Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №1

по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил
студент гр. 5030102/20202: Тишковец Сергей

Проверил
Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ:

$$Ax = b, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^T \tag{1}$$

с матрицей A с заданной серединой (mid) и радиусом (rad).

$$\operatorname{mid} A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1.00 \\ 1.05 & 1.00 \\ 1.10 & 1.00 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Радиус может быть двух видов:

$$\operatorname{rad} A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \tag{3}$$

или

$$\operatorname{rad} A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Задачи:

1. Найти диапазоны значений δ, при которых $0 \in \det[A]$:

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta,\, 0.95 + \delta] & [1.00 - \delta,\, 1.00 + \delta] \\ [1.05 - \delta,\, 1.05 + \delta] & [1.00 - \delta,\, 1.00 + \delta] \\ [1.10 - \delta,\, 1.10 + \delta] & [1.00 - \delta,\, 1.00 + \delta] \end{pmatrix} \tag{5}$$

   или

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta,\, 0.95 + \delta] & 1.00 \\ [1.05 - \delta,\, 1.05 + \delta] & 1.00 \\ [1.10 - \delta,\, 1.10 + \delta] & 1.00 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Для минимального значения радиуса $\min \delta$ найти точечную матрицу A' такую, что

$$\det A' = 0.$$

3. Обсудить смысл факта $\det A' = 0$ для задач 2-ракурсной томографии и линейной регрессии.

2 Теория

2.1 Интервальные матрицы

Интервальная матрица $[A]$ — матрица, каждый элемент которой задан интервалом

$$[a_{ij}] = [\operatorname{mid} a_{ij} - \operatorname{rad} a_{ij},\ \operatorname{mid} a_{ij} + \operatorname{rad} a_{ij}].$$

где $mida_{ij}$ - середина интервала, $rada_{ij}$ - радиус интервала. Таким образом:

$$a_{ij} \in [\operatorname{mid} a_{ij} - \operatorname{rad} a_{ij},\ \operatorname{mid} a_{ij} + \operatorname{rad} a_{ij}]$$

Интервальные матрицы позволяют учитывать неопределенности в данных, например, погрешности измерений или варьирующиеся параметры системы.

2.2 Особенность матрицы

Матрица называется вырожденной (особенной), если её определитель равен нулю:

$$\det(A) = 0.$$

Для прямоугольной матрицы типа 3×2 особенность соответствует линейной зависимости столбцов:

$$\text{столбцы } c_1, c_2 \text{ коллинеарны} \iff \exists \lambda : \ c_1 = \lambda c_2 \tag{7}$$

2.3 Метод миноров

Матрица 3×2 имеет ранг меньше 2 (вырождена), если все её 2×2-миноры содержат 0 в интервальной оценке. Для пары строк $i < j$ минор

$$M_{ij} = a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1}.$$

Интервальная оценка M_{ij} линейна по δ, и порог δ_{ij} — минимальное δ, при котором $0 \in M_{ij}$. Минимальное $\delta_{\min} = \max_{ij} \delta_{ij}$ обеспечивает, что все миноры одновременно содержат 0.

2.4 Применение в задачах

- **TOMO (2-ракурсная томография)**: оба элемента строки варьируются $\pm\delta$: $[a_i - \delta, a_i + \delta]$, $[b_i - \delta, b_i + \delta]$.
- **REGRESS (линейная регрессия)**: только первый элемент строки варьируется $[a_i - \delta, a_i + \delta]$, второй фиксирован b_i.

3 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на Python в VS Code. Использовалась библиотека `numpy`.

4 Результаты

4.1 Регрессия

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1 \\ 1.05 & 1 \\ 1.10 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rad}A = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \delta & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторая колонка фиксирована, 2×2-миноры:

$$M_{ij} = a_{i1} - a_{j1}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Пересечение интервалов первой колонки даёт условие

$$\max_i (c_i - \delta) \le \min_i (c_i + \delta) \quad \Longrightarrow \quad 1.10 - \delta \le 0.95 + \delta,$$

откуда

$$\boxed{\delta_{\text{регрессия}} = \frac{0.15}{2} = 0.075}$$

Для минимального δ точечная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 1.024999 & 1.00 \\ 1.024999 & 1.00 \\ 1.024999 & 1.00 \end{pmatrix}, \qquad \det A' = 0.$$

Обоснование. Матрица становится вырожденной, когда все строки линейно зависимы, то есть первая координата может принимать одно общее значение. Это эквивалентно непустому пересечению интервалов $[c_i - \delta, c_i + \delta]$, что и даёт приведённое условие.

4.2 Томография

Матрица с равными радиусами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1 \\ 1.05 & 1 \\ 1.10 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rad}A = \begin{pmatrix} \delta & \delta \\ \delta & \delta \\ \delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Обозначения:

$$c_1 = 0.95, \quad c_2 = 1.05, \quad c_3 = 1.10, \qquad a_{i1} \in [c_i - \delta, c_i + \delta], \; a_{i2} \in [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Для пары строк $i < j$ минор

$$M_{ij} = a_{i1} a_{j2} - a_{i2} a_{j1}.$$

Интервальная оценка

$$M_{ij} \in \big[(c_i - c_j) - \delta(c_i + c_j + 2), \; (c_i - c_j) + \delta(c_i + c_j + 2)\big].$$

Отсюда порог для попадания 0 в интервал минора:

$$\delta_{ij} = \frac{c_j - c_i}{c_i + c_j + 2}.$$

Посчитаем для каждой пары:
Минор M_{12}:

$$c_1 - c_2 = -0.10, \qquad c_1 + c_2 + 2 = 0.95 + 1.05 + 2 = 4.00,$$
$$M_{12} \in [-0.10 - 4.00\delta,\ -0.10 + 4.00\delta],$$
$$\delta_{12} = \frac{0.10}{4.00} = 0.025.$$

Минор M_{13}:

$$c_1 - c_3 = -0.15, \qquad c_1 + c_3 + 2 = 0.95 + 1.10 + 2 = 4.05,$$
$$M_{13} \in [-0.15 - 4.05\delta,\ -0.15 + 4.05\delta],$$
$$\delta_{13} = \frac{0.15}{4.05} = \frac{1}{27} \approx 0.037037\ldots$$

Минор M_{23}:

$$c_2 - c_3 = -0.05, \qquad c_2 + c_3 + 2 = 1.05 + 1.10 + 2 = 4.15,$$
$$M_{23} \in [-0.05 - 4.15\delta,\ -0.05 + 4.15\delta],$$
$$\delta_{23} = \frac{0.05}{4.15} = \frac{5}{415} \approx 0.012048\ldots$$

Так как

$$\delta_{23} \approx 0.01205, \quad \delta_{12} = 0.025, \quad \delta_{13} \approx 0.037037,$$

то наименьшее значение δ, при котором существует возможность сделать все три минора содержащими 0, равно наибольшему из порогов:

$$\boxed{\delta_{\min} = \delta_{13} = \frac{1}{27} \approx 0.037037}$$

Для минимального δ получена точечная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 0.987036 & 0.962964 \\ 1.037962 & 1.012647 \\ 1.062962 & 1.037038 \end{pmatrix}, \qquad \det A' = 0.$$

5 Выводы

5.1 Обсуждение результатов

Факт $\det A' = 0$ указывает на критический уровень неопределённости δ, при котором система становится вырожденной.

- В задачах томографии это означает возможную нестабильность восстановления: система может иметь бесконечно много решений или быть несовместной.
- В линейной регрессии вырожденность матрицы наблюдений делает неприменимым метод наименьших квадратов без регуляризации.

Таким образом, $\det A' = 0$ служит индикатором предельного уровня неопределённости, влияющего на корректность и устойчивость решения задачи.