Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №2

по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил
студент гр. 5030102/20202: Тишковец Сергей

Проверил
Преподаватель: Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Цель работы

Исследование и сравнение точности различных интервальных методов оценивания области значений функции на заданном отрезке.

2 Постановка задачи

Для каждой из двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервале $X = [a, b]$ необходимо:

1. Аналитически или численно найти область значений $\mathrm{ran}(f, X)$, построить график функции на заданном интервале.

2. Вычислить интервальные оценки области значений, используя:

   (a) Естественное интервальное расширение исходного выражения функции.

   (b) Естественное интервальное расширение эквивалентного выражения функции, полученного с помощью схемы Горнера или иного алгебраического преобразования.

   (c) Дифференциальную центрированную форму с центром в разных точках интервала.

   (d) Наклонную центрированную форму с центром в разных точках интервала.

   (e) Бицентрированную форму.

3. Для каждой полученной интервальной оценки вычислить величину $\mathrm{dist}(F(X), \mathrm{ran}(f, X))$ — расстояние по Хаусдорфу до точной области значений. Проанализировать точность естественного интервального расширения:

   (a) Найти (аналитически или численно) константу Липшица L для функции f на интервале X.

   (b) Получить теоретическую оценку погрешности $\mathrm{rad}(F(X)) \le L \cdot \mathrm{rad}(X)$.

   (c) Сравнить реальную погрешность (полуширину полученного интервала $\mathrm{rad}(F(X))$) с теоретической оценкой.

4. Сравнить и проанализировать результаты, объяснив наблюдаемую точность или неточность каждого метода.

3 Результат

Функции:

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad X_1 = [0, 3]$$

$$f_2(x) = x^5 - 5x + \sin x, \quad X_2 = [-1.5,\ 1.5]$$

3.1 Анализ и точные области значений

Для f_1. Производная:

$$f_1'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Критические точки: $x = 0,\ 2$. На отрезке $[0, 3]$:

$$f_1(0) = 2, \quad f_1(2) = -2, \quad f_1(3) = 2.$$

Таким образом, точная область значений:

$$\mathrm{ran}(f_1, [0, 3]) = [-2,\ 2].$$

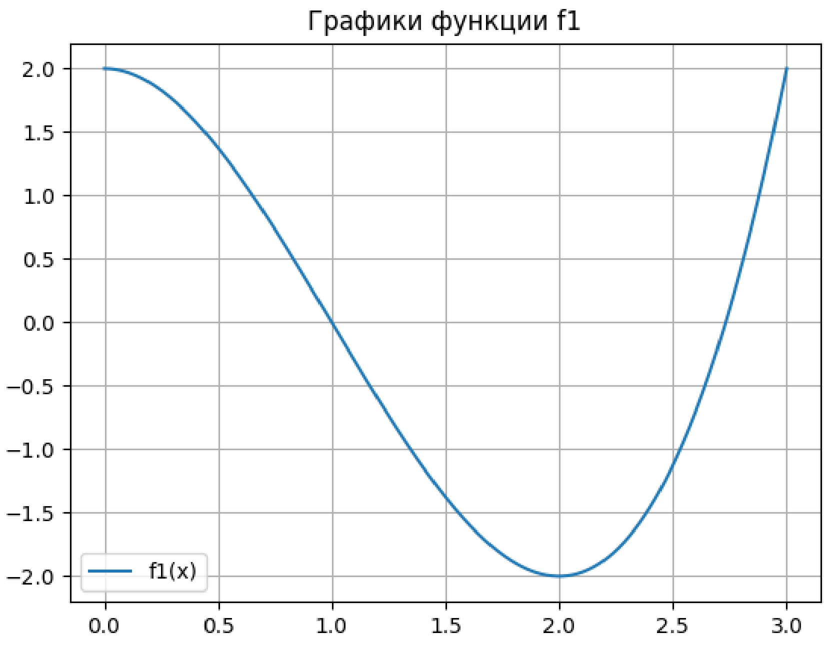

Рис. 1: График $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке [0,3].

Для f_2. Производная:

$$f_2'(x) = 5x^4 - 5 + \cos x.$$

Численное решение уравнения $f_2'(x) = 0$ (при наборе начальных приближений) дало приближённые критические точки:

$$[-0.97,\ -0.083,\ 0.083,\ 0.97].$$

Точки перегиба (по второй производной) — приблизительно $[-0.223, 0.223]$. Отрезок $[-1.5, 1.5]$ включает все найденные критические точки и точки перегиба, поэтому на нём содержатся глобальные экстремумы/перегибы для изучаемой области.

Численные оценки точной области значений (получены в результате вычислений):

$$\mathrm{ran}(f_2, [-1.5, 1.5]) = [-3.16,\ 3.16].$$

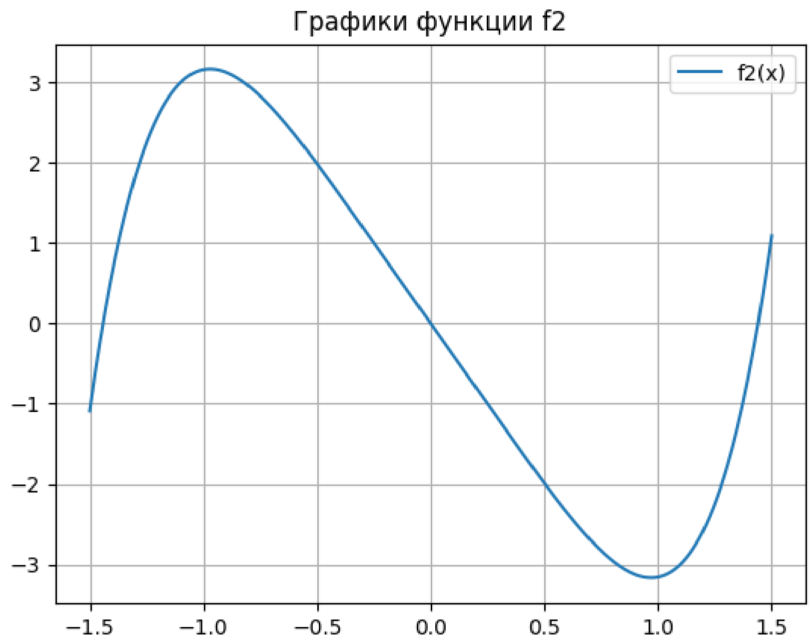

Рис. 2: График $f_2(x) = x^5 - 5x + \sin x$ на отрезке [-1.5,1.5].

3.2 Интервальные оценки (методы)

3.2.1 Естественное интервальное расширение

Естественное интервальное расширение (natural interval extension) — это метод, при котором каждая переменная x в выражении заменяется интервалом $X = [a, b]$, а все арифметические операции выполняются в интервальной арифметике.

Для f_1:

$$f_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2 = [0, 3]^3 - 3[0, 3]^2 + 2 = [0, 27] - 3[0, 9] + 2 = [-25, 29].$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{nat}}(X) = [-25,\ 29]}$$

Для f_2:

$$\begin{aligned}
f_2(X) &= X^5 - 5X + \sin X = \\
&= [-1.5,\, 1.5]^5 \;-\; 5[-1.5,\, 1.5] \;+\; \sin([-1.5,\, 1.5]) = \\
&= [-7.59,\, 7.59] + [-7.5,\, 7.5] + [-1,\, 1] = [-16.09,\, 16.09].
\end{aligned}$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{nat}}(X) = [-16.09,\; 16.09]}$$

3.2.2 Схема Горнера

Схема Горнера позволяет представить многочлен в виде, который уменьшает количество повторяющихся переменных, тем самым снижая эффект зависимости (dependency effect).

Для f_1:

Представим $f_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2$ в виде:

$$f_1(x) = (x-3)x^2 + 2 = ([0,3]-3)[0,3]^2 + 2 = [-3,0]\cdot[0,9] + 2 = [-25, 2].$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{Horner}}(X) = [-25,\; 2]}$$

Для f_2:

Представим $f_2(X) = x^5 - 5x + \sin x$ в виде:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= x(x^4 - 5) + \sin x = \\
&= [-1.5,\, 1.5]\cdot\big([-1.5,\, 1.5]^4 - 5\big) + \sin([-1.5,\, 1.5]) = \\
&= [-1.5,\, 1.5]\cdot\big([0,\, 5.0625] - 5\big) + [-\sin(1.5),\, \sin(1.5)] = \\
&= [-1.5,\, 1.5]\cdot[-5,\, 0.0625] + [-0.99,\, 0.99] = \\
&= [-7.5,\, 7.5] + [-0.99,\, 0.99] = [-8.49,\, 8.49].
\end{aligned}$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{Horner}}(X) = [-8.49,\; 8.49]}$$

3.2.3 Дифференциальная центрированная форма (DCF)

Дифференциальная центрированная форма (DCF) использует разложение функции в ряд Тейлора первого порядка.

$$f(X) = f(c) + f'(X)(X-c), \qquad \text{где } c \text{ — центр интервала } X.$$

Для f_1: Пусть $c = 1.5,\ f_1(1.5) = -1.375.$

$$f_1'(x) = 3x^2 - 6x.$$

На интервале $[0,3]$ функция $f_1'(x)$ имеет минимум в точке $x=1$ (потому что $f_1''(x)=6x-6$ и $6x-6=0$ при $x=1$) и максимум в точке $x=3$.

$$f_1'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1=-3, \qquad f_1'(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3=9,$$

откуда

$$f_1'(X)=[-3,\,9].$$

$$f_1(X)=-1.375+[-3,\,9]\cdot[-1.5,\,1.5]=-1.375+[-13.5,\,13.5]=[-14.875,\,12.125].$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{DCF}}(X)=[-14.875,\,12.125]}$$

Для f_2: Пусть $c=0$. Тогда

$$f_2(0)=0^5-5\cdot 0+\sin 0=0.$$

Производная:

$$f_2'(x)=5x^4-5+\cos x.$$

На интервале $[-1.5,\,1.5]$ найдем оценки для $f_2'(x)$.

$$f_2'(0)=-5+1=-4.$$

$$f_2'(\pm 1)=5-5+\cos 1\approx 0.5403.$$

$$f_2'(\pm 1.5)=5\cdot(1.5)^4-5+\cos(1.5)=25.3125-5+0.0707\approx 20.383.$$

Следовательно,

$$f_2'(X)=[-4,\ 20.383].$$

Так как $c=0$, то

$$X-c=[-1.5,\,1.5].$$

Теперь вычислим:

$$f_2(X)=f_2(c)+f_2'(X)(X-c)=0+[-4,\ 20.383]\cdot[-1.5,\,1.5].$$

Произведение интервалов:

$$[-4,\ 20.383]\cdot[-1.5,\,1.5]=[-30.57,\ 30.57].$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{DCF}}(X)=[-30.57,\ 30.57]}$$

3.2.4 Наклонная центрированная форма (SCF)

Наклонная центрированная форма (SCF) использует понятие наклонной функции (slope function) $s(x, y)$, которая представляет собой интервал, содержащий все частные производные в интервале $[x, y]$.

$f(X) = f(c) + S(X, c)(X - c)$, где $S(X, c)$ — интервальная оценка наклонной функции.

$$S(X, c) = \frac{f(X) - f(c)}{X - c}.$$

Для f_1: Пусть $c = 1.5$, $f_1(1.5) = -1.375$.

$$S_1(x, c) = x^2 - 1.5x - 2.25$$

На интервале $[0, 3]$, $S_1(x)$ имеет минимум в точке $x = 0.75$ и максимум в точке $x = 3$:

$$S_1(0.75) = 0.75^2 - 1.5 \cdot 0.75 - 2.25 = -2.8125, \qquad S_1(3) = 3^2 - 1.5 \cdot 3 - 2.25 = 2.25$$

$$S_1(X, c) = [-2.8125,\ 2.25]$$

$$f_1(X) = -1.375 + [-2.8125,\ 2.25] \cdot [-1.5,\ 1.5] = [-5.594,\ 2.844].$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{SCF}}(X) = [-5.594,\ 2.844]}$$

Для f_2: Пусть $c = 0$. Тогда $f_2(0) = 0$ и

$$S_2(x, c) = \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{x^5 - 5x + \sin x}{x} = x^4 - 5 + \frac{\sin x}{x},$$

где в точке $x = 0$ значение берётся по пределу: $\lim\limits_{x \to 0} S_2(x, 0) = -4$.

Вычислим значения на стержневых точках интервала:

$$S_2(0) = -4, \qquad S_2(1.5) = 1.5^4 - 5 + \frac{\sin(1.5)}{1.5} = 5.0625 - 5 + \frac{0.997}{1.5} \approx 0.727.$$

Функция $S_2(x, 0)$ чётная на отрезке $[-1.5, 1.5]$, и её минимальное значение достигается в точке $x = 0$, максимальное — в $x = 1.5$. Следовательно

$$S_2(X, 0) = [-4,\ 0.727].$$

Так как $X - c = [-1.5,\ 1.5]$, получаем

$$f_2(X) = f_2(c) + S_2(X, 0) \cdot (X - c) = 0 + [-4,\ 0.727] \cdot [-1.5,\ 1.5].$$

Вычисление произведения интервалов даёт

$$[-4,\ 0.727] \cdot [-1.5,\ 1.5] = [-6.01,\ 6.01].$$

Полученная оценка:

$$\boxed{F_{\text{SCF}}(X) = [-6.01,\ 6.01]}$$

3.2.5 Бицентрированная форма (BCF)

Бицентрированная среднезначная форма определяется как пересечение двух дифференциальных (среднезначных) центрированных форм, взятых в специально подобранных центрах c_* и c^*:

$$f_{\mathrm{bic}}(X) := f_{\mathrm{mv}}(X, c_*) \cap f_{\mathrm{mv}}(X, c^*).$$

Выбор центров c_* и c^* даётся теоремой Бауманна; для каждого координатного индекса i вводим

$$p_i := \mathrm{cut}\Big(\frac{\mathrm{mid}\, f_i'(X)}{\mathrm{rad}\, f_i'(X)}, [-1, 1]\Big),$$

где функция $\mathrm{cut}(\cdot, [-1, 1])$ обрезает значение до отрезка $[-1, 1]$. Тогда

$$(c_*)_i = \mathrm{mid}\, X_i - p_i \cdot \mathrm{rad}\, X_i, \qquad (c^*)_i = \mathrm{mid}\, X_i + p_i \cdot \mathrm{rad}\, X_i.$$

Рассматриваются два варианта бицентрирования:

1. $\mathbf{BCF}_{\mathrm{mv}}$ — пересечение двух fmv-форм, т.е. $f_{\mathrm{mv}}(X, c_*) \cap f_{\mathrm{mv}}(X, c^*)$;
2. $\mathbf{BCF}_{\mathrm{sl}}$ — пересечение двух наклонных форм (используем f_{sl} в центрах c_*, c^*).

Для $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\ X = [0, 3]$

- Производная: $f_1'(x) = 3x^2 - 6x$. По отрезку X имеем

  $$f_1'(X) = [-3,\ 9], \qquad \mathrm{mid}\, f_1'(X) = 3, \quad \mathrm{rad}\, f_1'(X) = 6.$$

  Поэтому

  $$p = \mathrm{cut}\Big(\frac{3}{6}, [-1, 1]\Big) = 0.5.$$

  Средина и радиус аргумента: $\mathrm{mid}\, X = 1.5,\ \mathrm{rad}\, X = 1.5$. Отсюда

  $$c_* = 1.5 - 0.5 \cdot 1.5 = 0.75, \qquad c^* = 1.5 + 0.5 \cdot 1.5 = 2.25.$$

- f_{mv}-оценки ($f_{\mathrm{mv}}(X, c) = f(c) + f'(X) \cdot (X - c)$):

  $$f_{\mathrm{mv}}(X, c_*) \approx [-6.01,\ 20.98],$$

  $$f_{\mathrm{mv}}(X, c^*) \approx [-22.04,\ 4.95].$$

  Пересечение даёт

  $$\boxed{F_{\mathrm{BCF}}^{\mathrm{mv}}(X) \approx [-6.01,\ 4.95]}$$

  полуширина $\mathrm{rad} \approx 5.48$.

- Наклонные формы в тех же центрах ($\mathrm{BCF}_{\mathrm{sl}}$): вычисляя наклоны $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ на X относительно каждого центра, получаем интервалы

  $$f_{\mathrm{sl}}(X, c_*) \approx [-5.91,\ 2.95],$$

  $$f_{\mathrm{sl}}(X, c^*) \approx [-13.18,\ 2.31],$$

  их пересечение

  $$\boxed{F_{\mathrm{BCF}}^{\mathrm{sl}}(X) \approx [-5.91,\ 2.31]}$$

  полуширина $\mathrm{rad} \approx 4.11$.

Для $f_2(x) = x^5 - 5x + \sin x,\ X = [-1.5, 1.5]$

- Производная: $f_2'(x) = 5x^4 - 5 + \cos x$.
$$f_2'(X) \approx [-4.01,\ 20.38],$$
$$\operatorname{mid} f_2'(X) \approx 8.18, \quad \operatorname{rad} f_2'(X) \approx 12.19.$$
Тогда
$$p = \operatorname{cut}\Big(\frac{8.18}{12.19}, [-1, 1]\Big) \approx 0.67.$$
Средина и радиус аргумента: $\operatorname{mid} X = 0,\ \operatorname{rad} X = 1.5$. Отсюда
$$c_* \approx -1.01, \qquad c^* \approx 1.01.$$

- f_{mv}-оценки в этих центрах ($f_{\mathrm{mv}}(X, c) = f(c) + f'(X) \cdot (X - c)$):
$$f_{\mathrm{mv}}(X, c_*) \approx [-6.91,\ 54.24],$$
$$f_{\mathrm{mv}}(X, c^*) \approx [-54.24,\ 6.91],$$
пересечение даёт
$$\boxed{F_{\mathrm{BCF}}^{\mathrm{mv}}(X) \approx [-6.91,\ 6.91]}$$
полуширина $\operatorname{rad} \approx 6.91$.

- Наклонные бицентрированные оценки ($\mathrm{BCF}_{\mathrm{sl}}$) в тех же центрах:
$$f_{\mathrm{sl}}(X, c_*) \approx [-5.45,\ 24.72],$$
$$f_{\mathrm{sl}}(X, c^*) \approx [-24.72,\ 5.45]$$
пересечение
$$\boxed{F_{\mathrm{BCF}}^{\mathrm{sl}}(X) \approx [-5.45,\ 5.45]}$$
полуширина $\operatorname{rad} \approx 5.45$.

3.3 Оценки по Липшицу и полуширины

Константа Липшица L — максимум модуля производной на интервале:

Для f_1**:**
$$L_1 = \max_{x \in [0,3]} |f_1'(x)| = 9$$

Для f_2**:**
$$L_2 = \max_{x \in [-1.5, 1.5]} |f_2'(x)| \approx 20.38$$

Полуширина интервала:
$$\operatorname{rad}(A) = \frac{\operatorname{upper}(A) - \operatorname{lower}(A)}{2}$$

Теоретическая верхняя оценка полуширины:
$$\operatorname{rad}(F(X)) \leq L \cdot \operatorname{rad}(X).$$

Для f_1**:**
$$\operatorname{rad}(F(X)) \leq 13.5$$

Для f_2**:**
$$\operatorname{rad}(F(X)) \leq 30.57$$

4 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python в Visual Studio Code.

Использовались библиотеки:

1. numpy
2. matplotlib

5 Интервальные оценки: сводные таблицы результатов

5.1 Таблица: $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\ X = [0, 3]$

Метод	Интервал $F(X)$	$\mathrm{rad}(F(X))$
Естественное	$[-25, 29]$	27
Горнер	$[-25, 2]$	13.5
Дифф. центр	$[-14.875, 12.125]$	13.5
Наклонная центр	$[-5.594, 2.844]$	4.22
Бицентр. накл.	$[-5.91,\ 2.31]$	4.11
Бицентр. средн.	$[-6.01,\ 4.95]$	5.48

Таблица 1: Сравнение методов для f_1

5.2 Таблица: $f_2(x) = x^5 - 5x + \sin x,\ X = [-1.5, 1.5]$

Метод	Интервал $F(X)$	$\mathrm{rad}(F(X))$
Естественное	$[-16.09, 16.09]$	16.09
Горнер	$[-8.49, 8.49]$	8.49
Дифф. центр	$[-30.57, 30.57]$	30.57
Наклонная центр	$[-6.01, 6.01]$	6.01
Бицентр. накл.	$[-5.45,\ 5, 45]$	5.45
Бицентр. средн.	$[-6.91,\ 6.91]$	6.91

Таблица 2: Сравнение методов для f_2

Полуширина теоретической оценки по Липшицу использована в сравнении: ≈ 30.57.

6 Выводы

6.1 Сравнение методов

- Натуральное расширение: простой, но часто сильно переоценивает область значений из-за эффекта зависимости (dependency).
- Схема Горнера: улучшает оценки для полиномов; для функций с тригонометрическими членами эффект зависимости всё ещё заметен.
- Дифференциальная центрированная форма: точность этого метода зависит от ширины интервала производной; если производная сильно колеблется, метод будет давать неточную оценку.
- Наклонная центрированная форма: чаще даёт значительное улучшение по сравнению с дифференциальной формой.
- Бицентрированная форма: наклонная форма дала более узкий интервал, близкий к точному, чем среднезначная:
  - **Для f_1:** точный интервал $[-2, 2]$, $F^{\text{sl}}_{\text{BCF}}(X) \approx [-5.91,\ 2.31]$, $F^{\text{mv}}_{\text{BCF}}(X) \approx [-6.01,\ 4.95]$
  - **Для f_2:** точный интервал $[-3.16, 3.16]$, $F^{\text{sl}}_{\text{BCF}}(X) \approx [-5.45,\ 5.45]$, $F^{\text{mv}}_{\text{BCF}}(X) \approx [-6.91,\ 6.91]$

6.2 Выводы для $f_2(x) = x^5 - 5x + \sin x$

- Для $f_2(x) = x^5 - 5x + \sin x$ на интервале $[-1.5, 1.5]$ форма с наилучшим результатом — бицентрированная наклонная (полуширина 5.45).
- Натуральные преобразования и простая дифференциальная форма могут давать чрезмерно широкие интервалы при большой вариативности производной.
- Интервал $[-1.5, 1.5]$ обоснован — он покрывает найденные критические точки и точки перегиба.