Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 5

**Тема «Решение алгебраической проблемы собственных значений для матриц специального вида»**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задача:

Исследовать метод Леверье для нахождения собственных значений матрицы общего вида.

1. **Описание метода**

Основная идея метода:

Для любой квадратной матрицы можно записать характеристический многочлен, который имеет вид

где собственные числа – его корни, среди которых могут быть и равные, другими словами, , где .

Метод Леверье предназначен для нахождения коэффициентов характеристического многочлена . Опишем процесс получения этих коэффициентов подробнее.

Введем, для начала, такое понятие как след матрицы. След матрицы — это сумма всех элементов, стоящих на главной диагонали матрицы . Одним из свойств следа матрицы является его равенство сумме собственных значений .

Учитывая условие, что если – собственные числа , то – собственные числа , можно записать следующую сумму

Теорема единственности, известная из курса высшей алгебры, утверждает: любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Суммы степеней корней характеристического многочлена связаны с его коэффициентами формулами Ньютона

Отсюда получаем

Таким образом, схема раскрытия определителя по методу Леверье весьма простая, а именно: сначала вычисляются - степени матрицы , затем находятся соответствующие - суммы элементов главных диагоналей матриц и, наконец, определяются искомые коэффициенты .

Полученные значения подставляются в выражение для характеристического многочлена , и при помощи средств *MatLab* находятся его корни, то есть необходимые собственные значения .

Условия применимости метода:

Для применения метода Леверье необходимо и достаточно, чтобы квадратная матрица была невырожденной.

1. **Результаты исследования метода**
   1. Для исследования зависимости времени исполнения метода **t** от размерности матрицы **N** будем создавать матрицы различных размерностей с одним и тем же числом обусловленности , чтобы избежать влияния обусловленности системы.

Размерность будем менять в промежутке [10;320] – каждая следующая матрица имеет в 2 раза больше строк и столбцов, чем предыдущая.

График будем строить в логарифмических осях – за счет этого аппроксимирующий график будет являться линейным.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, График

Автоматически созданное описание

По графику видно, что зависимость времени выполнения метода имеет характер четвертой степени: увеличение размерности матрицы в 10 раз увеличивает временные затраты примерно в раз.

* 1. Для следующего исследования метода будем строить квадратные симметричные матрицы заданной размерности при помощи ортогональной матрицы и диагональной матрицы с собственными числами на диагонали. Тогда матрица .

A) Хорошо отделимые собственные числа.

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10.

B) Два собственных числа равны по модулю, но противоположны по значению.

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10, но число 9 заменяется на -10.

C) Плохо отделимые собственные числа.

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10, но число 9 заменяется на 10,0051595092390.

В качестве результата приведем таблицу для каждого из случаев.

**Таблица 1.** Нормы абсолютных погрешностей вычисления собственных чисел для симметричных матриц.

|  |  |
| --- | --- |
| *Случай* | *Норма абсолютной погрешности* |
| A) | 6.16720193926688e-09 |
| B) | 2.26370455103701e-10 |
| C) | 0.00523810853788558 |

Из Таблицы 1 видно, что для матрицы с плохо отделимыми собственными числами норма ошибки достаточно велика.

* 1. Для следующего исследования метода будем строить квадратные несимметричные матрицы заданной размерности при помощи невырожденной матрицы и диагональной матрицы с собственными числами на диагонали. Тогда матрица .

A) Хорошо отделимые собственные числа.

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10.

B) Два собственных числа равны по модулю, но противоположны по значению.

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10, но число 9 заменяется на -10.

C) Плохо отделимые собственные числа.

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10, но число 9 заменяется на 10,0051595092390.

В качестве результата приведем таблицу для каждого из случаев.

**Таблица 2.** Нормы абсолютных погрешностей вычисления собственных чисел для несимметричных матриц.

|  |  |
| --- | --- |
| *Случай* | *Норма абсолютной погрешности* |
| A) | 7.70571313663092e-09 |
| B) | 1.32145444077490e-09 |
| C) | 0.0123252612252450 |

Из Таблицы 2 видно, что для матрицы с плохо отделимыми собственными числами норма ошибки достаточно велика.

1. **Выводы**

Метод Леверье является достаточно простым в реализации алгоритмом для нахождения собственных значений квадратной матрицы . Также, метод Леверье является универсальным, поскольку для применимости данного алгоритма необходима и достаточна лишь невырожденность матрицы .

При исследовании метода Леверье как на симметричных, так и на несимметричных матрицах была выявлена неустойчивость алгоритма для матриц с плохо отделимыми собственными числами.

Сравнение результатов исследования для симметричных и несимметричных матриц показывает, что точность нахождения собственных значений у симметричных матриц в среднем выше.

Среди недостатков можно выделить большую вычислительную сложность алгоритма, равную , что затрудняет использование метода Леверье для матриц больших размерностей.