

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №1

по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил
студент гр. 5030102/20202: Тишковец Сергей

Проверил
Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Постановка задачи	3
2 Теория	4
2.1 Интервальные матрицы	4
2.2 Особенность матрицы	4
2.3 Концепция <i>collinear columns</i>	4
2.4 Метод миноров	4
2.5 Применение в задачах	5
3 Программная реализация	5
4 Результаты	5
4.1 Регрессия	5
4.2 Томография	5
5 Выводы	7
5.1 Обсуждение результатов	7
5.2 Метод коллинеарных столбцов vs Метод миноров	7

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ:

$$Ax = b, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T \quad (1)$$

с матрицей A с заданной серединой (mid) и радиусом (rad).

$$\text{mid } A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1.00 \\ 1.05 & 1.00 \\ 1.10 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Радиус может быть двух видов:

$$\text{rad } A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (3)$$

или

$$\text{rad } A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Задачи:

- Найти диапазоны значений δ , при которых $0 \in \det[A]$:

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta, 0.95 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \\ [1.05 - \delta, 1.05 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \\ [1.10 - \delta, 1.10 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \end{pmatrix} \quad (5)$$

или

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta, 0.95 + \delta] & 1.00 \\ [1.05 - \delta, 1.05 + \delta] & 1.00 \\ [1.10 - \delta, 1.10 + \delta] & 1.00 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- Для минимального значения радиуса $\min \delta$ найти точечную матрицу A' такую, что

$$\det A' = 0.$$

- Обсудить смысл факта $\det A' = 0$ для задач 2-ракурсной томографии и линейной регрессии.

2 Теория

2.1 Интервальные матрицы

Интервальная матрица $[A]$ — матрица, каждый элемент которой задан интервалом

$$[a_{ij}] = [\text{mid } a_{ij} - \text{rad } a_{ij}, \text{ mid } a_{ij} + \text{rad } a_{ij}].$$

где $\text{mid } a_{ij}$ — середина интервала, $\text{rad } a_{ij}$ — радиус интервала. Таким образом:

$$a_{ij} \in [\text{mid } a_{ij} - \text{rad } a_{ij}, \text{ mid } a_{ij} + \text{rad } a_{ij}]$$

Интервальные матрицы позволяют учитывать неопределенности в данных, например, погрешности измерений или варьирующиеся параметры системы.

2.2 Особенность матрицы

Матрица называется вырожденной (особенной), если её определитель равен нулю:

$$\det(A) = 0.$$

Для прямоугольной матрицы типа 3×2 особенность соответствует линейной зависимости столбцов:

$$\text{столбцы } c_1, c_2 \text{ коллинеарны} \iff \exists \lambda : c_1 = \lambda c_2 \quad (7)$$

2.3 Концепция *collinear columns*

Матрица A' считается вырожденной, если её две колонки линейно зависимы:

$$a_i \approx \lambda b_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где a_i и b_i — элементы первой и второй колонок соответственно. Для каждой строки можно определить интервал значений набора λ_i :

$$\lambda_i \in \left[\frac{a_{\min}^{(i)}}{b_{\max}^{(i)}}, \frac{a_{\max}^{(i)}}{b_{\min}^{(i)}} \right].$$

Пересечение этих интервалов по всем строкам даёт общий диапазон λ , в котором колонки могут быть коллинеарны.

2.4 Метод миноров

Матрица 3×2 имеет ранг меньше 2 (вырождена), если все её 2×2 -миноры содержат 0 в интервальной оценке. Для пары строк $i < j$ минор

$$M_{ij} = a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1}.$$

Интервальная оценка M_{ij} линейна по δ , и порог δ_{ij} — минимальное δ , при котором $0 \in M_{ij}$. Минимальное $\delta_{\min} = \max_{ij} \delta_{ij}$ обеспечивает, что все миноры одновременно содержат 0.

2.5 Применение в задачах

- **TOMO (2-ракурсная томография):** оба элемента строки варьируются $\pm\delta$: $[a_i - \delta, a_i + \delta]$, $[b_i - \delta, b_i + \delta]$.
- **REGRESS (линейная регрессия):** только первый элемент строки варьируется $[a_i - \delta, a_i + \delta]$, второй фиксирован b_i .

3 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на Python в VS Code. Использовалась библиотека `numpy`.

4 Результаты

4.1 Регрессия

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1 \\ 1.05 & 1 \\ 1.10 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rad}A = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \delta & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторая колонка фиксирована, 2×2 -миноры:

$$M_{ij} = a_{i1} - a_{j1}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Пересечение интервалов первой колонки даёт условие

$$\max_i(c_i - \delta) \leq \min_i(c_i + \delta) \implies 1.10 - \delta \leq 0.95 + \delta,$$

откуда

$$\boxed{\delta_{\text{регрессия}} = \frac{0.15}{2} = 0.075.}$$

Для минимального δ точечная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 1.024999 & 1.00 \\ 1.024999 & 1.00 \\ 1.024999 & 1.00 \end{pmatrix}, \quad \det A' = 0.$$

Обоснование. Матрица становится вырожденной, когда все строки линейно зависимы, то есть первая координата может принимать одно общее значение. Это эквивалентно непустому пересечению интервалов $[c_i - \delta, c_i + \delta]$, что и даёт приведённое условие.

4.2 Томография

Матрица с равными радиусами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1 \\ 1.05 & 1 \\ 1.10 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rad}A = \begin{pmatrix} \delta & \delta \\ \delta & \delta \\ \delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Обозначения:

$$c_1 = 0.95, \quad c_2 = 1.05, \quad c_3 = 1.10, \quad a_{i1} \in [c_i - \delta, c_i + \delta], \quad a_{i2} \in [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Для пары строк $i < j$ минор

$$M_{ij} = a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1}.$$

Интервальная оценка

$$M_{ij} \in [(c_i - c_j) - \delta(c_i + c_j + 2), (c_i - c_j) + \delta(c_i + c_j + 2)].$$

Отсюда порог для попадания 0 в интервал минора:

$$\delta_{ij} = \frac{c_j - c_i}{c_i + c_j + 2}.$$

Посчитаем для каждой пары:

Минор M_{12} :

$$c_1 - c_2 = -0.10, \quad c_1 + c_2 + 2 = 0.95 + 1.05 + 2 = 4.00,$$

$$M_{12} \in [-0.10 - 4.00\delta, -0.10 + 4.00\delta],$$

$$\delta_{12} = \frac{0.10}{4.00} = 0.025.$$

Минор M_{13} :

$$c_1 - c_3 = -0.15, \quad c_1 + c_3 + 2 = 0.95 + 1.10 + 2 = 4.05,$$

$$M_{13} \in [-0.15 - 4.05\delta, -0.15 + 4.05\delta],$$

$$\delta_{13} = \frac{0.15}{4.05} = \frac{1}{27} \approx 0.037037\dots$$

Минор M_{23} :

$$c_2 - c_3 = -0.05, \quad c_2 + c_3 + 2 = 1.05 + 1.10 + 2 = 4.15,$$

$$M_{23} \in [-0.05 - 4.15\delta, -0.05 + 4.15\delta],$$

$$\delta_{23} = \frac{0.05}{4.15} = \frac{5}{415} \approx 0.012048\dots$$

Так как

$$\delta_{23} \approx 0.01205, \quad \delta_{12} = 0.025, \quad \delta_{13} \approx 0.03704,$$

то наименьшее значение δ , при котором существует возможность сделать все три минора содержащими 0, равно наибольшему из порогов:

$$\boxed{\delta_{\min} = \delta_{13} = \frac{1}{27} \approx 0.037037.}$$

Для минимального δ получена точечная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 0.987036 & 0.962964 \\ 1.037962 & 1.012647 \\ 1.062962 & 1.037038 \end{pmatrix}, \quad \det A' = 0.$$

5 Выводы

5.1 Обсуждение результатов

Факт $\det A' = 0$ указывает на критический уровень неопределённости δ , при котором система становится вырожденной.

В задачах томографии это означает возможную нестабильность восстановления: система может иметь бесконечно много решений или быть несовместной.

В линейной регрессии вырожденность матрицы наблюдений делает неприменимым метод наименьших квадратов без регуляризации.

Таким образом, $\det A' = 0$ служит индикатором предельного уровня неопределённости, влияющего на корректность и устойчивость решения задачи.

5.2 Метод коллинеарных столбцов vs Метод миноров

Метод коллинеарных столбцов имеет ряд проблем:

- Требует строго положительных знаменателей, что не всегда выполняется при широких интервалах δ .
- Переоценивает границы интервалов λ_i из-за использования экстремальных значений, игнорируя зависимости между элементами строки.
- Сложно обобщается на матрицы с более чем двумя столбцами, в отличие от метода миноров.

Метод миноров предпочтительнее, поскольку

- Напрямую проверяет условие вырожденности (все миноры содержат 0).
- Не зависит от предположений о λ или знаках.
- Дает аналитическое решение δ .