Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 3

**Тема «Решение СЛАУ методами ортогонализации»**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задачи:

Исследовать численный метод нахождения решения СЛАУ вида "Модифицированный метод Грама-Шмидта".

Сравнить эффективность модифицированного метода Грама-Шмидта с методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строке.

1. **Описание метода**

Основная идея метода:

Для решения СЛАУ вида используют методы ортогонализации, в частности метод Грама-Шмидта. Основная идея заключается в разложении матрицы на произведение ортогональной матрицы и верхней треугольной матрицы . Тогда исходное уравнение можно записать в следующем виде: , откуда .

Однако данный метод обладает существенным недостатком, который выражается в том, что алгоритм оказывается малоустойчивым по отношению к ошибкам задания ортонормируемых векторов. По сути, в классическом алгоритме каждый следующий вектор вычисляется ортогональным ко всем предыдущим векторам, что приводит к накоплению большой вычислительной ошибки. Неустойчивость данного алгоритма можно существенно уменьшить, воспользовавшись модифицированным методом Грама-Шмидта. В модифицированном алгоритме процедура ортогонализации осуществляется только относительно одного предыдущего вектора, а не всех.

Опишем подробнее процесс получения матриц и на примере квадратной матрицы , где -ый столбец матрицы .

Столбцы , , образуют базис в трехмерном пространстве, так как они линейно независимы и их количество совпадает с размерностью пространства. Построим ортонормированный базис , , .

Для начала:

Первый вектор ортонормированного базиса . Теперь:

Второй вектор ортонормированного базиса . Теперь:

Наконец, третий вектор ортонормированного базиса .

Тогда матрицы и будут выглядеть следующим образом:

, где -ый столбец матрицы .

Условия применимости метода:

Для применения модифицированного метода Грама-Шмидта необходимо и достаточно, чтобы матрица была невырожденной.

1. **Результаты исследования метода**
   1. Для исследования зависимости времени исполнения метода **t** от размерности матрицы **N** будем создавать матрицы различных размерностей, заполненные случайными числами.

Размерность будем менять в промежутке [10;1280] – каждая следующая матрица имеет в 2 раза больше строк, чем предыдущая.

График будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, линия, снимок экрана, График

Автоматически созданное описание

По графику видно, что зависимость времени выполнения метода кубическая: увеличение размерности матрицы в 10 раз увеличивает временные затраты примерно в раз, что в точности согласуется с теорией – для нахождения решения с помощью модифицированного метода Грама-Шмидта требуется арифметических операций.

Теперь сравним временные затраты на выполнение модифицированного метода Грама-Шмидта с временными затратами на выполнение метода Гаусса с выбором ведущего элемента по строке для матриц одинаковых размерностей.

График зависимости будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, линия, снимок экрана, График

Автоматически созданное описание

Из графика видно, что для матрицы одной размерности модифицированному методу Грама-Шмидта требуется больше временных затрат, чем методу Гаусса с выбором ведущего элемента по строке.

* 1. Для исследования зависимости абсолютной погрешности решения и невязки от числа обусловленности матрицы будем строить квадратную матрицу с определенными числами обусловленности при помощи ортогональной матрицы и диагональной матрицы с собственными числами на диагонали. Тогда матрица .

Столбец точных решений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10.

Столбец свободных членов b получается умножением матрицы A на столбец точных решений

Для построения графика вычисляются евклидовы нормы вычислительной ошибки и невязки.

1. Норма вычислительной ошибки:

.

1. Норма невязки:

*.*

Число обусловленности будем менять в промежутке [].

График будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, линия, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание

По графику видно, что увеличение числа обусловленности приводит к увеличению как абсолютной погрешности решения, так и невязки с зависимостью, близкой к линейной.

Теперь сравним точность решения модифицированного метода Грама-Шмидта с точностью метода Гаусса с выбором ведущего элемента по строке для матриц с одинаковыми числами обусловленности.

График зависимости будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, График

Автоматически созданное описание

Из графика видно, что с ростом числа обусловленности и абсолютная погрешность решения, и невязка при решении СЛАУ модифицированным методом Грама-Шмидта растут быстрее в сравнении с методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строке.

1. **Выводы**

Модифицированный метод Грама-Шмидта является более устойчивым по сравнению с классическим алгоритмом Грама-Шмидта за счет ортогонализации вектора нового базиса относительно лишь одного предыдущего вектора, а не всех.

Однако сравнение с методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строке показывает, что даже модифицированный алгоритм Грама-Шмидта является крайне численно неустойчивым.

Более того, в сравнении с методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строке модифицированный метод Грама-Шмидта уступает по скорости нахождения решения СЛАУ вида , поскольку имеет бóльшую вычислительную сложность.

Среди условий применимости такого метода ортогонализации лишь невырожденность матрицы, что позволяет использовать алгоритм Грама-Шмидта практически для любой матрицы, но метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке является наиболее предпочтительным.