \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{q}}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit des Links 3 setzen wir $\boldsymbol{\omega}_3 = (0 \ 0 \ \theta'_1 + \theta'_2 + \theta'_3)$ und erhalten für die Jacobi-Matrix bezüglich der Winkelgeschwindigkeit:

$$J_{\omega_3} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = m_1 a_1^2 + I_{1,zz} + m'_2 (L_1^2 + a'^2_2 + 2L_1 a'_2 \cos \theta_2) + I''_{2,zz}$$

$$M_{12} = M_{21} = m'_2 (a'^2_2 + L_1 a'_2 \cos \theta_2) + I''_{2,zz}$$

$$M_{22} = m'_2 a'^2_2 + I''_{2,zz}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = -m'_2 L_1 a'_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$C_{12} = -m'_2 L_1 a'_2 \sin \theta_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$C_{21} = m'_2 L_1 a'_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$C_{22} = -m'_2 L_1 a'_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = m_1 g a_1 \cos \theta_1 + m'_2 g (L_1 \cos \theta_1 + a'_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

$$G_2 = m'_2 g a'_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = \tau$$

$$m'_2 = m_2 + m_G$$

$$a'_2 = L_2 \cdot \frac{m_2/2 + m_G}{m_2 + m_G}$$

$$I''_{2,zz} = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 + \frac{m_2 m_G L_2^2}{4(m_2 + m_G)}$$

Parameter	Ohne Greifobjekt	Mit Greifobjekt
Masse Link 2	m_2	$m'_2 = m_2 + m_G$
Schwerpunkt Link 2	$a_2 = \frac{L_2}{2}$	$a'_2 = \frac{L_2}{m_2 + m_G} \left(\frac{m_2}{2} + m_G \right)$
Trägheitstensor Link 2	$I_{2,zz} = \frac{1}{12} m_2 L_2^2$	$I'_{2,zz} = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 + \frac{m_2 m_G L_2^2}{4(m_2 + m_G)}$

2 Theorie optimaler Steuerungsprobleme

Wir betrachten ein Steuerungsproblem und definieren die Value-Function V mittels

$$V(x(t), \textcolor{brown}{t}) := \min_{\mathbf{u}} \left\{ \int_{\textcolor{brown}{t}}^{t_f} L(s, x(s), \textcolor{red}{u}(s)) \, ds + \Phi(x(t_f)) \right\}$$

Satz 2.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung) Die Value-Function erfüllt

$$0 = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}} \left[L(t, x, u) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \cdot f(t, x, u) \right], \quad x \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq t_f$$

mit den Randbedingungen

$$V(x, \textcolor{violet}{t}_f) = \Phi(x(\textcolor{violet}{t}_f)) \quad V(x, \textcolor{brown}{t}_0) = \min_{\mathbf{u}} \int_{\textcolor{brown}{t}_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) \, dt + \Phi(x(t_f))$$

Beweis:

Die Value-Function $V(x, t)$ beschreibt die minimalen Kosten von Zustand x zum Endzeitpunkt t_f . Für $s \in [t, t_f]$ gilt

- Systemdynamik

$$x'(s) = f(x(s), u(s)), \quad x(t) = x$$

- Kostenfunktional

$$J(u) = \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \Phi(x(t_f))$$

Angenommen, wir wechseln zum Zeitpunkt $t + h$ zu einer optimalen Steuerung, dann gilt für unser Zielfunktional

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \int_{t+h}^{t_f} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \Phi(x(t_f)) \\ &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + V(x(t+h), t+h) \end{aligned}$$

Da $V(x(t), t)$ die minimalen Kosten vom Zustand x zur Zeit t angibt, gilt:

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + V(x(t+h), t+h) \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t) \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t)}{h} \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{d}{dt} V(x(t), t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x'(t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Durch Minimierung bezüglich u erhalten wir die Gleichheit und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x(t), \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \right) \end{aligned}$$

□

2.1 Herleitung des Minimumprinzips

Berechnung der totalen Ableitung der Value-Function V entlang der Charakteristik $x(t)$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = p(x, t) \cdot x'(t) - H \left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Berechnung der totalen Ableitung von $p = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial x \partial t}$$

Differenzieren der HJB bezüglich x liefert

$$0 = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Einsetzen der Gleichung liefert:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \left(-\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left(x'(t) - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Wir erhalten somit die bekannten, notwendigen Optimalitätsbedingungen:

$$p'(t) = -H_x, \quad x'(t) = f(t, x, u^*), \quad u^* = \operatorname{argmin}_u [L(t, x, u) + p(t, x)f(t, x, u)]$$

2.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme

2.2.1 Finite time problem

Gegeben sei das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u dt + \underbrace{(x(t_f) - x_f)^T S (x(t_f) - x_f)}_{x(t_f)^T S x(t_f) - 2x_f^T S x(t_f) + x_f^T S x_f} = V(t_0, x(t_0)) + x_f^T S x_f$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Der Term $x_f^T S x_f$ ist unabhängig von u und kann bei der Minimierung weggelassen werden.

$$V(x, t) = x^T K(t) x + 2s(t)^T x + r(t) \quad V(x, t_f) = x(t_f)^T K(t_f) x(t_f) + 2s(t_f)^T x(t_f) + r(t_f)$$

Wir erhalten für die Endwerte

$$K(t_f) = S, \quad s(t_f) = -Sx_f \quad r(t_f) = 0$$

$$V_t = x^T K'(t) x + 2s'(t)^T x + r'(t) \quad V_x = 2K(t)x + 2s(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} [x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)] = 2Ru + B^T \cdot V_x \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \textcolor{red}{V}_x$$

$$\begin{aligned} (u^*)^T Ru^* &= \left(-\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x \right)^T R \left(-\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (R^{-1} B^T \textcolor{red}{V}_x)^T R (R^{-1} B^T \textcolor{red}{V}_x) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2R^{-1} B^T (K(t)x + s(t)))^T R (2R^{-1} B^T (K(t)x + s(t))) \\ &= (K(t)x + s(t))^T \textcolor{brown}{B} \textcolor{orange}{R}^{-1} \textcolor{green}{R} \textcolor{brown}{R}^{-1} \textcolor{brown}{B}^T (K(t)x + s(t)) \\ &= \langle K(t)x + s(t), \textcolor{brown}{P}(2K(t)x + s(t)) \rangle \\ &= \langle K(t)x, PK(t)x \rangle + \underbrace{\langle K(t)x, Ps(t) \rangle}_{\langle s(t), \textcolor{brown}{P}K(t)x \rangle} + \langle s(t), PK(t)x \rangle + \langle s(t), Ps(t) \rangle \\ &= x^T K(t)^T PK(t)x + 2 \cdot s(t)^T PK(t)x + s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

mit $P = BR^{-1}B^T$ und $P^T = P$.

$$\begin{aligned} V_x^T \left(-\frac{1}{2} BR^{-1} B^T V_x \right) &= (2K(t)x + 2s(t))^T \left(-\frac{1}{2} BR^{-1} B^T (2K(t)x + 2s(t)) \right) \\ &= -2 \cdot (K(t)x + s(t))^T P(K(t)x + s(t)) \\ &= -2 \cdot x^T K(t)^T PK(t)x - 4 \cdot s(t)^T PK(t)x - 2 \cdot s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

$$V_x^T Ax = 2(K(t)x + s(t))^T Ax = 2x^T K(t)^T Ax + 2s(t)^T Ax = x^T (K(t)^T A + A^T K(t))x + 2s(t)^T Ax$$

$$-V_t = \min_u [x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)]$$

$$\begin{aligned} -V_t &= x^T Qx + (u^*)^T Ru^* + V_x^T \cdot \left(Ax - \frac{1}{2} BR^{-1} B^T V_x \right) \\ -x^T K'(t)x - 2\textcolor{blue}{s}'(\textcolor{blue}{t})^T x - \textcolor{red}{r}'(\textcolor{red}{t}) &= x^T (\textcolor{brown}{Q} - KPK + KA + A^T K)x - 2 \cdot ((\textcolor{blue}{P}K - A)^T s(\textcolor{blue}{t}))^T x - s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'(t) &= -Q + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - K(t)A - A^T K(t) \quad K(t_f) = S \\ s'(t) &= (K(t)BR^{-1}B^T - A^T)s(t) \quad s(t_f) = -Sx_f \\ r'(t) &= s(t)^T BR^{-1}B^T s(t) \quad r(t_f) = 0 \end{aligned}$$

2.2.2 infinite time problem

Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ betrachten wir das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{\infty} (x - x_f)^T Q(x - x_f) + u^T R u dt = V(x(t_0))$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Als Ansatz für die Value Funktion wählen wir erneut

$$V(x) = x^T K x + 2s^T x + r \Rightarrow V_x = 2Kx + 2s$$

Es gilt erneut

$$\frac{\partial}{\partial u} ((x - x_f)^T Q(x - x_f) + u^T R u + V_x^T (Ax + Bu)) = 2Ru + B^T V_x = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x$$

$$(x - x_f)^T Q(x - x_f) = x^T Q x - 2x_f^T Q x + x_f^T Q x_f$$

$$0 = x^T (Q - KPK + KA + A^T K)x - 2((PK - A)^T s + Qx_f)^T x - s^T (P)s + x_f^T Qx_f$$

3 Numerische Lösungsverfahren

3.1 Gradientenverfahren

$$u(t) + \epsilon \cdot \eta_u(t) \quad x(t) + \epsilon \cdot \eta_x(t), \eta_x(0) = 0$$

Um die Zustandsgleichung als Nebenbedingung zu integrieren, führen wir einen Lagrange-Multiplikator $p(t)$ ein. Das erweiterte Zielfunktional lautet dann:

$$J^{\text{aux}}(u, x, p) = \int_0^T [L(x(t), u(t), t) + p(t)(f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t))] dt + \Phi(x(T))$$

Wir betrachten kleine Variationen der Steuerungsfunktion und des Zustands:

wobei ε ein kleiner Parameter ist.

Die Variation von J^{aux} bezüglich ε bei $\varepsilon = 0$ ergibt:

$$\delta J^{\text{aux}} = \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u(t) + p(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u(t) - \delta \dot{x}(t) \right) \right] dt + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \delta x(T) = 0$$

Der Term mit $\delta \dot{x}(t)$ wird mittels Integration durch Teile umgeformt:

$$\int_0^T p(t)(-\delta \dot{x}(t)) dt = [-p(t)\delta x(t)]_0^T + \int_0^T \dot{p}(t)\delta x(t) dt$$

Da $\delta x(0) = 0$ ist (weil der Anfangszustand festgelegt ist), vereinfacht sich der Randterm zu:

$$-p(T)\delta x(T) + \int_0^T \dot{p}(t)\delta x(t) dt$$

Setzen wir die Ergebnisse in die Variation des erweiterten Zielfunktionalen ein:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} + p(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p}(t) \right) \delta x(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u(t) \right] dt + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p(T) \right) \delta x(T) = 0$$

Für die Gleichung muss jeder Koeffizient der unabhängigen Variation Null sein. Daher ergeben sich die adjungierten Gleichungen:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x} - p(t) \frac{\partial f}{\partial x} \\ p(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \end{cases}$$

Der Gradient des Zielfunktionalen $J(u)$ ist gegeben durch:

$$\frac{\delta J}{\delta u(t)} = \frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u}$$

3.1.1 Sensitivity Approach

Erweitertes Zielfunktional

$$\begin{aligned}
J^{aux}(u) &= \int_0^T \varphi(t, x, u) + p(t) \cdot (f(t, x, u) - x'(t)) dt + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T \underbrace{\varphi(t, x, u) + p(t) \cdot f(t, x, u)}_{=H(t)} dt - \underbrace{\int_0^T p(t)x'(t) dt}_{=-[p(t)x(t)]_0^T + \int_0^T p'(t)x(t) dt} + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t) dt - [p(t)x(t)]_0^T + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t) dt - p(T)x(T) + \textcolor{blue}{p(0)x(0)} + \Phi(x(T))
\end{aligned}$$

Der Term $\textcolor{blue}{p(0)x(0)}$ ist unabhängig von u und fällt bei der Optimierung weg. Bilden der Gateau Ableitung in u entlang h liefert

$$\begin{aligned}
J'(u, h) &= \int_0^T H_x[t] \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) + p'(t)S(t) dt - p(T)S(T) + \Phi_x(x(T))S(1) \\
&= \int_0^T (\underbrace{H_x[t] + p'(t)}_{=0} \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) dt + (\underbrace{\Phi_x(x(T)) - p(T)}_{=0}) \cdot S(T) \\
&= \int_0^T H_u[t] \cdot h(t)
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit $J'(u) = H_u[t]$

3.1.2 Praktische Implementierung

Beispiel 3.1 Wir betrachten das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 dt \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

welches in einer Aufgabe analytisch gelöst ist. Für den Gradienten gilt

$$\nabla J(u) = H_u = \frac{\partial}{\partial u} (x(t) + u(t)^2 + p(t) \cdot (x(t) + u(t) + 1)) = 2u(t) + p(t)$$

Wir verwenden das explizite Euler-Verfahren zur Diskretisierung der Gleichungen aus dem Minimumsprinzip:

- Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, 1]$ und der Funktionen mittels $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \mathbf{u}^k = (u_i^k)_{i=0}^N, \quad \mathbf{x}^k = (x_i^k)_{i=0}^N, \quad \mathbf{t}^k = (i \cdot h)_{i=0}^N,$$

- Armijo Suchrichtung $\alpha^{(k)}$: Für $0 \leq m < M = 10$, $c = 10^{-4}$, $\beta = 0.5 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} u^{neu} &= u^k + \beta^m \cdot d^{(k)} \\ J(u^k) &= \int_0^1 x^k(t) + (u^k(t))^2 dt \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^k + (u_i^k)^2 \\ J(u^{neu}) &= \int_0^1 x^{neu}(t) + (u^{neu}(t))^2 dt \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^{neu} + (u_i^{neu})^2 \\ J(u^{neu}) &\leq J(u^k) - c \cdot \beta^m \cdot h \cdot \sum_{i=0}^N (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)}) (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)}) \\ \Leftrightarrow J(u^{neu}) &\leq J(u^k) - \|d^{(k)}\|^2 \cdot c \cdot \beta^m \Rightarrow \alpha^{(k)} = \beta^m \end{aligned}$$

- Gradientenverfahren: Für $0 \leq k < MaxIter$, $\epsilon = 10^{-6}$:

- Forward Integration $x'(t) = x(t) + u(t) + 1$

$$x_{i+1}^k = x_i^k + h \cdot (x_i^{(k)} + u_i^{(k)} + 1) \quad x_0^{(k)} = 0$$

- Backward Integration $p'(t) = -(1 + p(t))$

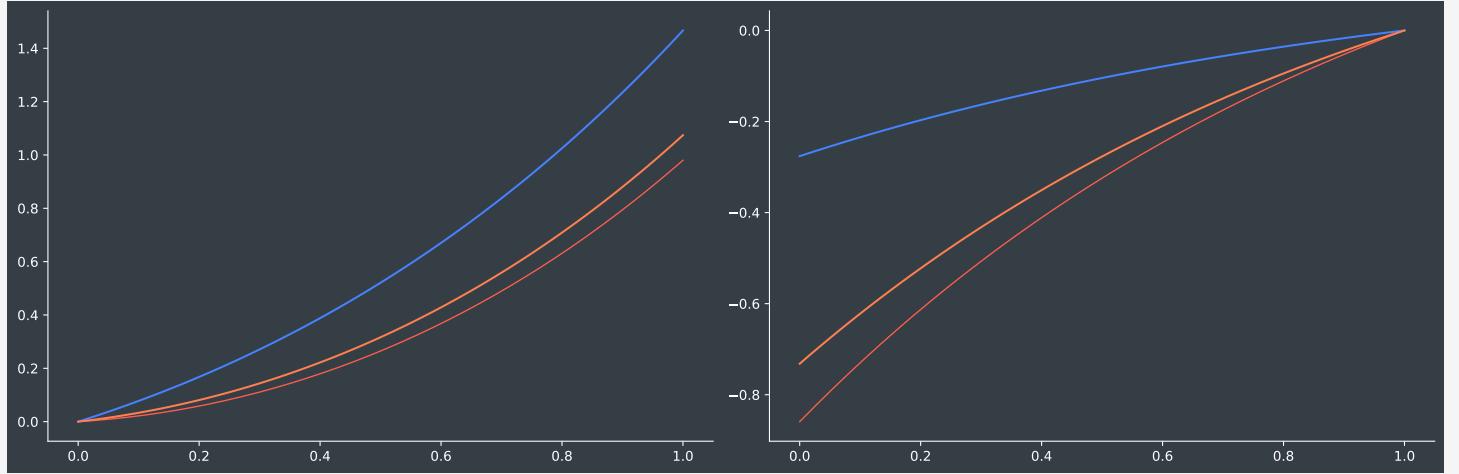
$$p_i^k = p_{i+1}^k + h \cdot (1 + p_{i+1}^k) \quad p_N^{(k)} = \partial_x \Phi(x(1)) = 0$$

- Berechnung des Gradienten $\nabla J = H_u = 2u + p$

$$d^{(k)} = -(2 \cdot u^{(k)} + p^{(k)})$$

- Berechnung der Schrittweite $\alpha^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot d^{(k)} \\ \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| &< \epsilon \Rightarrow u^{\text{final}} = u^{(k+1)}, \text{ sonst } k \rightarrow k + 1 \end{aligned}$$



Zustand x und Steuerung u mit den Iterationen 100, 500 und der analytischen Lösung

3.2 Riccati Regler

Es gilt

$$F(K) := Q - KPK + KA + A^T K \Rightarrow F(K) = 0$$

Definition 3.2 Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dann definieren wir

$$\text{vec}(X) = (X_{11} \ X_{21} \ \dots \ X_{n1} \ X_{12} \ X_{22} \ \dots \ X_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times r}$, dann definieren wir

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1m}B \\ A_{12}B & \dots & A_{2m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & \dots & A_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nr}$$

Es gilt die Formel

$$\text{vec}(MXN) = (N^T \otimes M)\text{vec}(X)$$

Betrachten wir den Fall $M = 1$ und $N = A$ bzw. $N = 1$ und $M = A^T$ erhalten wir mit $X = K$

$$\text{vec}(KA) = (A^T \otimes 1)\text{vec}(K) \quad \text{vec}(A^T K) = (1 \otimes A^T)\text{vec}(K)$$

Anwendung auf unser Problem liefert

$$\underbrace{\text{vec}(F(K))}_{f(x=\text{vec}(K))} = \underbrace{\text{vec}(Q)}_q - \underbrace{\text{vec}(KPK)}_{g(x=\text{vec}(K))} + \underbrace{\text{vec}(KA)}_{(A^T \otimes 1)\text{vec}(K)} + \underbrace{\text{vec}(A^T K)}_{(1 \otimes A^T)\text{vec}(K)}$$

Durch Einführung von $x = \text{vec}(K) \in \mathbb{R}^{n^2}$ erhalten wir

$$f(x) = q - g(x) + (A^T \otimes 1)x + (1 \otimes A^T)x$$

Da $(KP)^T = KP$ gilt

$$g(\text{vec}(K)) = \text{vec}(KPK) = (1 \otimes KP)\text{vec}(K)$$

Wir betrachten die Variation $K(\epsilon) = K + \epsilon \cdot \bar{K}$ und die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ mit

$$\begin{aligned} h(\epsilon) &:= g(\text{vec}(K(\epsilon))) = \text{vec}(K(\epsilon)PK(\epsilon)) \\ &= \text{vec}((K + \epsilon \cdot \bar{K})P(K + \epsilon \cdot \bar{K})) \\ &= \text{vec}(KPK + \epsilon KPK\bar{K} + \epsilon \bar{K}PK + \epsilon^2 \bar{K}PK\bar{K}) \end{aligned}$$

Ableitung nach ϵ und Auswertung in $\epsilon = 0$ ergibt

$$h'(0) = \frac{d}{d\epsilon} g(\text{vec}(K + \epsilon \cdot \bar{K})) \Big|_{\epsilon=0} = \text{vec}(KPK + \bar{K}PK) = \text{vec}(KPK) + \text{vec}(\bar{K}PK)$$

Umschreiben als Matrix-Vektor-Produkt

$$\text{vec}(KP \cdot \bar{K} \cdot 1) = (1 \otimes KP)\text{vec}(\bar{K}) \quad \text{vec}(1 \cdot \bar{K} \cdot PK) = ((PK)^T \otimes 1)\text{vec}(\bar{K})$$

Wir erhalten als Ableitung

$$g'(x) = (1 \otimes KP) + ((PK)^T \otimes 1) \Rightarrow f'(x) = -(1 \otimes KP) - ((PK)^T \otimes 1) + (A^T \otimes 1) + (1 \otimes A^T)$$

3.2.1 Implementierung

```
def vec(X):
    return X.reshape(-1, order='F')

def unvec(v, n):
    return v.reshape((n, n), order='F')
```

Hilfsfunktionen für die Vektorisierung

```
# Newton Kleinman Verfahren
def solv_CARE(A,B,R,Q,tol=1e-8,max_iter=50):
    n = A.shape[0]
    I = np.eye(n)
    q = vec(Q)
    L = np.kron(I, A.T) + np.kron(A.T, I)
    P = B @ np.linalg.solve(R, B.T)
    # Startwert KO hier Einheitsmatrix
    K = I
    x = vec(K)

    for i in range(max_iter):
        X = K @ P #KP
        vec_KPK = np.kron(I,X) @ x
        f = q - vec_KPK + L @ x
        Dg = np.kron(I,X)+np.kron(X,I)
        Df = L - Dg
        dx = np.linalg.solve(Df, -f)
        x_new = x + dx
        # Abbruch
        if np.linalg.norm(dx) / np.linalg.norm(x_new) < tol:
            x=x_new
            break

    x = x_new
    K = unvec(x, n)
return K
```

Erklärung des Codes

Stabilität der Startlösung hier Gershgorin Kreise und Stabilität erklären

Für Y mit $RY = B^T \Rightarrow Y = B^{-1}B^T$ und $B \cdot Y = P$

4 Linearisierung der Dynamik

Wir definieren den Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$ und schreiben unsere Dynamikgleichung wie folgt um

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{u} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})] \end{bmatrix}}_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}$$

Wir linearisieren um den Arbeitspunkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &\approx \underbrace{f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{A(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)}_{B(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)} \\ &= A(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\bar{\mathbf{x}} + B(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\bar{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Wobei $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$ und $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*$ gilt. Für die Ableitung der Größen gilt

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} - \underbrace{\frac{d\mathbf{x}^*}{dt}}_{=0} = \dot{\mathbf{x}}(t) \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}(t) = A\bar{\mathbf{x}}(t) + B\bar{\mathbf{u}}(t)$$

Somit ist die Rückführung von $\bar{\mathbf{x}}$ auf $\mathbf{0}$ äquivalent zu der Rückführung von \mathbf{x} auf den Arbeitspunkt \mathbf{x}^* . Wir definieren $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) := \mathbf{u} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})$ und wenden die Produktregel auf den Term $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ an, um die Ableitung von f nach \mathbf{x} zu bestimmen.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) \right] \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{q}} + M(\mathbf{q}) \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$$

Werten wir h im Arbeitspunkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ aus, so gilt $\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, somit fällt der erste Term weg und wir erhalten

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{q}}}_{=0} + M(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{x}} = M^{-1}(\mathbf{q}^*) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$$

Für die Ableitung der Funktion $h = \mathbf{u} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})$ in $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial h}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} & -C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} (\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{0}) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} & -C(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so gilt für die Ableitung von f nach \mathbf{x} im Arbeitspunkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$

$$A(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M^{-1}(\mathbf{q}^*) \begin{bmatrix} -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix} & M^{-1}(\mathbf{q}^*) [-C(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})] \end{bmatrix}$$

Für die Ableitung von f nach \mathbf{u} gilt

$$B(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix}$$

Satz 4.1 Gegeben sei die Dynamikgleichung

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

und ein Arbeitspunkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ mit $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$. Dann gilt für die Linearisierung:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\mathbf{x} + B(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ M^{-1}(\mathbf{q}^*) \begin{bmatrix} -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix} & M^{-1}(\mathbf{q}^*) [-C(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})] \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

4.1 Linearisierung des two link revolute manipulators

Wir definieren $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $x_3 = \dot{q}_1$, $x_4 = \dot{q}_2$ und erhalten $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = M(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{u} - C(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})]$$

Für die Corioliskraft im Punkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, bzw. für die Matrix $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0})$ gilt:

$$C(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 a_2 \sin(q_2^*) \cdot 0 \\ m_2 l_1 a_2 \sin(q_2^*) \cdot 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die Ableitung von h bzgl. \mathbf{x} im Punkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ und erhalten

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} & -\underbrace{C(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})}_{=\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial q_1}(\mathbf{q}^*) & -\frac{\partial G_1}{\partial q_2}(\mathbf{q}^*) & 0 & 0 \\ -\frac{\partial G_2}{\partial q_1}(\mathbf{q}^*) & -\frac{\partial G_2}{\partial q_2}(\mathbf{q}^*) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Für die konkrete Matrix $A = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ gilt

$$A(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} & \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} & \frac{\partial f_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} & \frac{\partial f_3}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} & \frac{\partial f_4}{\partial u_3} & \frac{\partial f_4}{\partial u_4} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -M^{-1}(\mathbf{q}^*) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Für die konkrete Matrix $B = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ gilt

$$B(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ M^{-1}(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix}$$

Für die konkret Berechnung der partiellen Ableitungen der Gravitationskraft gilt

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_1 g a_1 \cos(\textcolor{green}{q}_1) + m_2 g (l_1 \cos(\textcolor{green}{q}_1) + a_2 \cos(\textcolor{green}{q}_1 + \textcolor{red}{q}_2)) \\ m_2 g (l_1 \cos(\textcolor{green}{q}_1) + a_2 \cos(\textcolor{green}{q}_1 + \textcolor{red}{q}_2)) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial q_1} & \frac{\partial G_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial q_1} & \frac{\partial G_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -m_1 g a_1 \sin(\textcolor{green}{q}_1) - m_2 g (l_1 \sin(\textcolor{green}{q}_1) + a_2 \sin(\textcolor{green}{q}_1 + \textcolor{red}{q}_2)) & -m_2 g a_2 \sin(\textcolor{green}{q}_1 + \textcolor{red}{q}_2) \\ -m_2 g (l_1 \sin(\textcolor{green}{q}_1) + a_2 \sin(\textcolor{green}{q}_1 + \textcolor{red}{q}_2)) & -m_2 g a_2 \sin(\textcolor{green}{q}_1 + \textcolor{red}{q}_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Massenmatrix $M(\mathbf{q})$ ist gegeben durch den Ausdruck:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 a_1^2 + I_{1,zz} + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)) + I_{2,zz} & m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)) + I_{2,zz} \\ m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)) + I_{2,zz} & m_2 a_2^2 + I_{2,zz} \end{bmatrix}$$

Für die Inverse der Massenmatrix M^{-1} gilt analytisch mittels $F_{\mathbf{q}_2} := m_2 l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)$

$$\begin{aligned} \det(M) &= M_{11} M_{22} - M_{12}^2 \\ &= [m_1 a_1^2 + I_{1,zz} + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)) + I_{2,zz}] \cdot (m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) \\ &\quad - (m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)) + I_{2,zz})^2 \\ &= \left[m_1 a_1^2 + I_{1,zz} + I_{2,zz} + m_2 l_1^2 + m_2 a_2^2 + 2 \underbrace{m_2 l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)}_{F_{\mathbf{q}_2}} \right] (m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) \\ &\quad - (m_2 a_2^2 + I_{2,zz})^2 - 2 \underbrace{m_2 l_1 a_2 \cos(\mathbf{q}_2)}_{F_{\mathbf{q}_2}} \cdot (m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) - F_{\mathbf{q}_2}^2 \\ &= (m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) \cdot \left[m_1 a_1^2 + I_{1,zz} + m_2 l_1^2 + \underbrace{I_{2,zz} + m_2 a_2^2 - m_2 a_2^2 - I_{2,zz}}_{=0} \right] - \underbrace{(m_2 l_1 a_2)^2 (1 - \sin(\mathbf{q}_2)^2)}_{F_{\mathbf{q}_2}^2} \\ &= (m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) \cdot (m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 l_1^2) - (m_2 l_1 a_2)^2 + (m_2 l_1 a_2)^2 \sin(\mathbf{q}_2)^2 \\ &= (m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) \cdot (m_1 a_1^2 + I_1) + \underbrace{(m_2 a_2^2 + I_{2,zz}) \cdot m_2 l_1^2}_{m_2^2 l_1^2 a_2^2 + m_2 l_1^2 I_{2,zz}} - (m_2 l_1 a_2)^2 + (m_2 l_1 a_2)^2 \sin(\mathbf{q}_2)^2 \\ &= (m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 l_1^2) \cdot (m_2 a_2^2 + I_2) + m_2 l_1^2 I_{2,zz} + m_2^2 l_1^2 a_2^2 \sin(\mathbf{q}_2)^2 \end{aligned}$$

Für die Inverse der Massenmatrix gilt somit

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} m_2 a_2^2 + I_2 & -(m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\mathbf{x}_2)) + I_2) \\ -(m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\mathbf{x}_2)) + I_2) & m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\mathbf{x}_2)) + I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\mathbf{x}_2)) + I_2 \\ M_{12} &= m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\mathbf{x}_2)) + I_2 \\ M_{21} &= M_{12} \\ M_{22} &= m_2 a_2^2 + I_2 \end{aligned}$$

