Modellierung eines Roboters

Nicolas Schäfer
Saarbrücken, 2. Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Modellierung eines Roboters

$$\underbrace{f - mg}_{\text{Kräftebilanz}} = \underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Newtons 2nd Law}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\dot{x}]$$

$$f - \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{[mgx(t)]}_{\text{Potenzielle Energie } V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\underbrace{\left[m\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\right]}_{\text{kinetische Energie } T}$$

$$f - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \Rightarrow f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}$$

Wobei $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 - mgx(t)$ gilt. Für generalisierte Koordinaten $\mathbf{q} = \theta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} = \tau_i \quad i = 1, \cdots, n$$

Für die kinetische Energie eines starren Körpers gilt:

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T\mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I\boldsymbol{\omega}$$

Wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit und I der Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts ist. Für den Trägheitstensor gilt:

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r})[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{1} - \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}]\mathrm{d}V$$

Für ein Mehrkörpersystem mit generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ lässt sich die Gesamtenergie in kompakter Form schreiben als:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

wobei $M(\mathbf{q})$ die konfigurationsabhängige Massenmatrix ist, die alle Massen und Trägheiten der einzelnen Glieder erfasst. Für die Geschwindigkeiten gilt mittels der Kettenregel:

$$\mathbf{v} = J_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = J_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad J_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{und} \quad J_\omega = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Einsetzen in die kinetische Energie liefert:

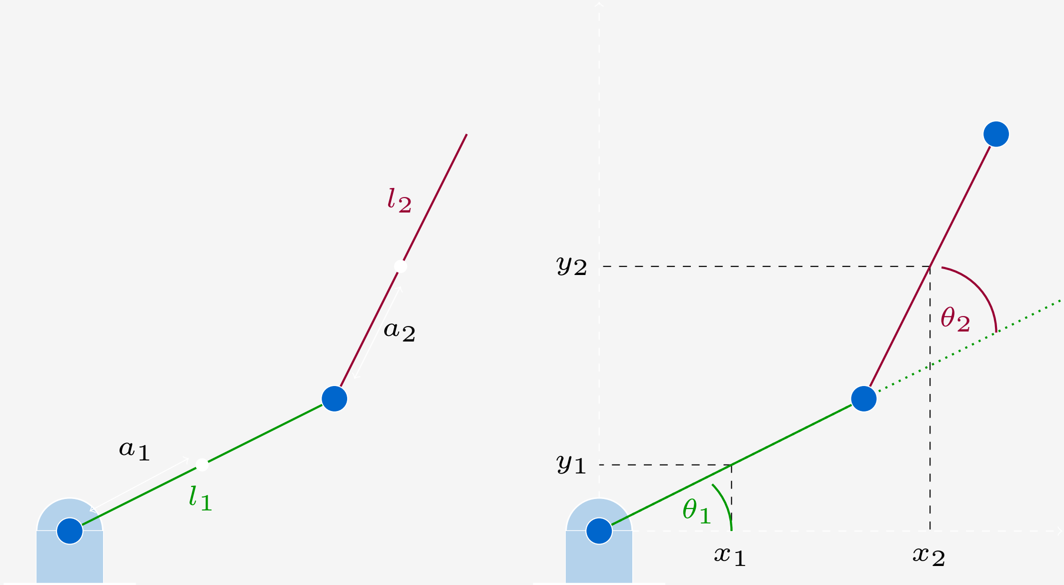
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(J_v\dot{\mathbf{q}})^T(J_v\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}(J_\omega\dot{\mathbf{q}})^T I(J_\omega\dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T(mJ_v^TJ_v)\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T(J_\omega^T IJ_\omega)\dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\underbrace{\left(mJ_v^TJ_v + J_\omega^T IJ_\omega\right)}_{M(\mathbf{q})}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Summe der Energien aller n Glieder:

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I_i J_{\omega_i}$$

1.1 Two Link Revolute Manipulator

Wir bezeichnen $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ als die generalisierten Koordinaten des Systems. Die Schwerpunkte der beiden Links bezeichnen wir mit (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Die Abstände der Schwerpunkte von den Gelenken werden mit a_1 und a_2 bezeichnet.



Für die Koordinaten der Schwerpunkte gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ a_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Formulierung der Massenmatrix

Für die Massenmatrix gilt hier:

$$M(\mathbf{q}) = m_1 J_{v_1}^T J_{v_1} + J_{\omega_1}^T I_1 J_{\omega_1} + m_2 J_{v_2}^T J_{v_2} + J_{\omega_2}^T I_2 J_{\omega_2}$$

Hierbei bezeichnet J die Jacobi-Matrix, I_i das Trägheitstensor und m_i die Masse des i-ten Links.

$$J_{v_1} = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial z_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) & 0 \\ a_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{v_2} = \frac{\partial(x_2, y_2, z_2)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z_2}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für das Matrizenprodukt $J_{v_1}^T J_{v_1}$ gilt:

$$\begin{aligned} J_{v_1}^T J_{v_1} &= \begin{pmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) & a_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) & 0 \\ a_1 \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 \sin^2(\theta_1) + a_1^2 \cos^2(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für das Matrizenprodukt $J_{v_2}^T J_{v_2}$ gilt:

$$J_{v_2}^T J_{v_2} = \begin{pmatrix} -l_1\sin(\theta_1) - a_2\sin(\theta_1+\theta_2) & l_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -a_2\sin(\theta_1+\theta_2) & a_2\cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} -l_1\sin(\theta_1) - a_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) & a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1a_2\cos(\theta_2)) & (a_2^2 + l_1a_2\cos(\theta_2)) \\ (a_2^2 + l_1a_2\cos(\theta_2)) & a_2^2 \end{pmatrix}$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten setzen wir $\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_1' \end{pmatrix}^T$ und $\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_1' + \theta_2' \end{pmatrix}^T$.

$$J_{\omega_1} = \frac{\partial(\omega_1)}{\partial({\theta_1}', {\theta_2}')} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial {\theta_1}'} & \frac{\partial \omega_1}{\partial {\theta_2}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$J_{\omega_2} = \frac{\partial(\omega_2)}{\partial({\theta_1}', {\theta_2}')} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial {\theta_1}'} & \frac{\partial \omega_2}{\partial {\theta_2}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Trägheitstensor I_i gilt:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int xy\mathrm{d}m & -\int xz\mathrm{d}m \\ -\int yx\mathrm{d}m & \int(x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int yz\mathrm{d}m \\ -\int zx\mathrm{d}m & -\int zy\mathrm{d}m & \int(x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

Für symmetrische Körper (z.B. Zylinder, Kugel, Quader) gilt: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ also erhalten wir eine Diagonalmatrix.

$$I_i = \begin{pmatrix} \int_y^2 \mathrm{d}m & 0 & 0 \\ 0 & \int x^2\mathrm{d}m & 0 \\ 0 & 0 & \int(x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \rho y^2\mathrm{d}V & 0 & 0 \\ 0 & \int_V \rho x^2\mathrm{d}V & 0 \\ 0 & 0 & \int_V \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}V \end{pmatrix}$$

Für die Massenmatrix $M(\mathbf{q})$ gilt somit:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= m_1 J_{v_1}^T J_{v_1} + J_{\omega_1}^T I_1 J_{\omega_1} + m_2 J_{v_2}^T J_{v_2} + J_{\omega_2}^T I_2 J_{\omega_2} \\ &= m_1 \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{1,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1,zz} \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{1,zz} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + m_2 \begin{pmatrix} (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1a_2\cos(\theta_2)) & (a_2^2 + l_1a_2\cos(\theta_2)) \\ (a_2^2 + l_1a_2\cos(\theta_2)) & a_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2,zz} \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{2,zz} \\ 0 & 0 & I_{2,zz} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1a_1^2 + I_{1,zz} + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1a_2\cos(\theta_2)) + I_{2,zz} & m_2(a_2^2 + l_1a_2\cos(\theta_2)) + I_{2,zz} \\ m_2(a_2^2 + l_1a_2\cos(\theta_2)) + I_{2,zz} & m_2a_2^2 + I_{2,zz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Trägheitselemente $I_{i,xx}$ und $I_{i,yy}$ sind nicht relevant. Für unser Model verwenden wir den Standardansatz eines dünnen Stabes der Länge l_i und Masse m_i. Somit gilt $z = y \approx 0$ und wir erhalten: $I_{i,xx} = I_{i,yy} = 0$

$$I_{i,zz} \approx \int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \underbrace{\rho}_{\frac{m_i}{l_i}} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_i}{l_i} \cdot \left[\left(\frac{l_i}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l_i}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} m_i l_i^2 \Rightarrow I_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_i l_i^2 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix

Für die partiellen Ableitungen der kinetischen Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} {\theta'_1}^2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_2(t)^2 \\
\frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} {\theta'_1}^2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2(t)^2 \\
\frac{\partial T}{\partial \theta'_1} &= M_{11} \theta'_1 + M_{12} \theta'_2 \\
\frac{\partial T}{\partial \theta'_2} &= M_{12} \theta'_1 + M_{22} \theta'_2
\end{aligned}$$

Für die zeitlichen Ableitungen der Größen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_{11}}_{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_1 + M_{11} \theta''_1 + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_{12}}_{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_2 + M_{12} \theta''_2 \\
&= \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} {\theta'_1}^2 + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + M_{11} \theta''_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} {\theta'_2}^2 + M_{12} \theta''_2 \\
&= \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} {\theta'_1}^2 + \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} {\theta'_2}^2 + M_{11} \theta''_1 + M_{12} \theta''_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_{12}}_{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_1 + M_{12} \theta''_1 + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_{22}}_{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2} \cdot \theta'_2 + M_{22} \theta''_2 \\
&= \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} {\theta'_1}^2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \theta'_2 + M_{12} \theta''_1 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} {\theta'_2}^2 + M_{22} \theta''_2
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = &\left[\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \right] {\theta'_1}^2 + \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \right] {\theta'_2}^2 \\
&+ M_{11} \theta''_1 + M_{12} \theta''_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = &\left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \right] {\theta'_1}^2 + \left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \right] {\theta'_2}^2 \\
&+ M_{12} \theta''_1 + D_{22} \theta''_2 \\
= &\underbrace{\left[\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \theta'_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \theta'_1 \right]}_{C_{21}} \theta'_1 + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \theta'_2 + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \theta'_1 \right]}_{C_{22}} \theta'_2 + M_{12} \theta''_1 + M_{22} \theta''_2
\end{aligned}$$

Für die Einträge der Matrix C gilt

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_1' + \underbrace{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)}\theta_2' = -2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' \\
C_{12} &= \underbrace{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2}}_{=-m_2l_1a_2\sin(\theta_2)}\theta_2' - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_2' = -m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' \\
C_{21} &= \underbrace{\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_1' - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)}\theta_1' = m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_1' \\
C_{22} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2}}_{=0}\theta_2' + \underbrace{\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0}\theta_1' = 0
\end{aligned}
$$

Es gilt somit

$$
C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\cdot\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -2m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' & -m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_2' \\ m_2l_1a_2\sin(\theta_2)\theta_1' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}
$$

1.1.3 Gravitationsterme

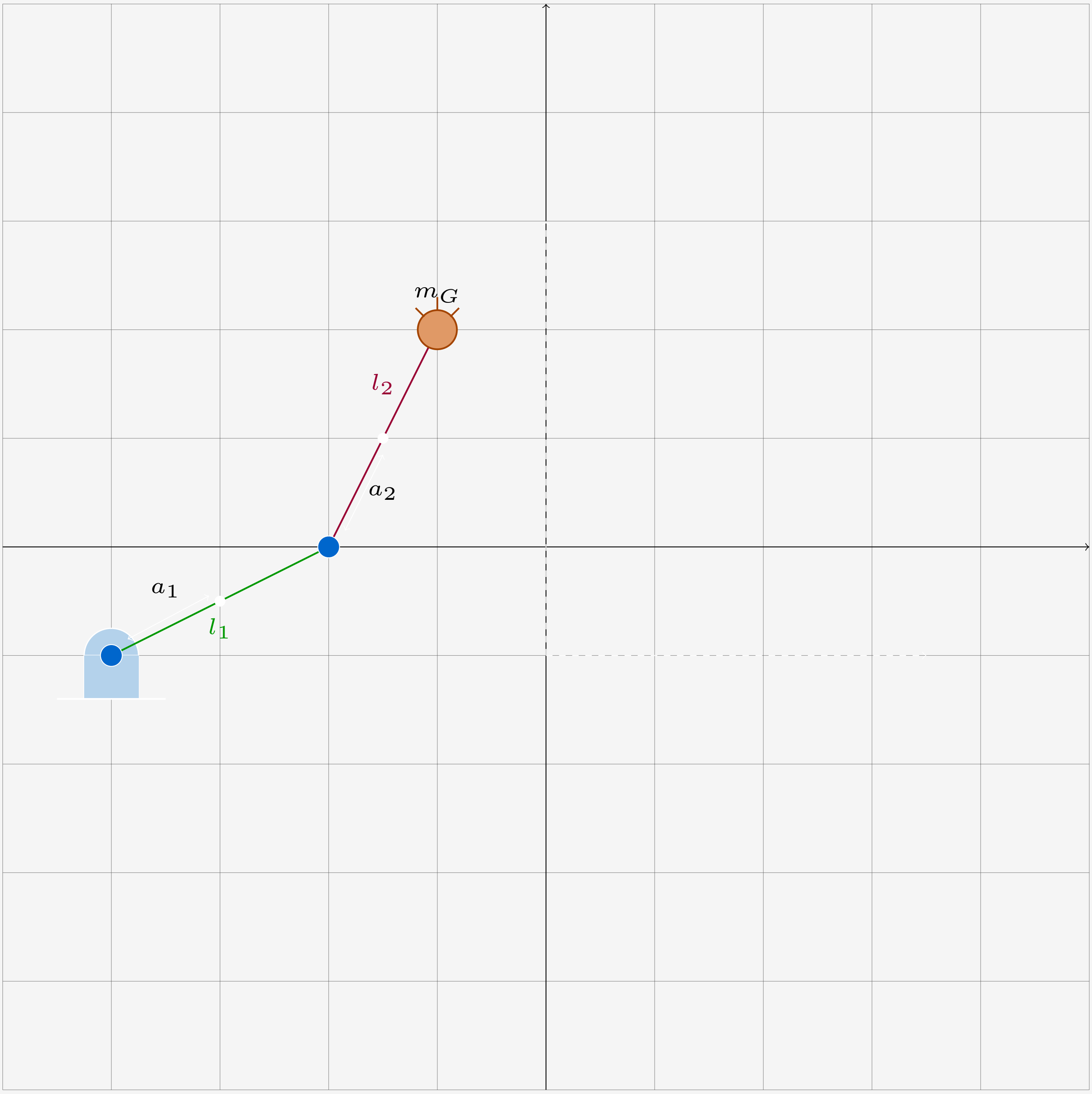
Für die potenzielle Energie V gilt:

$$
V = m_1\cdot g\cdot y_1 + m_2\cdot g\cdot y_2 = m_1ga_1\sin(\theta_1) + m_2g\left(l_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_1+\theta_2)\right)
$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$
G(\mathbf{q}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1ga_1\cos(\theta_1) + m_2g\left(l_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2)\right) \\ m_2g\left(l_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2)\right) \end{pmatrix}
$$

1.2 Erweiterung um Greifobjekt



Für die Masse von Link 2 inklusive Greifobjekt gilt:

$$m_i' = m_i + m_G$$

Für den Schwerpunkt von Link 2 inklusive Greifobjekt gilt:

$$\mathbf{a}_2' = \frac{m_i \cdot \mathbf{a}_2 + m_G \cdot \mathbf{d}}{m_i + m_G}$$

Für den Trägheitstensor von Link 2 inklusive Greifobjekt gilt:

$$I_i' = I_i + m_i \cdot S(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i') + m_G \cdot S(\mathbf{d} - \mathbf{a}_i') \quad S(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_y^2 + v_z^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_x v_y & v_x^2 + v_z^2 & -v_y v_z \\ -v_x v_z & -v_y v_z & v_x^2 + v_y^2 \end{pmatrix}$$

Wobei $S(\mathbf{v})$ die Steiner-Matrix ist.

2 Optimale Steuerungsprobleme

Definition 2.1 (Optimales Steuerungsproblem) *Gegeben seien*

- *Systemdynamik:*

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

  wobei $x(t) \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor und $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ die Steuerung ist.

- *Zielfunktional:*

$$J(u) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$$

- *Ziel: Finde die Steuerung $u(t)$, die $J(u)$ minimiert, also*

$$J(u^*) = \min_u J(u) \Rightarrow u^* = \arg\min_u J(u)$$

Zielfunktional:

$$\min J[u] = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(t, x, u)\,\mathrm{d}t$$

Systemdynamik:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0$$

Es gilt mittels Kettenregel:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \Phi_x \cdot x' + \Phi_t\right)$$

- Augmentierte Lagrange Funktion

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\varphi(t, x, u) + \Phi_x \cdot x' + \Phi_t + p \cdot (x' - f(x, u))}_{=L(t,x,x',u)}\,\mathrm{d}t$$

- Für den Kozustand gilt $L_{x'} = p(t)$
- Optimalitätsbedingung mit $H(t, x, u, p) = x' \cdot p - L$

$$x'(t) = H_p \quad p'(t) = -H_x \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

- Diese Bedingungen geben uns die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das optimale Steuerungsproblem

Satz 2.2 (Minimumprinzip) *Sei $\boldsymbol{H} = L(t, x, u) + p(t)^T \cdot f(t, x, u)$ die Hamilton-Funktion*

- *Es gilt $u^* = \text{argmin}\, \boldsymbol{H}(x^*, u, p^*)$*

$$p'(t) = -H_x \quad \boldsymbol{H}_u = 0 \quad x'(t) = H_p$$

- *Weiter gilt die Transversalitätsbedingung*

$$\Phi_x(t = t_f) = p(t = t_f)$$

- *Für freie Endzeit t_f gilt*

$$\boldsymbol{H}(t = t_f) + \Phi_t(t = t_f) = 0 \Rightarrow \underbrace{\boldsymbol{H}(x, u, p) = 0}_{\text{für } \boldsymbol{H}_t = 0}$$

Beispiel 2.3 (Testbeispiel) *Löse das folgende optimale Steuerungsproblem*

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 \,\mathrm{d}t \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Wir definieren die Hamiltonfunktion $\boldsymbol{H} = x + u^2 + p \cdot (x + u + 1)$. Das Minimumprinzip liefert

$$p'(t) = -\boldsymbol{H}_x = -1 - p \quad \boldsymbol{H}_u = 0 = 2u + p \Rightarrow u = -\frac{p}{2}$$

Die adjungierte Gleichung ist trennbar

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -1 - p \Rightarrow \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}p}{1+p}}_{\log(p+1)} = \underbrace{\int -1 \,\mathrm{d}t}_{=-t+K} \Rightarrow p(t) = -1 + C \cdot e^{-t}, \quad C = e^K$$

Für die optimale Steuerung gilt somit $u(t) = -\frac{1}{2}p(t) = \frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}$. Den optimalen Zustand berechnen wir aus der Systemdynamik

$$x'(t) = x(t) + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}}_{=u(t)} + 1 \Rightarrow x'(t) = 1 \cdot x(t) + \frac{3}{2} - \frac{C}{2} e^{-t}$$

Das ist eine lineare inhomogene Gleichung. Es gilt $A(t) = \int_0^t 1 \,\mathrm{d}s = t$ und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cdot e^{A(t)} + e^{A(t)} \cdot \int_0^t \left(\frac{3}{2} - \frac{C}{2} e^{-s} \right) \cdot e^{-A(s)} \,\mathrm{d}s \\ &= e^t \cdot \int_0^t \frac{3}{2} \cdot e^{-s} - \frac{C}{2} e^{-s} \cdot e^{-s} \,\mathrm{d}s \\ &= e^t \cdot \left[-\frac{3}{2} e^{-s} + \frac{C}{4} e^{-2s} \right]_0^t \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{C}{4} e^{-t} + \frac{3}{2} e^t - e^t \frac{C}{4} \end{aligned}$$

Da $x(1)$ frei ist und kein Endkostenterm vorliegt gilt $p(1) = 0$.

$$p(1) = -1 + C \cdot e^{-1} = 0 \Rightarrow C = e.$$

Wir fassen nun die Resultate zusammen:

$$p(t) = -1 + e^{-t+1}$$
$$u(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-t+1}\right)$$
$$x(t) = -\frac{3}{2} + \frac{e^{-t+1}}{4} + \frac{3}{2}e^t - \frac{e^{t+1}}{4}$$

Beispiel 2.4 (Minimierung des Treibstoffverbrauchs) *Ein Fahrzeug startet bei* $x(0) = 0$ *mit* $v(0) = 0$ *und soll zum festen Zeitpunkt* $t_f = 2$ *die Position* $x(2) = 1$ *erreichen. Das Kostenfunktional lautet:*

$$J[u] = \int_0^2 \frac{1}{2}u^2(t)dt$$

Die Dynamik des Fahrzeugs ist:

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = u(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = f(y, u)$$

- *Aufstellen der Hamilton-Funktion mit* $p(t) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_v \end{pmatrix}$

$$H = L + \boldsymbol{p}(t)^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, u) = \frac{1}{2}u(t)^2 + p_x(t)v(t) + p_v(t)u(t)$$

- *Formulierung des Minimumprinzips:*

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -p_v(t) = u^*(t), \quad -p'(t) = \nabla_{y=(x,v)}H \Rightarrow -p_x'(t) = 0, -p_v'(t) = p_x(t)$$

- *Integration der Gleichungen*

$$p_x(t) = C, p_v(t) = -C \cdot t + K$$

- *Integration der Systemdynamik unter Nutzung der Anfangswerte* $x(0) = v(0) = 0$

$$u(t) = Ct - k$$
$$v(t) + v(0) = \int_0^t v'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s = \frac{C}{2}t^2 - kt$$
$$x(t) + x(0) = \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s = \frac{C}{6}t^3 - \frac{k}{2}t^2$$

- *Anwendung der Endwerte* $x(2) = 1$ *und* $v(2) = 0$

$$0 = \frac{C}{2} \cdot 4 - k \cdot 2 \Rightarrow k = C$$

- *Anwendung der Endwerte $x(2) = 1$ und $v(2) = 0$*

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{C}{2} \cdot 4 - k \cdot 2 \Rightarrow k = C \\
1 &= \frac{C}{6} \cdot 8 - \frac{C}{2} \cdot 4 \Rightarrow 1 = \left(\frac{4C}{3} - 2C\right) = -\frac{2C}{3} \Rightarrow C = -\frac{3}{2} \\
u(t) &= \left(-\frac{3}{2}\right) t - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

2.1 Linear-Quadratische Probleme

Satz 2.5 (Riccati-Regler) *Die Lösung des linear-quadratischen Problems*

$$
\begin{aligned}
\min J(u) &= \int_0^T \frac{q}{2} \cdot x^2(t) + \frac{r}{2} \cdot u^2(t) dt + \frac{s}{2} x(T)^2 \\
\textsf{s.t.} \quad & x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0
\end{aligned}
$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $q, r, s \geq 0$ ist gegeben durch die Riccati-Gleichung

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r} K(t)^2 - q, \quad K(T) = s$$

und die resultierenden Lösungen

$$x^*(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a - \frac{b^2}{r} K(s)\, \mathrm{d}s\right) \quad u^*(t) = -\frac{b}{r} K(t) x(t)$$

Beweis: Wir definieren die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2} q x(t)^2 + \frac{1}{2} r u(t)^2 + p(t)\left(a x(t) + b u(t)\right)$$

Dann liefert das Minimumprinzip die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\frac{b}{r} p(t) \quad p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow p'(t) = -q x(t) - a p(t)$$

Weiter gilt die Transversalitätsbedingung $p(T) = s \cdot x(T)$. Wir nehmen an, dass eine Feedbacksteuerung vorliegt, d.h.

$$p(t) = K(t) x(t) \quad p(T) = K(T) x(T) \Rightarrow K(T) = s$$

wobei $K(t)$ eine skalare Funktion ist. Ableiten von p nach t liefert

$$p'(t) = K'(t) x(t) + K(t) x'(t)$$

Für die Zustandsgleichung gilt mit $u^*(t) = -\frac{b}{r} p(t)$

$$x'(t) = a x(t) + b u^*(t) = a x(t) - \frac{b^2}{r} K(t) x(t) = \left(a - \frac{b^2}{r} K(t)\right) x(t).$$

Wir setzen nun $p'(t) = -H_x$ und unseren Ausdruck für $x'(t)$ ein, so gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{-qx(t) - ap(t)}_{=p'(t)} &= K'(t)x(t) + K(t)\underbrace{\left(a - \frac{b^2}{r}K(t)\right)x(t)}_{=x'(t)} \\
\Leftrightarrow -qx(t) - aK(t)x(t) &= K'(t)x(t) + aK(t)x(t) - \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) \\
\Leftrightarrow K'(t)x(t) &= -2aK(t)x(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) - qx(t)
\end{aligned}$$

Unter der Annahme $x(t) \neq 0$ erhalten wir die Riccati-Differentialgleichung:

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2 - q, \quad K(T) = s.$$

Wir erhalten $x(t)$ als Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$x'(t) = \left(a - \frac{b^2}{r}K(t)\right)x(t) \Rightarrow x(t) = x(0) \cdot \exp\left(\int_0^t a - \frac{b^2}{r}K(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Die optimale Steuerung $u^*(t)$ ergibt sich aus $u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t) = -\frac{b}{r}K(t)x(t)$. □

Beispiel 2.6 (Berechnung des Riccati-Reglers) *Wir betrachten erneut ein Beispiel. In diesem Beispiel gilt für die Parameter*

$$a = 0, b = 1, q = 1, r = 1, T = 1, s = 0, x_0 = 1.$$

Die Riccati-Gleichung lautet somit

$$K'(t) = K(t)^2 - 1, \quad K(1) = 0$$

Die Gleichung ist trennbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = K^2 - 1 \Rightarrow \int \frac{1}{K^2 - 1}\mathrm{d}K = \int 1\,\mathrm{d}t$$

Wir nutzen die Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{K^2-1}$ und erhalten

$$\frac{1}{K^2 - 1} = \frac{1}{(K+1)(K-1)} = \frac{A}{K-1} + \frac{B}{K+1} \Rightarrow 1 = \underbrace{A(K+1) + B(K-1)}_{K\cdot(A+B)+A-B}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $A + B = 0$ und $A - B = 1$, mit der Lösung $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten für unser Integral

$$\int \frac{1}{K^2-1}\mathrm{d}K = \int 1\,\mathrm{d}t$$
$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{K-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{K+1}\mathrm{d}K = t + \frac{C}{2}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\log(K-1)-\log(K+1)}_{\log\left(\frac{K-1}{K+1}\right)}\right) = t + \frac{C}{2}$$
$$\frac{K-1}{K+1} = \exp\left(2t+C\right) = \underbrace{e^C}_{:=A}\cdot e^{2t}$$
$$K(t) = \frac{1+Ae^{2t}}{1-Ae^{2t}}$$

Es gilt weiter $K(1)=0$ *und somit* $A=-\frac{1}{e^2}$ *damit ist die Lösung der Riccati-Gleichung gegeben durch*

$$K(t) = \frac{1-e^{2(t-1)}}{1+e^{2(t-1)}}.$$

Für den optimalen Zustand gilt

$$x(t) = 1\cdot\exp\left(\int_0^t -K(s)\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(\int_0^t -\frac{1-e^{2(s-1)}}{1+e^{2(s-1)}}\,\mathrm{d}s\right)$$

Wir nutzen die Substitution $z=e^{2(s-1)}$ *dann gilt für das Integral*

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 2\cdot\underbrace{e^{2(s-1)}}_{=z} \Rightarrow \int -\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{2z} = -\frac{1}{2}\int\frac{1-z}{z(1+z)}\,\mathrm{d}z$$

Wir verwenden erneut eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1-z}{z(1+z)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z+1} \Rightarrow 1-z = \underbrace{A(1+z)+Bz}_{=(A+B)z+A}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A=1$ *und* $A+B=-1$ *und somit* $B=-2$. *Für das Integral gilt somit*

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1-z}{z(1+z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{z}-\frac{2}{z+1}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\left[\log(z)-2\log(z+1)\right]+C$$

Rücksubstitution von $z(t)=e^{2(t-1)}$ *liefert*

$$x(t) = \exp\left[-(t-1)+\log(e^{2(t-1)}+1)+C\right]$$

Wir nutzen $x(0)=1$ *und bestimmen die Konstante* C.

$$x(0) = \exp\left(-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C\right) = 1$$

Wir erhalten somit die Bedingung

$$-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C = 0 \Rightarrow C = -1 - \log(1 + e^{-2})$$

Der optimale Zustand ist somit gegeben als

$$x(t) = \exp\left[-t + 2 + \log\left(\frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}}\right)\right] = \underbrace{e^{-t+2} \cdot \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}}}_{= \frac{e^2}{1+e^{-2}} e^{-t} + \frac{1}{1+e^{-2}} e^{t}}$$

Für die optimale Steuerung gilt $u^*(t) = -K(t)x(t)$ *und somit*

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1 - e^{2(t-1)}}{1 + e^{2(t-1)}} \cdot e^{-t+2} \cdot \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}} \\ &= \frac{e^{-t+2}}{1 + e^{-2}} \cdot (-1 + e^{2(t-1)}) \\ &= -\frac{e^2}{1 + e^{-2}} e^{-t} + \frac{1}{1 + e^{-2}} e^{t} \end{aligned}$$

Dies entspricht den Lösungen aus dem Beispiel.

3 Numerische Lösungsverfahren

3.1 Gradientenverfahren

$$u(t) + \epsilon \cdot \eta_u(t) \quad x(t) + \epsilon \cdot \eta_x(t), \eta_x(0) = 0$$

Um die Zustandsgleichung als Nebenbedingung zu integrieren, führen wir einen Lagrange-Multiplikator $p(t)$ ein. Das erweiterte Zielfunktional lautet dann:

$$J^{\text{aux}}(u, x, p) = \int_0^T \left[L(x(t), u(t), t) + p(t)\left(f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t)\right)\right] \mathrm{d}t + \Phi(x(T))$$

Wir betrachten kleine Variationen der Steuerungsfunktion und des Zustands:
wobei ε ein kleiner Parameter ist.
Die Variation von J^{aux} bezüglich ε bei $\varepsilon = 0$ ergibt:

$$\delta J^{\text{aux}} = \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial u}\delta u(t) + p(t)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u(t) - \delta\dot{x}(t)\right)\right] \mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T))\delta x(T) = 0$$

Der Term mit $\delta\dot{x}(t)$ wird mittels Integration durch Teile umgeformt:

$$\int_0^T p(t)(-\delta\dot{x}(t)) \, \mathrm{d}t = \left[-p(t)\delta x(t)\right]_0^T + \int_0^T \dot{p}(t)\delta x(t) \, \mathrm{d}t$$

Da $\delta x(0) = 0$ ist (weil der Anfangszustand festgelegt ist), vereinfacht sich der Randterm zu:

$$-p(T)\delta x(T) + \int_0^T \dot{p}(t)\delta x(t) \, \mathrm{d}t$$

Setzen wir die Ergebnisse in die Variation des erweiterten Zielfunktionals ein:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} + p(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p}(t)\right)\delta x(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial u} + p(t)\frac{\partial f}{\partial u}\right)\delta u(t)\right] \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p(T)\right)\delta x(T) = 0$$

Für die Gleichung muss jeder Koeffizient der unabhängigen Variation Null sein. Daher ergeben sich die adjungierten Gleichungen:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x} - p(t)\frac{\partial f}{\partial x} \\ p(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \end{cases}$$

Der Gradient des Zielfunktionals $J(u)$ ist gegeben durch:

$$\frac{\delta J}{\delta u(t)} = \frac{\partial L}{\partial u} + p(t)\frac{\partial f}{\partial u}$$

3.1.1 Sensitivity Approach

Erweitertes Zielfunktional

$$
\begin{aligned}
J^{aux}(u) &= \int_0^T \varphi(t,x,u) + p(t)\cdot(f(t,x,u) - x'(t))\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T \underbrace{\varphi(t,x,u) + p(t)\cdot f(t,x,u)}_{=H(t)}\,\mathrm{d}t \quad \underbrace{-\int_0^T p(t)x'(t)\,\mathrm{d}t}_{=-[p(t)x(t)]_0^T + \int_0^T p'(t)x(t)\,\mathrm{d}t} \quad + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t)\,\mathrm{d}t - [p(t)x(t)]_0^T + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t)\,\mathrm{d}t - p(T)x(T) + p(0)x(0) + \Phi(x(T))
\end{aligned}
$$

Der Term $p(0)x(0)$ ist unabhängig von u und fällt bei der Optimierung weg. Bilden der Gateau Ableitung in u entlang h liefert

$$
\begin{aligned}
J'(u,h) &= \int_0^T H_x[t]\cdot S(t) + H_u[t]\cdot h(t) + p'(t)S(t)\,\mathrm{d}t - p(T)S(T) + \Phi_x(x(T))S(1) \\
&= \int_0^T (\underbrace{H_x[t] + p'(t)}_{=0})\cdot S(t) + H_u[t]\cdot h(t)\,\mathrm{d}t + (\underbrace{\Phi_x(x(T)) - p(T)}_{=0})\cdot S(T) \\
&= \int_0^T H_u[t]\cdot h(t)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten somit $J'(u) = H_u[t]$

3.1.2 Praktische Implementierung

Beispiel 3.1 *Wir betrachten das Steuerungsproblem*

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 \,\mathrm{d}t \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

welches in einer Aufgabe analytisch gelöst ist. Für den Gradienten gilt

$$\nabla J(u) = H_u = \frac{\partial}{\partial u}(x(t) + u(t)^2 + p(t) \cdot (x(t) + u(t) + 1)) = 2u(t) + p(t)$$

Wir verwenden das explizite Euler-Verfahren zur Diskretisierung der Gleichungen aus dem Minimum-prinzip:

- *Diskretisierung des Zeitintervalls* $[0,1]$ *und der Funktionen mittels* $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \boldsymbol{u}^k = \left(u_i^k\right)_{i=0}^N, \quad \boldsymbol{x}^k = \left(x_i^k\right)_{i=0}^N, \quad \boldsymbol{t}^k = (i \cdot h)_{i=0}^N,$$

- *Armijo Suchrichtung* $\alpha^{(k)}$*: Für* $0 \leq m < M = 10$, $c = 10^{-4}, \beta = 0.5 \in (0,1)$

$$u^{\mathsf{neu}} = u^k + \beta^m \cdot d^{(k)}$$

$$J(u^k) = \int_0^1 x^k(t) + (u^k(t))^2 \,\mathrm{d}t \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^k + (u_i^k)^2$$

$$J(u^{neu}) = \int_0^1 x^{neu}(t) + (u^{neu}(t))^2 \,\mathrm{d}t \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^{neu} + (u_i^{neu})^2$$

$$J(u^{neu}) \leq J(u^k) - c \cdot \beta^m \cdot h \cdot \sum_{i=0}^N (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)})(2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)})$$

$$\Leftrightarrow J(u^{neu}) \leq J(u^k) - \left\|d^{(k)}\right\|^2 \cdot c \cdot \beta^m \Rightarrow \alpha^{(k)} = \beta^m$$

- *Gradientenverfahren: Für* $0 \leq k < MaxIter$, $\epsilon = 10^{-6}$*:*
  - *Forward Integration* $x'(t) = x(t) + u(t) + 1$

$$x_{i+1}^k = x_i^k + h \cdot (x_i^{(k)} + u_i^{(k)} + 1) \quad x_0^{(k)} = 0$$

  - *Backward Integration* $p'(t) = -(1 + p(t))$

$$p_i^k = p_{i+1}^k + h \cdot (1 + p_{i+1}^k) \quad p_N^{(k)} = \partial_x \Phi(x(1)) = 0$$

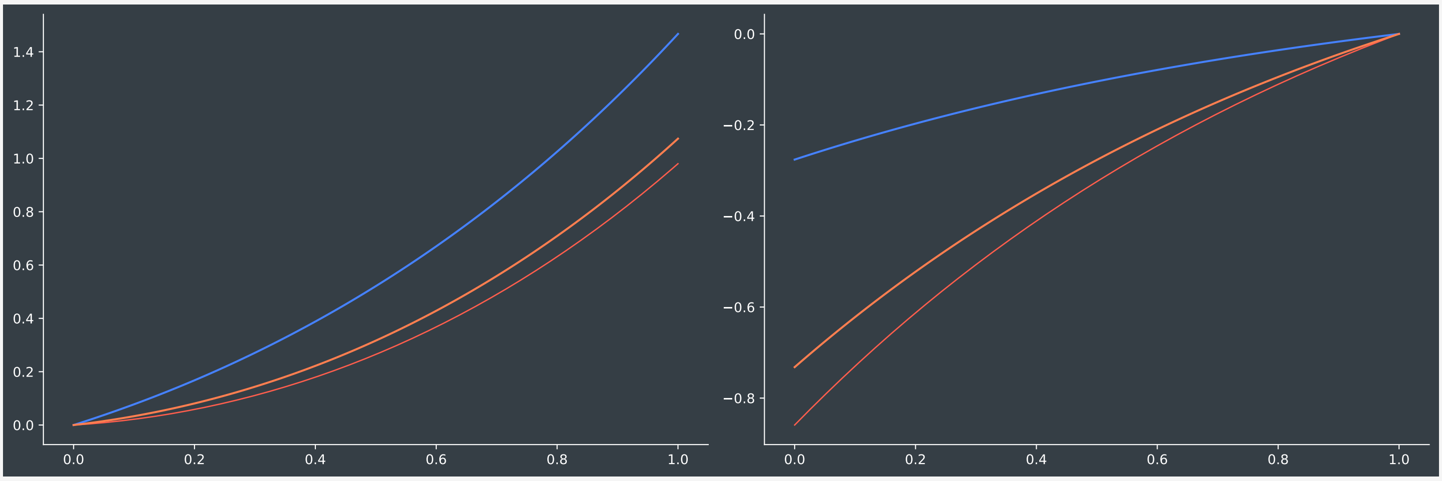
  - *Berechnung des Gradienten* $\nabla J = H_u = 2u + p$

$$d^{(k)} = -(2 \cdot u^{(k)} + p^{(k)})$$

  - *Berechnung der Schrittweite* $\alpha^{(k)}$*:*

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot d^{(k)}$$

$$\left\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\right\| < \epsilon \Rightarrow u^{\mathsf{final}} = u^{(k+1)}, \ \text{sonst } k \to k+1$$



Zustand x und Steuerung u mit den Iterationen 100, 500 und der analytischen Lösung

3.2 Shooting Methods

Das Ziel ist es, den Anfangswert $p(t_0)$ so anzupassen, dass die Endbedingung $p(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$ erfüllt wird. Dieses Verfahren wird mithilfe des Schießverfahrens gelöst. Wir definieren eine Residuenfunktion $R(p(t_0))$, die die Abweichung zwischen dem berechneten Endwert $p(t_f; p(t_0))$ und dem gewünschten Endwert $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$ darstellt:

$$R(p(t_0)) = p(t_f; p(t_0)) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f; p(t_0))) \tag{1}$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung von $R(p(t_0)) = 0$ liefert den Update-Schritt:

$$p^{(k+1)}(t_0) = p^{(k)}(t_0) - \frac{R(p^{(k)}(t_0))}{R'(p^{(k)}(t_0))} \tag{2}$$

Die Jacobi-Matrix $R'(p(t_0))$ ergibt sich durch Ableiten der Residuenfunktion:

$$R'(p(t_0)) = \frac{\partial R}{\partial p(t_0)} = S_p(t_f) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} S_x(t_f), \tag{3}$$

wobei $S_x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)}$ und $S_p(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)}$ die Sensitivitäten sind.
Wir leiten die Zustandsgleichung und die adjungierte Gleichung nach $p(t_0)$ ab, um die Sensitivitäten $S_x(t)$ und $S_p(t)$ zu berechnen.

- Durch Ableiten der Zustandsgleichung nach $p(t_0)$ erhalten wir die Gleichung für $S_x(t)$:

$$\frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{\partial f}{\partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} S_u(t), \tag{4}$$

  mit der Anfangsbedingung $S_x(t_0) = 0$.

- Durch Ableiten der adjungierten Gleichung nach $p(t_0)$ erhalten wir die Gleichung für $S_p(t)$:

$$\frac{d}{dt} S_p(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} S_x(t) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} S_u(t), \tag{5}$$

  mit der Anfangsbedingung $S_p(t_0) = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

- Falls die Steuerung u implizit von $p(t_0)$ abhängt, bestimmen wir $S_u(t) = \frac{\partial u}{\partial p(t_0)}$ aus der Optimalitätsbedingung $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} S_u(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial p} S_p(t) = 0 \tag{6}$$

  Diese Gleichung kann nach $S_u(t)$ aufgelöst werden, sofern $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ invertierbar ist:

$$S_u(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}^{\top} S_p(t)\right) \tag{7}$$

Beispiel 3.2 *Betrachten wir das folgende konkrete Beispiel:*

$$\min \frac{1}{2}(x(1) - 1)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u(t)^2 + x(t)^3\right)\, dt$$
$$\text{s.t } x'(t) = u(t) - 15\exp(-2t), \quad x(0) = 4$$

Der adjungierte Zustand ist gegeben durch

$$p'(t) = -\frac{3}{2}x(t)^2 \quad p(1) = 5(x(1) - 1)$$

- *Resultierende Sensitivitätsgleichungen für S_x und S_p*

  In diesem Beispiel ergibt sich die Steuerung $u(t) = -p(t)$ aus der Optimalitätsbedingung. Durch Einsetzen in die Zustandsgleichung erhalten wir das gekoppelte System:

$$\dot{x}(t) = -p(t) - 15\exp(-2t), \quad x(0) = 4$$
$$\dot{p}(t) = -\frac{3}{2}x(t)^2, \quad p(1) = 5(x(1) - 1)$$

  Die Sensitivitätsgleichungen für $S_x(t)$ und $S_p(t)$ lauten:

$$\frac{d}{dt}S_x(t) = -S_p(t), \quad S_x(0) = 0$$
$$\frac{d}{dt}S_p(t) = -3x(t)S_x(t), \quad S_p(0) = 1$$

- *Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu:*

$$R'(p(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1) \tag{8}$$

Das Newton-Verfahren zur Anpassung von $p(0)$ sieht folgendermaßen aus:

1. ***Initialisierung**: Wählen Sie eine Startschätzung $p^{(0)}(0)$.*

2. ***Iterative Berechnung**:*

   a) ***Vorwärtsintegration der Zustandsgleichungen**: Integrieren Sie die Gleichungen für $x(t)$ und $p(t)$ mit $p^{(k)}(0)$ von $t = 0$ bis $t = 1$.*

   b) ***Berechnung des Residuals**: Berechnen Sie das Residuum*

   $$R(p^{(k)}(0)) = p(1; p^{(k)}(0)) - 5(x(1; p^{(k)}(0)) - 1)$$

   c) ***Integration der Sensitivitätsgleichungen**: Integrieren Sie die Sensitivitätsgleichungen für $S_x(t)$ und $S_p(t)$ von $t = 0$ bis $t = 1$, um $S_x(1)$ und $S_p(1)$ zu berechnen.*

   d) ***Berechnung der Ableitung** $R'(p^{(k)}(0))$:*

   $$R'(p^{(k)}(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1)$$

e) ***Aktualisierung mittels Newton-Schritt***:

$$p^{(k+1)}(0) = p^{(k)}(0) - \frac{R(p^{(k)}(0))}{R'(p^{(k)}(0))}$$

f) ***Konvergenzkriterium***: *Falls* $|R(p^{(k+1)}(0))| < \epsilon$ *(Toleranz), beenden Sie die Iteration. Falls nicht, setzen Sie* $k = k + 1$ *und wiederholen ab Schritt (a).*

3.3 Riccati Regler

Es gilt

$$F(K) := Q - KPK + KA + A^T K \Rightarrow F(K) = 0$$

Definition 3.3 *Sei* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dann definieren wir*

$$\mathsf{vec}(X) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} & X_{12} & X_{22} & \cdots X_{nn} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{p\times r}$*, dann definieren wir*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ A_{12}B & \dots & A_{2m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & \cdots & A_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nr}$$

Es gilt die Formel

$$\mathsf{vec}(MXN) = (N^T \otimes M)\mathsf{vec}(X)$$

Betrachten wir den Fall $M = 1$ und $N = A$ bzw. $N = 1$ und $M = A^T$ erhalten wir mit $X = K$

$$\mathsf{vec}(KA) = (A^T \otimes 1)\mathsf{vec}(K) \quad \mathsf{vec}(A^T K) = (1 \otimes A^T)\mathsf{vec}(K)$$

Anwendung auf unser Problem liefert

$$\underbrace{\mathsf{vec}(F(K))}_{f(x=\mathsf{vec}(K))} = \underbrace{\mathsf{vec}(Q)}_{q} - \underbrace{\mathsf{vec}(KPK)}_{g(x=\mathsf{vec}(K))} + \underbrace{\mathsf{vec}(KA)}_{(A^T\otimes 1)\mathsf{vec}(K)} + \underbrace{\mathsf{vec}(A^T K)}_{(1\otimes A^T)\mathsf{vec}(K)}$$

Durch Einführung von $x = \mathsf{vec}(K) \in \mathbb{R}^{n^2}$ erhalten wir

$$f(x) = q - g(x) + (A^T \otimes 1)x + (1 \otimes A^T)x$$

Da $(KP)^T = KP$ gilt

$$g(\mathsf{vec}(K)) = \mathsf{vec}(KPK) = (1 \otimes KP)\mathsf{vec}(K)$$

Wir betrachten die Variation $K(\epsilon) = K + \epsilon \cdot \bar{K}$ und die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$ mit

$$\begin{aligned} h(\epsilon) := g(\mathsf{vec}(K(\epsilon))) &= \mathsf{vec}(K(\epsilon)PK(\epsilon)) \\ &= \mathsf{vec}((K + \epsilon \cdot \bar{K})P(K + \epsilon \cdot \bar{K})) \\ &= \mathsf{vec}(KPK + \epsilon KP\bar{K} + \epsilon \bar{K}PK + \epsilon^2 \bar{K}P\bar{K}) \end{aligned}$$

Ableitung nach ϵ und Auswertung in $\epsilon = 0$ ergibt

$$h'(0) = \frac{d}{d\epsilon} g(\mathsf{vec}(K + \epsilon\bar{K}))\Big|_{\epsilon=0} = \mathsf{vec}(KP\bar{K} + \bar{K}PK) = \mathsf{vec}(KP\bar{K}) + \mathsf{vec}(\bar{K}PK)$$

Umschreiben als Matrix-Vektor-Produkt

$$\mathsf{vec}(KP \cdot \bar{K} \cdot 1) = (1 \otimes KP)\mathsf{vec}(\bar{K}) \quad \mathsf{vec}(1 \cdot \bar{K} \cdot PK) = ((PK)^T \otimes 1)\mathsf{vec}(\bar{K})$$

Wir erhalten als Ableitung

$$g'(x) = (1 \otimes KP) + ((PK)^T \otimes 1) \Rightarrow f'(x) = -(1 \otimes KP) - ((PK)^T \otimes 1) + (A^T \otimes 1) + (1 \otimes A^T)$$

3.3.1 Implementierung

```
def vec(X):
    return X.reshape(-1, order='F')

def unvec(v, n):
    return v.reshape((n, n), order='F')
```

Hier normaler text

```
# Newton Kleinman Verfahren
def solv_CARE(A,B,R,Q,tol=1e-8,max_iter=50):
  n = A.shape[0]
  I = np.eye(n)
  q = vec(Q)
  L = np.kron(I, A.T) + np.kron(A.T, I)
  P = B @ np.linalg.solve(R, B.T)
  # Startwert K0 hier Einheitsmatrix
  K = I
  x = vec(K)

  for i in range(max_iter):
    X = K @ P #KP
    vec_KPK = np.kron(I,X) @ x
    f = q - vec_KPK + L @ x
    Dg = np.kron(I,X)+np.kron(X,I)
    Df = L - Dg
    dx = np.linalg.solve(Df, -f)
    x_new = x + dx
    # Abbruch
    if np.linalg.norm(dx) / np.linalg.norm(x_new) < tol:
      x=x_new
      break

      x = x_new
      K = unvec(x, n)
  return K
```

Erklärung des Codes
Stabilität der Startlösung hier Gershgorin kreise und Stabilität erklären
Für Y mit $RY = B^T \Rightarrow Y = B^{-1}B^T$ und $B \cdot Y = P$

4 Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

Wir betrachten ein Steuerungsproblem und definieren die Value-Function V mittels

$$V(x(t), t) := \min_u \left\{ \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \Phi(x(t_f)) \right\}$$

Satz 4.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung) *Die Value-Function erfüllt*

$$0 = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \min_u \left[L(t,x,u) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \cdot f(t,x,u) \right], \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \le t \le t_f$$

mit den Randbedingungen

$$V(x, t_f) = \Phi(x(t_f)) \quad V(x, t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t + \Phi(x(t_f))$$

Beweis:
Die Value-Function $V(x,t)$ beschreibt die minimalen Kosten von Zustand x zum Endzeitpunkt t_f. Für $s \in [t, t_f]$ gilt

- Systemdynamik

$$x'(s) = f(x(s), u(s)), \quad x(t) = x$$

- Kostenfunktional

$$J(u) = \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \Phi(x(t_f))$$

Angenommen, wir wechseln zum Zeitpunkt $t+h$ zu einer optimalen Steuerung, dann gilt für unser Zielfunktional

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t+h}^{t_f} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \Phi(x(t_f)) \\ &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + V(x(t+h), t+h) \end{aligned}$$

Da $V(x(t), t)$ die minimalen Kosten vom Zustand x zur Zeit t angibt, gilt:

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &\le \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + V(x(t+h), t+h) \\ \Rightarrow 0 &\le \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t) \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $h \to 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + \lim_{h\to 0} \frac{V(x(t+h), t+h) - V(x,t)}{h} \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t), t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x'(t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Durch Minimierung bezüglich u erhalten wir die Gleichheit und somit

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \mathsf{H} \left(t, x(t), \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \right)\end{aligned}$$

□

4.1 Herleitung des Minimumprinzips

Berechnung der totalen Ableitung der Value-Function V entlang der Charakteristik $x(t)$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = p(x,t) \cdot x'(t) - H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

Berechnung der totalen Ableitung von $p = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial x \partial t}$$

Differenzieren der HJB bezüglich x liefert

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Einsetzen der Gleichung liefert:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \left(-\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left(x'(t) - \frac{\partial H}{\partial p}\right) - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Wir erhalten somit die bekannten, notwendigen Optimalitätsbedingungen:

$$p'(t) = -H_x, \quad x'(t) = f(t, x, u^*), \quad u^* = \mathsf{argmin}\,[L(t, x, u) + p(t, x) f(t, x, u)]$$

4.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme

4.2.1 Finite time problem

Gegeben sei das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, \mathrm{d}t + \underbrace{(x(t_f) - x_f)^T S (x(t_f) - x_f)}_{x(t_f)^T S x(t_f) - 2x_f^T S x(t_f) + x_f^T S x_f} = V(t_0, x(t_0)) + x_f^T S x_f$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Der Term $x_f^T S x_f$ ist unabhängig von u und kann bei der Minimierung weggelassen werden.

$$V(x,t) = x^T K(t) x + 2s(t)^T x + r(t) \quad V(x, t_f) = x(t_f)^T K(t_f) x(t_f) + 2s(t_f)^T x(t_f) + r(t_f)$$

Wir erhalten für die Endwerte

$$K(t_f) = S, \quad s(t_f) = -S x_f \quad r(t_f) = 0$$

$$V_t = x^T K'(t)x + 2s'(t)^T x + r'(t) \quad V_x = 2K(t)x + 2s(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)\right] = 2Ru + B^T \cdot V_x \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T V_x$$

$$\begin{aligned}
(u^*)^T Ru^* &= \left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^T V_x\right)^T R\left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^T V_x\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(R^{-1}B^T V_x\right)^T R\left(R^{-1}B^T V_x\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(2R^{-1}B^T(K(t)x + s(t))\right)^T R\left(2R^{-1}B^T(K(t)x + s(t))\right) \\
&= (K(t)x + s(t))^T BR^{-1}RR^{-1}B^T(K(t)x + s(t)) \\
&= < K(t)x + s(t), P(2K(t)x + s(t)) > \\
&= < K(t)x, PK(t)x > + \underbrace{< K(t)x, Ps(t) >}_{< s(t), P^T K(t)x >} + < s(t), PK(t)x > + < s(t), Ps(t) > \\
&= x^T K(t)^T PK(t)x + 2\cdot s(t)^T PK(t)x + s(t)^T Ps(t)
\end{aligned}$$

mit $P = BR^{-1}B^T$ und $P^T = P$.

$$\begin{aligned}
V_x^T\left(-\frac{1}{2}BR^{-1}B^T V_x\right) &= (2K(t)x + 2s(t))^T\left(-\frac{1}{2}BR^{-1}B^T(2K(t)x + 2s(t))\right) \\
&= -2\cdot(K(t)x + s(t))^T P(K(t)x + s(t)) \\
&= -2\cdot x^T K(t)^T PK(t)x - 4\cdot s(t)^T PK(t)x - 2\cdot s(t)^T Ps(t)
\end{aligned}$$

$$V_x^T Ax = 2(K(t)x + s(t))^T Ax = 2x^T K(t)^T Ax + 2s(t)^T Ax = x^T(K(t)^T A + A^T K(t))x + 2s(t)^T Ax$$

$$-V_t = \min_u\left[x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)\right]$$

$$-V_t = x^T Qx + (u^*)^T Ru^* + V_x^T \cdot \left(Ax - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T V_x\right)$$

$$-x^T K'(t)x - 2s'(t)^T x - r'(t) = x^T(Q - KPK + KA + A^T K)x - 2\cdot((PK - A)^T s(t))^T x - s(t)^T Ps(t)$$

$$\begin{aligned}
K'(t) &= -Q + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - K(t)A - A^T K(t) \quad K(t_f) = S \\
s'(t) &= (K(t)BR^{-1}B^T - A^T)s(t) \quad s(t_f) = -Sx_f \\
r'(t) &= s(t)^T BR^{-1}B^T s(t) \quad r(t_f) = 0
\end{aligned}$$

4.2.2 infinite time problem

Im Grenzfall $t \to \infty$ betrachten wir das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{\infty} (x - x_f)^T Q (x - x_f) + u^T R u \,\mathrm{d}t = V(x(t_0))$$

unter der Nebenbedingung $x'(t) = Ax + Bu$ und $x(t_0) = x_0$. Als Ansatz für die Value Funktion wählen wir erneut

$$V(x) = x^T K x + 2s^T x + r \Rightarrow V_x = 2Kx + 2s$$

Es gilt erneut

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((x - x_f)^T Q (x - x_f) + u^T R u + V_x^T (Ax + Bu)\right) = 2Ru + B^T V_x = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x$$

$$(x - x_f)^T Q (x - x_f) = x^T Q x - 2x_f^T Q x + x_f^T Q x_f$$

$$0 = x^T (Q - KPK + KA + A^T K) x - 2((PK - A)^T s + Q x_f)^T x - s^T (P) s + x_f^T Q x_f$$

5 Paper Lin

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Wir wählen den Zustand $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ und die Nominalterme

$$M_0(q), \quad C_0(q, \dot{q}), \quad G_0(q)$$

Auflösen nach $\ddot{q}$

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \cdot [\tau - \underbrace{C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)}_{N(q, \dot{q})}]$$

Wir setzen nun

$$u := M_0^{-1}(q) \cdot [\tau - N_0(q, \dot{q})] \Rightarrow \tau = M_0(q) u + N_0(q, \dot{q})$$

Setze $\tau = M_0 u + N_0$ in die echte Dynamik ein:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1} \cdot [M_0 u + N_0 - N] \\ &= M^{-1} M_0 u + M^{-1}(N_0 - N) \\ &= u + \underbrace{(M^{-1} M_0 - I)}_{h(x)} u + \underbrace{M^{-1}(N_0 - N)}_{f(x)} \end{aligned}$$

Für den Zustandsraum x erhalten wir folgendes System:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ u + h(x)u + f(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{B} u + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x)u + f(x) \end{pmatrix}$$

Unter vernachlässigung $\ddot{q} = u$ erhalten wir das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Wir definieren $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$, $x_3 = \dot{\theta}_1$, $x_4 = \dot{\theta}_2$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {\theta_1}' \\ {\theta_2}' \\ {\theta_1}'' \\ {\theta_2}'' \end{pmatrix}}_{x'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} {\theta_1}' \\ {\theta_2}' \\ M^{-1}\left[u - C(x)\begin{pmatrix} {\theta_1}' \\ {\theta_2}' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2)\right]_1 \\ M^{-1}\left[u - C(x)\begin{pmatrix} {\theta_1}' \\ {\theta_2}' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2)\right]_2 \end{pmatrix}}_{f(x,u)}$$

Wir linearisieren um den Arbeitspunkt (x^*, u^*)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,u) \\ &\approx \underbrace{f(x^*, u^*)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)}_{A(x^*,u^*)}(x - x^*) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*)}_{B(x^*,u^*)}(u - u^*) \\ &= A(x^*, u^*)\bar{x} + B(x^*, u^*)\bar{u} \end{aligned}$$

Wobei $\bar{x}(t) = x(t) - x^*$ und $\bar{u}(t) = u(t) - u^*$. Für die Ableitung der Größen gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{x}(t) = x'(t) - \underbrace{(x^*)'(t)}_{=0} = x'(t) \Rightarrow \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

$$\begin{pmatrix} m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2 & m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2 \\ m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2 & m_2 a_2^2 + I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {x_3}' \\ {x_4}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C \cdot \theta'(t) &= \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 a_2 \sin(x_2) x_4 & -m_2 l_1 a_2 \sin(x_2) x_4 \\ m_2 l_1 a_2 \sin(x_2) x_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 a_2 \sin(x_2) x_4 x_3 - m_2 l_1 a_2 \sin(x_2) {x_4}^2 \\ m_2 l_1 a_2 \sin(x_2) {x_3}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} m_1 g a_1 \cos(x_1) + m_2 g\,(l_1 \cos(x_1) + a_2 \cos(x_1 + x_2)) \\ m_2 g\,(l_1 \cos(x_1) + a_2 \cos(x_1 + x_2)) \end{pmatrix}$$

Wir definieren

$$\frac{\partial}{\partial x} M(\theta)\theta'' = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{u - C(\theta, \theta')\theta' - G(\theta)}_{h(\theta,\theta',u)} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x}\theta'' + M(\theta)\frac{\partial \theta''}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Am Gleichgewichtspunkt gilt $\theta'' = 0$ und somit

$$M(\theta^*)\frac{\partial \theta''}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*, u^*) \Rightarrow \frac{\partial \theta''}{\partial x} = M^{-1}(\theta^*)\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, u^*)$$

Für die Inverse der Massenmatrix gilt analytisch mittels $F_{x_2} := m_2 l_1 a_2 \cos(x_2)$

$$\begin{aligned}
\det(M) &= M_{11}M_{22} - M_{12}^2 \\
&= \left[m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2\right] \cdot (m_2 a_2^2 + I_2) \\
&\quad - (m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2)^2 \\
&= \left[m_1 a_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 a_2^2 + 2\underbrace{m_2 l_1 a_2 \cos(x_2)}_{F_{x_2}} \right] (m_2 a_2^2 + I_2) \\
&\quad - (m_2 a_2^2 + I_2)^2 - 2\underbrace{m_2 l_1 a_2 \cos(x_2)}_{F_{x_2}} \cdot (m_2 a_2^2 + I_2) - F_{x_2}^2 \\
&= (m_2 a_2^2 + I_2) \cdot \left[m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + \underbrace{I_2 + m_2 a_2^2 - m_2 a_2^2 - I_2}_{=0} \right] - \underbrace{(m_2 l_1 a_2)^2 (1 - \sin(x_2)^2)}_{F_{x_2}^2} \\
&= (m_2 a_2^2 + I_2) \cdot (m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 l_1^2) - (m_2 l_1 a_2)^2 + (m_2 l_1 a_2)^2 \sin(x_2)^2 \\
&= (m_2 a_2^2 + I_2) \cdot (m_1 a_1^2 + I_1) + \underbrace{(m_2 a_2^2 + I_2) \cdot m_2 l_1^2}_{m_2^2 l_1^2 a_2^2 + m_2 l_1^2 I_2} - (m_2 l_1 a_2)^2 + (m_2 l_1 a_2)^2 \sin(x_2)^2 \\
&= (m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 l_1^2) \cdot (m_2 a_2^2 + I_2) + m_2 l_1^2 I_2 + m_2^2 l_1^2 a_2^2 \sin(x_2)^2
\end{aligned}$$

Für die Inverse der Massenmatrix gilt somit

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} m_2 a_2^2 + I_2 & -(m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2) \\ -(m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2) & m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2 l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2 \\
M_{12} &= m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(x_2)) + I_2 \\
M_{21} &= M_{12} \\
M_{22} &= m_2 a_2^2 + I_2
\end{aligned}$$

Satz 5.1 *Die Lösung des optimalen Steuerungsproblem:*

$$\min_u \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, \mathrm{d}t \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{B} u$$

ist gegeben durch

$$u^* = -R^{-1} B^T K x \quad \textit{mit} \quad Q - KPK + KA + A^T K = 0$$

und für die Momente gilt

$$\tau^* = M_0(q)u^* + N_0(q,\dot{q}) = -M_0(q)R^{-1}B^T K x + N_0(q,\dot{q})$$

Ursprungsproblem:

$$\min_u \int_0^\infty q^T Q q + \tau^T R \tau$$

$$exts.t. M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau;$$

LQR:

$$\min_u \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \,\mathrm{d}t \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{B} u$$

Lösung der CARE für $n = 2$

$$Q - K \underbrace{BR^{-1}B^T}_{P} K + KA + A^T K = 0$$

Closed-Loop Regelung:

$$u^* = -R^{-1}B^T K x$$

Lösung Originalsystem

$$\tau^* = M_0(q)u^* + N_0(q,\dot{q})$$

$$M_0 = M(q = 0)$$

$$N_0 = N(q,\dot{q}) = C_0(q,\dot{q})\dot{q} + G_0(q)$$

Beweis: Für die Value Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) &= \underbrace{\nabla V(x)}_{2Kx(t)} \cdot \underbrace{x'(t)}_{Ax(t)+Bu(t)} \\
&= 2x(t)^T K \left[Ax(t) + B \underbrace{-R^{-1}B^T K x(t)}_{u(t)} \right] \\
&= x(t)^T \left[\underbrace{KA + A^T K - 2KBR^{-1}B^T K}_{-Q-KBR^{-1}B^T K} \right] x(t) \\
&= -x(t)^T Q x(t) - \underbrace{x(t)^T KB}_{x(t)^T KBR^{-1}R} \underbrace{R^{-1}B^T K x(t)}_{-u^*(t)} \\
&= -x(t)^T Q x(t) - \underbrace{x(t)^T KBR^{-1}R}_{u^*(t)^T R} u^*(t) \\
&= -x(t)^T Q x(t) - u^*(t)^T R u^*(t)
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) \leq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x(t) = u^*(t) = 0$. Damit ist die Value Funktion $V(x(t))$ streng monoton fallend und somit ist das optimale Steuerungssignal $u^*(t)$ stabil. Verwenden wir die Value Funktion auf die reale Dynamik, so gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t)) &= \nabla V(x)\cdot x'(t) \\
&= 2x(t)^T K\left[Ax(t) + Bu^*(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x(t))u^*(t) + f(x(t)) \end{pmatrix}\right] \\
&= 2x(t)^T K\left[Ax(t) + Bu^*(t) + Bh(x(t))u^*(t) + Bf(x(t))\right] \\
&= \underbrace{2x(t)^T K(Ax + Bu^*)}_{(1)} + \underbrace{2x(t)^T KB(h(x)u^* + f(x))}_{(2)}
\end{aligned}
$$

wobei wir $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}$ verwendet haben. Aus $u^* = -R^{-1}B^T Kx(t)$ folgt $B^T Kx(t) = -Ru^*$ und wir erhalten für (2)

$$
\begin{aligned}
2x(t)^T KB(h(x)u^* + f(x)) &= 2\left[\underbrace{B^T Kx(t)}_{-Ru^*}\right]^T (h(x)u^* + f(x)) \\
&= -2(u^*)^T R(h(x)u^* + f(x)) \\
&= -2(u^*)^T Rh(x)u^* - 2(u^*)^T Rf(x)
\end{aligned}
$$

Für h positiv definit gilt:

$$
-(u^*)^T Rh(x)u^* \leq 0
$$

Für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
-2(u^*)^T Rf(x) &\leq 2\|u^*\|\|R\|\|f(x)\| \\
&\leq \epsilon\|u^*\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2 \\
&= \epsilon(u^*)^T u^* + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2 \\
&\leq \epsilon(u^*)^T Ru^* + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2
\end{aligned}
$$

Wir wählen als Schranke $f^T Rf \leq x^T Px$ □

5.1 Beispiel von Lin

$$
\begin{aligned}
&m_1 = 13.86 \approx \text{oz}, \quad m_2 = 3.33 \approx \text{oz}, \\
&r_1 = 6.12 \approx \text{in}, \quad r_2 = 3.22 \approx \text{in}, \\
&l_1 = 8 \approx \text{in}, \quad l_2 = 6 \approx \text{in}, \\
&J_1 = 62.39 \approx \text{oz}\cdot\text{in/rad/s}^2, \quad J_2 = 16.70 \approx \text{oz}\cdot\text{in/rad/s}^2, \\
&m_L = 10\,\varepsilon \approx \text{oz}, \quad J_L = 60\,\varepsilon^2 \approx \text{oz}\cdot\text{in/rad/s}^2, \quad \varepsilon = 1.
\end{aligned}
$$

Umrechnung in SI

$$
1\text{oz} = 0.0283495\text{kg}, \quad 1\text{in} = 0.0254\text{m}, \quad 1\text{oz}\cdot\text{in/rad/s}^2 = 7.06155\times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2.
$$

$$
\begin{aligned}
&m_1 = 13.86 \cdot 0.0283495 \approx 0.3929\ \text{kg}, \qquad m_2 = 3.33 \cdot 0.0283495 \approx 0.0944\ \text{kg},\\
&r_1 = 6.12 \cdot 0.0254 \approx 0.1554\ \text{m}, \qquad r_2 = 3.22 \cdot 0.0254 \approx 0.0818\ \text{m},\\
&l_1 = 8 \cdot 0.0254 = 0.2032\ \text{m}, \qquad l_2 = 6 \cdot 0.0254 = 0.1524\ \text{m},\\
&J_1 = 62.39 \cdot 7.06155 \times 10^{-3} \approx 0.4400\ \text{kg} \cdot \text{m}^2,\\
&J_2 = 16.70 \cdot 7.06155 \times 10^{-3} \approx 0.1181\ \text{kg} \cdot \text{m}^2,\\
&m_L = 10 \cdot 0.0283495 = 0.2835\ \text{kg}, \qquad J_L = 60 \cdot 7.06155 \times 10^{-3} \approx 0.4237\ \text{kg} \cdot \text{m}^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2\big(l_1^2 + r_2^2\big) + m_L\big(l_1^2 + l_2^2\big) + J_L,\\
b &= m_2\, l_1\, r_2 + m_L\, l_1\, l_2,\\
c &= J_2 + m_2 r_2^2 + m_L\, l_2^2 + J_L.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &\approx 1.0145\ \text{kg} \cdot \text{m}^2,\\
b &\approx 0.01035\ \text{kg} \cdot \text{m}^2,\\
c &\approx 0.5488\ \text{kg} \cdot \text{m}^2.
\end{aligned}
$$

$$
M_0(q) = \begin{pmatrix} a + 2b\ \cos q_2 & c + b\ \cos q_2 \\ c + b\ \cos q_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0145 + 2 \cdot 0.01035\ \cos q_2 & 0.5488 + 0.01035\ \cos q_2 \\ 0.5488 + 0.01035\ \cos q_2 & 0.5488 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{\text{paper}} &\approx 846.4 + 1000 + 60 \ = \ 1906.4,\\
b_{\text{paper}} &\approx 85.6 + 480 \ = \ 565.6,\\
c_{\text{paper}} &\approx 51.2 + 360 + 60 \ = \ 471.2.
\end{aligned}
$$

$$
M_0(q)\_\text{paper} \approx \begin{pmatrix} 1906 + 2 \cdot 565.6\ \cos q_2 & 471 + 565.6\ \cos q_2 \\ 471 + 565.6\ \cos q_2 & 471 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1906 + 1131.2\ \cos q_2 & 471 + 565.6\ \cos q_2 \\ 471 + 565.6\ \cos q_2 & 471 \end{pmatrix}.
$$

$$
\text{Im Text zitiert:} \quad M_0(q) = \begin{pmatrix} 1906 + 1132\ \cos q_2 & 471 + 86\ \cos q_2 \\ 471 + 86\ \cos q_2 & 471 \end{pmatrix}.
$$