

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра прикладной математики и информатики

**Математическая статистика**

**Отчет по лабораторной работе №3**

Выполнил студент гр. 5030102/20202

Тишковец С.Е.

Преподаватель

Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

## Оглавление

1. Постановка задачи .....	3
2. Теоретическая информация .....	3
2.1. Двумерное нормальное распределение.....	3
2.2. Корреляционный момент и коэффициент корреляции .....	3
2.3. Выборочный коэффициент корреляции Пирсона .....	4
2.4. Выборочный квадрантный коэффициент корреляции .....	4
2.5. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена .....	4
2.6. Эллипсы рассеивания .....	4
3. Результаты исследования .....	5
3.1. Графики .....	5
3.2. Таблицы .....	9

## 1. Постановка задачи

1. Сгенерировать двумерные выборки размерами 20, 60, 100 для нормального двумерного распределения  $N(x, y, 0, 0, 1, 1, \rho)$ .
2. Коэффициент корреляции  $\rho$  взять равным 0, 0.5, 0.9.
3. Каждая выборка генерируется 1000 раз и для неё вычисляются: среднее значение, среднее значение квадрата и дисперсия коэффициентов корреляции Пирсона, Спирмена и квадрантного коэффициента корреляции.

Повторить все вычисления для смеси нормальных распределений:

$$f(x, y) = 0.9N(x, y, 0, 0, 1, 1, 0.9) + 0.1N(x, y, 0, 0, 1, 1, -0.9).$$

4. Изобразить сгенерированные точки на плоскости и нарисовать эллипс равновероятности.

## 2. Теоретическая информация

### 2.1. Двумерное нормальное распределение

Двумерная случайная величина  $(X, Y)$  называется распределенной нормально (или просто нормальной), если ее плотность вероятности определена формулой

$$N(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]\right)$$

Компоненты  $X, Y$  двумерной нормальной случайной величины также распределены нормально с математическими ожиданиями  $\bar{x}, \bar{y}$  и средними квадратическими отклонениями  $\sigma_x, \sigma_y$  соответственно.

Параметр  $\rho$  называется коэффициентом корреляции.

### 2.2. Корреляционный момент и коэффициент корреляции

Корреляционный момент (ковариация) двух случайных величин  $X, Y$ :

$$K = cov(X, Y) = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})]$$

Коэффициент корреляции  $\rho$  двух случайных величин  $X, Y$ :

$$\rho = \frac{K}{\sigma_x\sigma_y}$$

### 2.3. Выборочный коэффициент корреляции Пирсона

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{K}{s_X s_Y}$$

$K, s_X^2, s_Y^2$  – выборочные ковариация и дисперсии случайных величин  $X, Y$ .

### 2.4. Выборочный квадрантный коэффициент корреляции

$$r_Q = \frac{(n_1 + n_3) - (n_2 + n_4)}{n}$$

где  $n_1, n_2, n_3$  и  $n_4$  – количества точек с координатами  $(x_i, y_i)$ , попавшими соответственно в I, II, III и IV квадранты декартовой системы с осями  $x' = x - med x, y' = y - med y$ .

### 2.5. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Обозначим ранги, соответствующие значениям переменной  $X$ , через  $u$ , а ранги, соответствующие значениям переменной  $Y$ , — через  $v$ .

$$r_S = \frac{\frac{1}{n} \sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \sum (u_i - \bar{u})^2 (v_i - \bar{v})^2}}$$

где  $\bar{u} = \bar{v} = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$  – среднее значение рангов.

### 2.6. Эллипсы рассеивания

Уравнение проекции эллипса рассеивания на плоскость  $xOy$ :

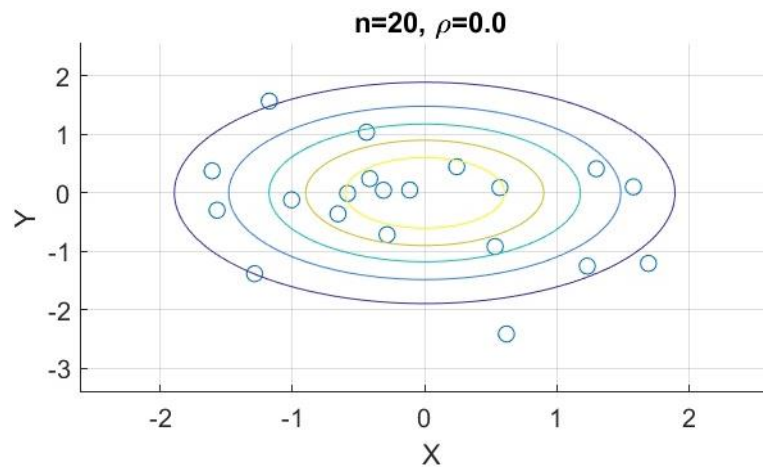
$$\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2} = const$$

Центр эллипса находится в точке с координатами  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Оси симметрии эллипса составляют с осью  $Ox$  углы, определяемые уравнением

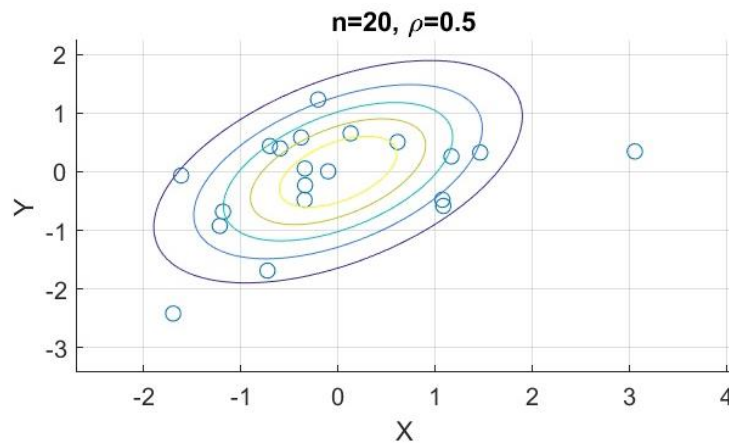
$$\tan 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

### 3. Результаты исследования

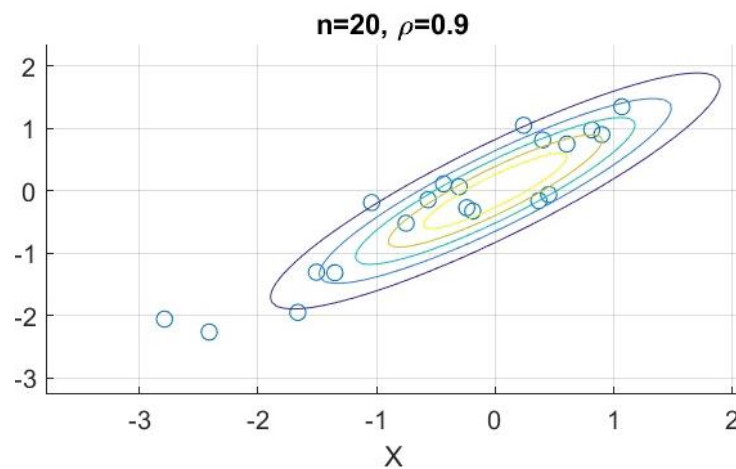
#### 3.1. Графики



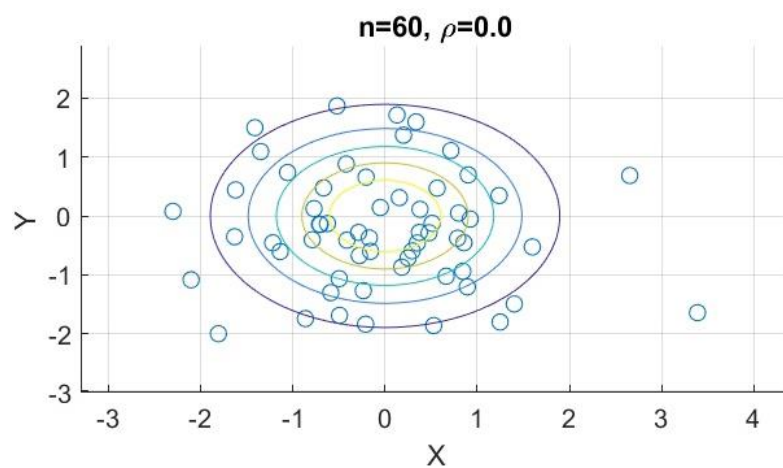
Нормальное распределение с параметрами  $n=20, \rho=0.0$



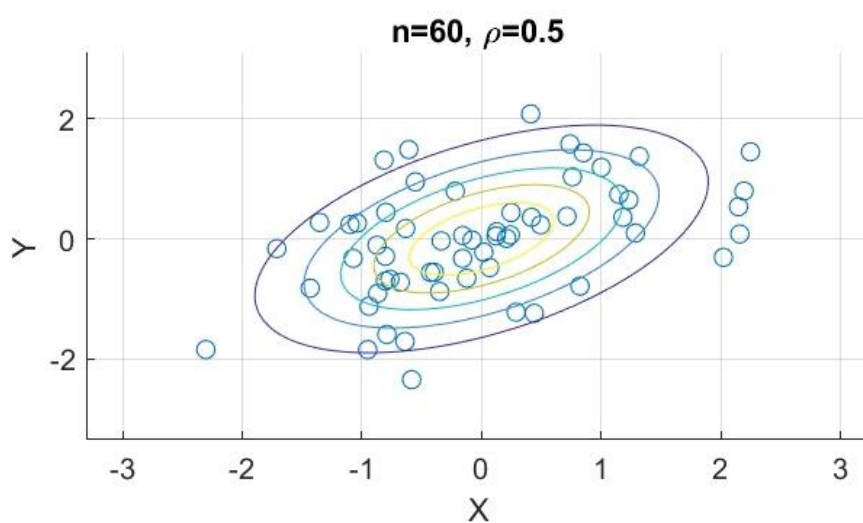
Нормальное распределение с параметрами  $n=20, \rho=0.5$



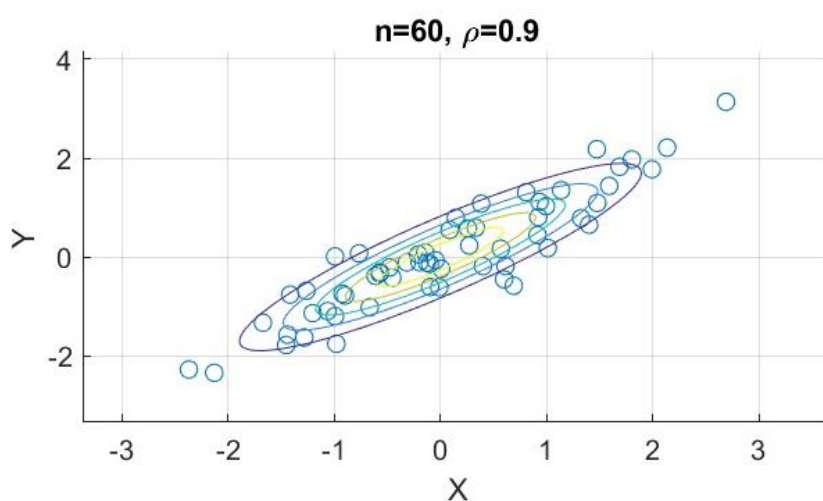
Нормальное распределение с параметрами  $n=20, \rho=0.9$



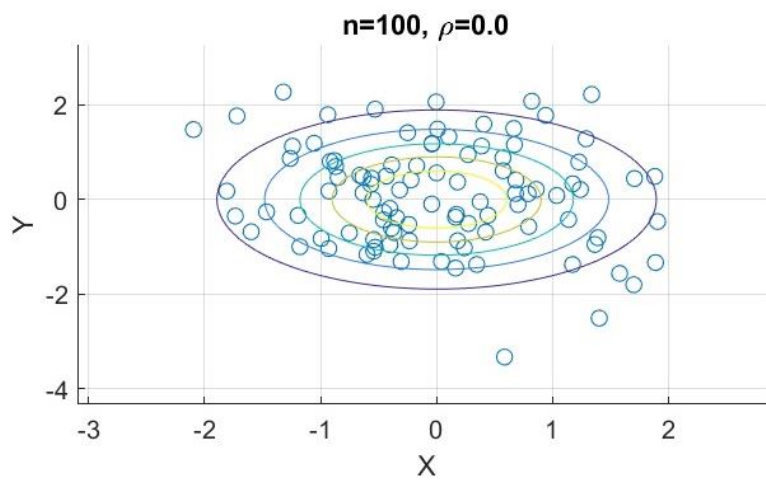
Нормальное распределение с параметрами  $n=60$ ,  $\rho=0.0$



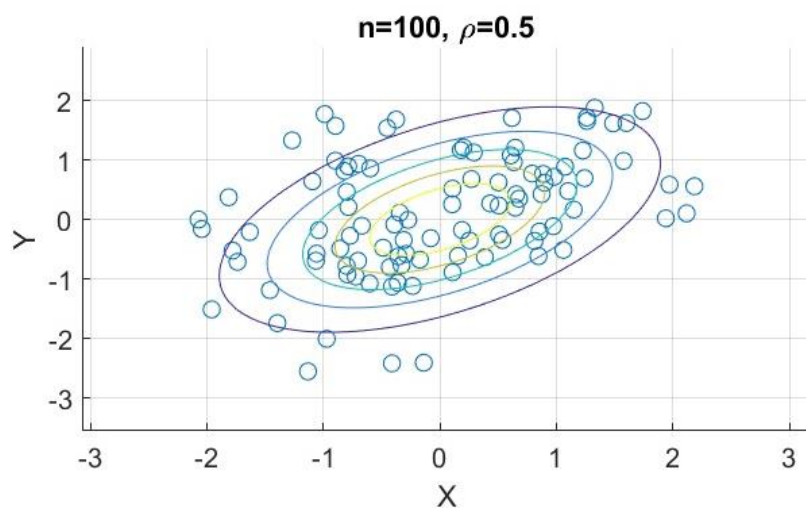
Нормальное распределение с параметрами  $n=60$ ,  $\rho=0.5$



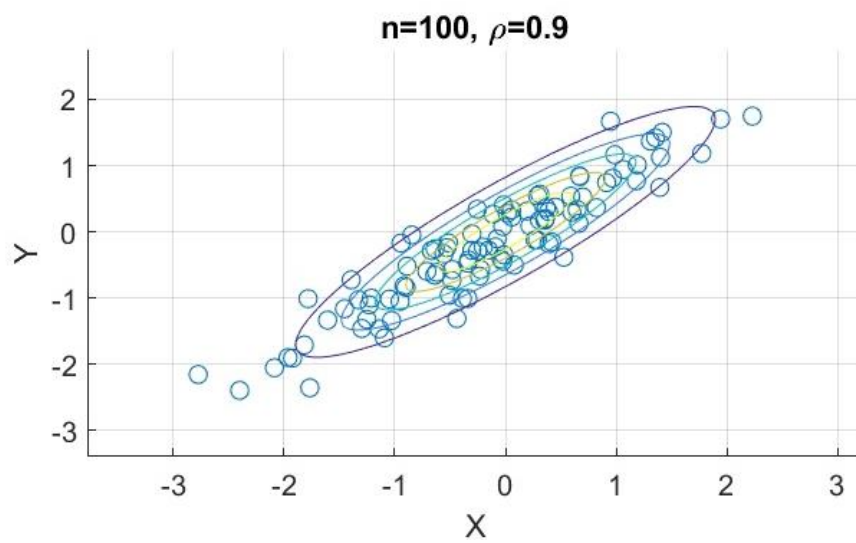
Нормальное распределение с параметрами  $n=60$ ,  $\rho=0.9$



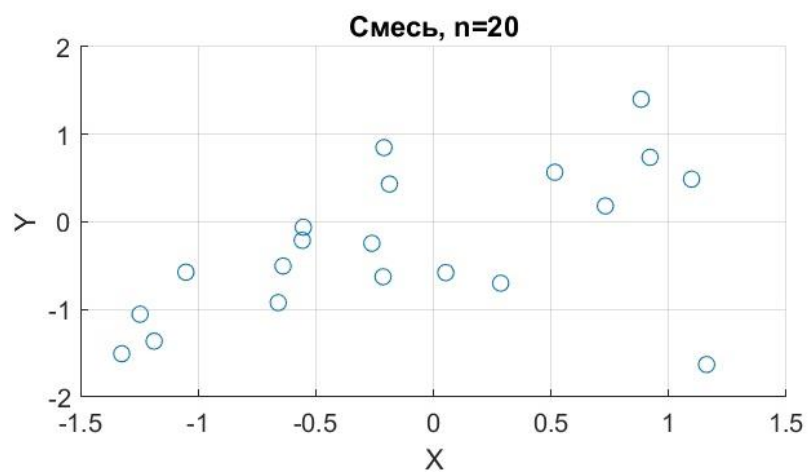
Нормальное распределение с параметрами  $n=100, \rho=0.0$



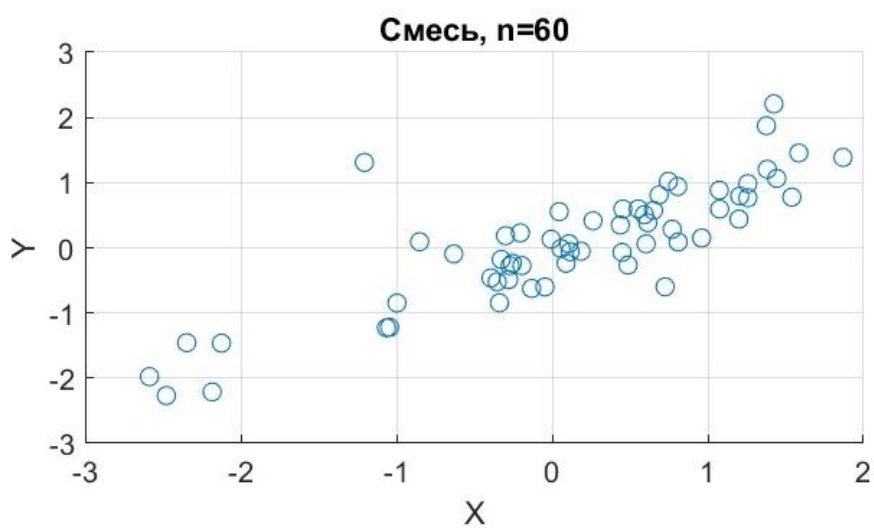
Нормальное распределение с параметрами  $n=100, \rho=0.5$



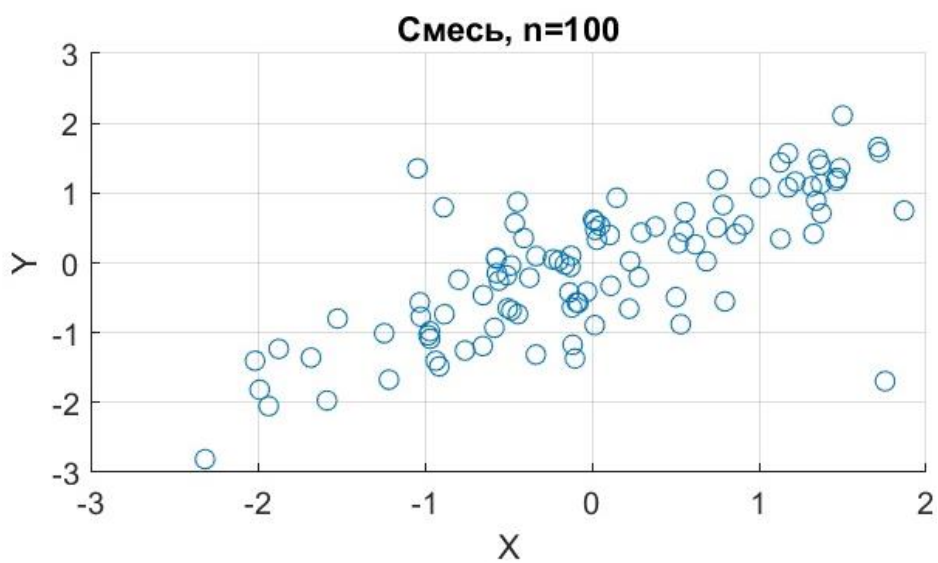
Нормальное распределение с параметрами  $n=100, \rho=0.9$



Смесь нормальных распределений,  $n=20$



Смесь нормальных распределений,  $n=60$



Смесь нормальных распределений,  $n=100$



### 3.2. Таблицы

	<b>r</b>	<b>r<sub>s</sub></b>	<b>r<sub>q</sub></b>
<b><math>\rho = 0</math></b>			
<b>E(z)</b>	-0.0006	-0.0028	0.0022
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.0236	0.0335	0.0507
<b>D(z)</b>	0.0537	0.0529	0.0601
<b><math>\rho = 0.5</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.4937	0.4662	0.3711
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.2733	0.2495	0.1528
<b>D(z)</b>	0.0296	0.0332	0.0459
<b><math>\rho = 0.9</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.8931	0.8642	0.7001
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.8002	0.7516	0.5182
<b>D(z)</b>	0.0028	0.0051	0.0283

**Таблица характеристик распределения для n = 20**

	<b>r</b>	<b>r<sub>s</sub></b>	<b>r<sub>q</sub></b>
<b><math>\rho = 0</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.0048	-0.0059	0.0018
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.0159	0.0161	0.0162
<b>D(z)</b>	0.0292	0.0265	0.0234
<b><math>\rho = 0.5</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.4992	0.4759	0.3329
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.2589	0.2381	0.1361
<b>D(z)</b>	0.0099	0.0115	0.0261
<b><math>\rho = 0.9</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.9031	0.8852	0.7121
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.8102	0.7816	0.5158
<b>D(z)</b>	0.0008	0.0011	0.0093

**Таблица характеристик распределения для n = 60**

	<b>r</b>	<b>r<sub>s</sub></b>	<b>r<sub>q</sub></b>
<b><math>\rho = 0</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.0006	0	0.0011
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.0094	0.0093	0.0088
<b>D(z)</b>	0.0101	0.0124	0.0112
<b><math>\rho = 0.5</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.4947	0.4732	0.3225
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.2503	0.2302	0.1164
<b>D(z)</b>	0.0066	0.0087	0.0097
<b><math>\rho = 0.9</math></b>			
<b>E(z)</b>	0.8989	0.8867	0.7123
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.8032	0.7868	0.5132
<b>D(z)</b>	0.0003	0.0012	0.0056

**Таблица характеристик распределения для n = 100**

	<b>r</b>	<b>r<sub>s</sub></b>	<b>r<sub>q</sub></b>
<b>E(z)</b>	0.7181	0.6955	0.5596
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.5617	0.5131	0.3469
<b>D(z)</b>	0.0463	0.0325	0.0336

**Смесь распределений, n = 20**

	<b>r</b>	<b>r<sub>s</sub></b>	<b>r<sub>q</sub></b>
<b>E(z)</b>	0.7203	0.7021	0.5636
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.5317	0.5124	0.3309
<b>D(z)</b>	0.0263	0.0107	0.0119

**Смесь распределений, n = 60**

	<b>r</b>	<b>r<sub>s</sub></b>	<b>r<sub>q</sub></b>
<b>E(z)</b>	0.7153	0.7007	0.5601
<b>E(z<sup>2</sup>)</b>	0.5227	0.5094	0.3289
<b>D(z)</b>	0.0093	0.0077	0.0071

**Смесь распределений, n = 100**