Modellierung eines Roboters

Nicolas Schäfer
Saarbrücken, 15. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Modellierung

$$\underbrace{f - mg}_{\text{Kräftebilanz}} = \underbrace{mx''}_{\text{Newtons 2nd Law}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mx'(t)]$$

$$f - \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{[mgx(t)]}_{\text{Potenzielle Energie } V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{\left[m\frac{1}{2}x'(t)^2\right]}_{\text{kinetische Energie } T}$$

$$f - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial x'} \Rightarrow f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x}$$

Wobei $L = T - V = \frac{1}{2}mx'(t)^2 - mgx(t)$ gilt. Für generalisierte Koordinaten $\mathbf{q} = \theta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1, \cdots, n$$

1.1 Euler-Lagrange-Gleichung

Definition 1.1 (Richtungsableitung) *Die Richtungsableitung des Funktionals J an der Stelle x in Richtung h ist definiert als*

$$\delta J(x(t), h(t)) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J[x(t) + \epsilon \cdot h(t)] - J[x(t)]}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon}J[x + \epsilon h]\bigg|_{\epsilon=0}$$

Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\epsilon) := J[x + \epsilon \cdot h]$, dann gilt

$$f'(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\epsilon) - f(0)}{\epsilon} = \delta J(x(t), h(t))$$

Satz 1.2 (Euler-Lagrange-Gleichung) *Sei $J : C^2([a, b]) \to \mathbb{R}$ ein Funktional mit*

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), x'(t))\mathrm{d}t, \quad x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

Dann gilt für die Ableitung $\nabla J(x) = L_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{x'}$. Sei $x^*(t) = \text{argmin } J[x]$ erfüllt es die folgende Gleichung

$$\nabla J(x^*) = 0 \Leftrightarrow L_x - \frac{d}{dt}L_{x'} = 0$$

Beweis: Für die Richtungsableitung gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon} J[x+\epsilon h]\bigg|_{\epsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{d\epsilon} L(t, x(t)+\epsilon h(t), x'(t)+\epsilon h'(t))\,\mathrm{d}t\bigg|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_f} L_x \cdot h(t) + L_{x'} \cdot h'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_f} L_x \cdot h(t) - \frac{d}{dt} L_{x'} \cdot h(t)\,\mathrm{d}t + \Big[L_{x'} \cdot h(t)\Big]_{t_0}^{t_f}
\end{aligned}$$

Für den Gradienten gilt $\delta J(x(t), h(t)) = \nabla J(x) \cdot h(t)$

$$\delta J(x(t), h(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(L_x - \frac{d}{dt} L_{x'}\right) \cdot h(t)\,\mathrm{d}t + \Big[L_{x'} \cdot h(t)\Big]_{t_0}^{t_f}$$

Für feste Randwerte $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ gilt $h(t_0) = h(t_f) = 0$. □

Definition 1.3 (Hamilton-Funktion) *Wir betrachten unser Variationsproblem, dann definieren wir den adjungierten Zustand* p *und die Hamilton-Funktion* H *durch*

$$p(t) := L_{x'} \quad H(t, x, p) := x'(t) \cdot p(t) - L(t, x, x')$$

Die Hamilton-Funktion besitzt wird somit extremal entlang x'

$$H_{x'} = p - L_{x'} = 0$$

- *Partiell Differenzieren von* H *bezüglich* x *und* p *liefert*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p} &= x' + p \cdot \frac{\partial x'}{\partial p} - \underbrace{L_{x'}}_{=p} \cdot \frac{\partial x'}{\partial p} = x'(t) \\
\frac{\partial H}{\partial x} &= -L_x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{x'} = -p'(t)
\end{aligned}$$

- *Im autonomen Fall* $H_t = 0$ *gilt:* $H_x = -p'$ *und* $H_p = x'$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H_t + H_x \cdot x'(t) + H_p \cdot p'(t) = H_t = 0$$

Satz 1.4 (Optimalitätskriterium) *Sei* $x^*(t)$ *ein Minimum eines Variationsproblems, so gilt:*

- *Die Funktion x erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung.*

$$\nabla J(x^*) = 0 \Leftrightarrow L_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{x'} = 0$$

- *Für eine freie Endzeit t_f gilt*

$$H(t_f, x, p) = p(t_f) \cdot x'(t_f) - L(t_f) = 0$$

- *Für einen freien Endpunkt x_f gilt*

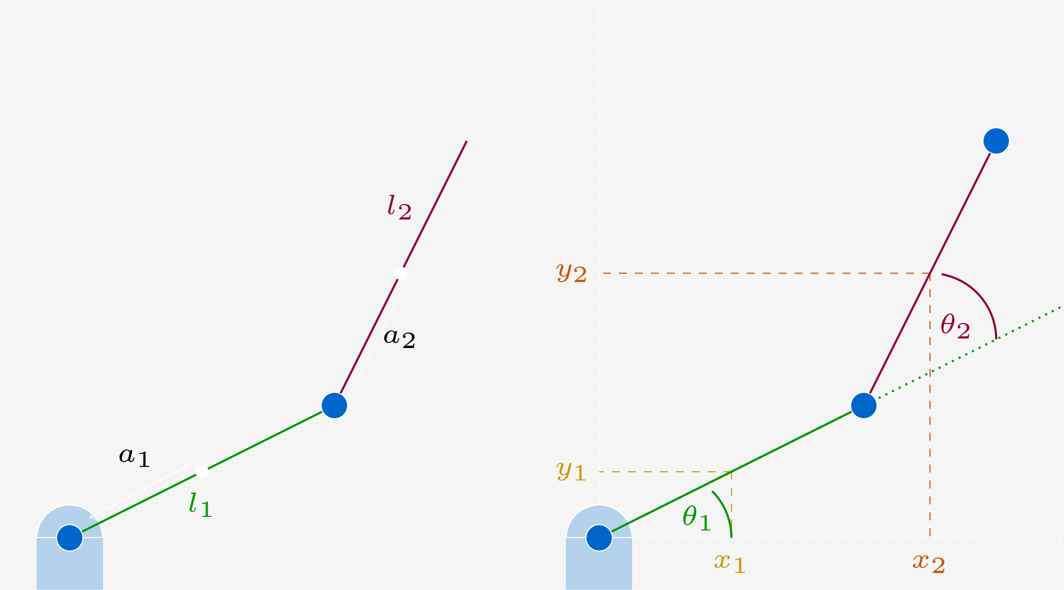
$$p(t_f) = L_{x'}(t_f) = 0$$

Beweis: Für festes $x(t_0) = x_0$ gilt $h(t_0) = 0$. Bei freiem $x(t_f) = x_f$ verschwindet der Randterm für $L_{x'}(t_f) = 0$ und es gilt

$$\delta J(x(t), h(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\underbrace{L_x - \frac{d}{dt} L_{x'}}_{=0} \right) \cdot h(t)\,\mathrm{d}t + \Big[L_{x'} \cdot h(t) \Big]_{t_0}^{t_f}$$
$$0 = \underbrace{L_{x'}(t_f)}_{=0} \cdot h(t_f) - L_{x'}(t_0) \cdot \underbrace{h(t_0)}_{=0}$$

□

1.2 Two Link Revolute Manipulator



$$x_1 = a_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad y_1 = a_1 \cdot \sin(\theta_1)$$

Gelenk 2 befindet sich in $(l_1 \cos(\theta_1),\ l_1 \sin(\theta_1))$. Der Schwerpunkt von Link 2 ist *zusätzlich* noch a_2 vom Gelenk 2 entfernt und besitzt eine absolute Winkelausrichtung $\theta_1 + \theta_2$. Daher:

$$x_2 = l_1 \cdot \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = l_1 \cdot \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Die Euler-Lagrange Gleichung des Systems

$$D(\theta)\theta'' + C(\theta, \theta')\theta' + G(\theta) = \tau$$

1.2.1 Herleitung der kinetischen Energie

Für die translatorische Energie von Link 1 gilt:

$$T_{1,trans} = \frac{m_1}{2} \cdot (x_1'(t)^2 + y_1'(t)^2) = \frac{m_1}{2} \cdot ((-a_1 \sin(\theta_1)\theta_1')^2 + (a_1 \cos(\theta_1)\theta_1')^2) = \frac{m_1}{2} \cdot a_1^2 \cdot \theta_1'(t)^2$$

Es gilt $T_1 = T_{1,trans} + T_{1,rot}$ und somit

$$T_1 = \frac{m_1}{2} a_1^2 \theta_1'(t)^2 + \frac{I_1}{2} \theta_1'(t)^2 = \frac{m_1 a_1^2 + I_1}{2} \theta_1'(t)^2$$

Analog für die Energie an Link 2 gilt:

$$T_2 = \underbrace{\frac{m_2}{2} \cdot (x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2)}_{\text{TRANSLATORISCH}} + \underbrace{\frac{I_2}{2} \cdot (\theta_1'(t) + \theta_2'(t))^2}_{\text{ROTORISCH}}$$

$$T(\theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_1' & \theta_2' \end{pmatrix} D(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} D_{11} \theta_1'(t)^2 + D_{12} \theta_1' \theta_2' + \frac{1}{2} D_{22} \theta_2'(t)^2$$

$$x_2'(t) = -l_1 \sin(\theta_1)\theta_1' - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)({\theta_1}' + {\theta_2}')$$
$$y_2'(t) = l_1 \cos(\theta_1)\theta_1' + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)({\theta_1}' + {\theta_2}')$$

$$
\begin{aligned}
x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2 &= \Big[- l_1 \sin(\theta_1)\theta_1' - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)({\theta_1}' + {\theta_2}') \Big]^2 + \Big[l_1 \cos(\theta_1)\theta_1' + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 \\
&= l_1^2 \sin(\theta_1)^2 {\theta_1'}^2 + 2 l_1 a_2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_1+\theta_2)\theta_1'({\theta_1}' + \theta_2') + \underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1+\theta_2)^2({\theta_1}' + \theta}_{a_2^2 \sin(\theta_1+\theta_2)^2 \cdot ({\theta_1'}^2 + 2\theta_1'\theta_2' + \theta} \\
&\quad + l_1^2 \cos(\theta_1)^2 {\theta_1'}^2 + 2 l_1 a_2 \cos(\theta_1)\cos(\theta_1+\theta_2)\theta_1'({\theta_1}' + {\theta_2}') + \underbrace{a_2^2 \cos(\theta_1+\theta_2)^2({\theta_1}'}_{a_2^2 \cos(\theta_1+\theta_2)^2 \cdot ({\theta_1'}^2 + 2\theta_1'} \\
&= \Bigg[\underbrace{l_1^2 \sin(\theta_1)^2 + l_1^2 \cos(\theta_1)^2}_{=l_1^2} + \underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1+\theta_2)^2 + a_2^2 \cos(\theta_1+\theta_2)^2}_{=a_2^2} \Bigg] {\theta_1'}^2 \\
&\quad + 2 l_1 a_2 \theta_1' \cdot \Bigg[\underbrace{\sin(\theta_1)\sin(\theta_1+\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_1+\theta_2)}_{\cos(\theta_2)} \Bigg] ({\theta_1}' + {\theta_2}') \\
&\quad + 2 \cdot \Bigg[\underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1+\theta_2)^2 + a_2^2 \cos(\theta_1+\theta_2)^2}_{=a_2^2} \Bigg] \theta_1'\theta_2' + \Bigg[\underbrace{a_2^2 \sin(\theta_1+\theta_2)^2 + a_2^2 \cos(}_{=a_2^2} \\
&= \Big[l_1^2 + a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(\theta_2) \Big] {\theta_1'}^2 + \Big[2a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(\theta_2) \Big] \theta_1'\theta_2' + a_2^2 {\theta_2'}^2
\end{aligned}
$$

Für die kinetische Energie gilt somit

$$
\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{m_1 a_1^2 + I_1}{2} {\theta_1'}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2) + \frac{I_2}{2} \cdot \underbrace{(\theta_1' + \theta_2')^2}_{{\theta_1'}^2 + 2\theta_1'\theta_2' + {\theta_2'}^2} \\
&= \Bigg[\frac{m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2}{2} \Bigg] {\theta_1'}^2 + \Bigg[\frac{m_2 \cdot (2a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + 2 I_2}{2} \\
&\quad + \Bigg[\frac{m_2 a_2^2 + I_2}{2} \Bigg] {\theta_2'}^2 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_1' & \theta_2' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 & m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 \\ m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 & m_2 a_2^2 + I_2 \end{pmatrix}}_{D(\theta_1, \theta_2) = D(\theta_2)} \\
&= \frac{1}{2} D_{11} \theta_1'(t)^2 + D_{12} \theta_1'\theta_2' + \frac{1}{2} D_{22} \theta_2'(t)^2
\end{aligned}
$$

1.2.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix

Es gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}{\theta_1'}^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\theta_1'\theta_2' + \frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\theta_2'(t)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}{\theta_1'}^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}\theta_1'\theta_2' + \frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}\theta_2'(t)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1'} = D_{11}\theta_1' + D_{12}\theta_2'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2'} = D_{12}\theta_1' + D_{22}\theta_2'$$

Für die zeitlichen Ableitungen der Größen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \theta_1'} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_{11}}_{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}\theta_1' + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}\theta_2'} \cdot \theta_1' + D_{11}\theta_1'' + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_{12}}_{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\theta_1' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}\theta_2'} \cdot \theta_2' + D_{12}\theta_2'' \\
&= \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}{\theta_1'}^2 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}\theta_1'\theta_2' + D_{11}\theta_1'' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\theta_1'\theta_2' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}{\theta_2'}^2 + D_{12}\theta_2'' \\
&= \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}{\theta_1'}^2 + \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\right]\theta_1'\theta_2' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}{\theta_2'}^2 + D_{11}\theta_1'' + D_{12}\theta_2''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \theta_2'} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_{12}}_{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\theta_1' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}\theta_2'} \cdot \theta_1' + D_{12}\theta_1'' + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_{22}}_{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\theta_1' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}\theta_2'} \cdot \theta_2' + D_{22}\theta_2'' \\
&= \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}{\theta_1'}^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}\theta_1'\theta_2' + D_{12}\theta_1'' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\theta_1'\theta_2' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}{\theta_2'}^2 + D_{22}\theta_2''
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \theta_1'} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}\right]{\theta_1'}^2 + \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\right]\theta_1'\theta_2' + \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\right]\theta_2' \\
&\quad + D_{11}\theta_1'' + D_{12}\theta_2'' \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}{\theta_1'}^2 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}\theta_1'\theta_2' + \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\right]{\theta_2'}^2 + D_{11}\theta_1'' + D_{12}\theta_2'' \\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}\theta_1' + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}\theta_2'\right]}_{C_{11}}\theta_1' + \underbrace{\left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}\theta_2' - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\theta_2'\right]}_{C_{12}}\theta_2' + D_{11}\theta_1'' + D_{12}\theta_2''
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \theta_2'} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}\right]\theta_1'^{\,2} + \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}\right]\theta_1'\theta_2' + \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}\right]\theta_2'^{\,2} \\
&\quad + D_{12}\theta_1'' + D_{22}\theta_2'' \\
&= \underbrace{\left[\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}\theta_1' - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}\theta_1'\right]}_{C_{21}}\theta_1' + \underbrace{\left[\frac{1}{2}\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}\theta_2' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}\theta_1'\right]}_{C_{22}}\theta_2' + D_{12}\theta_1'' + D_{22}\theta_2''
\end{aligned}
$$

Für die Einträge der Matrix C gilt

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_1' + \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)}\theta_2' = -2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' \\
C_{12} &= \underbrace{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}}_{=-m_2l_1a_2\sin(\theta_2)}\theta_2' - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_2' = -m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' \\
C_{21} &= \underbrace{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_1' - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)}\theta_1' = m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_1' \\
C_{22} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}}_{=0}\theta_2' + \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_1' = 0
\end{aligned}
$$

Es gilt somit

$$
C\cdot\theta'(t) = \begin{pmatrix} -2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' & -m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' \\ m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_1' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1' \\ \theta_2'\end{pmatrix}
$$

1.2.3 Gravitationsterme

Wählen wir $y = 0$ als Nullhöhe, so ist

$$
\begin{aligned}
V &= m_1\cdot g\cdot y_1 + m_2\cdot g\cdot y_2 \\
&= m_1ga_1\sin(\theta_1) + m_2g\left(l_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_1+\theta_2)\right)
\end{aligned}
$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= m_1ga_1\cos(\theta_1) + m_2g\left(l_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2)\right) \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= m_2g\left(l_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2)\right)
\end{aligned}
$$

1.2.4 Simulation gegebener Steuerung

- Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, 1]$ und der Funktion mittels $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \qquad \begin{pmatrix} u_i \end{pmatrix}_{i=0}^{N} = \begin{pmatrix} \tau_1^i \\ \tau_2^i \end{pmatrix}_{i=0}^{N}$$

-

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1{}' \\ \theta_2{}' \end{pmatrix} \qquad u(t) = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \theta_1{}'' \\ \theta_2{}'' \end{pmatrix} = D^{-1} \left[u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1{}' \\ \theta_2{}' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]$$

- Dynamisches System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1{}' \\ \theta_2{}' \\ \theta_1{}'' \\ \theta_2{}'' \end{pmatrix}}_{x'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1{}' \\ \theta_2{}' \\ D^{-1} \left[u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1{}' \\ \theta_2{}' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]_1 \\ D^{-1} \left[u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1{}' \\ \theta_2{}' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]_2 \end{pmatrix}}_{f(x,u)} \Rightarrow x_{i+1} = x_i + h \cdot f(x_i, u_i)$$

2 Optimale Steuerungsprobleme

Definition 2.1 (Optimales Steuerungsproblem) *Gegeben seien*

- *Systemdynamik:*

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

  wobei $x(t) \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor und $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ die Steuerung ist.

- *Zielfunktional:*

$$J(u) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$$

- *Ziel: Finde die Steuerung $u(t)$, die $J(u)$ minimiert, also*

$$J(u^*) = \min_u J(u) \Rightarrow u^* = \arg\min_u J(u)$$

Zielfunktional:

$$\min J[u] = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(t, x, u)\,\mathrm{d}t$$

Systemdynamik:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0$$

Es gilt mittels Kettenregel:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \Phi_x \cdot x' + \Phi_t\right)$$

- Augmentierte Lagrange Funktion

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\varphi(t, x, u) + \Phi_x \cdot x' + \Phi_t + p \cdot (x' - f(x, u))}_{=L(t,x,x',u)}\,\mathrm{d}t$$

- Für den Kozustand gilt $L_{x'} = p(t)$
- Optimalitätsbedingung mit $H(t, x, u, p) = x' \cdot p - L$

$$x'(t) = H_p \quad p'(t) = -H_x \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

- Diese Bedingungen geben uns die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das optimale Steuerungsproblem

Satz 2.2 (Minimumprinzip) *Sei $\boldsymbol{H} = L(t,x,u) + p(t)^T \cdot f(t,x,u)$ die Hamilton-Funktion*

- *Es gilt $u^* = \text{argmin } \boldsymbol{H}(x^*, u, p^*)$*

$$p'(t) = -H_x \quad \boldsymbol{H}_u = 0 \quad x'(t) = H_p$$

- *Weiter gilt die Transversalitätsbedingung*

$$\Phi_x(t = t_f) = p(t = t_f)$$

- *Für freie Endzeit t_f gilt*

$$\boldsymbol{H}(t = t_f) + \Phi_t(t = t_f) = 0 \Rightarrow \underbrace{\boldsymbol{H}(x,u,p) = 0}_{\text{für } \boldsymbol{H}_t = 0}$$

Beispiel 2.3 (Testbeispiel) *Löse das folgende optimale Steuerungsproblem*

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 \,\mathrm{d}t \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Wir definieren die Hamiltonfunktion $\boldsymbol{H} = x + u^2 + p \cdot (x + u + 1)$. Das Minimumprinzip liefert

$$p'(t) = -\boldsymbol{H}_x = -1 - p \quad \boldsymbol{H}_u = 0 = 2u + p \Rightarrow u = -\frac{p}{2}$$

Die adjungierte Gleichung ist trennbar

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -1 - p \Rightarrow \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}p}{1+p}}_{\log(p+1)} = \underbrace{\int -1 \,\mathrm{d}t}_{=-t+K} \Rightarrow p(t) = -1 + C \cdot e^{-t}, \quad C = e^K$$

Für die optimale Steuerung gilt somit $u(t) = -\frac{1}{2}p(t) = \frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}$. Den optimalen Zustand berechnen wir aus der Systemdynamik

$$x'(t) = x(t) + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}}_{=u(t)} + 1 \Rightarrow x'(t) = 1 \cdot x(t) + \frac{3}{2} - \frac{C}{2} e^{-t}$$

Das ist eine lineare inhomogene Gleichung. Es gilt $A(t) = \int_0^t 1 \, \mathrm{d}s = t$ *und somit*

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cdot e^{A(t)} + e^{A(t)} \cdot \int_0^t \left(\frac{3}{2} - \frac{C}{2} e^{-s} \right) \cdot e^{-A(s)} \, \mathrm{d}s \\ &= e^t \cdot \int_0^t \frac{3}{2} \cdot e^{-s} - \frac{C}{2} e^{-s} \cdot e^{-s} \, \mathrm{d}s \\ &= e^t \cdot \left[-\frac{3}{2} e^{-s} + \frac{C}{4} e^{-2s} \right]_0^t \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{C}{4} e^{-t} + \frac{3}{2} e^t - e^t \frac{C}{4} \end{aligned}$$

Da $x(1)$ *frei ist und kein Endkostenterm vorliegt gilt* $p(1) = 0$*.*

$$p(1) = -1 + C \cdot e^{-1} = 0 \Rightarrow C = e.$$

Wir fassen nun die Resultate zusammen:

$$\begin{aligned} p(t) &= -1 + e^{-t+1} \\ u(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-t+1}\right) \\ x(t) &= -\frac{3}{2} + \frac{e^{-t+1}}{4} + \frac{3}{2} e^t - \frac{e^{t+1}}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 (Minimierung des Treibstoffverbrauchs) *Ein Fahrzeug startet bei* $x(0) = 0$ *mit* $v(0) = 0$ *und soll zum festen Zeitpunkt* $t_f = 2$ *die Position* $x(2) = 1$ *erreichen. Das Kostenfunktional lautet:*

$$J[u] = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

Die Dynamik des Fahrzeugs ist:

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = u(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = f(y, u)$$

- *Aufstellen der Hamilton-Funktion mit* $p(t) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_v \end{pmatrix}$

$$H = L + \boldsymbol{p}(t)^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, u) = \frac{1}{2} u(t)^2 + p_x(t) v(t) + p_v(t) u(t)$$

- *Formulierung des Minimumprinzips:*

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -p_v(t) = u^*(t), \quad -p'(t) = \nabla_{y=(x,v)} H \Rightarrow -p_x'(t) = 0, -p_v'(t) = p_x(t)$$

- *Integration der Gleichungen*

$$p_x(t) = C, p_v(t) = -C \cdot t + K$$

- *Integration der Systemdynamik unter Nutzung der Anfangswerte* $x(0) = v(0) = 0$

$$\begin{aligned} u(t) &= Ct - k \\ v(t) + v(0) &= \int_0^t v'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s = \frac{C}{2}t^2 - kt \\ x(t) + x(0) &= \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s = \frac{C}{6}t^3 - \frac{k}{2}t^2 \end{aligned}$$

- *Anwendung der Endwerte* $x(2) = 1$ *und* $v(2) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{C}{2} \cdot 4 - k \cdot 2 \Rightarrow k = C \\ 1 &= \frac{C}{6} \cdot 8 - \frac{C}{2} \cdot 4 \Rightarrow 1 = \left(\frac{4C}{3} - 2C\right) = -\frac{2C}{3} \Rightarrow C = -\frac{3}{2} \\ u(t) &= \left(-\frac{3}{2}\right) t - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2.1 Linear-Quadratische Probleme

Satz 2.5 (Riccati-Regler) *Die Lösung des linear-quadratischen Problems*

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \int_0^T \frac{q}{2} \cdot x^2(t) + \frac{r}{2} \cdot u^2(t) dt + \frac{s}{2} x(T)^2 \\ \text{s.t.} \quad x'(t) &= a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0 \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $q, r, s \geq 0$ *ist gegeben durch die Riccati-Gleichung*

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r} K(t)^2 - q, \quad K(T) = s$$

und die resultierenden Lösungen

$$x^*(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a - \frac{b^2}{r}K(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad u^*(t) = -\frac{b}{r}K(t)x(t)$$

Beweis: Wir definieren die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2}qx(t)^2 + \frac{1}{2}ru(t)^2 + p(t)\left(ax(t) + bu(t)\right)$$

Dann liefert das Minimumprinzip die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t) \quad p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow p'(t) = -qx(t) - ap(t)$$

Weiter gilt die Transversalitätsbedingung $p(T) = s \cdot x(T)$. Wir nehmen an, dass eine Feedbacksteuerung vorliegt, d.h.

$$p(t) = K(t)x(t) \quad p(T) = K(T)x(T) \Rightarrow K(T) = s$$

wobei $K(t)$ eine skalare Funktion ist. Ableiten von p nach t liefert

$$p'(t) = K'(t)x(t) + K(t)x'(t)$$

Für die Zustandsgleichung gilt mit $u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t)$

$$x'(t) = ax(t) + bu^*(t) = ax(t) - \frac{b^2}{r}K(t)x(t) = \left(a - \frac{b^2}{r}K(t)\right)x(t).$$

Wir setzen nun $p'(t) = -H_x$ und unseren Ausdruck für $x'(t)$ ein, so gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{-qx(t) - ap(t)}_{=p'(t)} &= K'(t)x(t) + K(t)\underbrace{\left(a - \frac{b^2}{r}K(t)\right)x(t)}_{=x'(t)} \\
\Leftrightarrow -qx(t) - aK(t)x(t) &= K'(t)x(t) + aK(t)x(t) - \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) \\
\Leftrightarrow K'(t)x(t) &= -2aK(t)x(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) - qx(t)
\end{aligned}$$

Unter der Annahme $x(t) \neq 0$ erhalten wir die Riccati-Differentialgleichung:

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2 - q, \quad K(T) = s.$$

Wir erhalten $x(t)$ als Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$x'(t) = \left(a - \frac{b^2}{r}K(t)\right)x(t) \Rightarrow x(t) = x(0) \cdot \exp\left(\int_0^t a - \frac{b^2}{r}K(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Die optimale Steuerung $u^*(t)$ ergibt sich aus $u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t) = -\frac{b}{r}K(t)x(t)$.
□

Beispiel 2.6 (Berechnung des Riccati-Reglers) *Wir betrachten erneut ein Beispiel. In diesem Beispiel gilt für die Parameter*

$$a = 0, b = 1, q = 1, r = 1, T = 1, s = 0, x_0 = 1.$$

Die Riccati-Gleichung lautet somit

$$K'(t) = K(t)^2 - 1, \quad K(1) = 0$$

Die Gleichung ist trennbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = K^2 - 1 \Rightarrow \int \frac{1}{K^2 - 1}\mathrm{d}K = \int 1\,\mathrm{d}t$$

Wir nutzen die Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{K^2-1}$ *und erhalten*

$$\frac{1}{K^2 - 1} = \frac{1}{(K+1)(K-1)} = \frac{A}{K-1} + \frac{B}{K+1} \Rightarrow 1 = \underbrace{A(K+1) + B(K-1)}_{K\cdot(A+B)+A-B}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A + B = 0$ *und* $A - B = 1$*, mit der Lösung* $A = \frac{1}{2}$ *und* $B = -\frac{1}{2}$*. Wir erhalten für unser Integral*

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{K^2-1}\mathrm{d}K &= \int 1\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{2}\frac{1}{K-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{K+1}\mathrm{d}K &= t + \frac{C}{2} \\
\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\log(K-1)-\log(K+1)}_{\log\left(\frac{K-1}{K+1}\right)}\right) &= t + \frac{C}{2} \\
\frac{K-1}{K+1} &= \exp\left(2t+C\right) = \underbrace{e^C}_{:=A}\cdot e^{2t} \\
K(t) &= \frac{1+Ae^{2t}}{1-Ae^{2t}}
\end{aligned}
$$

Es gilt weiter $K(1)=0$ und somit $A=-\frac{1}{e^2}$ damit ist die Lösung der Riccati-Gleichung gegeben durch

$$
K(t) = \frac{1-e^{2(t-1)}}{1+e^{2(t-1)}}.
$$

Für den optimalen Zustand gilt

$$
x(t) = 1\cdot\exp\left(\int_0^t -K(s)\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(\int_0^t -\frac{1-e^{2(s-1)}}{1+e^{2(s-1)}}\,\mathrm{d}s\right)
$$

Wir nutzen die Substitution $z=e^{2(s-1)}$ dann gilt für das Integral

$$
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 2\cdot\underbrace{e^{2(s-1)}}_{=z} \Rightarrow \int -\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{2z} = -\frac{1}{2}\int\frac{1-z}{z(1+z)}\,\mathrm{d}z
$$

Wir verwenden erneut eine Partialbruchzerlegung

$$
\frac{1-z}{z(1+z)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z+1} \Rightarrow 1-z = \underbrace{A(1+z)+Bz}_{=(A+B)z+A}
$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A=1$ und $A+B=-1$ und somit $B=-2$. Für das Integral gilt somit

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1-z}{z(1+z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{z} - \frac{2}{z+1}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\left[\log(z) - 2\log(z+1)\right] + C$$

Rücksubstitution von $z(t) = e^{2(t-1)}$ liefert

$$x(t) = \exp\left[-(t-1) + \log(e^{2(t-1)} + 1) + C\right]$$

Wir nutzen $x(0) = 1$ und bestimmen die Konstante C.

$$x(0) = \exp\left(-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C\right) = 1$$

Wir erhalten somit die Bedingung

$$-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C = 0 \Rightarrow C = -1 - \log(1 + e^{-2})$$

Der optimale Zustand ist somit gegeben als

$$x(t) = \exp\left[-t + 2 + \log\left(\frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}}\right)\right] = \underbrace{e^{-t+2} \cdot \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}}}_{= \frac{e^2}{1+e^{-2}} e^{-t} + \frac{1}{1+e^{-2}} e^{t}}$$

Für die optimale Steuerung gilt $u^*(t) = -K(t)x(t)$ und somit

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1 - e^{2(t-1)}}{1 + e^{2(t-1)}} \cdot e^{-t+2} \cdot \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}} \\ &= \frac{e^{-t+2}}{1 + e^{-2}} \cdot (-1 + e^{2(t-1)}) \\ &= -\frac{e^2}{1 + e^{-2}} e^{-t} + \frac{1}{1 + e^{-2}} e^{t} \end{aligned}$$

Dies entspricht den Lösungen aus dem Beispiel.

3 Numerische Lösungsverfahren

3.1 Gradientenverfahren

$$u(t) + \epsilon \cdot \eta_u(t) \quad x(t) + \epsilon \cdot \eta_x(t), \eta_x(0) = 0$$

Um die Zustandsgleichung als Nebenbedingung zu integrieren, führen wir einen Lagrange-Multiplikator $p(t)$ ein. Das erweiterte Zielfunktional lautet dann:

$$J^{\text{aux}}(u, x, p) = \int_0^T \left[L(x(t), u(t), t) + p(t) \left(f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t) \right) \right] \mathrm{d}t + \Phi(x(T))$$

Wir betrachten kleine Variationen der Steuerungsfunktion und des Zustands: wobei ε ein kleiner Parameter ist.
Die Variation von J^{aux} bezüglich ε bei $\varepsilon = 0$ ergibt:

$$\delta J^{\text{aux}} = \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u(t) + p(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u(t) - \delta \dot{x}(t) \right) \right] \mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \delta x(T)$$

Der Term mit $\delta \dot{x}(t)$ wird mittels Integration durch Teile umgeformt:

$$\int_0^T p(t)(-\delta \dot{x}(t)) \, \mathrm{d}t = \left[-p(t) \delta x(t) \right]_0^T + \int_0^T \dot{p}(t) \delta x(t) \, \mathrm{d}t$$

Da $\delta x(0) = 0$ ist (weil der Anfangszustand festgelegt ist), vereinfacht sich der Randterm zu:

$$-p(T) \delta x(T) + \int_0^T \dot{p}(t) \delta x(t) \, \mathrm{d}t$$

Setzen wir die Ergebnisse in die Variation des erweiterten Zielfunktionals ein:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} + p(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p}(t) \right) \delta x(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u(t) \right] \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p(T) \right) \delta x(T) = 0$$

Für die Gleichung muss jeder Koeffizient der unabhängigen Variation Null sein. Daher ergeben sich die adjungierten Gleichungen:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x} - p(t) \frac{\partial f}{\partial x} \\ p(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \end{cases}$$

Der Gradient des Zielfunktionals $J(u)$ ist gegeben durch:

$$\frac{\delta J}{\delta u(t)} = \frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u}$$

3.1.1 Sensitivity Approach

Erweitertes Zielfunktional

$$
\begin{aligned}
J^{aux}(u) &= \int_0^T \varphi(t,x,u) + p(t) \cdot (f(t,x,u) - x'(t))\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T \underbrace{\varphi(t,x,u) + p(t) \cdot f(t,x,u)}_{=H(t)}\,\mathrm{d}t \quad \underbrace{-\int_0^T p(t)x'(t)\,\mathrm{d}t}_{=-[p(t)x(t)]_0^T + \int_0^T p'(t)x(t)\,\mathrm{d}t} \quad + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t)\,\mathrm{d}t - [p(t)x(t)]_0^T + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t)\,\mathrm{d}t - p(T)x(T) + p(0)x(0) + \Phi(x(T))
\end{aligned}
$$

Der Term $p(0)x(0)$ ist unabhängig von u und fällt bei der Optimierung weg. Bilden der Gateau Ableitung in u entlang h liefert

$$
\begin{aligned}
J'(u,h) &= \int_0^T H_x[t] \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) + p'(t)S(t)\,\mathrm{d}t - p(T)S(T) + \Phi_x(x(T))S(1) \\
&= \int_0^T (\underbrace{H_x[t] + p'(t)}_{=0}) \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t)\,\mathrm{d}t + (\underbrace{\Phi_x(x(T)) - p(T)}_{=0}) \cdot S(T) \\
&= \int_0^T H_u[t] \cdot h(t)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten somit $J'(u) = H_u[t]$

3.1.2 Praktische Implementierung

Beispiel 3.1 *Wir betrachten das Steuerungsproblem*

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 \,\mathrm{d}t \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

welches in einer Aufgabe analytisch gelöst ist. Für den Gradienten gilt

$$\nabla J(u) = H_u = \frac{\partial}{\partial u}(x(t) + u(t)^2 + p(t) \cdot (x(t) + u(t) + 1)) = 2u(t) + p(t)$$

Wir verwenden das explizite Euler-Verfahren zur Diskretisierung der Gleichungen aus dem Minimumprinzip:

- *Diskretisierung des Zeitintervalls* $[0, 1]$ *und der Funktionen mittels* $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \boldsymbol{u}^k = \left(u_i^k\right)_{i=0}^N, \quad \boldsymbol{x}^k = \left(x_i^k\right)_{i=0}^N, \quad \boldsymbol{t}^k = (i \cdot h)_{i=0}^N,$$

- *Armijo Suchrichtung* $\alpha^{(k)}$*: Für* $0 \leq m < M = 10$, $c = 10^{-4}, \beta = 0.5 \in (0, 1)$

$$u^{\textsf{neu}} = u^k + \beta^m \cdot d^{(k)}$$

$$J(u^k) = \int_0^1 x^k(t) + (u^k(t))^2 \,\mathrm{d}t \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^k + (u_i^k)^2$$

$$J(u^{neu}) = \int_0^1 x^{neu}(t) + (u^{neu}(t))^2 \,\mathrm{d}t \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^{neu} + (u_i^{neu})^2$$

$$J(u^{neu}) \leq J(u^k) - c \cdot \beta^m \cdot h \cdot \sum_{i=0}^N (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)})(2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)})$$

$$\Leftrightarrow J(u^{neu}) \leq J(u^k) - \left\|d^{(k)}\right\|^2 \cdot c \cdot \beta^m \Rightarrow \alpha^{(k)} = \beta^m$$

- *Gradientenverfahren: Für* $0 \leq k < MaxIter$, $\epsilon = 10^{-6}$*:*
  - *Forward Integration* $x'(t) = x(t) + u(t) + 1$

$$x_{i+1}^k = x_i^k + h \cdot (x_i^{(k)} + u_i^{(k)} + 1) \quad x_0^{(k)} = 0$$

  - *Backward Integration* $p'(t) = -(1 + p(t))$

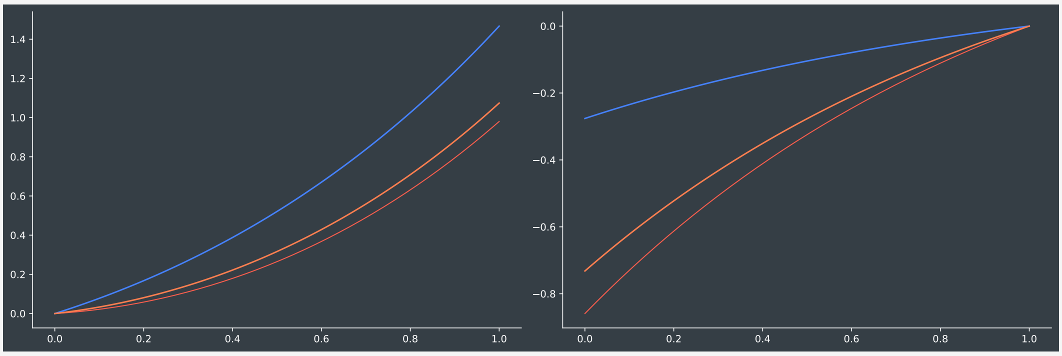
$$p_i^k = p_{i+1}^k + h \cdot (1 + p_{i+1}^k) \quad p_N^{(k)} = \partial_x \Phi(x(1)) = 0$$

- *Berechnung des Gradienten* $\nabla J = H_u = 2u + p$

$$d^{(k)} = -(2 \cdot u^{(k)} + p^{(k)})$$

- *Berechnung der Schrittweite* $\alpha^{(k)}$*:*

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot d^{(k)}$$
$$\left\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \right\| < \epsilon \Rightarrow u^{final} = u^{(k+1)}, \ \textit{sonst} \ k \rightarrow k+1$$



Zustand x und Steuerung u mit den Iterationen 100, 500 und der analytischen Lösung

3.2 Shooting Methods

Das Ziel ist es, den Anfangswert $p(t_0)$ so anzupassen, dass die Endbedingung $p(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$ erfüllt wird. Dieses Verfahren wird mithilfe des Schießverfahrens gelöst. Wir definieren eine Residuenfunktion $R(p(t_0))$, die die Abweichung zwischen dem berechneten Endwert $p(t_f; p(t_0))$ und dem gewünschten Endwert $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$ darstellt:

$$R(p(t_0)) = p(t_f; p(t_0)) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f; p(t_0))) \tag{1}$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung von $R(p(t_0)) = 0$ liefert den Update-Schritt:

$$p^{(k+1)}(t_0) = p^{(k)}(t_0) - \frac{R(p^{(k)}(t_0))}{R'(p^{(k)}(t_0))} \tag{2}$$

Die Jacobi-Matrix $R'(p(t_0))$ ergibt sich durch Ableiten der Residuenfunktion:

$$R'(p(t_0)) = \frac{\partial R}{\partial p(t_0)} = S_p(t_f) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} S_x(t_f), \tag{3}$$

wobei $S_x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)}$ und $S_p(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)}$ die Sensitivitäten sind.
Wir leiten die Zustandsgleichung und die adjungierte Gleichung nach $p(t_0)$ ab, um die Sensitivitäten $S_x(t)$ und $S_p(t)$ zu berechnen.

- Durch Ableiten der Zustandsgleichung nach $p(t_0)$ erhalten wir die Gleichung für $S_x(t)$:

$$\frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{\partial f}{\partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} S_u(t), \tag{4}$$

  mit der Anfangsbedingung $S_x(t_0) = 0$.

- Durch Ableiten der adjungierten Gleichung nach $p(t_0)$ erhalten wir die Gleichung für $S_p(t)$:

$$\frac{d}{dt} S_p(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} S_x(t) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} S_u(t), \tag{5}$$

  mit der Anfangsbedingung $S_p(t_0) = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

- Falls die Steuerung u implizit von $p(t_0)$ abhängt, bestimmen wir $S_u(t) = \frac{\partial u}{\partial p(t_0)}$ aus der Optimalitätsbedingung $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} S_u(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial p} S_p(t) = 0 \tag{6}$$

Diese Gleichung kann nach $S_u(t)$ aufgelöst werden, sofern $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ invertierbar ist:

$$S_u(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}^\top S_p(t)\right) \tag{7}$$

Beispiel 3.2 *Betrachten wir das folgende konkrete Beispiel:*

$$\min \frac{1}{2}(x(1)-1)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u(t)^2 + x(t)^3\right) dt$$
$$\text{s.t } x'(t) = u(t) - 15\exp(-2t), \quad x(0) = 4$$

Der adjungierte Zustand ist gegeben durch

$$p'(t) = -\frac{3}{2}x(t)^2 \quad p(1) = 5(x(1)-1)$$

- *Resultierende Sensitivitätsgleichungen für S_x und S_p*

  In diesem Beispiel ergibt sich die Steuerung $u(t) = -p(t)$ aus der Optimalitätsbedingung. Durch Einsetzen in die Zustandsgleichung erhalten wir das gekoppelte System:

$$\dot{x}(t) = -p(t) - 15\exp(-2t), \quad x(0) = 4$$
$$\dot{p}(t) = -\frac{3}{2}x(t)^2, \quad p(1) = 5(x(1)-1)$$

  Die Sensitivitätsgleichungen für $S_x(t)$ und $S_p(t)$ lauten:

$$\frac{d}{dt}S_x(t) = -S_p(t), \quad S_x(0) = 0$$
$$\frac{d}{dt}S_p(t) = -3x(t)S_x(t), \quad S_p(0) = 1$$

- *Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu:*

$$R'(p(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1) \tag{8}$$

Das Newton-Verfahren zur Anpassung von $p(0)$ sieht folgendermaßen aus:

1. ***Initialisierung***: *Wählen Sie eine Startschätzung* $p^{(0)}(0)$.

2. ***Iterative Berechnung***:

   a) ***Vorwärtsintegration der Zustandsgleichungen***: *Integrieren Sie die Gleichungen für* $x(t)$ *und* $p(t)$ *mit* $p^{(k)}(0)$ *von* $t = 0$ *bis* $t = 1$.

   b) ***Berechnung des Residuals***: *Berechnen Sie das Residuum*

   $$R(p^{(k)}(0)) = p(1; p^{(k)}(0)) - 5(x(1; p^{(k)}(0)) - 1)$$

   c) ***Integration der Sensitivitätsgleichungen***: *Integrieren Sie die Sensitivitätsgleichungen für* $S_x(t)$ *und* $S_p(t)$ *von* $t = 0$ *bis* $t = 1$, *um* $S_x(1)$ *und* $S_p(1)$ *zu berechnen.*

   d) ***Berechnung der Ableitung*** $R'(p^{(k)}(0))$:

   $$R'(p^{(k)}(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1)$$

   e) ***Aktualisierung mittels Newton-Schritt***:

   $$p^{(k+1)}(0) = p^{(k)}(0) - \frac{R(p^{(k)}(0))}{R'(p^{(k)}(0))}$$

   f) ***Konvergenzkriterium***: *Falls* $|R(p^{(k+1)}(0))| < \epsilon$ *(Toleranz), beenden Sie die Iteration. Falls nicht, setzen Sie* $k = k + 1$ *und wiederholen ab Schritt (a).*

3.3 Riccati Regler

Es gilt

$$F(K) := Q - KPK + KA + A^T K \Rightarrow F(K) = 0$$

Definition 3.3 *Sei* $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *dann definieren wir*

$$\mathsf{vec}(X) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} & X_{12} & X_{22} & \cdots X_{nn} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{p\times r}$, dann definieren wir

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ A_{12}B & \dots & A_{2m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & \cdots & A_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nr}$$

Es gilt die Formel

$$\mathsf{vec}(MXN) = (N^T \otimes M)\mathsf{vec}(X)$$

Betrachten wir den Fall $M = 1$ und $N = A$ bzw. $N = 1$ und $M = A^T$ erhalten wir mit $X = K$

$$\mathsf{vec}(KA) = (A^T \otimes 1)\mathsf{vec}(K) \quad \mathsf{vec}(A^TK) = (1 \otimes A^T)\mathsf{vec}(K)$$

Anwendung auf unser Problem liefert

$$\underbrace{\mathsf{vec}(F(K))}_{f(x=\mathsf{vec}(K))} = \underbrace{\mathsf{vec}(Q)}_{q} - \underbrace{\mathsf{vec}(KPK)}_{g(x=\mathsf{vec}(K))} + \underbrace{\mathsf{vec}(KA)}_{(A^T\otimes 1)\mathsf{vec}(K)} + \underbrace{\mathsf{vec}(A^TK)}_{(1\otimes A^T)\mathsf{vec}(K)}$$

Durch Einführung von $x = \mathsf{vec}(K) \in \mathbb{R}^{n^2}$ erhalten wir

$$f(x) = q - g(x) + (A^T \otimes 1)x + (1 \otimes A^T)x$$

Da $(KP)^T = KP$ gilt

$$g(\mathsf{vec}(K)) = \mathsf{vec}(KPK) = (1 \otimes KP)\mathsf{vec}(K)$$

Wir betrachten die Variation $K(\epsilon) = K + \epsilon \cdot \bar{K}$ und die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$ mit

$$\begin{aligned} h(\epsilon) := g(\mathsf{vec}(K(\epsilon))) &= \mathsf{vec}(K(\epsilon)PK(\epsilon)) \\ &= \mathsf{vec}((K + \epsilon \cdot \bar{K})P(K + \epsilon \cdot \bar{K})) \\ &= \mathsf{vec}(KPK + \epsilon KP\bar{K} + \epsilon \bar{K}PK + \epsilon^2 \bar{K}P\bar{K}) \end{aligned}$$

Ableitung nach ϵ und Auswertung in $\epsilon = 0$ ergibt

$$h'(0) = \frac{d}{d\epsilon} g(\mathsf{vec}(K + \epsilon\bar{K}))\bigg|_{\epsilon=0} = \mathsf{vec}(KP\bar{K} + \bar{K}PK) = \mathsf{vec}(KP\bar{K}) + \mathsf{vec}(\bar{K}PK)$$

Umschreiben als Matrix-Vektor-Produkt

$$\mathsf{vec}(KP \cdot \bar{K} \cdot 1) = (1 \otimes KP)\mathsf{vec}(\bar{K}) \quad \mathsf{vec}(1 \cdot \bar{K} \cdot PK) = ((PK)^T \otimes 1)\mathsf{vec}(\bar{K})$$

Wir erhalten als Ableitung

$$g'(x) = (1 \otimes KP) + ((PK)^T \otimes 1) \Rightarrow f'(x) = -(1 \otimes KP) - ((PK)^T \otimes 1) + (A^T \otimes 1) + (1 \otimes$$

3.3.1 Implementierung

```
def vec(X):
    return X.reshape(-1, order='F')

def unvec(v, n):
    return v.reshape((n, n), order='F')
```

Hier normaler text

```
# Newton Kleinman Verfahren
def solv_CARE(A,B,R,Q,tol=1e-8,max_iter=50):
  n = A.shape[0]
  I = np.eye(n)
  q = vec(Q)
  L = np.kron(I, A.T) + np.kron(A.T, I)
  P = B @ np.linalg.solve(R, B.T)
  # Startwert K0 hier Einheitsmatrix
  K = I
  x = vec(K)

  for i in range(max_iter):
    X = K @ P #KP
    vec_KPK = np.kron(I,X) @ x
    f = q - vec_KPK + L @ x
    Dg = np.kron(I,X)+np.kron(X,I)
    Df = L - Dg
    dx = np.linalg.solve(Df, -f)
    x_new = x + dx
    # Abbruch
    if np.linalg.norm(dx) / np.linalg.norm(x_new) < tol:
      x=x_new
      break

      x = x_new
      K = unvec(x, n)
  return K
```

Erklärung des Codes
Stabilität der Startlösung hier Gershgorin kreise und Stabilität erklären
Für Y mit $RY = B^T \Rightarrow Y = B^{-1}B^T$ und $B \cdot Y = P$

4 Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

Wir betrachten ein Steuerungsproblem und definieren die Value-Function V mittels

$$V(x(t), t) := \min_u \left\{ \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \Phi(x(t_f)) \right\}$$

Satz 4.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung) *Die Value-Function erfüllt*

$$0 = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \min_u \left[L(t,x,u) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \cdot f(t,x,u) \right], \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \leq t \leq t_f$$

mit den Randbedingungen

$$V(x, t_f) = \Phi(x(t_f)) \quad V(x, t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \Phi(x(t_f))$$

Beweis:
Die Value-Function $V(x,t)$ beschreibt die minimalen Kosten von Zustand x zum Endzeitpunkt t_f. Für $s \in [t, t_f]$ gilt

- Systemdynamik

$$x'(s) = f(x(s), u(s)), \quad x(t) = x$$

- Kostenfunktional

$$J(u) = \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \Phi(x(t_f))$$

Angenommen, wir wechseln zum Zeitpunkt $t+h$ zu einer optimalen Steuerung, dann gilt für unser Zielfunktional

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t+h}^{t_f} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \Phi(x(t_f)) \\ &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + V(x(t+h), t+h) \end{aligned}$$

Da $V(x(t), t)$ die minimalen Kosten vom Zustand x zur Zeit t angibt, gilt:

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + V(x(t+h), t+h) \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t) \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $h \to 0$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\, \mathrm{d}s + \lim_{h \to 0} \frac{V(x(t+h), t+h) - V(x,t)}{h} \\
&= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t), t) \\
&= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x'(t) \\
&= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t))
\end{aligned}
$$

Durch Minimierung bezüglich u erhalten wir die Gleichheit und somit

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \right] \\
&= \frac{\partial V}{\partial t} + \mathsf{H}\left(t, x(t), \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \right)
\end{aligned}
$$

$\square$

4.1 Herleitung des Minimumprinzips

Berechnung der totalen Ableitung der Value-Function V entlang der Charakteristik $x(t)$:

$$
\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = p(x, t) \cdot x'(t) - H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right)
$$

Berechnung der totalen Ableitung von $p = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$
\frac{dp}{dt} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial x \partial t}
$$

Differenzieren der HJB bezüglich x liefert

$$
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}
$$

Einsetzen der Gleichung liefert:

$$
\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \left(-\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left(x'(t) - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial H}{\partial x}
$$

Wir erhalten somit die bekannten, notwendigen Optimalitätsbedingungen:

$$
p'(t) = -H_x, \quad x'(t) = f(t, x, u^*), \quad u^* = \mathsf{argmin}\, [L(t, x, u) + p(t, x) f(t, x, u)]
$$

4.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme

4.2.1 Finite time problem

Gegeben sei das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u \,\mathrm{d}t + \underbrace{(x(t_f) - x_f)^T S (x(t_f) - x_f)}_{x(t_f)^T S x(t_f) - 2x_f^T S x(t_f) + x_f^T S x_f} = V(t_0, x(t_0)) + x_f^T S x_f$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Der Term $x_f^T S x_f$ ist unabhängig von u und kann bei der Minimierung weggelassen werden.

$$V(x,t) = x^T K(t) x + 2s(t)^T x + r(t) \quad V(x,t_f) = x(t_f)^T K(t_f) x(t_f) + 2s(t_f)^T x(t_f) + r(t_f)$$

Wir erhalten für die Endwerte

$$K(t_f) = S, \quad s(t_f) = -Sx_f \quad r(t_f) = 0$$

$$V_t = x^T K'(t) x + 2s'(t)^T x + r'(t) \quad V_x = 2K(t)x + 2s(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[x^T Q x + u^T R u + V_x^T \cdot (Ax + Bu)\right] = 2Ru + B^T \cdot V_x \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x$$

$$\begin{aligned}
(u^*)^T R u^* &= \left(-\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x\right)^T R \left(-\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(R^{-1} B^T V_x\right)^T R \left(R^{-1} B^T V_x\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(2R^{-1} B^T (K(t)x + s(t))\right)^T R \left(2R^{-1} B^T (K(t)x + s(t))\right) \\
&= (K(t)x + s(t))^T B R^{-1} R R^{-1} B^T (K(t)x + s(t)) \\
&= < K(t)x + s(t), P(2K(t)x + s(t)) > \\
&= < K(t)x, PK(t)x > + \underbrace{< K(t)x, Ps(t) >}_{< s(t), P^T K(t)x >} + < s(t), PK(t)x > + < s(t), Ps(t) > \\
&= x^T K(t)^T P K(t) x + 2 \cdot s(t)^T P K(t) x + s(t)^T P s(t)
\end{aligned}$$

mit $P = BR^{-1}B^T$ und $P^T = P$.

$$V_x^T\left(-\frac{1}{2}BR^{-1}B^TV_x\right) = (2K(t)x+2s(t))^T\left(-\frac{1}{2}BR^{-1}B^T(2K(t)x+2s(t))\right)$$
$$= -2\cdot(K(t)x+s(t))^TP(K(t)x+s(t))$$
$$= -2\cdot x^TK(t)^TPK(t)x - 4\cdot s(t)^TPK(t)x - 2\cdot s(t)^TPs(t)$$

$$V_x^TAx = 2(K(t)x+s(t))^TAx = 2x^TK(t)^TAx + 2s(t)^TAx = x^T(K(t)^TA + A^TK(t))x + 2s(t)^T$$

$$-V_t = \min_u\left[x^TQx + u^TRu + V_x^T\cdot(Ax+Bu)\right]$$

$$-V_t = x^TQx + (u^*)^TRu^* + V_x^T\cdot\left(Ax - \frac{1}{2}BR^{-1}B^TV_x\right)$$
$$-x^TK'(t)x - 2s'(t)^Tx - r'(t) = x^T(Q - KPK + KA + A^TK)x - 2\cdot((PK-A)^Ts(t))^Tx - s$$

$$K'(t) = -Q + K(t)BR^{-1}B^TK(t) - K(t)A - A^TK(t) \quad K(t_f) = S$$
$$s'(t) = (K(t)BR^{-1}B^T - A^T)s(t) \quad s(t_f) = -Sx_f$$
$$r'(t) = s(t)^TBR^{-1}B^Ts(t) \quad r(t_f) = 0$$

4.2.2 infinite time problem

Im Grenzfall $t\to\infty$ betrachten wir das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{\infty}(x-x_f)^TQ(x-x_f) + u^TRu\,\mathrm{d}t = V(x(t_0))$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Als Ansatz für die Value Funktion wählen wir erneut

$$V(x) = x^TKx + 2s^Tx + r \Rightarrow V_x = 2Kx + 2s$$

Es gilt erneut

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((x-x_f)^TQ(x-x_f) + u^TRu + V_x^T(Ax+Bu)\right) = 2Ru + B^TV_x = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}R^{-1}B^TV_x$$

$$(x-x_f)^TQ(x-x_f) = x^TQx - 2x_f^TQx + x_f^TQx_f$$

$$0 = x^T(Q-KPK+KA+A^TK)x - 2((PK-A)^Ts + Qx_f)^Tx - s^T(P)s + x_f^TQx_f$$

5 Paper Lin

$$M(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q) = \tau + d(q,\dot{q})$$

mit Störung/Unsicherheit d. Zustand:

$$\begin{bmatrix} x := q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix}$$

Direkte Eingabe τ: kanonische Zustandsdarstellung – explizit nach $\ddot{q}$ auflösen:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}\big(\tau - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - g(q) + d(q,\dot{q})\big)$$

- Zustandsform:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\,M(q)^{-1}\big(C(q,\dot{q})\,\dot{q} + g(q)\big) \end{bmatrix}}_{A(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix}}_{B(x)} \tau + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} d(q,\dot{q}) \end{bmatrix}}_{\Delta(x)}$$

Merke: In dieser "reinen"Form ist $B(x)$ die Eingabematrix zur physischen Eingabe τ. Dein gewünschtes Schema ist dann wörtlich

$$x' = A(x) + B(x)\tau + \Delta(x)$$

LinReparametrisierung: nominales Modell + strukturierte Unsicherheit. Lin führt eine Nominaldynamik ein, um Unsicherheit strukturiert zu kapseln. Nominalgrößen wählen: $M_0(q),\ N_0(q,\dot{q}) := C_0(q,\dot{q})\dot{q} + g_0(q)$ Neue Eingabe definieren:

$$u := M_0(q)^{-1}\big(\tau - N_0(q,\dot{q})\big)$$

Einsetzen und umformen:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}M_0(q)\,u + M(q)^{-1}\Big(N_0(q,\dot{q}) - N(q,\dot{q})\Big) - Strukturterme : h(x) := M(q)^{-1}M_0(q)$$

Interpretation: Das nominale Hilfssystem ist DoppelIntegrator in $(q,\dot{q})$, und alle Nichtlinearitäten/Parameterfehler erscheinen als matched Unsicherheit $h(x)u$ (EingabematrixUnsicherheit, mit $h(x) \succeq 0$ in Lins Annahmen), additive matched Störung $f(x)$ (wirkt über dieselbe Richtung wie u). Diese Struktur erlaubt Lins Hilfsproblem und die Reduktion auf LQR, sobald du lokal linearisierst und eine quadratische Schranke $\|f(x)\|^2 \leq x^\top P x$ aufstellst. Häufige Stolperstelle in der Notation- In „$x' = A(x) + B(x) + \Delta_x$" fehlt meist das u. Korrekt ist $x' = A(x) + B(x)\,u + \Delta(x)$. Falls du u bereits in Δ „eingebaut" hast (LinForm), dann schreib klar:

$$\Delta(x, u) = [0;\, h(x)u + f(x)]$$

Kurzformeln zum direkten Einsetzen- Mit physischer Eingabe τ:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(C\dot{q} + g) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}d \end{bmatrix}. - MitLin\text{-}Eingabeu = M$$

5.1 Mein Ansatz auf Lin

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},\ \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix},\ \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$M(q)\,\ddot{q} + C(q, \dot{q})\,\dot{q} + g(q) = \tau + d(q, \dot{q})$$

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}\big(\tau - C(q, \dot{q})\,\dot{q} - g(q) + d(q, \dot{q})\big). \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M(q)^{-1}\big(C(q, \dot{q})\,\dot{q} + g(q)\big) \end{bmatrix}}_{A(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix}}_{B(x)}$$