Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 4

**Тема «Решение СЛАУ итерационными методами»**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задача:

Исследовать численный метод "Сопряженные градиенты" для нахождения решения СЛАУ вида .

1. **Описание метода**

Основная идея метода:

Первоначально метод сопряженных градиентов был разработан для решения СЛАУ вида , где – вектор неизвестных, – вектор свободных членов, а – квадратная, симметричная, положительно–определенная матрица, то есть . Решение этой системы эквивалентно нахождению минимума соответствующей квадратичной формы

Рассмотрение метода сопряженных градиентов целесообразно начать с рассмотрения более простого метода поиска экстремума функции – метода наискорейшего спуска.

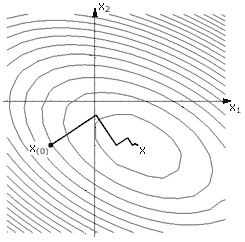
Суть этого метода:

* в начальной точке вычисляется градиент – поскольку градиент функции в точке показывает направления наибольшего возрастания функции, движение из точки осуществляется в направлении антиградиента до тех пор, пока уменьшается целевая функция;
* в точке, где функция перестает уменьшаться, опять вычисляется градиент, и спуск продолжается в новом направлении;
* процесс повторяется до достижения точки минимума.

Общий вид отыскания следующего приближения выглядит следующим образом:

Стоит отметить, что .

На рисунке изображена траектория движения в точку минимума методом наискорейшего спуска.



В данном случае каждое новое направление движения ортогонально предыдущему. Существует более разумный способ выбора нового направления движения – метод сопряженных направлений. А метод сопряженных градиентов как раз относится к группе методов сопряженных направлений. Поиск следующего приближения выглядит следующим образом:

Направление должно быть -сопряженным (ортогональным) всем предыдущим направлениям , то есть , где

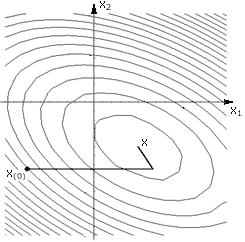
Вектор будем искать в виде:

Из условия ортогональности получаем выражение для

При подстановке выражения для в уравнение квадратичной формы и из условия минимума функции получим выражение для

Вектор невязки будет обновляться следующим образом:

На рисунке изображена траектория движения в точку минимума при использовании метода сопряженных градиентов.



Условия применимости метода:

Для применения метода сопряженных градиентов необходимо и достаточно, чтобы квадратная матрица  была симметричной и положительно-определенной, то есть .

1. **Результаты исследования метода**
   1. Для исследования зависимости времени исполнения метода **t** от размерности матрицы **N** будем создавать симметричные положительно-определенные матрицы различных размерностей с одним и тем же числом обусловленности , чтобы избежать влияния обусловленности системы.

Размерность будем менять в промежутке [10;1280] – каждая следующая матрица имеет в 2 раза больше строк, чем предыдущая.

График будем строить в логарифмических осях – за счет этого аппроксимирующий график будет являться линейным.

Изображение выглядит как текст, линия, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание

По графику видно, что зависимость времени выполнения метода кубическая: увеличение размерности матрицы в 10 раз увеличивает временные затраты примерно в раз, что в точности согласуется с теорией – для нахождения решения с помощью метода сопряженных градиентов требуется  арифметических операций.

* 1. Для исследования зависимости абсолютной погрешности решения и количества итераций от точности решения **ε** будем строить квадратную симметричную положительно-определенную матрицу  при помощи ортогональной матрицы и диагональной матрицы с положительными собственными числами на диагонали. Тогда матрица .

Столбец точных решений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10.

Столбец свободных членов b получается умножением матрицы A на столбец точных решений

Для построения графика зависимости абсолютной погрешности решения от точности решения вычисляется евклидова норма вычислительной ошибки:

.

Точность решения **ε** будем менять в промежутке .

График будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

По графику видно, что скорость сходимости метода настолько высокая, что уже при точности решения норма абсолютной погрешности достигает значений порядка .

Изображение выглядит как текст, График, линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Из графика видно, что с увеличением точности решения **ε** уменьшается количество итераций, необходимых для нахождения решения СЛАУ. Так же можно увидеть, что начиная с число итераций не превышает размерность матрицы, что согласуется с теорией.

1. **Выводы**

Метод сопряженных градиентов является методом первого порядка, в то же время скорость его сходимости квадратичная. Этим он выгодно отличается от обычного градиентного метода.

Согласно теории, метод сопряженных градиентов находит решение СЛАУ за n шагов (n – размерность матрицы). Количество итераций зависит как от заданной точности решения **ε**,так и от представления вещественных чисел в памяти компьютера, однако даже несмотря на это в работе были получены значения, не сильно противоречащие теории.

Несмотря на столько преимуществ, метод сопряженных градиентов не является универсальным, поскольку он может быть применен далеко не для всех матриц, а лишь для симметричных и положительно-определенных.