Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра прикладной математики и информатики

Математическая статистика

Отчет по лабораторной работе №6

Выполнил студент гр. 5030102/20202 Тишковец С.Е.

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2025

Оглавление

1. Постановка задачи

Для выборок мощностью n = 20 и n = 100

1. Найти доверительные интервалы для параметров
   • нормального распределения и
   • произвольного распределения, используя асимптотический подход
2. Результаты представить в виде твинов с порядком по включению

2. Теоретическая информация

2.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Математическое ожидание m:

Дана выборка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ объёма n из нормальной генеральной совокупности. На её основе строим выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение s. Параметры m и σ нормального распределения неизвестны. Доверительный интервал для m с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$:

$$P\left(\bar{x} - \frac{sx}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{sx}{\sqrt{n-1}}\right) = 2F_T(x) - 1 = 1 - \alpha$$

Среднеквадратичное отклонение σ:

Дана выборка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ объёма n из нормальной генеральной совокупности. На её основе строим выборочную дисперсию s^2. Параметры m и σ нормального распределения неизвестны. Доверительный интервал для σ с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$:

$$P\left(\frac{s\sqrt{\mathrm{n}}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < \frac{s\sqrt{\mathrm{n}}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right) = 1 - \alpha$$

2.2. Доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход

Математическое ожидание m:

Предполагаем, что исследуемое генеральное распределение имеет конечные математическое ожидание m и дисперсию σ^2.

$u_{1-\alpha/2}$ - квантиль нормального распределения $N(0,1)$ порядка $1 - \alpha/2$.

Доверительный интервал для m с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$:

$$P\left(\bar{x} - \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \approx \gamma$$

Среднеквадратичное отклонение σ:

Предполагаем, что исследуемая генеральная совокупность имеет конечные первые четыре момента.

$u_{1-\alpha/2}$ - квантиль нормального распределения $N(0,1)$ порядка $1 - \alpha/2$.

$E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$ - эксцесс генерального распределения, $e = \frac{m_4}{s^4} - 3$ - выборочный эксцесс; $m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4$ - четвёртый выборочный центральный момент.

$$s(1 + U)^{-1/2} < \sigma < s(1 - U)^{-1/2}$$

где $U = u_{1-\alpha/2}\sqrt{(e + 2)/n}$

3. Результаты исследования

3.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

n	m	σ
20	$-0.62 < m < 0.28$	$0.73 < \sigma < 1.40$
100	$-0.24 < m < 0.12$	$0.81 < \sigma < 1.07$

Таблица 1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

3.2. Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

n	m	σ
20	$-0.59 < m < 0.25$	$0.79 < \sigma < 1.34$
100	$-0.24 < m < 0.12$	$0.80 < \sigma < 1.09$

Таблица 2. Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

3.3. Результаты в виде твинов с порядком по включению

n=20:

$$\mathrm{T}_{\mathrm{m}}^{(20)} = ([-0.62, 0.28], [-0.59, 0.25])$$

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(20)} = ([0.73, 1.40], [0.79, 1.34])$$

n=100:

$$\mathrm{T}_{\mathrm{m}}^{(100)} = ([-0.24, 0.12], [-0.24, 0.12])$$

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(100)} = ([0.81, 1.07], [0.80, 1.09])$$

4. Выводы

Построенные доверительные интервалы показывают, что при увеличении объёма выборки интервалы становятся уже, что повышает точность оценок. Асимптотический подход даёт более узкие интервалы по сравнению с нормальным распределением, особенно для дисперсии. При $n = 100$ результаты двух методов для оценки m практически совпадают, что подтверждает эффективность асимптотического подхода при больших выборках.