

**Matemática****MÉTODOS DE INTEGRACIÓN**

Nos ocupamos ahora del problema de calcular  $\int f(x)dx$  cuando no es factible encontrar, en forma más o menos inmediata, la función primitiva  $F(x)$ .

Para ello, desarrollaremos algunos métodos de integración que consisten en reducir la integral buscada a una integral más sencilla.

**Método de sustitución**

En ciertos casos es posible efectuar una *sustitución* de la variable de integración por una función de otra variable.

Comenzamos planteando algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.**

Calculamos  $\int (x^2 + 1)^2 2x dx$

**Solución**

Observamos que la derivada de  $x^2 + 1$  es  $2x$ . luego si hacemos:

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ se obtiene } g'(x) = 2x$$

Por lo que

$$(x^2 + 1)^2 2x = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Analicemos  $f(g(x)) = (x^2 + 1)^2$  ya que  $g'(x) = 2x$

Vemos que la función  $f$  toma las imágenes de  $g$  y las eleva al cuadrado.

Luego  $f(x) = x^2$  y como  $F(x) = \frac{1}{3} x^3$  es una primitiva de  $f$  resulta:

$$\int (x^2 + 1)^2 2x dx = F(g(x)) + C = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^3 + C$$
$$\int \underbrace{f(g(x))}_{(x^2 + 1)^2} \underbrace{g'(x)}_{2x} dx = \underbrace{F(g(x))}_{\frac{1}{3} (x^2 + 1)^3} + C$$

**Ejemplo 2**

Calculamos ahora  $\int 5 \cos 5x dx$

**Solución**

Como es  $(5x)' = 5$ , podemos hacer:  $g(x) = 5x$  y  $g'(x) = 5dx$

Por lo que  $5 \cos 5x = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Como 5 es la derivada de  $g$ ;  $f(g(x)) = \cos 5x$ .

¿Y cuál es la función  $f$ ? No es más que  $f(x) = \cos x$

Por lo que una primitiva de  $f$  es  $F(x) = \sin x$

## Matemática

Luego

$$\int 5 \cos 5x \, dx = F(g(x)) + C = \text{sen} 5x + C$$

$$\int \underbrace{5}_{g'(x)} \underbrace{\cos 5x}_{f(g(x))} \, dx = \underbrace{\text{sen} 5x}_{F(g(x))} + C$$

En general, una forma más sencilla de resolver integrales en donde el integrando es una función compuesta, consiste en efectuar una *sustitución* de la variable de integración por una función de otra variable.

Veamos cómo hacerlo, retomando el ejemplo anterior.

### Ejemplo 3.

Calcular  $\int 5 \cos 5x \, dx$

#### Solución.

Si hacemos  $5x = u$ , podemos expresar  $\cos 5x$  como  $\cos u$ .

Y además sabemos que  $\int \cos u \, du = \text{senu} + C$

Con lo que para calcular la integral pedida podemos sustituir  $5x$  por  $u$ .

Pero como la nueva variable es  $u$ , en la integral resultante debe figurar  $du$  y no  $dx$ .

Asumiendo que, si  $u = g(x)$ , entonces es  $du = g'(x) \, dx$ , es;

$$du = (5x)' \, dx = 5 \, dx$$

Luego, sustituyendo resulta:

$$\int 5 \cos 5x \, dx = \int \cos u \, du = \text{senu} + C$$

Pero, debemos expresar el resultado en función de  $x$ .

Como  $u = 5x$ , reemplazando,

$$\int 5 \cos 5x \, dx = \text{sen} 5x + C$$

### Ejemplo 4

Calcular

$$\text{a) } \int e^{4x} \, dx \qquad \text{b) } \int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

#### Solución

Como la integral  $\int e^u \, du = e^u + C$  podemos hacer  $u = e^{4x}$

Con lo que:  $u = e^{4x} \Rightarrow du = 4e^{4x} \, dx \Rightarrow \frac{du}{4} = e^{4x} \, dx$

Sustituyendo en la integral dada, resulta:

$$\int e^{4x} \, dx = \int \frac{1}{4} \, du = \frac{1}{4} \int du = \frac{1}{4} u + C$$

Y reemplazando  $u = e^{4x}$

$$\int e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

## Matemática

b)  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

Empecemos por escribir la integral de la siguiente manera

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$$

De este modo es fácil advertir la presencia de la función  $\ln x$  y su derivada  $\frac{1}{x}$ .

Lo cual nos sugiere hacer el cambio de variable:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

Luego es:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C$$

Y volviendo a sustituir, es;

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$$

**Observación:** Podemos generalizar los resultados hallados en este ejemplo y utilizarlos en la resolución de integrales.

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + k \qquad \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C$$

(Recordar que  $(\ln x)^n = \ln^n x$ )

Veamos otro ejemplo:

### Ejemplo 5

Calcular  $\int x^2 e^{x^3} dx$

### Solución

Si elegimos  $z = x^3$ , tenemos que  $dz = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{dz}{3} = x^2 dx$ .

A partir de lo cual es posible sustituir en la integral dada y resulta que:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^z \cdot \frac{dz}{3},$$

es decir:  $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^z dz.$

Por lo tanto:  $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^z + C.$

Ahora solo queda volver a la variable original.

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

## Matemática

**Generalicemos este procedimiento.**

Sea  $x = g(t)$ , con  $g$  una función derivable. Luego su diferencial es:  $dx = g'(t) dt$ .

Al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int f(x).dx = \int f(g(t)).g'(t).dt$$

**Observación:** es importante recordar que una vez resuelta la integral en función de la nueva variable (" $t$ " o cualquier otra), es necesario volver a sustituir dicha variable en la primitiva para que esta quede expresada en función de la variable original.

Para aplicar el método de sustitución en integrales de la forma  $\int f(g(x)).g'(x).dx$ , es conveniente seguir los siguientes pasos.

1. Elegir una sustitución  $u = g(x)$ .
2. Hallar  $du = g'(x) dx$
3. Reescribir la integral dada en términos de  $u$ .
4. Hallar la integral resultante en  $u$ .
5. Sustituir  $u$  por  $g(x)$  para obtener la primitiva en términos de  $x$
6. Verificar la respuesta por derivación

### Ejemplo 6

Resolver mediante una conveniente sustitución las siguientes integrales indefinidas.

$$\text{a) } \int \operatorname{sen} t \cos^{-3} t \, dt \quad \text{b) } \int \frac{4z}{\sqrt[5]{z^2 + 2}} \, dz \quad \text{c) } \int \frac{e^{3t}}{(e^{3t} + 2)^4} \, dt$$

### Solución:

En la resolución de este ejemplo, seguiremos los pasos enunciados. Les dejamos la tarea de verificar la respuesta por derivación.

En cada caso, usamos distintas variables de integración y de sustitución.

$$\text{a) } \int \operatorname{sen} t \cos^{-3} t \, dt$$

Elegimos  $z = \cos t$  por lo que  $dz = -\operatorname{sen} t \, dt$

Al sustituir resulta.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} t \cdot \cos^{-3} t \, dt &= \int z^{-3}(-dz) \\ &= - \int z^{-3} \, dz \end{aligned}$$

Y usando las reglas de integración,

$$= - \frac{z^{-2}}{-2} + k = \frac{z^{-2}}{2} + k$$

Por lo que encontramos la integral en función de  $z$ . Debemos volver a sustituir  $z$  por  $\cos t$ :

$$\int \operatorname{sen} t \cos^{-3} t \, dt = \frac{1}{2}(\cos t)^{-2} + k = \frac{1}{2 \cos^2 t} + k$$

## Matemática

$$b) \int \frac{4z}{\sqrt[5]{z^2 + 2}} dz$$

Hacemos la sustitución  $y = z^2 + 2$ , por lo que es  $dy = 2z dz \Rightarrow \frac{dy}{2} = z dz$

Y sustituimos en la integral original

$$\int \frac{4z}{\sqrt[5]{z^2 + 2}} dz = 4 \int \frac{1}{\sqrt[5]{y}} \frac{dy}{2}$$

Como es  $\frac{1}{\sqrt[5]{y}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{5}}} = y^{-\frac{1}{5}}$  reemplazamos para poder aplicar las reglas de integración inmediatas.

$$\begin{aligned} \int \frac{4z}{\sqrt[5]{z^2 + 2}} dz &= 4 \int \frac{1}{\sqrt[5]{y}} \frac{dy}{2} = 4 \int y^{-\frac{1}{5}} \frac{dy}{2} \\ &= \frac{4}{2} \frac{1}{-\frac{1}{5} + 1} y^{-\frac{1}{5} + 1} + C = 2 \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} y^{\frac{4}{5}} + C \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} y^{\frac{4}{5}} + C = \frac{5}{2} y^{\frac{4}{5}} + C \end{aligned}$$

Volvemos ahora a hacer la sustitución  $y = z^2 + 2$ .

$$\int \frac{4z}{\sqrt[5]{z^2 + 2}} dz = \frac{5}{2} (z^2 + 2)^{\frac{4}{5}} + C = \frac{5}{2} \sqrt[5]{(z^2 + 2)^4} + C$$

$$c) \int \frac{e^{3t}}{(e^{3t} + 2)^{-4}} dt$$

Si elegimos  $z = e^{3t} + 2$  entonces es:  $dz = 3e^{3t} dt \Rightarrow \frac{dz}{3} = e^{3t} dt$

Reemplazando resulta:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3t} dt}{(e^{3t} + 2)^{-4}} &= \int \frac{1}{z^{-4}} \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \int z^4 dz \\ &= \frac{1}{3} \frac{z^5}{5} + C = \frac{z^5}{15} + C \end{aligned}$$

Ahora, hacemos nuevamente el cambio de variables y llegamos al resultado.

$$\int \frac{e^{3t} dt}{(e^{3t} + 2)^{-4}} = \frac{1}{15} (e^{3t} + 2)^5 + C$$

## Matemática

Podemos usar el método de sustitución para hallar la integral de funciones conocidas.

### Ejemplo 7.

Calcular:

$$a) \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$b) \int \operatorname{sen} 2t \, dt$$

### Solución

$$a) \int \operatorname{tg} x \, dx$$

Como  $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ , hacemos

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$$

$$\text{Y si } z = \cos x \Rightarrow dz = -\operatorname{sen} x \, dx$$

Sustituyendo:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{1}{z} \, dz = -\ln z + C$$

Volviendo a nuestra variable original:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$b) \int \operatorname{sen} 2t \, dt$$

Hacemos la sustitución  $u = 2t$ , por lo que es  $du = 2dt$  y  $\frac{du}{2} = dt$

Sustituyendo::

$$\int \operatorname{sen} 2t \, dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C$$

Y cambiando nuevamente la variable:

$$\int \operatorname{sen} 2t \, dt = \frac{-\cos 2t}{2} + C$$

## Matemática

### Metodo de Integración por partes

Este método se utiliza a menudo cuando el integrando está compuesto por el producto de dos funciones, aunque esta condición no es necesaria ni suficiente.

Consideremos la función producto  $w$ , donde  $w(x) = u(x) \cdot v(x)$

Entonces:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

Habitualmente se utiliza una expresión equivalente a esta que resulta de hacer los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} u(x) &= u & v(x) &= v \\ u'(x) dx &= du & v'(x) dx &= dv \end{aligned}$$

Por lo que la expresión anterior también suele escribirse:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Apliquemos el método a un ejemplo:

#### Ejemplo 8

$$\text{Calcular } \int x \cdot e^{2x} dx$$

#### Solución

Observemos primero que para resolver esta integral no podemos hacerlo inmediatamente usando la tabla de integrales, y tampoco podemos usar el método de sustitución.

Vamos a resolverla utilizando el método de partes.

El problema está en decidir cuál es la función que consideramos  $u(x)$  (la función que queremos derivar) y cuál la que consideramos  $v'(x)$  (la función que queremos integrar).

Vemos que si derivamos o integramos  $e^{2x}$  no modificamos, salvo en una constante, la integral que nos dan (¿por qué?).

Pero no sucede lo mismo con  $x$  ya que si la derivamos, es  $(x)' = 1$  y si la integramos, una primitiva es  $\frac{1}{2} x^2$ .

Parece entonces que podemos simplificar el cálculo haciendo:

$$u = x \quad dv = e^{2x} dx$$

Por lo que es:

$$du = 1 \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

Entonces, reemplazando en  $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ , nos queda

$$\int x e^{2x} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx$$

Y en consecuencia:

$$\int x e^{2x} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$$

## Matemática

### Ejemplo 9

Hallar  $\int x^2 \ln x \, dx$

#### Solución

En este caso no tenemos muchas dudas, ya que si bien sabemos derivar la función  $\ln x$  no sabemos integrarla.

Nos convendrá entonces, hacer:

- $u = \ln x$  con lo que  $du = \frac{1}{x} dx$
- $dv = x^2 dx$  con lo que  $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

Luego; es;

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \ln x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \ln x \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \ln x \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

Resulta:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9} x^3 + C$$

¿Y cuál es la  $\int \ln x \, dx$ ? Veamos cómo calcularla.

### Ejemplo 10

Calcular  $\int \ln x \, dx$

#### Solución.

Como hicimos antes, y ya que nos dio resultado, hagamos:

- $u = \ln x$  con lo que  $du = \frac{1}{x} dx$
- Y llamemos  $dv = dx$  con lo que  $v = \int dx = x$

Con lo que es;

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

Resulta entonces;

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$



## Matemática

En la práctica el proceso de elegir una expresión para  $u$  y otra para  $dv$  no es siempre sencilla y no existe una técnica general para efectuar dicho proceso. Sin embargo, existe una regla que establece una especie de prioridad entre las distintas clases de funciones.

La regla es conocida comúnmente con el nombre de ILPET (iniciales de Inversa Trigonométrica, Logarítmica, Potencial, Exponencial, Trigonométrica)<sup>1</sup>.

Se aplica de la siguiente forma:

Si en el integrando aparece

- una función exponencial y otra logarítmica, se asigna  $u$  a la función logarítmica.
- una función trigonométrica y una potencial, se asigna  $u$  a la función potencial.
- En general, elegimos siempre  $u$  como la función situada más a la izquierda en ILPET.

De todos modos, si nos equivocáramos en la elección, al utilizar la regla nos encontraríamos (en el segundo miembro) con una integral mucho más difícil o imposible de resolver.

Ejemplificamos su uso:

### Ejemplo 11

Calcular las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

$$\text{a) } \int (5 - 3x)e^{-x} dx \quad \text{b) } \int (z + 1) \cos z \, dz \quad \text{c) } \int y \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \, dy$$

### Solución

Recordemos que queremos usar la regla ILPET. De acuerdo con ello, siempre tomaremos como  $u$  la función cuya inicial está más a la izquierda en la sigla.

$$\text{a) } \int (5 - 3x)e^{-x} dx$$

Vemos que tenemos en el integrando;

$$\int \underbrace{(5 - 3x)}_{\substack{\text{Función} \\ \text{Potencial}}} \underbrace{e^{-x}}_{\substack{\text{Función} \\ \text{Exponencial}}} dx$$

La función potencial está más a la izquierda en ILPET. Por lo que nos conviene hacer:

- $u = 5 - 3x$  con lo que  $du = -3$
- $dv = e^{-x} dx$  con lo que  $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

Luego es;

$$\int (5 - 3x)e^{-x} dx = (5 - 3x) - \int (-e^{-x})(-3) dx = (5 - 3x) - 3 \int e^{-x} dx$$

Por lo que;

$$\int (5 - 3x)e^{-x} dx = (5 - 3x) + 3e^{-x} + C$$

<sup>1</sup> Existen otras reglas nemotécnicas similares LIATE, ALPES, que pueden ayudar en la elección de  $u$  y  $dv$ .

## Matemática

b)  $\int (z + 1) \cos z \, dz$

$$\int \underbrace{(z + 1)}_{\substack{\text{Función} \\ \text{Potencial}}} \underbrace{\cos z}_{\substack{\text{Función} \\ \text{trigonométrica}}} \, dz$$

Nos conviene tomar:

- $u = z + 1$  por lo que es  $du = dz$
- $dv = \cos z \, dz$  por lo que es  $v = \int \cos z \, dz = \text{senz}$

De este modo es;

$$\int (z + 1) \cos z \, dz = (z + 1) \text{senz} - \int \text{senz} \, dz$$

$$\int (z + 1) \cos z \, dz = (z + 1) \text{senz} + \cos z + k$$

c)  $\int y \, \text{arc tg } y \, dy$

$$\int \underbrace{y}_{\substack{\text{Función} \\ \text{Potencial}}} \underbrace{\text{arc tg } y}_{\substack{\text{Función} \\ \text{inversa} \\ \text{trigonométrica}}} \, dy$$

Elegimos

- $u = \text{arc tg } y$  con lo que es;  $du = \frac{1}{1 + y^2} dy$
- $dv = y \, dy$  con lo que es  $v = \frac{1}{2} y^2$

Luego:

$$\int y \, \text{arc tg } y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \cdot \text{arc tg } y - \frac{1}{2} \int \frac{y^2}{1 + y^2} dy$$

Observemos que la  $\frac{1}{2} \int \frac{y^2}{1 + y^2} dy$  no tiene una integral inmediata.

Vamos a calcularla, haciendo una transformación algebraica.

Si escribimos el numerador sumando y restando 1, así:

$$y^2 = y^2 + 1 - 1 = (1 + y^2) - 1$$

Luego;

$$\frac{1}{2} \int \frac{y^2}{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{y^2 + 1 - 1}{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{(1 + y^2) - 1}{1 + y^2} dy$$

## Matemática

Y distribuyendo el denominador.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{(1+y^2)}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+y^2} \right) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int dy - \int \frac{1}{1+y^2} dy \right)
 \end{aligned}$$

De este modo las integrales que nos quedaron en el paréntesis son inmediatas:

Luego es:

$$\frac{1}{2} \int \frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \left( \int dy - \int \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \frac{1}{2} (y - \operatorname{arc\,tg} y)$$

Reemplazando en

$$\int y \operatorname{arc\,tg} y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} y - \frac{1}{2} \int \frac{y^2}{1+y^2} dy$$

Tenemos que:

$$\int y \operatorname{arc\,tg} y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} y - \frac{1}{2} (y - \operatorname{arc\,tg} y) + C$$

Algunas integrales requieren integrar por partes más de una vez.

En estos casos hay que tener cuidado en mantener las sustituciones en las sucesivas aplicaciones.

### Ejemplo 12

Calcular  $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

#### Solución

Para resolver hacemos la sustitución

- $u = x^2$ ,  $du = 2x \, dx$
- $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ ;  $v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= x^2 (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x \, dx \\
 &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx
 \end{aligned}$$

La integral que nos queda como sumando no es inmediata y debemos usar nuevamente el método de integración por partes.

## Matemática

Respetamos las sustituciones hechas con anterioridad (la función potencial sigue siendo  $u$  y la trigonométrica el  $dv$ )

- $u = x; du = dx$
- $dv = \cos x \, dx; v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$

Sustituyendo en

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left[ x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx \right] \\ &= -x^2 \cos x + 2 [x \operatorname{sen} x + \cos x] + C \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

Resulta entonces;

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

### Ejemplo 13

Calcular  $\int e^x \cos x \, dx$

#### Solución

Sea,

- $u = e^x; du = e^x \, dx$
- $dv = \cos x; v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$

Luego:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Volvemos a integrar por partes la integral que nos quedó en el segundo miembro.

- $u = e^x; du = e^x \, dx$
- $dv = \operatorname{sen} x; v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

Por lo que;

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \left[ e^x (-\cos x) - \int (-\cos x) e^x \, dx \right] \\ \int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int \cos x e^x \, dx \end{aligned}$$

Por lo que nuevamente, deberíamos integrar por partes.

Pero, en vez de seguir, observamos que

$$\int \underbrace{e^x \cos x \, dx}_{\text{Los integrandos son iguales (salvo el orden de los factores)}} = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int \underbrace{\cos x e^x \, dx}$$

## Matemática

Por lo que no nos conviene seguir integrando, ya que volveríamos a tener las mismas integrales, una y otra vez.

En vez de hacerlo, sumamos  $\int \cos x e^x dx = \int e^x \cos x dx$  a ambos miembros de la igualdad y obtenemos:

$$\int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

Operando:

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

Si dividimos miembro a miembro por 2, encontramos la integral que queríamos calcular.

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Otras integrales que se resuelven en forma similar son:

- $\int e^x \operatorname{sen} x dx$
- $\int e^x \operatorname{sen} 2x dx$
- $\int e^x \cos 2x dx$

A veces, al integrar por partes, necesitamos hacer una integración por sustitución.

### Ejemplo 14

Calcular  $\int x \operatorname{cosec}^2 x dx$

#### Solución

Elegimos:

- $u = x; du = dx$
- $dv = \operatorname{cosec}^2 x dx; v = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot g x$

Sustituyendo resulta:

$$\int x \operatorname{cosec}^2 x dx = -x \cot g x + \int \cot g x \cdot dx$$

$$\int x \operatorname{cosec}^2 x dx = -x \cot g x + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot dx \quad (1)$$

La integral que nos queda sumando no es una integral inmediata. Debemos resolverla por sustitución. Calculémosla.

## Matemática

- $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$

Hacemos la sustitución  $z = \operatorname{sen} x \Rightarrow dz = \cos x \, dx$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{1}{z} dz = \ln z + C$$

Volviendo a la variable x:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

Listo!!! Ahora reemplazamos en **(1)**

$$\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -x \cot x + \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

### Observación

Como pueden ver a través de los ejemplos que les hemos propuesto, integrar es un poco más difícil que derivar y requiere de bastante práctica. La ventaja que tiene, es que podemos verificar si los resultados a los que se llega son correctos, con solo derivarlo. Esta es una buena práctica, que les dejamos para hacer.