Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 2

**Тема «Решение СЛАУ прямыми методами»**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задача:

Исследовать численный метод нахождения решения СЛАУ вида "Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке"

1. **Описание метода**

Основная идея метода:

Может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы А равен нулю. В этом случае обычный метод Гаусса оказывается непригодным, но может быть применен метод Гаусса с выбором главного элемента по строке.

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю в строке. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, т. е. наибольший по модулю элемент. Тогда, если , то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

Приведем пример с расширенной матрицей

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке, как и обычный метод Гаусса, состоит из двух этапов.

1. Сначала проводится прямой ход метода Гаусса, идея которого заключается в приведении матрицы к верхнему треугольному виду. После выбора ведущего элемента и перестановки столбцов, если необходимо, из элементов строк с номерами j (j = k+1,..., m, где m – количество строк, k – номер шага) вычитаются элементы строки с номером k, умноженную на отношение элементов этих строк s = .

Получим матрицу вида:

1. Второй этап – обратный ход. Двигаясь по строкам матрицы снизу вверх, поочередно будем вычислять компоненты столбца решения (от последней к первой). Каждый раз будет оставаться одна неизвестная, другие же будут получены на предыдущей итерации.

Условия применимости метода:

Для применения метода Гаусса с выбором ведущего элемента по строке необходимо и достаточно, чтобы матрица была невырожденной.

1. **Результаты исследования метода**

Для исследования зависимости времени выполнения метода **t** от размерности матрицы **N** будем создавать матрицы различных размерностей, заполненные случайными числами.

Размерность будем менять в промежутке [10; 5120] – каждая следующая матрица имеет в 2 раза больше строк, чем предыдущая.

График будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, линия, График, снимок экрана

Автоматически созданное описаниеПо графику видно, зависимость времени исполнения метода кубическая: увеличение размерности матрицы в 10 раз увеличивает временные затраты в раз, что в точности согласуется с теорией – для нахождения решения с помощью метода Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу требуется арифметических операций.

Для исследования зависимости абсолютной погрешности решения и невязки от числа обусловленности матрицы будем строить матрицу с определенными числами обусловленности при помощи ортогональной матрицы и диагональной матрицы с собственными числами на диагонали. Тогда матрица . Столбец свободных членов b получается умножением матрицы A на столбец точных решений .

Для построения графика вычисляются евклидовы нормы вычислительной ошибки и невязки.

1. Норма вычислительной ошибки:

.

1. Норма невязки:

*.*

Число обусловленности будем менять в промежутке [].

График будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

На графике пунктирными линиями построены аппроксимирующие прямые для нормы абсолютной погрешности (синим цветом) и нормы невязки (черным цветом).

По графику видно, что увеличение числа обусловленности приводит к увеличению как абсолютной погрешности решения, так и невязки с зависимостью, близкой к линейной.

1. **Выводы**

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке является более устойчивым по сравнению с классическим методом Гаусса за счет минимизации неограниченного роста (по модулю) элементов матриц на каждом шаге. Такой алгоритм позволяет сократить погрешность, вызванную ошибками округления.

Метод имеет достаточно большую вычислительную сложность , что позволяет сделать вывод о том, что для матриц большой размерности метод будет не оптимален по скорости. Однако среди условий применимости лишь невырожденность матрицы, что позволяет использовать метод Гаусса практически для любой матрицы.