

---

# Modellierung eines Roboters

Nicolas Schäfer  
Saarbrücken, 19. September 2025

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Modellierung</b>	<b>1</b>
1.1	Two Link Revolute Manipulator . . . . .	1
1.1.1	Herleitung der kinetischen Energie . . . . .	2
1.1.2	Aufstellen der Coriolis-Matrix . . . . .	3
1.1.3	Gravitationsterme . . . . .	4
1.1.4	Simulation gegebener Steuerung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Optimale Steuerungsprobleme</b>	<b>6</b>
2.1	Linear-Quadratische Probleme . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Numerische Lösungsverfahren</b>	<b>13</b>
3.1	Gradientenverfahren . . . . .	13
3.1.1	Sensitivity Approach . . . . .	13
3.1.2	Praktische Implementierung . . . . .	15
3.2	Shooting Methods . . . . .	17
3.3	Riccati Regler . . . . .	19
3.3.1	Implementierung . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung</b>	<b>21</b>
4.1	Herleitung des Minimumprinzips . . . . .	22
4.2	Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme . . . . .	22
4.2.1	Finite time problem . . . . .	22
4.2.2	infinite time problem . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Paper Lin</b>	<b>24</b>

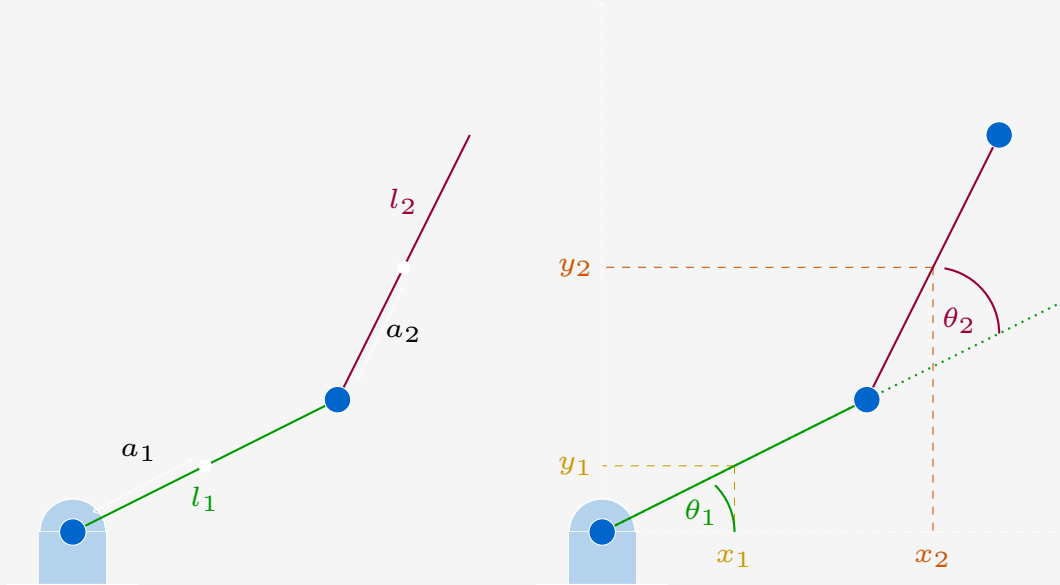
# 1 Modellierung

$$\begin{aligned}
 \underbrace{f - mg}_{\text{Kräftebilanz}} &= \underbrace{mx''}_{\text{Newtons 2nd Law}} = \frac{d}{dt} [mx'(t)] \\
 f - \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{[mgx(t)]}_{\text{Potenzielle Energie } V} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x'} \underbrace{\left[ m \frac{1}{2} x'(t)^2 \right]}_{\text{kinetische Energie } T} \\
 f - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} &\Rightarrow f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Wobei  $L = T - V = \frac{1}{2}mx'(t)^2 - mgx(t)$  gilt. Für generalisierte Koordinaten  $\mathbf{q} = \theta \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n$$

## 1.1 Two Link Revolute Manipulator



$$x_1 = a_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad y_1 = a_1 \cdot \sin(\theta_1)$$

Gelenk 2 befindet sich in  $(l_1 \cos(\theta_1), l_1 \sin(\theta_1))$ . Der Schwerpunkt von Link 2 ist *zusätzlich* noch  $a_2$  vom Gelenk 2 entfernt und besitzt eine absolute Winkelausrichtung  $\theta_1 + \theta_2$ . Daher:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= l_1 \cdot \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 y_2 &= l_1 \cdot \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung des Systems

$$D(\theta)\theta'' + C(\theta, \theta')\theta' + G(\theta) = \tau$$

### 1.1.1 Herleitung der kinetischen Energie

Für die translatorische Energie von Link 1 gilt:

$$T_{1,trans} = \frac{m_1}{2} \cdot (x'_1(t)^2 + y'_1(t)^2) = \frac{m_1}{2} \cdot ((-a_1 \sin(\theta_1)\theta'_1)^2 + (a_1 \cos(\theta_1)\theta'_1)^2) = \frac{m_1}{2} \cdot a_1^2 \cdot \theta'_1(t)^2$$

Es gilt  $T_1 = T_{1,trans} + T_{1,rot}$  und somit

$$T_1 = \frac{m_1}{2} a_1^2 \theta'_1(t)^2 + \frac{I_1}{2} \theta'_1(t)^2 = \frac{m_1 a_1^2 + I_1}{2} \theta'_1(t)^2$$

Analog für die Energie an Link 2 gilt:

$$T_2 = \underbrace{\frac{m_2}{2} \cdot (x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2)}_{\text{TRANSLATORISCH}} + \underbrace{\frac{I_2}{2} \cdot (\theta'_1(t) + \theta'_2(t))^2}_{\text{ROTORISCH}}$$

$$T(\theta_1, \theta'_1, \theta_2, \theta'_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta'_1 & \theta'_2 \end{pmatrix} D(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} D_{11} \theta'_1(t)^2 + D_{12} \theta'_1 \theta'_2 + \frac{1}{2} D_{22} \theta'_2(t)^2$$

$$\begin{aligned} x'_2(t) &= -l_1 \sin(\theta_1) \theta'_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\theta'_1 + \theta'_2) \\ y'_2(t) &= l_1 \cos(\theta_1) \theta'_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\theta'_1 + \theta'_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2 &= \left[ -l_1 \sin(\theta_1) \theta'_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\theta'_1 + \theta'_2) \right]^2 + \left[ l_1 \cos(\theta_1) \theta'_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\theta'_1 + \theta'_2) \right]^2 \\ &= l_1^2 \sin^2(\theta_1) \theta'^2_1 + 2l_1 a_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) \theta'_1 (\theta'_1 + \theta'_2) + \underbrace{a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) (\theta'_1 + \theta'_2)^2}_{a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\theta'^2_1 + 2\theta'_1 \theta'_2 + \theta'^2_2)} \\ &\quad + l_1^2 \cos^2(\theta_1) \theta'^2_1 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2) \theta'_1 (\theta'_1 + \theta'_2) + \underbrace{a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) (\theta'_1 + \theta'_2)^2}_{a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\theta'^2_1 + 2\theta'_1 \theta'_2 + \theta'^2_2)} \\ &= \left[ \underbrace{l_1^2 \sin^2(\theta_1) + l_1^2 \cos^2(\theta_1)}_{=l_1^2} + \underbrace{a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}_{=a_2^2} \right] \theta'^2_1 \\ &\quad + 2l_1 a_2 \theta'_1 \cdot \left[ \underbrace{\sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2)}_{\cos(\theta_2)} \right] (\theta'_1 + \theta'_2) \\ &\quad + 2 \cdot \left[ \underbrace{a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}_{=a_2^2} \right] \theta'_1 \theta'_2 + \left[ \underbrace{a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}_{=a_2^2} \right] \theta'^2_2 \\ &= \left[ l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2) \right] \theta'^2_1 + \left[ 2a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2) \right] \theta'_1 \theta'_2 + a_2^2 \theta'^2_2 \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie gilt somit

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{m_1 a_1^2 + I_1}{2} \theta_1'^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2) + \frac{I_2}{2} \cdot \underbrace{(\theta_1' + \theta_2')^2}_{\theta_1'^2 + 2\theta_1'\theta_2' + \theta_2'^2} \\
&= \left[ \frac{m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2}{2} \right] \theta_1'^2 + \left[ \frac{m_2 \cdot (2a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + 2I_2}{2} \right] \theta_1' \theta_2' \\
&\quad + \left[ \frac{m_2 a_2^2 + I_2}{2} \right] \theta_2'^2 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_1' & \theta_2' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 \cdot (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 & m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 \\ m_2 \cdot (a_2^2 + l_1 a_2 \cos(\theta_2)) + I_2 & m_2 a_2^2 + I_2 \end{pmatrix}}_{D(\theta_1, \theta_2) = D(\theta_2)} \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} D_{11} \theta_1'(t)^2 + D_{12} \theta_1' \theta_2' + \frac{1}{2} D_{22} \theta_2'(t)^2
\end{aligned}$$

### 1.1.2 Aufstellen der Coriolis-Matrix

Es gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta_1'^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta_1' \theta_2' + \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta_2'(t)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta_1'^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_1' \theta_2' + \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta_2'(t)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1'} = D_{11} \theta_1' + D_{12} \theta_2'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2'} = D_{12} \theta_1' + D_{22} \theta_2'$$

Für die zeitlichen Ableitungen der Größen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta_1'} &= \underbrace{\frac{d}{dt} D_{11}}_{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta_1' + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta_2'} \cdot \theta_1' + D_{11} \theta_1'' + \underbrace{\frac{d}{dt} D_{12}}_{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta_1' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_2'} \cdot \theta_2' + D_{12} \theta_2'' \\
&= \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta_1'^2 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta_1' \theta_2' + D_{11} \theta_1'' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta_1' \theta_2' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_2'^2 + D_{12} \theta_2'' \\
&= \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta_1'^2 + \left[ \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta_1' \theta_2' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_2'^2 + D_{11} \theta_1'' + D_{12} \theta_2''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta_2'} &= \underbrace{\frac{d}{dt} D_{12}}_{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta_1' + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_2'} \cdot \theta_1' + D_{12} \theta_1'' + \underbrace{\frac{d}{dt} D_{22}}_{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta_1' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta_2'} \cdot \theta_2' + D_{22} \theta_2'' \\
&= \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta_1'^2 + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_1' \theta_2' + D_{12} \theta_1'' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta_1' \theta_2' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta_2'^2 + D_{22} \theta_2''
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \left[ \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \right] \theta_1'^2 + \left[ \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \right] \theta_1' \theta_2' + \left[ \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \right] \theta_2'^2 \\
&\quad + D_{11} \theta_1'' + D_{12} \theta_2'' \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta_1'^2 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta_1' \theta_2' + \left[ \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \right] \theta_2'^2 + D_{11} \theta_1'' + D_{12} \theta_2'' \\
&= \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1} \theta_1' + \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta_2' \right]}_{C_{11}} \theta_1' + \underbrace{\left[ \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \theta_2' - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta_2' \right]}_{C_{12}} \theta_2' + D_{11} \theta_1'' + D_{12} \theta_2''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= \left[ \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \right] \theta_1'^2 + \left[ \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2} \right] \theta_1' \theta_2' + \left[ \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \right] \theta_2'^2 \\
&\quad + D_{12} \theta_1'' + D_{22} \theta_2'' \\
&= \underbrace{\left[ \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1} \theta_1' - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2} \theta_1' \right]}_{C_{21}} \theta_1' + \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2} \theta_2' + \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1} \theta_1' \right]}_{C_{22}} \theta_2' + D_{12} \theta_1'' + D_{22} \theta_2''
\end{aligned}$$

Für die Einträge der Matrix  $C$  gilt

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta_1' + \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta_2' = -2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta_2' \\
C_{12} &= \underbrace{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_2}}_{=-m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta_2' - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta_2' = -m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta_2' \\
C_{21} &= \underbrace{\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta_1' - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_2}}_{=-2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2)} \theta_2' = m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta_1' \\
C_{22} &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_2}}_{=0} \theta_2' + \underbrace{\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_1}}_{=0} \theta_1' = 0
\end{aligned}$$

Es gilt somit

$$C \cdot \theta'(t) = \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta_2' & -m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta_2' \\ m_2 l_1 a_2 \sin(\theta_2) \theta_1' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}$$

### 1.1.3 Gravitationsterme

Wählen wir  $y = 0$  als Nullhöhe, so ist

$$\begin{aligned}
V &= m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 \\
&= m_1 g a_1 \sin(\theta_1) + m_2 g (l_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= m_1 g a_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

### 1.1.4 Simulation gegebener Steuerung

- Diskretisierung des Zeitintervalls  $[0, 1]$  und der Funktion mittels  $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \left( u_i \right)_{i=0}^N = \left( \tau_1^i \right)_{i=0}^N$$

•

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix} = D^{-1} \left[ u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]$$

- Dynamisches System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix}}_{x'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ D^{-1} \left[ u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]_1 \\ D^{-1} \left[ u - C(x) \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} - G(\theta_1, \theta_2) \right]_2 \end{pmatrix}}_{f(x,u)} \Rightarrow x_{i+1} = x_i + h \cdot f(x_i, u_i)$$

## 2 Optimale Steuerungsprobleme

**Definition 2.1 (Optimales Steuerungsproblem)** Gegeben seien

- *Systemdynamik:*

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

wobei  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  der Zustandsvektor und  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$  die Steuerung ist.

- *Zielfunktional:*

$$J(u) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt$$

- *Ziel: Finde die Steuerung  $u(t)$ , die  $J(u)$  minimiert, also*

$$J(u^*) = \min_u J(u) \Rightarrow u^* = \arg \min_u J(u)$$

**Zielfunktional:**

$$\min J[u] = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(t, x, u) dt$$

**Systemdynamik:**

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0$$

Es gilt mittels Kettenregel:

$$\left( \frac{d\Phi}{dt} = \Phi_x \cdot x' + \Phi_t \right)$$

- Augmentierte Lagrange Funktion

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\varphi(t, x, u) + \Phi_x \cdot x' + \Phi_t + p \cdot (x' - f(x, u))}_{=L(t, x, x', u)} dt$$

- Für den Kozustand gilt  $L_{x'} = p(t)$
- Optimalitätsbedingung mit  $H(t, x, u, p) = x' \cdot p - L$

$$x'(t) = H_p \quad p'(t) = -H_x \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

- Diese Bedingungen geben uns die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das optimale Steuerungsproblem

**Satz 2.2 (Minimumprinzip)** Sei  $\mathbf{H} = L(t, x, u) + p(t)^T \cdot f(t, x, u)$  die Hamilton-Funktion

- Es gilt  $u^* = \operatorname{argmin} \mathbf{H}(x^*, u, p^*)$

$$p'(t) = -H_x \quad \mathbf{H}_u = 0 \quad x'(t) = H_p$$



- Weiter gilt die Transversalitätsbedingung

$$\Phi_x(t = t_f) = p(t = t_f)$$

- Für freie Endzeit  $t_f$  gilt

$$\mathbf{H}(t = t_f) + \Phi_t(t = t_f) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathbf{H}(x, u, p) = 0}_{\text{für } \mathbf{H}_t = 0}$$

**Beispiel 2.3 (Testbeispiel)** Löse das folgende optimale Steuerungsproblem

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 dt \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Wir definieren die Hamiltonfunktion  $\mathbf{H} = x + u^2 + p \cdot (x + u + 1)$ . Das Minimumprinzip liefert

$$p'(t) = -\mathbf{H}_x = -1 - p \quad \mathbf{H}_u = 0 = 2u + p \Rightarrow u = -\frac{p}{2}$$

Die adjungierte Gleichung ist trennbar

$$\frac{dp}{dt} = -1 - p \Rightarrow \underbrace{\int \frac{dp}{1+p}}_{\log(p+1)} = \underbrace{\int -1 dt}_{=-t+K} \Rightarrow p(t) = -1 + C \cdot e^{-t}, \quad C = e^K$$

Für die optimale Steuerung gilt somit  $u(t) = -\frac{1}{2}p(t) = \frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}$ . Den optimalen Zustand berechnen wir aus der Systemdynamik

$$x'(t) = x(t) + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{C}{2} \cdot e^{-t}}_{=u(t)} + 1 \Rightarrow x'(t) = 1 \cdot x(t) + \frac{3}{2} - \frac{C}{2}e^{-t}$$

Das ist eine lineare inhomogene Gleichung. Es gilt  $A(t) = \int_0^t 1 ds = t$  und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cdot e^{A(t)} + e^{A(t)} \cdot \int_0^t \left( \frac{3}{2} - \frac{C}{2}e^{-s} \right) \cdot e^{-A(s)} ds \\ &= e^t \cdot \int_0^t \frac{3}{2} \cdot e^{-s} - \frac{C}{2}e^{-s} \cdot e^{-s} ds \\ &= e^t \cdot \left[ -\frac{3}{2}e^{-s} + \frac{C}{4}e^{-2s} \right]_0^t \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{C}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}e^t - e^t \frac{C}{4} \end{aligned}$$

Da  $x(1)$  frei ist und kein Endkostenterm vorliegt gilt  $p(1) = 0$ .

$$p(1) = -1 + C \cdot e^{-1} = 0 \Rightarrow C = e.$$

Wir fassen nun die Resultate zusammen:

$$\begin{aligned} p(t) &= -1 + e^{-t+1} \\ u(t) &= \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-t+1}) \\ x(t) &= -\frac{3}{2} + \frac{e^{-t+1}}{4} + \frac{3}{2}e^t - \frac{e^{t+1}}{4} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.4 (Minimierung des Treibstoffverbrauchs)** Ein Fahrzeug startet bei  $x(0) = 0$  mit  $v(0) = 0$  und soll zum festen Zeitpunkt  $t_f = 2$  die Position  $x(2) = 1$  erreichen. Das Kostenfunktional lautet:

$$J[u] = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

Die Dynamik des Fahrzeugs ist:

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = u(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, u)$$

- Aufstellen der Hamilton-Funktion mit  $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_v \end{pmatrix}$

$$H = L + \mathbf{p}(t)^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, u) = \frac{1}{2} u(t)^2 + p_x(t) v(t) + p_v(t) u(t)$$

- Formulierung des Minimumprinzips:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -p_v(t) = u^*(t), \quad -p'(t) = \nabla_{\mathbf{y}=(x,v)} H \Rightarrow -p'_x(t) = 0, -p'_v(t) = p_x(t)$$

- Integration der Gleichungen

$$p_x(t) = C, p_v(t) = -C \cdot t + K$$

- Integration der Systemdynamik unter Nutzung der Anfangswerte  $x(0) = v(0) = 0$

$$u(t) = Ct - k$$

$$v(t) + v(0) = \int_0^t v'(s) ds = \int_0^t u(s) ds = \frac{C}{2} t^2 - kt$$

$$x(t) + x(0) = \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t v(s) ds = \frac{C}{6} t^3 - \frac{k}{2} t^2$$

- Anwendung der Endwerte  $x(2) = 1$  und  $v(2) = 0$

$$0 = \frac{C}{2} \cdot 4 - k \cdot 2 \Rightarrow k = C$$

$$1 = \frac{C}{6} \cdot 8 - \frac{C}{2} \cdot 4 \Rightarrow 1 = \left( \frac{4C}{3} - 2C \right) = -\frac{2C}{3} \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$u(t) = \left( -\frac{3}{2} \right) t - \left( -\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}$$

## 2.1 Linear-Quadratische Probleme

**Satz 2.5 (Riccati-Regler)** Die Lösung des linear-quadratischen Problems

$$\min J(u) = \int_0^T \frac{q}{2} \cdot x^2(t) + \frac{r}{2} \cdot u^2(t) dt + \frac{s}{2} x(T)^2$$

$$\text{s.t. } x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $q, r, s \geq 0$  ist gegeben durch die Riccati-Gleichung

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r} K(t)^2 - q, \quad K(T) = s$$

und die resultierenden Lösungen

$$x^*(t) = x_0 \exp \left( \int_0^t a - \frac{b^2}{r} K(s) ds \right) \quad u^*(t) = -\frac{b}{r} K(t) x(t)$$

**Beweis:** Wir definieren die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2} q x(t)^2 + \frac{1}{2} r u(t)^2 + p(t) (a x(t) + b u(t))$$

Dann liefert das Minimumprinzip die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\frac{b}{r} p(t) \quad p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow p'(t) = -q x(t) - a p(t)$$

Weiter gilt die Transversalitätsbedingung  $p(T) = s \cdot x(T)$ . Wir nehmen an, dass eine Feedbacksteuerung vorliegt, d.h.

$$p(t) = K(t) x(t) \quad p(T) = K(T) x(T) \Rightarrow K(T) = s$$

wobei  $K(t)$  eine skalare Funktion ist. Ableiten von  $p$  nach  $t$  liefert

$$p'(t) = K'(t) x(t) + K(t) x'(t)$$

Für die Zustandsgleichung gilt mit  $u^*(t) = -\frac{b}{r} p(t)$

$$x'(t) = a x(t) + b u^*(t) = a x(t) - \frac{b^2}{r} K(t) x(t) = \left( a - \frac{b^2}{r} K(t) \right) x(t).$$

Wir setzen nun  $p'(t) = -H_x$  und unseren Ausdruck für  $x'(t)$  ein, so gilt

$$\begin{aligned}\underbrace{-qx(t) - ap(t)}_{=p'(t)} &= K'(t)x(t) + \underbrace{K(t) \left( a - \frac{b^2}{r}K(t) \right)}_{=x'(t)} x(t) \\ \Leftrightarrow -qx(t) - aK(t)x(t) &= K'(t)x(t) + aK(t)x(t) - \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) \\ \Leftrightarrow K'(t)x(t) &= -2aK(t)x(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2x(t) - qx(t)\end{aligned}$$

Unter der Annahme  $x(t) \neq 0$  erhalten wir die Riccati-Differentialgleichung:

$$K'(t) = -2aK(t) + \frac{b^2}{r}K(t)^2 - q, \quad K(T) = s.$$

Wir erhalten  $x(t)$  als Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$x'(t) = \left( a - \frac{b^2}{r}K(t) \right) x(t) \Rightarrow x(t) = x(0) \cdot \exp \left( \int_0^t a - \frac{b^2}{r}K(s) \, ds \right).$$

Die optimale Steuerung  $u^*(t)$  ergibt sich aus  $u^*(t) = -\frac{b}{r}p(t) = -\frac{b}{r}K(t)x(t)$ . □

**Beispiel 2.6 (Berechnung des Riccati-Reglers)** Wir betrachten erneut ein Beispiel. In diesem Beispiel gilt für die Parameter

$$a = 0, b = 1, q = 1, r = 1, T = 1, s = 0, x_0 = 1.$$

Die Riccati-Gleichung lautet somit

$$K'(t) = K(t)^2 - 1, \quad K(1) = 0$$

Die Gleichung ist trennbar und es gilt

$$\frac{dK}{dt} = K^2 - 1 \Rightarrow \int \frac{1}{K^2 - 1} dK = \int 1 \, dt$$

Wir nutzen die Partialbruchzerlegung für  $\frac{1}{K^2-1}$  und erhalten

$$\frac{1}{K^2 - 1} = \frac{1}{(K + 1)(K - 1)} = \frac{A}{K - 1} + \frac{B}{K + 1} \Rightarrow 1 = \underbrace{A(K + 1) + B(K - 1)}_{K \cdot (A+B) + A-B}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert  $A + B = 0$  und  $A - B = 1$ , mit der Lösung  $A = \frac{1}{2}$  und  $B = -\frac{1}{2}$ . Wir erhalten für unser Integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{K^2 - 1} dK &= \int 1 dt \\
\int \frac{1}{2} \frac{1}{K-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{K+1} dK &= t + \frac{C}{2} \\
\frac{1}{2} \cdot \left( \underbrace{\log(K-1) - \log(K+1)}_{\log\left(\frac{K-1}{K+1}\right)} \right) &= t + \frac{C}{2} \\
\frac{K-1}{K+1} &= \exp(2t + C) = \underbrace{e^C}_{:=A} \cdot e^{2t} \\
K(t) &= \frac{1 + Ae^{2t}}{1 - Ae^{2t}}
\end{aligned}$$

Es gilt weiter  $K(1) = 0$  und somit  $A = -\frac{1}{e^2}$  damit ist die Lösung der Riccati-Gleichung gegeben durch

$$K(t) = \frac{1 - e^{2(t-1)}}{1 + e^{2(t-1)}}.$$

Für den optimalen Zustand gilt

$$x(t) = 1 \cdot \exp\left(\int_0^t -K(s) ds\right) = \exp\left(\int_0^t -\frac{1 - e^{2(s-1)}}{1 + e^{2(s-1)}} ds\right)$$

Wir nutzen die Substitution  $z = e^{2(s-1)}$  dann gilt für das Integral

$$\frac{dz}{ds} = 2 \cdot \underbrace{e^{2(s-1)}}_{=z} \Rightarrow \int -\frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{dz}{2z} = -\frac{1}{2} \int \frac{1-z}{z(1+z)} dz$$

Wir verwenden erneut eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1-z}{z(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow 1-z = \underbrace{A(1+z) + Bz}_{=(A+B)z+A}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert  $A = 1$  und  $A + B = -1$  und somit  $B = -2$ . Für das Integral gilt somit

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1-z}{z(1+z)} dz = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} - \frac{2}{z+1} dz = -\frac{1}{2} [\log(z) - 2\log(z+1)] + C$$

Rücksubstitution von  $z(t) = e^{2(t-1)}$  liefert

$$x(t) = \exp[-(t-1) + \log(e^{2(t-1)} + 1) + C]$$

Wir nutzen  $x(0) = 1$  und bestimmen die Konstante  $C$ .

$$x(0) = \exp \left( -(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C \right) = 1$$

*Wir erhalten somit die Bedingung*

$$-(0-1) + \log(e^{2(0-1)} + 1) + C = 0 \Rightarrow C = -1 - \log(1 + e^{-2})$$

*Der optimale Zustand ist somit gegeben als*

$$x(t) = \exp \left[ -t + 2 + \log \left( \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}} \right) \right] = \underbrace{e^{-t+2} \cdot \frac{1 + e^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}}}_{= \frac{e^2}{1+e^{-2}} e^{-t} + \frac{1}{1+e^{-2}} e^t}$$

*Für die optimale Steuerung gilt  $u^*(t) = -K(t)x(t)$  und somit*

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1 - e^{2(t-1)}}{\textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{e}^{2(t-1)}} \cdot e^{-t+2} \cdot \frac{\textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{e}^{2(t-1)}}{1 + e^{-2}} \\ &= \frac{e^{-t+2}}{1 + e^{-2}} \cdot (-1 + e^{2(t-1)}) \\ &= -\frac{e^2}{1 + e^{-2}} e^{-t} + \frac{1}{1 + e^{-2}} e^t \end{aligned}$$

*Dies entspricht den Lösungen aus dem Beispiel.*

## 3 Numerische Lösungsverfahren

### 3.1 Gradientenverfahren

$$u(t) + \epsilon \cdot \eta_u(t) \quad x(t) + \epsilon \cdot \eta_x(t), \eta_x(0) = 0$$

Um die Zustandsgleichung als Nebenbedingung zu integrieren, führen wir einen Lagrange-Multiplikator  $p(t)$  ein. Das erweiterte Zielfunktional lautet dann:

$$J^{\text{aux}}(u, x, p) = \int_0^T [L(x(t), u(t), t) + p(t) (f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t))] dt + \Phi(x(T))$$

Wir betrachten kleine Variationen der Steuerungsfunktion und des Zustands:

wobei  $\epsilon$  ein kleiner Parameter ist.

Die Variation von  $J^{\text{aux}}$  bezüglich  $\epsilon$  bei  $\epsilon = 0$  ergibt:

$$\delta J^{\text{aux}} = \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u(t) + p(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u(t) - \delta \dot{x}(t) \right) \right] dt + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \delta x(T) = 0$$

Der Term mit  $\delta \dot{x}(t)$  wird mittels Integration durch Teile umgeformt:

$$\int_0^T p(t) (-\delta \dot{x}(t)) dt = [-p(t) \delta x(t)]_0^T + \int_0^T \dot{p}(t) \delta x(t) dt$$

Da  $\delta x(0) = 0$  ist (weil der Anfangszustand festgelegt ist), vereinfacht sich der Randterm zu:

$$-p(T) \delta x(T) + \int_0^T \dot{p}(t) \delta x(t) dt$$

Setzen wir die Ergebnisse in die Variation des erweiterten Zielfunktional ein:

$$\int_0^T \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} + p(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p}(t) \right) \delta x(t) + \left( \frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u(t) \right] dt + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - p(T) \right) \delta x(T) = 0$$

Für die Gleichung muss jeder Koeffizient der unabhängigen Variation Null sein. Daher ergeben sich die adjungierten Gleichungen:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x} - p(t) \frac{\partial f}{\partial x} \\ p(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) \end{cases}$$

Der Gradient des Zielfunktional  $J(u)$  ist gegeben durch:

$$\frac{\delta J}{\delta u(t)} = \frac{\partial L}{\partial u} + p(t) \frac{\partial f}{\partial u}$$

#### 3.1.1 Sensitivity Approach

Erweitertes Zielfunktional

$$\begin{aligned}
J^{aux}(u) &= \int_0^T \varphi(t, x, u) + p(t) \cdot (f(t, x, u) - x'(t)) \, dt + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T \underbrace{\varphi(t, x, u) + p(t) \cdot f(t, x, u)}_{=H(t)} \, dt - \underbrace{\int_0^T p(t)x'(t) \, dt}_{=-[p(t)x(t)]_0^T + \int_0^T p'(t)x(t) \, dt} + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t) \, dt - [p(t)x(t)]_0^T + \Phi(x(T)) \\
&= \int_0^T H(t) + p'(t)x(t) \, dt - p(T)x(T) + p(0)x(0) + \Phi(x(T))
\end{aligned}$$

Der Term  $p(0)x(0)$  ist unabhängig von  $u$  und fällt bei der Optimierung weg. Bilden der Gateau Ableitung in  $u$  entlang  $h$  liefert

$$\begin{aligned}
J'(u, h) &= \int_0^T H_x[t] \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) + p'(t)S(t) \, dt - p(T)S(T) + \Phi_x(x(T))S(1) \\
&= \int_0^T \underbrace{(H_x[t] + p'(t))}_{=0} \cdot S(t) + H_u[t] \cdot h(t) \, dt + \underbrace{(\Phi_x(x(T)) - p(T))}_{=0} \cdot S(T) \\
&= \int_0^T H_u[t] \cdot h(t) \, dt
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit  $J'(u) = H_u[t]$



### 3.1.2 Praktische Implementierung

**Beispiel 3.1** Wir betrachten das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_0^1 x(t) + u(t)^2 dt \quad x'(t) = x(t) + u(t) + 1, \quad x(0) = 0.$$

welches in einer Aufgabe analytisch gelöst ist. Für den Gradienten gilt

$$\nabla J(u) = H_u = \frac{\partial}{\partial u}(x(t) + u(t)^2 + p(t) \cdot (x(t) + u(t) + 1)) = 2u(t) + p(t)$$

Wir verwenden das explizite Euler-Verfahren zur Diskretisierung der Gleichungen aus dem Minimumprinzip:

- Diskretisierung des Zeitintervalls  $[0, 1]$  und der Funktionen mittels  $N \in \mathbb{N}$

$$h = \frac{1}{N} \quad \mathbf{u}^k = (u_i^k)_{i=0}^N, \quad \mathbf{x}^k = (x_i^k)_{i=0}^N, \quad \mathbf{t}^k = (i \cdot h)_{i=0}^N,$$

- Armijo Suchrichtung  $\alpha^{(k)}$ : Für  $0 \leq m < M = 10$ ,  $c = 10^{-4}$ ,  $\beta = 0.5 \in (0, 1)$

$$u^{neu} = u^k + \beta^m \cdot d^{(k)}$$

$$J(u^k) = \int_0^1 x^k(t) + (u^k(t))^2 dt \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^k + (u_i^k)^2$$

$$J(u^{neu}) = \int_0^1 x^{neu}(t) + (u^{neu}(t))^2 dt \approx h \cdot \sum_{i=0}^N x_i^{neu} + (u_i^{neu})^2$$

$$J(u^{neu}) \leq J(u^k) - c \cdot \beta^m \cdot h \cdot \sum_{i=0}^N (2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)})(2 \cdot u_i^{(k)} + p_i^{(k)})$$

$$\Leftrightarrow J(u^{neu}) \leq J(u^k) - \|d^{(k)}\|^2 \cdot c \cdot \beta^m \Rightarrow \alpha^{(k)} = \beta^m$$

- Gradientenverfahren: Für  $0 \leq k < \text{MaxIter}$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$ :

- Forward Integration  $x'(t) = x(t) + u(t) + 1$

$$x_{i+1}^k = x_i^k + h \cdot (x_i^{(k)} + u_i^{(k)} + 1) \quad x_0^{(k)} = 0$$

- Backward Integration  $p'(t) = -(1 + p(t))$

$$p_i^k = p_{i+1}^k + h \cdot (1 + p_{i+1}^k) \quad p_N^{(k)} = \partial_x \Phi(x(1)) = 0$$

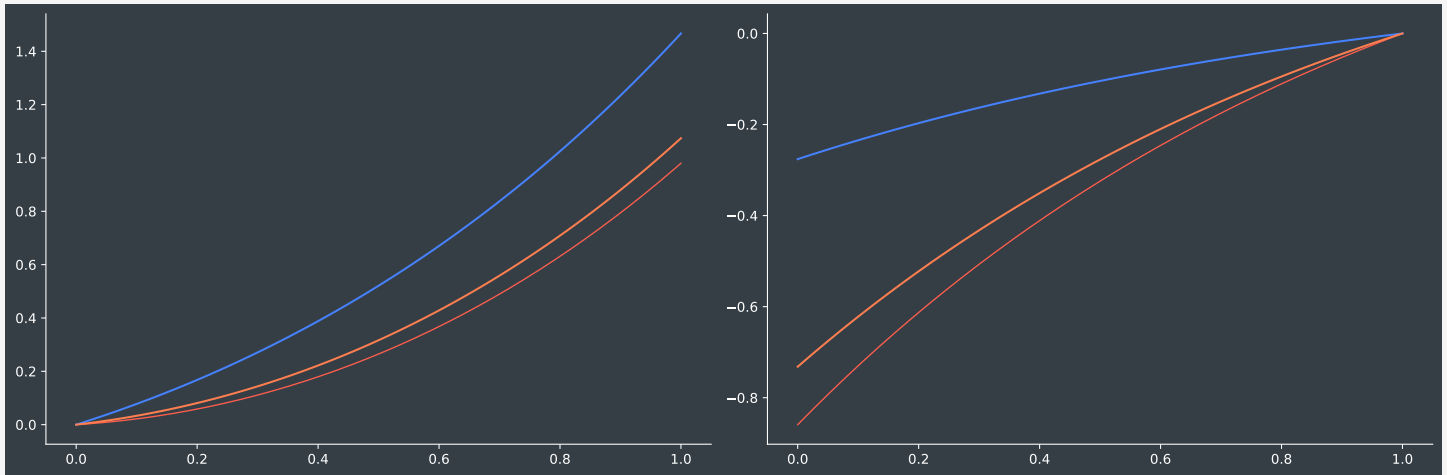
- Berechnung des Gradienten  $\nabla J = H_u = 2u + p$

$$d^{(k)} = -(2 \cdot u^{(k)} + p^{(k)})$$

- Berechnung der Schrittweite  $\alpha^{(k)}$ :

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot d^{(k)}$$

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \epsilon \Rightarrow u^{\text{final}} = u^{(k+1)}, \text{ sonst } k \rightarrow k + 1$$



Zustand  $x$  und Steuerung  $u$  mit den Iterationen 100, 500 und der analytischen Lösung

## 3.2 Shooting Methods

Das Ziel ist es, den Anfangswert  $p(t_0)$  so anzupassen, dass die Endbedingung  $p(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$  erfüllt wird. Dieses Verfahren wird mithilfe des Schießverfahrens gelöst. Wir definieren eine Residuenfunktion  $R(p(t_0))$ , die die Abweichung zwischen dem berechneten Endwert  $p(t_f; p(t_0))$  und dem gewünschten Endwert  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f))$  darstellt:

$$R(p(t_0)) = p(t_f; p(t_0)) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f; p(t_0))) \quad (1)$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung von  $R(p(t_0)) = 0$  liefert den Update-Schritt:

$$p^{(k+1)}(t_0) = p^{(k)}(t_0) - \frac{R(p^{(k)}(t_0))}{R'(p^{(k)}(t_0))} \quad (2)$$

Die Jacobi-Matrix  $R'(p(t_0))$  ergibt sich durch Ableiten der Residuenfunktion:

$$R'(p(t_0)) = \frac{\partial R}{\partial p(t_0)} = S_p(t_f) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} S_x(t_f), \quad (3)$$

wobei  $S_x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial p(t_0)}$  und  $S_p(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial p(t_0)}$  die Sensitivitäten sind.

Wir leiten die Zustandsgleichung und die adjungierte Gleichung nach  $p(t_0)$  ab, um die Sensitivitäten  $S_x(t)$  und  $S_p(t)$  zu berechnen.

- Durch Ableiten der Zustandsgleichung nach  $p(t_0)$  erhalten wir die Gleichung für  $S_x(t)$ :

$$\frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{\partial f}{\partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} S_u(t), \quad (4)$$

mit der Anfangsbedingung  $S_x(t_0) = 0$ .

- Durch Ableiten der adjungierten Gleichung nach  $p(t_0)$  erhalten wir die Gleichung für  $S_p(t)$ :

$$\frac{d}{dt} S_p(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} S_x(t) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} S_u(t), \quad (5)$$

mit der Anfangsbedingung  $S_p(t_0) = I$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix ist.

- Falls die Steuerung  $u$  implizit von  $p(t_0)$  abhängt, bestimmen wir  $S_u(t) = \frac{\partial u}{\partial p(t_0)}$  aus der Optimalitätsbedingung  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} S_u(t) + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial p} S_p(t) = 0 \quad (6)$$

Diese Gleichung kann nach  $S_u(t)$  aufgelöst werden, sofern  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$  invertierbar ist:

$$S_u(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} S_x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}^\top S_p(t)\right) \quad (7)$$

**Beispiel 3.2** Betrachten wir das folgende konkrete Beispiel:

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2}(x(1) - 1)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 (u(t)^2 + x(t)^3) dt \\ & \text{s.t. } x'(t) = u(t) - 15 \exp(-2t), \quad x(0) = 4 \end{aligned}$$

Der adjungierte Zustand ist gegeben durch

$$p'(t) = -\frac{3}{2}x(t)^2 \quad p(1) = 5(x(1) - 1)$$

- Resultierende Sensitivitätsgleichungen für  $S_x$  und  $S_p$

In diesem Beispiel ergibt sich die Steuerung  $u(t) = -p(t)$  aus der Optimalitätsbedingung. Durch Einsetzen in die Zustandsgleichung erhalten wir das gekoppelte System:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -p(t) - 15 \exp(-2t), \quad x(0) = 4 \\ \dot{p}(t) &= -\frac{3}{2}x(t)^2, \quad p(1) = 5(x(1) - 1) \end{aligned}$$

Die Sensitivitätsgleichungen für  $S_x(t)$  und  $S_p(t)$  lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_x(t) &= -S_p(t), \quad S_x(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}S_p(t) &= -3x(t)S_x(t), \quad S_p(0) = 1 \end{aligned}$$

- Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu:

$$R'(p(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1) \quad (8)$$

Das Newton-Verfahren zur Anpassung von  $p(0)$  sieht folgendermaßen aus:

1. **Initialisierung:** Wählen Sie eine Startschätzung  $p^{(0)}(0)$ .

2. **Iterative Berechnung:**

a) **Vorwärtsintegration der Zustandsgleichungen:** Integrieren Sie die Gleichungen für  $x(t)$  und  $p(t)$  mit  $p^{(k)}(0)$  von  $t = 0$  bis  $t = 1$ .

b) **Berechnung des Residuals:** Berechnen Sie das Residuum

$$R(p^{(k)}(0)) = p(1; p^{(k)}(0)) - 5(x(1; p^{(k)}(0)) - 1)$$

c) **Integration der Sensitivitätsgleichungen:** Integrieren Sie die Sensitivitätsgleichungen für  $S_x(t)$  und  $S_p(t)$  von  $t = 0$  bis  $t = 1$ , um  $S_x(1)$  und  $S_p(1)$  zu berechnen.

d) **Berechnung der Ableitung  $R'(p^{(k)}(0))$ :**

$$R'(p^{(k)}(0)) = S_p(1) - 5 \cdot S_x(1)$$

e) **Aktualisierung mittels Newton-Schritt:**

$$p^{(k+1)}(0) = p^{(k)}(0) - \frac{R(p^{(k)}(0))}{R'(p^{(k)}(0))}$$

f) **Konvergenzkriterium:** Falls  $|R(p^{(k+1)}(0))| < \epsilon$  (Toleranz), beenden Sie die Iteration. Falls nicht, setzen Sie  $k = k + 1$  und wiederholen ab Schritt (a).

### 3.3 Riccati Regler

Es gilt

$$F(K) := Q - KPK + KA + A^T K \Rightarrow F(K) = 0$$

**Definition 3.3** Sei  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dann definieren wir

$$\text{vec}(X) = (X_{11} \ X_{21} \ \cdots \ X_{n1} \ X_{12} \ X_{22} \ \cdots \ X_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times r}$ , dann definieren wir

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ A_{12}B & \cdots & A_{2m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & \cdots & A_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nr}$$

Es gilt die Formel

$$\text{vec}(MXN) = (N^T \otimes M)\text{vec}(X)$$

Betrachten wir den Fall  $M = 1$  und  $N = A$  bzw.  $N = 1$  und  $M = A^T$  erhalten wir mit  $X = K$

$$\text{vec}(KA) = (A^T \otimes 1)\text{vec}(K) \quad \text{vec}(A^T K) = (1 \otimes A^T)\text{vec}(K)$$

Anwendung auf unser Problem liefert

$$\underbrace{\text{vec}(F(K))}_{f(x=\text{vec}(K))} = \underbrace{\text{vec}(Q)}_q - \underbrace{\text{vec}(KPK)}_{g(x=\text{vec}(K))} + \underbrace{\text{vec}(KA)}_{(A^T \otimes 1)\text{vec}(K)} + \underbrace{\text{vec}(A^T K)}_{(1 \otimes A^T)\text{vec}(K)}$$

Durch Einführung von  $x = \text{vec}(K) \in \mathbb{R}^{n^2}$  erhalten wir

$$f(x) = q - g(x) + (A^T \otimes 1)x + (1 \otimes A^T)x$$

Da  $(KP)^T = KP$  gilt

$$g(\text{vec}(K)) = \text{vec}(KPK) = (1 \otimes KP)\text{vec}(K)$$

Wir betrachten die Variation  $K(\epsilon) = K + \epsilon \cdot \bar{K}$  und die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  mit

$$\begin{aligned} h(\epsilon) &:= g(\text{vec}(K(\epsilon))) = \text{vec}(K(\epsilon)PK(\epsilon)) \\ &= \text{vec}((K + \epsilon \cdot \bar{K})P(K + \epsilon \cdot \bar{K})) \\ &= \text{vec}(KPK + \epsilon KP\bar{K} + \epsilon \bar{K}PK + \epsilon^2 \bar{K}P\bar{K}) \end{aligned}$$

Ableitung nach  $\epsilon$  und Auswertung in  $\epsilon = 0$  ergibt

$$h'(0) = \left. \frac{d}{d\epsilon} g(\text{vec}(K + \epsilon \bar{K})) \right|_{\epsilon=0} = \text{vec}(KP\bar{K} + \bar{K}PK) = \text{vec}(KP\bar{K}) + \text{vec}(\bar{K}PK)$$

Umschreiben als Matrix-Vektor-Produkt

$$\text{vec}(KP \cdot \bar{K} \cdot 1) = (1 \otimes KP) \text{vec}(\bar{K}) \quad \text{vec}(1 \cdot \bar{K} \cdot PK) = ((PK)^T \otimes 1) \text{vec}(\bar{K})$$

Wir erhalten als Ableitung

$$g'(x) = (1 \otimes KP) + ((PK)^T \otimes 1) \Rightarrow f'(x) = -(1 \otimes KP) - ((PK)^T \otimes 1) + (A^T \otimes 1) + (1 \otimes A^T)$$

### 3.3.1 Implementierung

```
def vec(X):
    return X.reshape(-1, order='F')

def unvec(v, n):
    return v.reshape((n, n), order='F')
```

Hier normaler text

```
# Newton Kleinman Verfahren
def solv_CARE(A,B,R,Q,tol=1e-8,max_iter=50):
    n = A.shape[0]
    I = np.eye(n)
    q = vec(Q)
    L = np.kron(I, A.T) + np.kron(A.T, I)
    P = B @ np.linalg.solve(R, B.T)
    # Startwert KO hier Einheitsmatrix
    K = I
    x = vec(K)

    for i in range(max_iter):
        X = K @ P #KP
        vec_KPK = np.kron(I,X) @ x
        f = q - vec_KPK + L @ x
        Dg = np.kron(I,X)+np.kron(X,I)
        Df = L - Dg
        dx = np.linalg.solve(Df, -f)
        x_new = x + dx
        # Abbruch
        if np.linalg.norm(dx) / np.linalg.norm(x_new) < tol:
            x=x_new
            break

        x = x_new
        K = unvec(x, n)
    return K
```

Erklärung des Codes

Stabilität der Startlösung hier Gerschgorin kreise und Stabilität erklären

Für  $Y$  mit  $RY = B^T \Rightarrow Y = B^{-1}B^T$  und  $B \cdot Y = P$

## 4 Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

Wir betrachten ein Steuerungsproblem und definieren die Value-Function  $V$  mittels

$$V(x(t), t) := \min_u \left\{ \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s)) ds + \Phi(x(t_f)) \right\}$$

**Satz 4.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung)** Die Value-Function erfüllt

$$0 = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \min_u \left[ L(t, x, u) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \cdot f(t, x, u) \right], \quad x \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq t_f$$

mit den Randbedingungen

$$V(x, t_f) = \Phi(x(t_f)) \quad V(x, t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(x(t_f))$$

### Beweis:

Die Value-Function  $V(x, t)$  beschreibt die minimalen Kosten von Zustand  $x$  zum Endzeitpunkt  $t_f$ . Für  $s \in [t, t_f]$  gilt

- Systemdynamik

$$x'(s) = f(x(s), u(s)), \quad x(t) = x$$

- Kostenfunktional

$$J(u) = \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s)) ds + \Phi(x(t_f))$$

Angenommen, wir wechseln zum Zeitpunkt  $t + h$  zu einer optimalen Steuerung, dann gilt für unser Ziel-funktional

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) ds + \int_{t+h}^{t_f} L(s, x(s), u(s)) ds + \Phi(x(t_f)) \\ &= \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) ds + V(x(t+h), t+h) \end{aligned}$$

Da  $V(x(t), t)$  die minimalen Kosten vom Zustand  $x$  zur Zeit  $t$  angibt, gilt:

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) ds + V(x(t+h), t+h) \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) ds + V(x(t+h), t+h) - V(x(t), t) \end{aligned}$$

Im Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) ds + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x(t+h), t+h) - V(x, t)}{h} \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{d}{dt} V(x(t), t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x'(t) \\ &= L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Durch Minimierung bezüglich  $u$  erhalten wir die Gleichheit und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[ L(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x(t), u(t)) \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + H \left( t, x(t), \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \right) \end{aligned}$$

□

## 4.1 Herleitung des Minimumprinzips

Berechnung der totalen Ableitung der Value-Function  $V$  entlang der Charakteristik  $x(t)$ :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = p(x, t) \cdot x'(t) - H \left( t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Berechnung der totalen Ableitung von  $p = \frac{\partial V}{\partial x}$ :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial x \partial t}$$

Differenzieren der HJB bezüglich  $x$  liefert

$$0 = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + H \left( t, x, \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Einsetzen der Gleichung liefert:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot x'(t) + \left( -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left( x'(t) - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Wir erhalten somit die bekannten, notwendigen Optimalitätsbedingungen:

$$p'(t) = -H_x, \quad x'(t) = f(t, x, u^*), \quad u^* = \operatorname{argmin} [L(t, x, u) + p(t, x)f(t, x, u)]$$

## 4.2 Anwendung auf Linear-Quadratische Probleme

### 4.2.1 Finite time problem

Gegeben sei das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x + u^T R u \, dt + \underbrace{(x(t_f) - x_f)^T S (x(t_f) - x_f)}_{x(t_f)^T S x(t_f) - 2x_f^T S x(t_f) + x_f^T S x_f} = V(t_0, x(t_0)) + x_f^T S x_f$$

unter der Nebenbedingung  $x'(t) = Ax + Bu$  und  $x(t_0) = x_0$ . Der Term  $x_f^T S x_f$  ist unabhängig von  $u$  und kann bei der Minimierung weggelassen werden.

$$V(x, t) = x^T K(t)x + 2s(t)^T x + r(t) \quad V(x, t_f) = x(t_f)^T K(t_f)x(t_f) + 2s(t_f)^T x(t_f) + r(t_f)$$

Wir erhalten für die Endwerte

$$K(t_f) = S, \quad s(t_f) = -Sx_f \quad r(t_f) = 0$$



$$V_t = x^T K'(t)x + 2s'(t)^T x + r'(t) \quad V_x = 2K(t)x + 2s(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} [x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)] = 2Ru + B^T \cdot V_x \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T V_x$$

$$\begin{aligned} (u^*)^T Ru^* &= \left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^T V_x\right)^T R \left(-\frac{1}{2}R^{-1}B^T V_x\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (R^{-1}B^T V_x)^T R (R^{-1}B^T V_x) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2R^{-1}B^T (K(t)x + s(t)))^T R (2R^{-1}B^T (K(t)x + s(t))) \\ &= (K(t)x + s(t))^T BR^{-1}RR^{-1}B^T (K(t)x + s(t)) \\ &= \langle K(t)x + s(t), P(2K(t)x + s(t)) \rangle \\ &= \langle K(t)x, PK(t)x \rangle + \underbrace{\langle K(t)x, Ps(t) \rangle}_{\langle s(t), P^T K(t)x \rangle} + \langle s(t), PK(t)x \rangle + \langle s(t), Ps(t) \rangle \\ &= x^T K(t)^T PK(t)x + 2 \cdot s(t)^T PK(t)x + s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

mit  $P = BR^{-1}B^T$  und  $P^T = P$ .

$$\begin{aligned} V_x^T \left(-\frac{1}{2}BR^{-1}B^T V_x\right) &= (2K(t)x + 2s(t))^T \left(-\frac{1}{2}BR^{-1}B^T (2K(t)x + 2s(t))\right) \\ &= -2 \cdot (K(t)x + s(t))^T P(K(t)x + s(t)) \\ &= -2 \cdot x^T K(t)^T PK(t)x - 4 \cdot s(t)^T PK(t)x - 2 \cdot s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

$$V_x^T Ax = 2(K(t)x + s(t))^T Ax = 2x^T K(t)^T Ax + 2s(t)^T Ax = x^T (K(t)^T A + A^T K(t))x + 2s(t)^T Ax$$

$$-V_t = \min_u [x^T Qx + u^T Ru + V_x^T \cdot (Ax + Bu)]$$

$$\begin{aligned} -V_t &= x^T Qx + (u^*)^T Ru^* + V_x^T \cdot \left(Ax - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T V_x\right) \\ -x^T K'(t)x - 2s'(t)^T x - r'(t) &= x^T (Q - KPK + KA + A^T K)x - 2 \cdot ((PK - A)^T s(t))^T x - s(t)^T Ps(t) \end{aligned}$$

$$K'(t) = -Q + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - K(t)A - A^T K(t) \quad K(t_f) = S$$

$$s'(t) = (K(t)BR^{-1}B^T - A^T)s(t) \quad s(t_f) = -Sx_f$$

$$r'(t) = s(t)^T BR^{-1}B^T s(t) \quad r(t_f) = 0$$

### 4.2.2 infinite time problem

Im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  betrachten wir das Steuerungsproblem

$$\min_u \int_{t_0}^{\infty} (x - x_f)^T Q (x - x_f) + u^T R u \, dt = V(x(t_0))$$

unter der Nebenbedingung  $x'(t) = Ax + Bu$  und  $x(t_0) = x_0$ . Als Ansatz für die Value Funktion wählen wir erneut

$$V(x) = x^T K x + 2s^T x + r \Rightarrow V_x = 2Kx + 2s$$

Es gilt erneut

$$\frac{\partial}{\partial u} ((x - x_f)^T Q (x - x_f) + u^T R u + V_x^T (Ax + Bu)) = 2Ru + B^T V_x = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T V_x$$

$$(x - x_f)^T Q (x - x_f) = x^T Q x - 2x_f^T Q x + x_f^T Q x_f$$

$$0 = x^T (Q - K P K + K A + A^T K) x - 2((PK - A)^T s + Q x_f)^T x - s^T (P) s + x_f^T Q x_f$$

## 5 Paper Lin

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Wir wählen den Zustand  $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$  und die Nominalterme

$$M_0(q), \quad C_0(q, \dot{q}), \quad G_0(q)$$

Auflösen nach  $\ddot{q}$

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \cdot [\tau - \underbrace{C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)}_{N(q, \dot{q})}]$$

Wir setzen nun

$$u := M_0^{-1}(q) \cdot [\tau - N_0(q, \dot{q})] \Rightarrow \tau = M_0(q)u + N_0(q, \dot{q})$$

Setze  $\tau = M_0 u + N_0$  in die echte Dynamik ein:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1} \cdot [M_0 u + N_0 - N] \\ &= M^{-1} M_0 u + M^{-1} (N_0 - N) \\ &= u + \underbrace{(M^{-1} M_0 - I) u}_{h(x)} + \underbrace{M^{-1} (N_0 - N)}_{f(x)} \end{aligned}$$

Für den Zustandsraum  $x$  erhalten wir folgendes System:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ u + h(x)u + f(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_B u + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x)u + f(x) \end{pmatrix}$$

Unter vernachlässigung  $\ddot{q} = u$  erhalten wir das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

**Satz 5.1** Die Lösung des optimalen Steuerungsproblem:

$$\min_u \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_B u$$

ist gegeben durch

$$u^* = -R^{-1} B^T K x \quad \text{mit} \quad Q - K P K + K A + A^T K = 0$$

und für die Momente gilt

$$\tau^* = M_0(q) u^* + N_0(q, \dot{q}) = -M_0(q) R^{-1} B^T K x + N_0(q, \dot{q})$$

Ursprungsproblem:

$$\min_u \int_0^\infty q^T Q q + \tau^T R \tau$$

exts.t.  $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau;$

LQR:

$$\min_u \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}}_B u$$

Lösung der CARE für  $n = 2$

$$Q - K \underbrace{B R^{-1} B^T}_P K + K A + A^T K = 0$$

Closed-Loop Regelung:

$$u^* = -R^{-1} B^T K x$$

Lösung Originalsystem

$$\tau^* = M_0(q) u^* + N_0(q, \dot{q})$$

$$M_0 = M(q = 0)$$

$$N_0 = N(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q})\dot{q} + G_0(q)$$

**Beweis:** Für die Value Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \underbrace{\nabla V(x)}_{2Kx(t)} \cdot \underbrace{x'(t)}_{Ax(t)+Bu(t)} \\ &= 2x(t)^T K \left[ Ax(t) + B \underbrace{-R^{-1} B^T K x(t)}_{u(t)} \right] \\ &= x(t)^T \left[ \underbrace{KA + A^T K - 2KBR^{-1}B^T K}_{-Q - KBR^{-1}B^T K} \right] x(t) \\ &= -x(t)^T Q x(t) - \underbrace{x(t)^T K B}_{x(t)^T K B R^{-1} R} \underbrace{R^{-1} B^T K x(t)}_{-u^*(t)} \\ &= -x(t)^T Q x(t) - \underbrace{x(t)^T K B R^{-1} R}_{u^*(t)^T R} u^*(t) \\ &= -x(t)^T Q x(t) - u^*(t)^T R u^*(t) \end{aligned}$$

Wir erhalten somit  $\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$  mit Gleichheit genau dann wenn  $x(t) = u^*(t) = 0$ . Damit ist die Value Funktion  $V(x(t))$  streng monoton fallend und somit ist das optimale Steuerungssignal  $u^*(t)$  stabil.

Verwenden wir die Value Funktion auf die reale Dynamik, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \nabla V(x) \cdot x'(t) \\
&= 2x(t)^T K \left[ Ax(t) + Bu^*(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x(t))u^*(t) + f(x(t)) \end{pmatrix} \right] \\
&= 2x(t)^T K [Ax(t) + Bu^*(t) + Bh(x(t))u^*(t) + Bf(x(t))] \\
&= \underbrace{2x(t)^T K(Ax + Bu^*)}_{(1)} + \underbrace{2x(t)^T KB(h(x)u^* + f(x))}_{(2)}
\end{aligned}$$

wobei wir  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}$  verwendet haben. Aus  $u^* = -R^{-1}B^TKx(t)$  folgt  $B^TKx(t) = -Ru^*$  und wir erhalten für (2)

$$\begin{aligned}
2x(t)^TKB(h(x)u^* + f(x)) &= 2 \left[ \underbrace{B^TKx(t)}_{-Ru^*} \right]^T (h(x)u^* + f(x)) \\
&= -2(u^*)^TR(h(x)u^* + f(x)) \\
&= -2(u^*)^TRh(x)u^* - 2(u^*)^TRf(x)
\end{aligned}$$

Für  $h$  positiv definit gilt:

$$-(u^*)^TRh(x)u^* \leq 0$$

Für jedes  $\epsilon > 0$  gilt:

$$\begin{aligned}
-2(u^*)^TRf(x) &\leq 2\|u^*\|\|R\|\|f(x)\| \\
&\leq \epsilon\|u^*\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2 \\
&= \epsilon(u^*)^Tu^* + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2 \\
&\leq \epsilon(u^*)^TRu^* + \frac{1}{\epsilon}\|R\|^2\|f(x)\|^2
\end{aligned}$$

Wir wählen als Schranke  $f^TRf \leq x^TPx$

□