
Modellierung eines Roboters

Nicolas Schäfer
Saarbrücken, 19. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Modellierung	1
1.1 Two Link Revolute Manipulator	1
1.1.1 Herleitung der kinetischen Energie	2
1.1.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix	3
1.1.3 Gravitationsterme	4
1.1.4 Simulation gegebener Steuerung	5
2 Optimale Steuerungsprobleme	6
2.1 Linear-Quadratische Probleme	9
3 Numerische Lösungsverfahren	13
3.1 Gradientenverfahren	13
3.1.1 Sensitivity Approach	13
3.1.2 Praktische Implementierung	15
3.2 Shooting Methods	17
3.3 Riccati Regler	19
3.3.1 Implementierung	20
4 Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung	21
4.1 Herleitung des Minimumprinzips	22
4.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme	22
4.2.1 Finite time problem	22
4.2.2 infinite time problem	24
5 Paper Lin	24

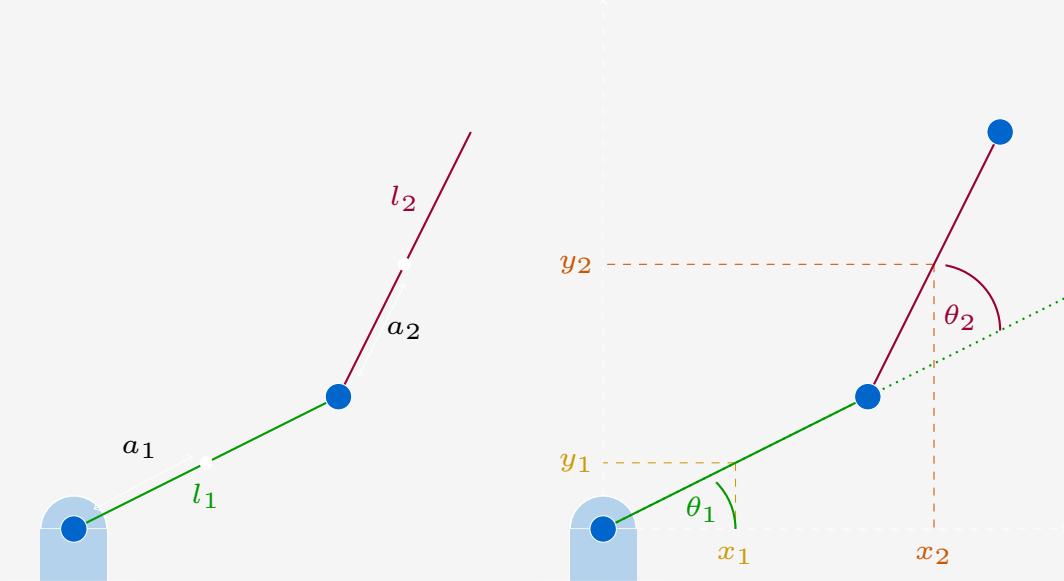
1 Modellierung

$$\begin{aligned}
 \underbrace{f - mg}_{\text{Kräftebilanz}} &= \underbrace{mx''}_{\text{Newtons 2nd Law}} = \frac{d}{dt} [m\mathbf{x}'(t)] \\
 f - \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{[mgx(t)]}_{\text{Potenzielle Energie } V} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \underbrace{\left[m \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t)^2 \right]}_{\text{kinetische Energie } T} \\
 f - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}'} &\Rightarrow f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}'} - \frac{\partial L}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Wobei $L = T - V = \frac{1}{2}m\mathbf{x}'(t)^2 - mgx(t)$ gilt. Für generalisierte Koordinaten $\mathbf{q} = \theta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n$$

1.1 Two Link Revolute Manipulator



$$x_1 = a_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad y_1 = a_1 \cdot \sin(\theta_1)$$

Gelenk 2 befindet sich in $(l_1 \cos(\theta_1), l_1 \sin(\theta_1))$. Der Schwerpunkt von Link 2 ist zusätzlich noch a_2 vom Gelenk 2 entfernt und besitzt eine absolute Winkelausrichtung $\theta_1 + \theta_2$. Daher:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= l_1 \cdot \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 y_2 &= l_1 \cdot \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung des Systems

$$D(\theta)\theta'' + C(\theta, \theta')\theta' + G(\theta) = \tau$$

1.1.1 Herleitung der kinetischen Energie

Für die translatorische Energie von Link 1 gilt:

$$T_{1,trans} = \frac{m_1}{2} \cdot (x'_1(t)^2 + y'_1(t)^2) = \frac{m_1}{2} \cdot ((-a_1 \sin(\theta_1)\theta'_1)^2 + (a_1 \cos(\theta_1)\theta'_1)^2) = \frac{m_1}{2} \cdot a_1^2 \cdot \theta'_1(t)^2$$

Es gilt $T_1 = T_{1,trans} + T_{1,rot}$ und somit

$$T_1 = \frac{m_1}{2} a_1^2 \theta'_1(t)^2 + \frac{I_1}{2} \theta'_1(t)^2 = \frac{m_1 a_1^2 + I_1}{2} \theta'_1(t)^2$$

Analog für die Energie an Link 2 gilt:

$$T_2 = \underbrace{\frac{m_2}{2} \cdot (x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2)}_{\text{TRANSLATORISCH}} + \underbrace{\frac{I_2}{2} \cdot (\theta'_1(t) + \theta'_2(t))^2}_{\text{ROTATORISCH}}$$

$$T(\theta_1, \theta'_1, \theta_2, \theta'_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta'_1 & \theta'_2 \end{pmatrix} D(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} D_{11} \theta'_1(t)^2 + D_{12} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} D_{22} \theta'_2(t)^2$$

$$\begin{aligned} x'_2(t) &= -l_1 \sin(\theta_1)\theta'_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\theta'_1 + \theta'_2) \\ y'_2(t) &= l_1 \cos(\theta_1)\theta'_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\theta'_1 + \theta'_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2 &= \left[-l_1 \sin(\theta_1)\theta'_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\theta'_1 + \theta'_2) \right]^2 + \left[l_1 \cos(\theta_1)\theta'_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\theta'_1 + \theta'_2) \right]^2 \\ &= l_1^2 \sin(\theta_1)^2 \theta'^2_1 + 2l_1 a_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) \theta'_1 (\theta'_1 + \theta'_2) + \underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 (\theta'_1 + \theta'_2)^2}_{a_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 \cdot (\theta'^2_1 + 2\theta'_1 \theta'_2 + \theta'^2_2)} \\ &\quad + l_1^2 \cos(\theta_1)^2 \theta'^2_1 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2) \theta'_1 (\theta'_1 + \theta'_2) + \underbrace{a_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)^2 (\theta'_1 + \theta'_2)^2}_{a_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)^2 \cdot (\theta'^2_1 + 2\theta'_1 \theta'_2 + \theta'^2_2)} \\ &= \left[\underbrace{l_1^2 \sin(\theta_1)^2 + l_1^2 \cos(\theta_1)^2}_{=l_1^2} + \underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 + a_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)^2}_{=a_2^2} \right] \theta'^2_1 \\ &\quad + 2l_1 a_2 \theta'_1 \cdot \left[\underbrace{\sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2)}_{\cos(\theta_2)} \right] (\theta'_1 + \theta'_2) \\ &\quad + 2 \cdot \left[\underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 + a_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)^2}_{=a_2^2} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 + a_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)^2}_{=a_2^2} \right] \theta'^2_2 \\ &= \left[l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2) \right] \theta'^2_1 + \left[2a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2) \right] \theta'_1 \theta'_2 + a_2^2 \theta'^2_2 \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie gilt somit

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{m_1 a_1^2 + I_1}{2} \theta'_1{}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2) + \frac{I_2}{2} \cdot \underbrace{(\theta'_1 + \theta'_2)^2}_{\theta'_1{}^2 + 2\theta'_1\theta'_2 + \theta'_2{}^2} \\
&= \left[\frac{m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2}{2} \right] \theta'_1{}^2 + \left[\frac{m_2 \cdot (2a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + 2I_2}{2} \right] \theta'_1 \theta'_2 \\
&\quad + \left[\frac{m_2 a_2^2 + I_2}{2} \right] \theta'_2{}^2 \\
&= \frac{1}{2} (\theta'_1 \quad \theta'_2) \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 & m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 \\ m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 & m_2 a_2^2 + I_2 \end{pmatrix}}_{D(\theta_1, \theta_2) = D(\theta)} \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} D_{11} \theta'_1(t)^2 + D_{12} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} D_{22} \theta'_2(t)^2
\end{aligned}$$

1.1.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix

Es gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_2(t)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2(t)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'_1} = D_{11} \theta'_1 + D_{12} \theta'_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'_2} = D_{12} \theta'_1 + D_{22} \theta'_2$$

Für die zeitlichen Ableitungen der Größen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} &= \underbrace{\frac{d}{dt} D_{11}}_{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_1 + D_{11} \theta''_1 + \underbrace{\frac{d}{dt} D_{12}}_{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_2 + D_{12} \theta''_2 \\
&= \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + D_{11} \theta''_1 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2{}^2 + D_{12} \theta''_2 \\
&= \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2{}^2 + D_{11} \theta''_1 + D_{12} \theta''_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} &= \underbrace{\frac{d}{dt} D_{12}}_{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_1 + D_{12} \theta''_1 + \underbrace{\frac{d}{dt} D_{22}}_{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_2 + D_{22} \theta''_2 \\
&= \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1{}^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + D_{12} \theta''_1 + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2{}^2 + D_{22} \theta''_2
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \right] \theta'^2_1 + \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \right] \theta'^2_2 \\ &\quad + D_{11} \theta''_1 + D_{12} \theta''_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta'^2_1 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \right] \theta'^2_2 + D_{11} \theta''_1 + D_{12} \theta''_2 \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_2 \right]}_{C_{11}} \theta'_1 + \underbrace{\left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_2 \right]}_{C_{12}} \theta'_2 + D_{11} \theta''_1 + D_{12} \theta''_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \right] \theta'^2_1 + \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \right] \theta'^2_2 \\ &\quad + D_{12} \theta''_1 + D_{22} \theta''_2 \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \right]}_{C_{21}} \theta'_1 + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2 + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \right]}_{C_{22}} \theta'_2 + D_{12} \theta''_1 + D_{22} \theta''_2 \end{aligned}$$

Für die Einträge der Matrix C gilt

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 + \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta'_2 = -2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 \\ C_{12} &= \underbrace{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}}_{=-m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta'_2 - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_2 = -m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 \\ C_{21} &= \underbrace{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta'_1 = m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_1 \\ C_{22} &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}}_{=0} \theta'_2 + \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta'_1 = 0 \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$C \cdot \theta'(t) = \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 & -m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_2 \\ m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Gravitationsterme

Wählen wir $y = 0$ als Nullhöhe, so ist

$$\begin{aligned} V &= m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 \\ &= m_1 g a_1 \sin(\theta_1) + m_2 g (l_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= m_1 g a_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

1.1.4 Simulation gegebener Steuerung

- Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, 1]$ und der Funktion mittels $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \left(u_i \right)_{i=0}^N = \left(\tau_1^i \right)_{i=0}^N$$

•

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix} = D^{-1} \left[u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]$$

- Dynamisches System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix}}_{x'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ D^{-1} \left[u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right] \\ D^{-1} \left[u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right] \end{pmatrix}}_{f(x, u)} \Rightarrow x_{i+1} = x_i + h \cdot f(x_i, u_i)$$

2 Optimale Steuerungsprobleme

Definition 2.1 (Optimales Steuerungsproblem) Gegeben seien

- Systemdynamik:

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

wobei $x(t) \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor und $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ die Steuerung ist.

- Zielfunktional:

$$J(u) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt$$

- Ziel: Finde die Steuerung $u(t)$, die $J(u)$ minimiert, also

$$J(\textcolor{red}{u}^*) = \min_u J(u) \Rightarrow \textcolor{red}{u}^* = \arg \min_u J(u)$$

Zielfunktional:

$$\min J[u] = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(t, x, u) dt$$

Systemdynamik:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0$$

Es gilt mittels Kettenregel:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_x \cdot x' + \Phi_t \right)$$

- Augmentierte Lagrange Funktion

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\varphi(t, x, u) + \Phi_x \cdot x' + \Phi_t + p \cdot (x' - f(x, u))}_{=L(t, x, x', u)} dt$$

- Für den Kozustand gilt $L_{x'} = p(t)$
- Optimalitätsbedingung mit $H(t, x, u, p) = x' \cdot p - L$

$$x'(t) = H_p \quad p'(t) = -H_x \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

- Diese Bedingungen geben uns die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das optimale Steuerungsproblem

Satz 2.2 (Minimumprinzip) Sei $\mathbf{H} = L(t, x, u) + p(t)^T \cdot f(t, x, u)$ die Hamilton-Funktion

- Es gilt $u^* = \arg \min \mathbf{H}(x^*, u, p^*)$

$$p'(t) = -H_x \quad \mathbf{H}_u = 0 \quad x'(t) = H_p$$

- Weiter gilt die Transversalitätsbedingung

$$\Phi_x(t = t_f) = p(t = t_f)$$

- Für freie Endzeit t_f gilt

$$\mathbf{H}(t = t_f) + \Phi_t(t = t_f) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathbf{H}(x, u, p)}_{\text{für } \mathbf{H}_t=0} = 0$$

Beispiel 2.3 (Testbeispiel) Löse das folgende optimale Steuerungsproblem

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 dt \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Wir definieren die Hamiltonfunktion $\mathbf{H} = x + u^2 + p \cdot (x + u + 1)$. Das Minimumsprinzip liefert

$$p'(t) = -\mathbf{H}_x = -1 - p \quad \mathbf{H}_u = 0 = 2u + p \Rightarrow u = -\frac{p}{2}$$

Die adjungierte Gleichung ist trennbar

$$\frac{dp}{dt} = -1 - p \Rightarrow \underbrace{\int \frac{dp}{1+p}}_{\log(p+1)} = \underbrace{\int -1 dt}_{=-t+K} \Rightarrow p(t) = -1 + C \cdot e^{-t}, \quad C = e^K$$

Für die optimale Steuerung gilt somit $u(t) = -\frac{1}{2}p(t) = \frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}$. Den optimalen Zustand berechnen wir aus der Systemdynamik

$$x'(t) = x(t) + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}}_{=u(t)} + 1 \Rightarrow x'(t) = 1 \cdot x(t) + \frac{3}{2} - \frac{C}{2} e^{-t}$$

Das ist eine lineare inhomogene Gleichung. Es gilt $A(t) = \int_0^t 1 ds = t$ und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cdot e^{\mathbf{A}(t)} + e^{\mathbf{A}(t)} \cdot \int_0^t \left(\frac{3}{2} - \frac{C}{2} e^{-s} \right) \cdot e^{-\mathbf{A}(s)} ds \\ &= e^t \cdot \int_0^t \frac{3}{2} \cdot e^{-s} - \frac{C}{2} e^{-s} \cdot e^{-s} ds \\ &= e^t \cdot \left[-\frac{3}{2} e^{-s} + \frac{C}{4} e^{-2s} \right]_0^t \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{C}{4} e^{-t} + \frac{3}{2} e^t - e^t \frac{C}{4} \end{aligned}$$

Da $x(1)$ frei ist und kein Endkostenterm vorliegt gilt $p(1) = 0$.

$$p(1) = -1 + C \cdot e^{-1} = 0 \Rightarrow C = e.$$

Wir fassen nun die Resultate zusammen:

$$\begin{aligned} p(t) &= -1 + e^{-t+1} \\ u(t) &= \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-t+1}) \\ x(t) &= -\frac{3}{2} + \frac{e^{-t+1}}{4} + \frac{3}{2}e^t - \frac{e^{t+1}}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 (Minimierung des Treibstoffverbrauchs) Ein Fahrzeug startet bei $x(0) = 0$ mit $v(0) = 0$ und soll zum festen Zeitpunkt $t_f = 2$ die Position $x(2) = 1$ erreichen. Das Kostenfunktional lautet:

$$J[u] = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

Die Dynamik des Fahrzeugs ist:

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = u(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(y, u)$$

- Aufstellen der Hamilton-Funktion mit $p(t) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_v \end{pmatrix}$

$$H = L + \mathbf{p}(t)^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, u) = \frac{1}{2} u(t)^2 + p_x(t)v(t) + p_v(t)u(t)$$

- Formulierung des Minimumsprinzips:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -p_v(t) = u^*(t), \quad -p'_v(t) = \nabla_{\mathbf{y}=(x,v)} H \Rightarrow -p'_x(t) = 0, -p'_v(t) = p_x(t)$$

- Integration der Gleichungen

$$p_x(t) = C, p_v(t) = -C \cdot t + K$$

- Integration der Systemdynamik unter Nutzung der Anfangswerte $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$

$$u(t) = Ct - k$$

$$v(t) + v(0) = \int_0^t v'(s) ds = \int_0^t u(s) ds = \frac{C}{2}t^2 - kt$$

$$x(t) + x(0) = \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t v(s) ds = \frac{C}{6}t^3 - \frac{k}{2}t^2$$

- Anwendung der Endwerte $x(2) = 1$ und $v(2) = 0$

$$0 = \frac{C}{2} \cdot 4 - k \cdot 2 \Rightarrow k = C$$

$$1 = \frac{C}{6} \cdot 8 - \frac{C}{2} \cdot 4 \Rightarrow 1 = \left(\frac{4C}{3} - 2C \right) = -\frac{2C}{3} \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$u(t) = \left(-\frac{3}{2} \right) t - \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}$$

2.1 Linear-Quadratische Probleme

Satz 2.5 (Riccati-Regler) Die Lösung des linear-quadratischen Problems

$$\min J(u) = \int_0^T \frac{q}{2} \cdot x^2(t) + \frac{r}{2} \cdot u^2(t) dt + \frac{s}{2} x(T)^2$$

s.t. $x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $q, r, s \geq 0$ ist gegeben durch die Riccati-Gleichung

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r} K(t)^2 - q, \quad K(T) = s$$

und die resultierenden Lösungen

$$x^*(t) = x_0 \exp \left(\int_0^t a - \frac{b^2}{r} K(s) ds \right) \quad u^*(t) = -\frac{b}{r} K(t) x(t)$$

Beweis: Wir definieren die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2}qx(t)^2 + \frac{1}{2}ru(t)^2 + p(t)(ax(t) + bu(t))$$

Dann liefert das Minimumsprinzip die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t) \quad p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow p'(t) = -qx(t) - ap(t)$$

Weiter gilt die Transversalitätsbedingung $p(T) = s \cdot x(T)$. Wir nehmen an, dass eine Feedbacksteuerung vorliegt, d.h.

$$p(t) = K(t)x(t) \quad p(T) = K(T)x(T) \Rightarrow K(T) = s$$

wobei $K(t)$ eine skalare Funktion ist. Ableiten von p nach t liefert

$$p'(t) = K'(t)x(t) + K(t)x'(t)$$

Für die Zustandsgleichung gilt mit $u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t)$

$$x'(t) = ax(t) + bu^*(t) = ax(t) - \frac{b^2}{r}K(t)x(t) = \left(a - \frac{b^2}{r}K(t) \right) x(t).$$

Wir setzen nun $p'(t) = -H_x$ und unseren Ausdruck für $x'(t)$ ein, so gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{-qx(t) - ap(t)}_{=p'(t)} &= K'(t)x(t) + K(t) \underbrace{\left(a - \frac{b^2}{r}K(t) \right) x(t)}_{=x'(t)} \\ \Leftrightarrow -qx(t) - aK(t)x(t) &= K'(t)x(t) + aK(t)x(t) - \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) \\ \Leftrightarrow K'(t)x(t) &= -2aK(t)x(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) - qx(t) \end{aligned}$$

Unter der Annahme $x(t) \neq 0$ erhalten wir die Riccati-Differentialgleichung:

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2 - q, \quad K(T) = s.$$

Wir erhalten $x(t)$ als Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$x'(t) = \left(a - \frac{b^2}{r}K(t) \right) x(t) \Rightarrow x(t) = x(0) \cdot \exp \left(\int_0^t a - \frac{b^2}{r}K(s) \, ds \right).$$

Die optimale Steuerung $u^*(t)$ ergibt sich aus $u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t) = -\frac{b}{r}K(t)x(t)$. □

Beispiel 2.6 (Berechnung des Riccati-Reglers) Wir betrachten erneut ein Beispiel. In diesem Beispiel gilt für die Parameter

$$a = 0, b = 1, q = 1, r = 1, T = 1, s = 0, x_0 = 1.$$

Die Riccati-Gleichung lautet somit

$$K'(t) = K(t)^2 - 1, \quad K(1) = 0$$

Die Gleichung ist trennbar und es gilt

$$\frac{dK}{dt} = K^2 - 1 \Rightarrow \int \frac{1}{K^2 - 1} dK = \int 1 dt$$

Wir nutzen die Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{K^2 - 1}$ und erhalten

$$\frac{1}{K^2 - 1} = \frac{1}{(K+1)(K-1)} = \frac{A}{K-1} + \frac{B}{K+1} \Rightarrow 1 = \underbrace{A(K+1) + B(K-1)}_{K \cdot (A+B) + A-B}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A + B = 0$ und $A - B = 1$, mit der Lösung $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten für unser Integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{K^2 - 1} dK &= \int 1 dt \\
\int \frac{1}{2} \frac{1}{K-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{K+1} dK &= t + \frac{C}{2} \\
\frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\log(K-1) - \log(K+1)}_{\log(\frac{K-1}{K+1})} \right) &= t + \frac{C}{2} \\
\frac{K-1}{K+1} &= \exp(2t + C) = \underbrace{e^C}_{:=A} \cdot e^{2t} \\
K(t) &= \frac{1 + Ae^{2t}}{1 - Ae^{2t}}
\end{aligned}$$

Es gilt weiter $K(1) = 0$ und somit $A = -\frac{1}{e^2}$ damit ist die Lösung der Riccati-Gleichung gegeben durch

$$K(t) = \frac{1 - e^{2(t-1)}}{1 + e^{2(t-1)}}.$$

Für den optimalen Zustand gilt

$$x(t) = 1 \cdot \exp \left(\int_0^t -K(s) ds \right) = \exp \left(\int_0^t -\frac{1 - e^{2(s-1)}}{1 + e^{2(s-1)}} ds \right)$$

Wir nutzen die Substitution $z = e^{2(s-1)}$ dann gilt für das Integral

$$\frac{dz}{ds} = 2 \cdot \underbrace{e^{2(s-1)}}_{=z} \Rightarrow \int -\frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{dz}{2z} = -\frac{1}{2} \int \frac{1-z}{z(1+z)} dz$$

Wir verwenden erneut eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1-z}{z(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow 1-z = \underbrace{A(1+z) + Bz}_{=(A+B)z+A}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = 1$ und $A + B = -1$ und somit $B = -2$. Für das Integral gilt somit

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1-z}{z(1+z)} dz = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} - \frac{2}{z+1} dz = -\frac{1}{2} [\log(z) - 2 \log(z+1)] + C$$

Rücksubstitution von $z(t) = e^{2(t-1)}$ liefert

$$x(t) = \exp [-(t-1) + \log(e^{2(t-1)} + 1) + C]$$

Wir nutzen $x(0) = 1$ und bestimmen die Konstante C .

$$x(0) = \exp(-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C) = 1$$

Wir erhalten somit die Bedingung

$$-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C = 0 \Rightarrow C = -1 - \log(1 + e^{-2})$$

Der optimale Zustand ist somit gegeben als

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp \left[-t + 2 + \log \left(\frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}} \right) \right] = \underbrace{e^{-t+2} \cdot \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}}}_{=\frac{e^2}{1+e^{-2}}e^{-t}+\frac{1}{1+e^{-2}}e^t} \\ &= \frac{e^2}{1+e^{-2}}e^{-t}+\frac{1}{1+e^{-2}}e^t \end{aligned}$$

Für die optimale Steuerung gilt $u^*(t) = -K(t)x(t)$ und somit

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1 - e^{2(t-1)}}{\cancel{1 + e^{2(t-1)}}} \cdot e^{-t+2} \cdot \frac{\cancel{1 + e^{2(t-1)}}}{1 + e^{-2}} \\ &= \frac{e^{-t+2}}{1 + e^{-2}} \cdot (-1 + e^{2(t-1)}) \\ &= -\frac{e^2}{1+e^{-2}}e^{-t}+\frac{1}{1+e^{-2}}e^t \end{aligned}$$

Dies entspricht den Lösungen aus dem Beispiel.

3 Numerische Lösungsverfahren

3.1 Gradientenverfahren

$$u(t) + \epsilon \cdot \eta_u(t) \quad x(t) + \epsilon \cdot \eta_x(t), \eta_x(0) = 0$$

Um die Zustandsgleichung als Nebenbedingung zu integrieren, führen wir einen Lagrange-Multiplikator $p(t)$ ein. Das erweiterte Zielfunktional lautet dann:

$$J^{\text{aux}}(u, x, p) = \int_0^T [L(x(t), u(t), t) + p(t)(f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t))] dt + \Phi(x(T))$$

Wir betrachten kleine Variationen der Steuerungsfunktion und des Zustands:

wobei ε ein kleiner Parameter ist.

Die Variation von J^{aux} bezüglich ε bei $\varepsilon = 0$ ergibt:

$$\delta J^{\text{aux}} = \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u(t) + p(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u(t) - \delta \dot{x}(t) \right) \right] dt + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \delta x(T) = 0$$

Der Term mit $\delta \dot{x}(t)$ wird mittels Integration durch Teile umgeformt:

$$\int_0^T p(t)(-\delta \dot{x}(t)) dt = [-p(t)\delta x(t)]_0^T + \int_0^T \dot{p}(t)\delta x(t) dt$$

Da $\delta x(0) = 0$ ist (weil der Anfangszustand festgelegt ist), vereinfacht sich der Randterm zu:

$$-p(T)\delta x(T) + \int_0^T \dot{p}(t)\delta x(t) dt$$

Setzen wir die Ergebnisse in die Variation des erweiterten Zielfunktionalen ein:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} + p(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p}(t) \right) \delta x(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u(t) \right] dt + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p(T) \right) \delta x(T) = 0$$

Für die Gleichung muss jeder Koeffizient der unabhängigen Variation Null sein. Daher ergeben sich die adjungierten Gleichungen:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x} - p(t) \frac{\partial f}{\partial x} \\ p(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \end{cases}$$

Der Gradient des Zielfunktionalen $J(u)$ ist gegeben durch:

$$\frac{\delta J}{\delta u(t)} = \frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u}$$

3.1.1 Sensitivity Approach

Erweitertes Zielfunktional

$$\begin{aligned}
J^{aux}(u) &= \int_0^T \varphi(t, x, u) + p(t) \cdot (f(t, x, u) - x'(t)) dt + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T \underbrace{\varphi(t, x, u) + p(t) \cdot f(t, x, u)}_{=H(t)} dt - \underbrace{\int_0^T p(t)x'(t) dt}_{=-[p(t)x(t)]_0^T + \int_0^T p'(t)x(t) dt} + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t) dt - [p(t)x(t)]_0^T + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t) dt - p(T)x(T) + \textcolor{blue}{p(0)x(0)} + \Phi(x(T))
\end{aligned}$$

Der Term $\textcolor{blue}{p(0)x(0)}$ ist unabhängig von u und fällt bei der Optimierung weg. Bilden der Gateau Ableitung in u entlang h liefert

$$\begin{aligned}
J'(u, h) &= \int_0^T H_x[t] \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) + p'(t)S(t) dt - p(T)S(T) + \Phi_x(x(T))S(1) \\
&= \int_0^T (\underbrace{H_x[t] + p'(t)}_{=0} \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) dt + (\underbrace{\Phi_x(x(T)) - p(T)}_{=0}) \cdot S(T) \\
&= \int_0^T H_u[t] \cdot h(t)
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit $J'(u) = H_u[t]$

3.1.2 Praktische Implementierung

Beispiel 3.1 Wir betrachten das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 dt \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

welches in einer Aufgabe analytisch gelöst ist. Für den Gradienten gilt

$$\nabla J(u) = H_u = \frac{\partial}{\partial u} (x(t) + u(t)^2 + p(t) \cdot (x(t) + u(t) + 1)) = 2u(t) + p(t)$$

Wir verwenden das explizite Euler-Verfahren zur Diskretisierung der Gleichungen aus dem Minimumsprinzip:

- Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, 1]$ und der Funktionen mittels $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \mathbf{u}^k = (u_i^k)_{i=0}^N, \quad \mathbf{x}^k = (x_i^k)_{i=0}^N, \quad \mathbf{t}^k = (i \cdot h)_{i=0}^N,$$

- Armijo Suchrichtung $\alpha^{(k)}$: Für $0 \leq m < M = 10$, $c = 10^{-4}$, $\beta = 0.5 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} u^{neu} &= u^k + \beta^m \cdot d^{(k)} \\ J(u^k) &= \int_0^1 x^k(t) + (u^k(t))^2 dt \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^k + (u_i^k)^2 \\ J(u^{neu}) &= \int_0^1 x^{neu}(t) + (u^{neu}(t))^2 dt \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^{neu} + (u_i^{neu})^2 \\ J(u^{neu}) &\leq J(u^k) - c \cdot \beta^m \cdot h \cdot \sum_{i=0}^N (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)}) (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)}) \\ \Leftrightarrow J(u^{neu}) &\leq J(u^k) - \|d^{(k)}\|^2 \cdot c \cdot \beta^m \Rightarrow \alpha^{(k)} = \beta^m \end{aligned}$$

- Gradientenverfahren: Für $0 \leq k < MaxIter$, $\epsilon = 10^{-6}$:

- Forward Integration $x'(t) = x(t) + u(t) + 1$

$$x_{i+1}^k = x_i^k + h \cdot (x_i^{(k)} + u_i^{(k)} + 1) \quad x_0^{(k)} = 0$$

- Backward Integration $p'(t) = -(1 + p(t))$

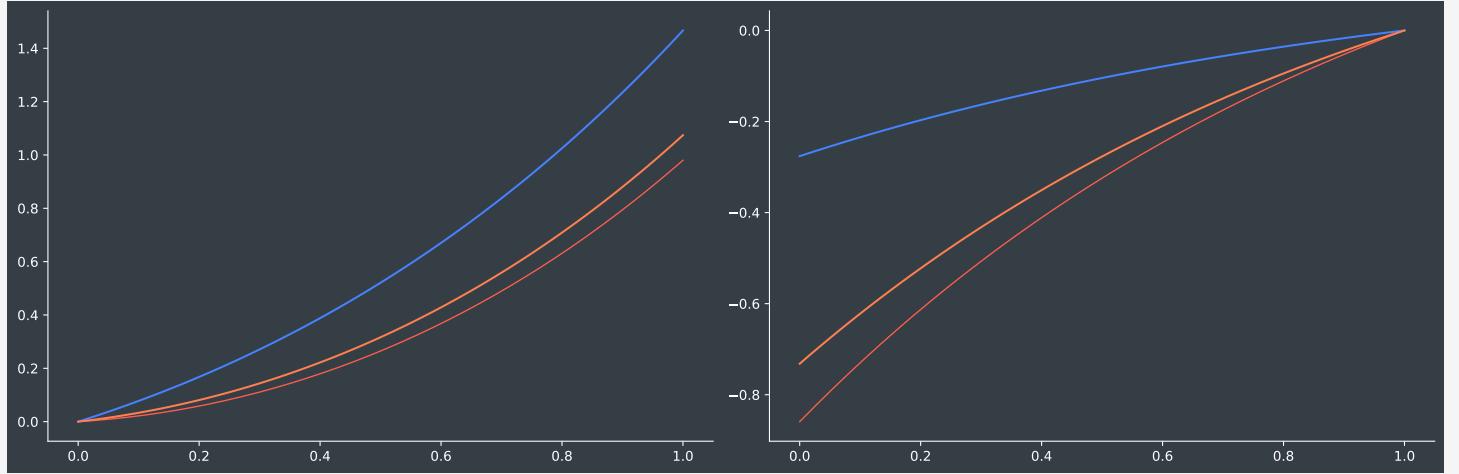
$$p_i^k = p_{i+1}^k + h \cdot (1 + p_{i+1}^k) \quad p_N^{(k)} = \partial_x \Phi(x(1)) = 0$$

- Berechnung des Gradienten $\nabla J = H_u = 2u + p$

$$d^{(k)} = -(2 \cdot u^{(k)} + p^{(k)})$$

- Berechnung der Schrittweite $\alpha^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot d^{(k)} \\ \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| &< \epsilon \Rightarrow u^{\text{final}} = u^{(k+1)}, \text{ sonst } k \rightarrow k + 1 \end{aligned}$$



Zustand x und Steuerung u mit den Iterationen 100, 500 und der analytischen Lösung

3.2 Shooting Methods

Das Ziel ist es, den Anfangswert $p(t_0)$ so anzupassen, dass die Endbedingung $p(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$ erfüllt wird. Dieses Verfahren wird mithilfe des Schießverfahrens gelöst. Wir definieren eine Residuenfunktion $R(p(t_0))$, die die Abweichung zwischen dem berechneten Endwert $p(t_f; p(t_0))$ und dem gewünschten Endwert $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$ darstellt:

$$R(p(t_0)) = p(t_f; p(t_0)) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f; p(t_0))) \quad (1)$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung von $R(p(t_0)) = 0$ liefert den Update-Schritt:

$$p^{(k+1)}(t_0) = p^{(k)}(t_0) - \frac{R(p^{(k)}(t_0))}{R'(p^{(k)}(t_0))} \quad (2)$$

Die Jacobi-Matrix $R'(p(t_0))$ ergibt sich durch Ableiten der Residuenfunktion:

$$R'(p(t_0)) = \frac{\partial R}{\partial p(t_0)} = S_p(t_f) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} S_x(t_f), \quad (3)$$

wobei $S_x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)}$ und $S_p(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)}$ die Sensitivitäten sind.

Wir leiten die Zustandsgleichung und die adjungierte Gleichung nach $p(t_0)$ ab, um die Sensitivitäten $S_x(t)$ und $S_p(t)$ zu berechnen.

- Durch Ableiten der Zustandsgleichung nach $p(t_0)$ erhalten wir die Gleichung für $S_x(t)$:

$$\frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{\partial f}{\partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} S_u(t), \quad (4)$$

mit der Anfangsbedingung $S_x(t_0) = 0$.

- Durch Ableiten der adjungierten Gleichung nach $p(t_0)$ erhalten wir die Gleichung für $S_p(t)$:

$$\frac{d}{dt} S_p(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} S_x(t) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} S_u(t), \quad (5)$$

mit der Anfangsbedingung $S_p(t_0) = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

- Falls die Steuerung u implizit von $p(t_0)$ abhängt, bestimmen wir $S_u(t) = \frac{\partial u}{\partial p(t_0)}$ aus der Optimierungsbedingung $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} S_u(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial p} S_p(t) = 0 \quad (6)$$

Diese Gleichung kann nach $S_u(t)$ aufgelöst werden, sofern $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ invertierbar ist:

$$S_u(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}^\top S_p(t)\right) \quad (7)$$

Beispiel 3.2 Betrachten wir das folgende konkrete Beispiel:

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} (x(1) - 1)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 (u(t)^2 + x(t)^3) dt \\ & s.t. x'(t) = u(t) - 15 \exp(-2t), \quad x(0) = 4 \end{aligned}$$

Der adjungierte Zustand ist gegeben durch

$$p'(t) = -\frac{3}{2}x(t)^2 \quad p(1) = 5(x(1) - 1)$$

- Resultierende Sensitivitätsgleichungen für S_x und S_p

In diesem Beispiel ergibt sich die Steuerung $u(t) = -p(t)$ aus der Optimalitätsbedingung. Durch Einsetzen in die Zustandsgleichung erhalten wir das gekoppelte System:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -p(t) - 15 \exp(-2t), \quad x(0) = 4 \\ \dot{p}(t) &= -\frac{3}{2}x(t)^2, \quad p(1) = 5(x(1) - 1)\end{aligned}$$

Die Sensitivitätsgleichungen für $S_x(t)$ und $S_p(t)$ lauten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_x(t) &= -S_p(t), \quad S_x(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}S_p(t) &= -3x(t)S_x(t), \quad S_p(0) = 1\end{aligned}$$

- Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu:

$$R'(p(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1) \tag{8}$$

Das Newton-Verfahren zur Anpassung von $p(0)$ sieht folgendermaßen aus:

1. **Initialisierung:** Wählen Sie eine Startschätzung $p^{(0)}(0)$.

2. **Iterative Berechnung:**

a) **Vorwärtsintegration der Zustandsgleichungen:** Integrieren Sie die Gleichungen für $x(t)$ und $p(t)$ mit $p^{(k)}(0)$ von $t = 0$ bis $t = 1$.

b) **Berechnung des Residuals:** Berechnen Sie das Residuum

$$R(p^{(k)}(0)) = p(1; p^{(k)}(0)) - 5(x(1; p^{(k)}(0)) - 1)$$

c) **Integration der Sensitivitätsgleichungen:** Integrieren Sie die Sensitivitätsgleichungen für $S_x(t)$ und $S_p(t)$ von $t = 0$ bis $t = 1$, um $S_x(1)$ und $S_p(1)$ zu berechnen.

d) **Berechnung der Ableitung $R'(p^{(k)}(0))$:**

$$R'(p^{(k)}(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1)$$

e) *Aktualisierung mittels Newton-Schritt:*

$$p^{(k+1)}(0) = p^{(k)}(0) - \frac{R(p^{(k)}(0))}{R'(p^{(k)}(0))}$$

f) **Konvergenzkriterium:** Falls $|R(p^{(k+1)}(0))| < \epsilon$ (Toleranz), beenden Sie die Iteration. Falls nicht, setzen Sie $k = k + 1$ und wiederholen ab Schritt (a).

3.3 Riccati Regler

Es gilt

$$F(K) := Q - KPK + KA + A^T K \Rightarrow F(K) = 0$$

Definition 3.3 Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dann definieren wir

$$\text{vec}(X) = (X_{11} \ X_{21} \ \dots \ X_{n1} \ X_{12} \ X_{22} \ \dots \ X_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times r}$, dann definieren wir

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1m}B \\ A_{12}B & \dots & A_{2m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & \dots & A_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nr}$$

Es gilt die Formel

$$\text{vec}(MXN) = (N^T \otimes M)\text{vec}(X)$$

Betrachten wir den Fall $M = 1$ und $N = A$ bzw. $N = 1$ und $M = A^T$ erhalten wir mit $X = K$

$$\text{vec}(KA) = (A^T \otimes 1)\text{vec}(K) \quad \text{vec}(A^T K) = (1 \otimes A^T)\text{vec}(K)$$

Anwendung auf unser Problem liefert

$$\underbrace{\text{vec}(F(K))}_{f(x=\text{vec}(K))} = \underbrace{\text{vec}(Q)}_q - \underbrace{\text{vec}(KPK)}_{g(x=\text{vec}(K))} + \underbrace{\text{vec}(KA)}_{(A^T \otimes 1)\text{vec}(K)} + \underbrace{\text{vec}(A^T K)}_{(1 \otimes A^T)\text{vec}(K)}$$

Durch Einführung von $x = \text{vec}(K) \in \mathbb{R}^{n^2}$ erhalten wir

$$f(x) = q - g(x) + (A^T \otimes 1)x + (1 \otimes A^T)x$$

Da $(KP)^T = KP$ gilt

$$g(\text{vec}(K)) = \text{vec}(KPK) = (1 \otimes KP)\text{vec}(K)$$

Wir betrachten die Variation $K(\epsilon) = K + \epsilon \cdot \bar{K}$ und die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ mit

$$\begin{aligned} h(\epsilon) := g(\text{vec}(K(\epsilon))) &= \text{vec}(K(\epsilon)PK(\epsilon)) \\ &= \text{vec}((K + \epsilon \cdot \bar{K})P(K + \epsilon \cdot \bar{K})) \\ &= \text{vec}(KPK + \epsilon KPK\bar{K} + \epsilon \bar{K}PK + \epsilon^2 \bar{K}PK\bar{K}) \end{aligned}$$

Ableitung nach ϵ und Auswertung in $\epsilon = 0$ ergibt

$$h'(0) = \frac{d}{d\epsilon} g(\text{vec}(K + \epsilon \bar{K})) \Big|_{\epsilon=0} = \text{vec}(KP\bar{K} + \bar{K}PK) = \text{vec}(KP\bar{K}) + \text{vec}(\bar{K}PK)$$

Umschreiben als Matrix-Vektor-Produkt

$$\text{vec}(KP \cdot \bar{K} \cdot 1) = (1 \otimes KP)\text{vec}(\bar{K}) \quad \text{vec}(1 \cdot \bar{K} \cdot PK) = ((PK)^T \otimes 1)\text{vec}(\bar{K})$$

Wir erhalten als Ableitung

$$g'(x) = (1 \otimes KP) + ((PK)^T \otimes 1) \Rightarrow f''(x) = -(1 \otimes KP) - ((PK)^T \otimes 1) + (A^T \otimes 1) + (1 \otimes A^T)$$

3.3.1 Implementierung

```
def vec(X):
    return X.reshape(-1, order='F')

def unvec(v, n):
    return v.reshape((n, n), order='F')
```

Hier normaler text

```
# Newton Kleinman Verfahren
def solv_CARE(A,B,R,Q,tol=1e-8,max_iter=50):
    n = A.shape[0]
    I = np.eye(n)
    q = vec(Q)
    L = np.kron(I, A.T) + np.kron(A.T, I)
    P = B @ np.linalg.solve(R, B.T)
    # Startwert K0 hier Einheitsmatrix
    K = I
    x = vec(K)

    for i in range(max_iter):
        X = K @ P #KP
        vec_KPK = np.kron(I,X) @ x
        f = q - vec_KPK + L @ x
        Dg = np.kron(I,X)+np.kron(X,I)
        Df = L - Dg
        dx = np.linalg.solve(Df, -f)
        x_new = x + dx
        # Abbruch
        if np.linalg.norm(dx) / np.linalg.norm(x_new) < tol:
            x=x_new
            break

        x = x_new
        K = unvec(x, n)
    return K
```

Erklärung des Codes

Stabilität der Startlösung hier Gershgorin Kreise und Stabilität erklären

Für Y mit $RY = B^T \Rightarrow Y = B^{-1}B^T$ und $B \cdot Y = P$

4 Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

Wir betrachten ein Steuerungsproblem und definieren die Value-Function V mittels

$$V(x(t), \textcolor{brown}{t}) := \min_{\textcolor{red}{u}} \left\{ \int_{\textcolor{brown}{t}}^{t_f} L(s, x(s), \textcolor{red}{u}(s)) \, ds + \Phi(x(t_f)) \right\}$$

Satz 4.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung) Die Value-Function erfüllt

$$0 = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \min_u \left[L(t, x, u) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \cdot f(t, x, u) \right], \quad x \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq t_f$$

mit den Randbedingungen

$$V(x, \textcolor{violet}{t}_f) = \Phi(x(\textcolor{violet}{t}_f)) \quad V(x, \textcolor{brown}{t}_0) = \min_u \int_{\textcolor{brown}{t}_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) \, dt + \Phi(x(t_f))$$

Beweis:

Die Value-Function $V(x, t)$ beschreibt die minimalen Kosten von Zustand x zum Endzeitpunkt t_f . Für $s \in [t, t_f]$ gilt

- Systemdynamik

$$x'(s) = f(x(s), u(s)), \quad x(t) = x$$

- Kostenfunktional

$$J(u) = \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \Phi(x(t_f))$$

Angenommen, wir wechseln zum Zeitpunkt $t + h$ zu einer optimalen Steuerung, dann gilt für unser Zielfunktional

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \int_{t+h}^{t_f} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \Phi(x(t_f)) \\ &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + V(x(t+h), t+h) \end{aligned}$$

Da $V(x(t), t)$ die minimalen Kosten vom Zustand x zur Zeit t angibt, gilt:

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + V(x(t+h), t+h) \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t) \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) \, ds + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t)}{h} \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{d}{dt} V(x(t), t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x'(t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Durch Minimierung bezüglich u erhalten wir die Gleichheit und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x(t), \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \right) \end{aligned}$$

□

4.1 Herleitung des Minimumprinzips

Berechnung der totalen Ableitung der Value-Function V entlang der Charakteristik $x(t)$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = p(x, t) \cdot x'(t) - H \left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Berechnung der totalen Ableitung von $p = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial x \partial t}$$

Differenzieren der HJB bezüglich x liefert

$$0 = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Einsetzen der Gleichung liefert:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \left(-\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left(x'(t) - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Wir erhalten somit die bekannten, notwendigen Optimalitätsbedingungen:

$$p'(t) = -H_x, \quad x'(t) = f(t, x, u^*), \quad u^* = \operatorname{argmin}_u [L(t, x, u) + p(t, x)f(t, x, u)]$$

4.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme

4.2.1 Finite time problem

Gegeben sei das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u dt + \underbrace{(x(t_f) - x_f)^T S (x(t_f) - x_f)}_{x(t_f)^T S x(t_f) - 2x_f^T S x(t_f) + x_f^T S x_f} = V(t_0, x(t_0)) + x_f^T S x_f$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Der Term $x_f^T S x_f$ ist unabhängig von u und kann bei der Minimierung weggelassen werden.

$$V(x, t) = x^T K(t) x + 2s(t)^T x + r(t) \quad V(x, t_f) = x(t_f)^T K(t_f) x(t_f) + 2s(t_f)^T x(t_f) + r(t_f)$$

Wir erhalten für die Endwerte

$$K(t_f) = S, \quad s(t_f) = -Sx_f \quad r(t_f) = 0$$

$$V_t = x^T K'(t) x + 2s'(t)^T x + r'(t) \quad V_x = 2K(t)x + 2s(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} [x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)] = 2Ru + B^T \cdot V_x \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \textcolor{red}{V}_x$$

$$\begin{aligned} (u^*)^T Ru^* &= \left(-\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x \right)^T R \left(-\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (R^{-1} B^T \textcolor{red}{V}_x)^T R (R^{-1} B^T \textcolor{red}{V}_x) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2R^{-1} B^T (K(t)x + s(t)))^T R (2R^{-1} B^T (K(t)x + s(t))) \\ &= (K(t)x + s(t))^T \textcolor{brown}{B} \textcolor{orange}{R}^{-1} \textcolor{green}{R} \textcolor{brown}{R}^{-1} \textcolor{brown}{B}^T (K(t)x + s(t)) \\ &= \langle K(t)x + s(t), \textcolor{brown}{P}(2K(t)x + s(t)) \rangle \\ &= \langle K(t)x, PK(t)x \rangle + \underbrace{\langle K(t)x, Ps(t) \rangle}_{\langle s(t), \textcolor{brown}{P}K(t)x \rangle} + \langle s(t), PK(t)x \rangle + \langle s(t), Ps(t) \rangle \\ &= x^T K(t)^T PK(t)x + 2 \cdot s(t)^T PK(t)x + s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

mit $P = BR^{-1}B^T$ und $P^T = P$.

$$\begin{aligned} V_x^T \left(-\frac{1}{2} BR^{-1} B^T V_x \right) &= (2K(t)x + 2s(t))^T \left(-\frac{1}{2} BR^{-1} B^T (2K(t)x + 2s(t)) \right) \\ &= -2 \cdot (K(t)x + s(t))^T P(K(t)x + s(t)) \\ &= -2 \cdot x^T K(t)^T PK(t)x - 4 \cdot s(t)^T PK(t)x - 2 \cdot s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

$$V_x^T Ax = 2(K(t)x + s(t))^T Ax = 2x^T K(t)^T Ax + 2s(t)^T Ax = x^T (K(t)^T A + A^T K(t))x + 2s(t)^T Ax$$

$$-V_t = \min_u [x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)]$$

$$\begin{aligned} -V_t &= x^T Qx + (u^*)^T Ru^* + V_x^T \cdot \left(Ax - \frac{1}{2} BR^{-1} B^T V_x \right) \\ -x^T K'(t)x - 2\textcolor{blue}{s}'(\textcolor{blue}{t})^T x - \textcolor{red}{r}'(\textcolor{red}{t}) &= x^T (\textcolor{brown}{Q} - KPK + KA + A^T K)x - 2 \cdot ((\textcolor{blue}{P}K - A)^T s(\textcolor{blue}{t}))^T x - s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'(t) &= -Q + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - K(t)A - A^T K(t) \quad K(t_f) = S \\ s'(t) &= (K(t)BR^{-1}B^T - A^T)s(t) \quad s(t_f) = -Sx_f \\ r'(t) &= s(t)^T BR^{-1}B^T s(t) \quad r(t_f) = 0 \end{aligned}$$

4.2.2 infinite time problem

Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ betrachten wir das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{\infty} (x - x_f)^T Q(x - x_f) + u^T R u dt = V(x(t_0))$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Als Ansatz für die Value Funktion wählen wir erneut

$$V(x) = x^T K x + 2s^T x + r \Rightarrow V_x = 2Kx + 2s$$

Es gilt erneut

$$\frac{\partial}{\partial u} ((x - x_f)^T Q(x - x_f) + u^T R u + V_x^T (Ax + Bu)) = 2Ru + B^T V_x = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x$$

$$(x - x_f)^T Q(x - x_f) = x^T Q x - 2x_f^T Q x + x_f^T Q x_f$$

$$0 = x^T (Q - KPK + KA + A^T K) x - 2((PK - A)^T s + Qx_f)^T x - s^T (P)s + x_f^T Qx_f$$

5 Paper Lin

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Wir wählen den Zustand $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ und die Nominalterme

$$M_0(q), \quad C_0(q, \dot{q}), \quad G_0(q)$$

Auflösen nach \ddot{q}

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \cdot [\tau - \underbrace{C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)}_{N(q, \dot{q})}]$$

Wir setzen nun

$$u := M_0^{-1}(q) \cdot [\tau - N_0(q, \dot{q})] \Rightarrow \tau = M_0(q)u + N_0(q, \dot{q})$$

Setze $\tau = M_0u + N_0$ in die echte Dynamik ein:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1} \cdot [M_0u + N_0 - N] \\ &= M^{-1}M_0u + M^{-1}(N_0 - N) \\ &= u + \underbrace{(M^{-1}M_0 - I)u}_{h(x)} + \underbrace{M^{-1}(N_0 - N)}_{f(x)} \end{aligned}$$

Für den Zustandsraum x erhalten wir folgendes System:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ u + h(x)u + f(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_B u + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x)u + f(x) \end{pmatrix}$$

Unter vernachlässigung $\ddot{q} = u$ erhalten wir das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Satz 5.1 Die Lösung des optimalen Steuerungsproblems:

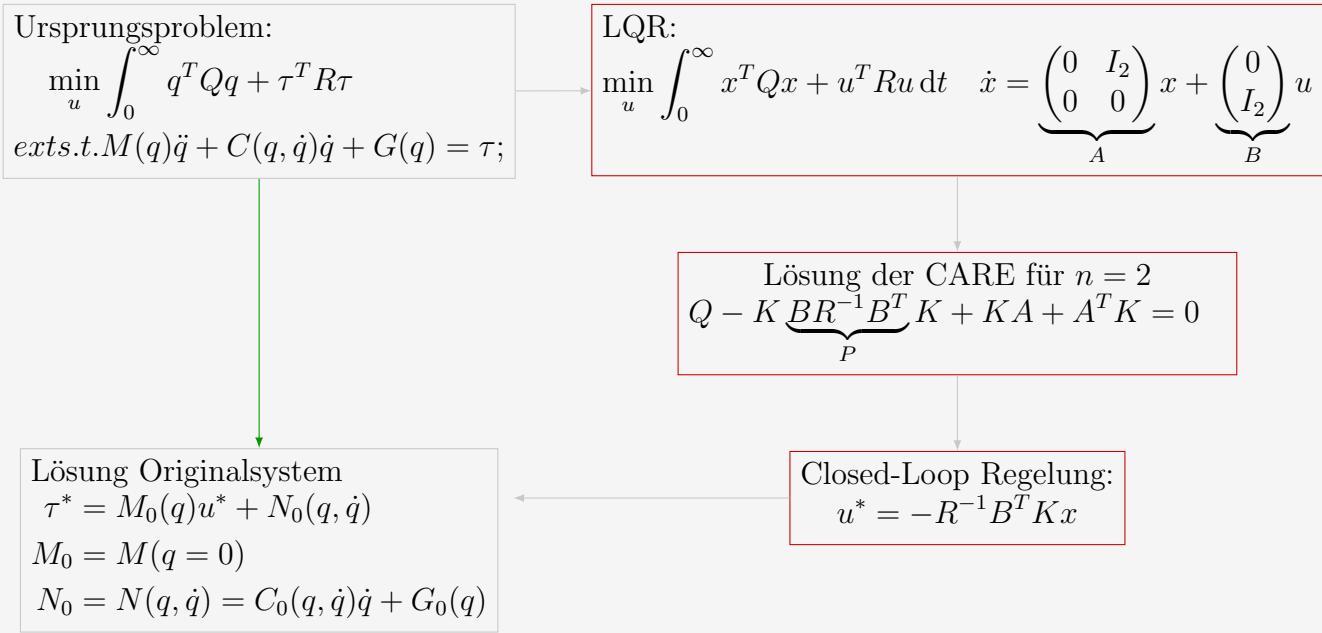
$$\min_u \int_0^\infty x^T Qx + u^T Ru dt \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_B u$$

ist gegeben durch

$$u^* = -R^{-1}B^T Kx \quad \text{mit} \quad Q - KPK + KA + A^T K = 0$$

und für die Momente gilt

$$\tau^* = M_0(q)u^* + N_0(q, \dot{q}) = -M_0(q)R^{-1}B^T Kx + N_0(q, \dot{q})$$



Beweis: Für die Value Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(x(t)) &= \underbrace{\nabla V(x)}_{2Kx(t)} \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_{Ax(t)+Bu(t)} \\
&= 2x(t)^T K \left[Ax(t) + B \underbrace{-R^{-1}B^T Kx(t)}_{u(t)} \right] \\
&= x(t)^T \left[\underbrace{KA + A^T K - 2KBR^{-1}B^T K}_{-Q - KBR^{-1}B^T K} \right] x(t) \\
&= -x(t)^T Qx(t) - \underbrace{x(t)^T KB}_{x(t)^T KBR^{-1}R} \underbrace{R^{-1}B^T Kx(t)}_{-u^*(t)} \\
&= -x(t)^T Qx(t) - \underbrace{x(t)^T KBR^{-1}R}_{u^*(t)^T R} u^*(t) \\
&= -x(t)^T Qx(t) - u^*(t)^T Ru^*(t)
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit $\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x(t) = u^*(t) = 0$. Damit ist die Value Funktion $V(x(t))$ streng monoton fallend und somit ist das optimale Steuerungssignal $u^*(t)$ stabil.

Verwenden wir die Value Funktion auf die reale Dynamik, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \nabla V(x) \cdot x'(t) \\
&= 2x(t)^T K \left[Ax(t) + Bu^*(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x(t))u^*(t) + f(x(t)) \end{pmatrix} \right] \\
&= 2x(t)^T K [Ax(t) + Bu^*(t) + Bh(x(t))u^*(t) + Bf(x(t))] \\
&= \underbrace{2x(t)^T K(Ax + Bu^*)}_{(1)} + \underbrace{2x(t)^T KB(h(x)u^* + f(x))}_{(2)}
\end{aligned}$$

wobei wir $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}$ verwendet haben. Aus $u^* = -R^{-1}B^T K x(t)$ folgt $B^T K x(t) = -Ru^*$ und wir erhalten für (2)

$$\begin{aligned}
2x(t)^T KB(h(x)u^* + f(x)) &= 2 \left[\underbrace{B^T K x(t)}_{-Ru^*} \right]^T (h(x)u^* + f(x)) \\
&= -2(u^*)^T R(h(x)u^* + f(x)) \\
&= -2(u^*)^T Rh(x)u^* - 2(u^*)^T Rf(x)
\end{aligned}$$

Für h positiv definit gilt:

$$-(u^*)^T Rh(x)u^* \leq 0$$

Für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
-2(u^*)^T Rf(x) &\leq 2\|u^*\|\|R\|\|f(x)\| \\
&\leq \epsilon\|u^*\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2 \\
&= \epsilon(u^*)^T u^* + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2 \\
&\leq \epsilon(u^*)^T Ru^* + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2
\end{aligned}$$

Wir wählen als Schranke $f^T R f \leq x^T P x$

□