Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 1

**Тема "Решение алгебраических и трансцендентных уравнений"**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задача:

Исследовать два численных метода для отыскания корня алгебраической и трансцендентной функций: метод половинного деления и метод Ньютона.

1. **Описание методов**

Метод 1: Метод половинного деления

Процедура уточнения положения корня с помощью метода половинного деления заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения и имеет длину вдвое меньше предыдущего.

Пусть имеется отрезок [a, b], на котором функция определена и непрерывна. Также, пусть на концах отрезка функция имеет разные знаки, то есть .

Отрезок [a, b] называется начальным интервалом неопределенности, потому что известно, что корень ему принадлежит, но его местоположение с требуемой точностью не определено.

Подробнее опишем алгоритм нахождения корня на заданном отрезке [a, b]. Выбирается середина текущего интервала неопределенности *,* и в качестве следующего интервала неопределенности из двух возможных выбирается тот, на концах которого функция имеет разные знаки.

Итерационный процесс завершается, когда длина текущего интервала неопределенности становится меньше заданной точности .

В качестве приближенного значения корня берется середина последнего интервала неопределенности.

Изображение выглядит как диаграмма, линия, Параллельный, График

Автоматически созданное описание

Метод 2: Метод Ньютона

Сформулируем основную идею метода Ньютона в геометрических терминах. Пусть функция определена в окрестности корня . Задается начальное приближение . Сформулируем условие Фурье для применимости метода: .

Проводится касательная к графику функции в точке , т. е. функция заменяется прямой. В качестве следующего приближения выбирается точка пересечения этой касательной с осью абсцисс. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока модуль разности текущего приближения и корня функции не станет меньше заданной точности .

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График, Параллельный

Автоматически созданное описание

Получение расчётной формулы метода Ньютона:

Пусть – текущее приближение к корню . Разложим функцию в ряд Тейлора в окрестности точки

Решим последнее уравнение для случая, когда , отбросив последнее слагаемое

Откуда и получаем формулу Ньютона

1. **Результаты исследования методов**

Напомним, что исследуются алгебраическая и трансцендентная функции. Уравнение и график алгебраической функции представлены ниже

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График

Автоматически созданное описание

По теореме о верхней границе было получено два промежутка в которых лежат корни функции:

[0.641; 3.621] – для положительного корня

[-1.778; -0.357] – для отрицательного корня

Для метода Ньютона в качестве начальных приближений взяты значения для положительного и отрицательного корней соответственно.

Проверка показывает, что для выбранных начальных приближений эти условия применимости метода выполняются.

Рассмотрим вторую, трансцендентную функцию. Её уравнение и график представлены ниже

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Определим количество корней и промежутки их нахождения с помощью пакета MATLAB. Из графика видно, что функция имеет два корня на промежутках [1.5; 2.5] и [-2; -0.5] соответственно. Зададим начальное приближение для положительного и для отрицательного корней.

Проверка показывает, что для выбранных начальных приближений эти условия применимости метода выполняются.

Проанализируем и сравним скорость сходимости каждого из двух методов при помощи построения графика зависимости абсолютной погрешности решения от точности решения **ε.**

Точность решения **ε** будем менять в промежутке .

График будем строить в логарифмических осях – за счет этого аппроксимирующий график будет являться линейным.

Первый график будет построен для алгебраической функции, второй – для трансцендентной.

Изображение выглядит как текст, линия, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание

Из графика видно, что скорость сходимости метода половинного деления линейная – увеличение заданной точности в 10 раз увеличивает абсолютную погрешность решения примерно в 10раз.

В то же время, исследуя линейную часть графика видно, что скорость сходимости метода Ньютона квадратичная – увеличение заданной точности в 10 раз увеличивает абсолютную погрешность решения примерно в раз.

**Изображение выглядит как текст, линия, снимок экрана, График

Автоматически созданное описание**

Из графика видно, что скорость сходимости метода половинного деления линейная – увеличение заданной точности в 10 раз увеличивает абсолютную погрешность решения примерно в 10раз.

В то же время, исследуя линейную часть графика видно, что скорость сходимости метода Ньютона квадратичная – увеличение заданной точности в 10 раз увеличивает абсолютную погрешность решения примерно в раз.

1. **Выводы**

Исследование зависимости абсолютной погрешности от заданной точности и у трансцендентной, и у алгебраической функции показывает, что метод Ньютона имеет скорость сходимости на порядок выше, чем метод половинного деления.

Из минусов метода Ньютона можно выделить большие накладываемые требования на функцию, а также два вычисления на каждой итерации (значение функции в точке и ее производной в точке) в отличие от метода половинного деления, где необходимо производить только одно вычисление функции на каждой итерации. Метод половинного деления в свою очередь достаточно прост в реализации и требует от функции минимальных условий.