Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 6

**Тема «Решение алгебраической проблемы собственных значений итерационными методами»**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задача:

Исследовать степенной метод с оптимальным сдвигом для нахождения максимального собственного значения матрицы .

1. **Описание метода**

Основная идея метода:

Для квадратной матрицы далеко не всегда требуется находить все собственные значения (весь спектр), а лишь максимальное по модулю собственное число. Для этой выполнения задачи удобен степенной метод.

Пусть дана матрица простой структуры, то есть у неё есть ровно n линейно независимых собственных векторов (существует базис из собственных векторов). И пусть собственные значения удовлетворяют следующему неравенству

Тогда для определения можно построить итерационный процесс, называемый степенным методом. В качестве начального приближения можно выбрать произвольный, отличный от нуля вектор

где – собственный вектор матрицы , отвечающий собственному значению .

Такое представление вектора возможно за счёт свойства матриц простой структуры, утверждающее следующее: у матрицы простой структуры собственные векторы образуют базис в пространстве n-мерных векторов.

Далее строится следующий итерационный процесс

**……………………………………………**

После чего рассматривается -ое приближение для , то есть «отношение»

Так как при :

Стоит отметить, что слово «отношение» взято в кавычки, поскольку употреблено не совсем строго: понятно, что векторы могут оказаться неколлинеарными, и тогда их «отношение» смысла иметь не будет. Один из способов решения этой проблемы – рассматривать отношение проекций последовательных приближений на направление, задаваемое, например, вектором . Тогда выражение для примет вид

И, наконец, стоит прояснить ещё один момент, касающийся вычисления вектора . Если , то при больших k может произойти превышение допустимых для ЭВМ чисел. Если же , то произойдет исчезновение значащих цифр. Устранить этот недостаток можно за счет нормировки вектора на каждой итерации, то есть вектор заменяется на .

При использовании евклидовой нормы знаменатель выражения для обратится в единицу.

Рассмотрим случай, когда , то есть

Поскольку величина определяет скорость сходимости (чем она меньше, тем сходится быстрее), рационально, для улучшения сходимости, рассматривать новую матрицу, спектр которой сдвинут относительно спектра матрицына величину

Изображение выглядит как линия, вешалка

Автоматически созданное описание

Получаем новую матрицу , для которой применяем обычный степенной метод. Максимальное собственное значение матрицы будет равно .

Условия применимости метода:

Для применения степенного метода с оптимальным сдвигом необходимо и достаточно, чтобы квадратная матрица простой структуры была положительно-определенной.

1. **Результаты исследования метода**

Для исследования зависимости абсолютной погрешности решения и количества итераций от точности решения **ε**, а также зависимости абсолютной погрешности от числа итераций, будем строить квадратную симметричную положительно-определенную матрицу  при помощи ортогональной матрицы и диагональной матрицы с положительными собственными числами на диагонали. Тогда матрица .

A) Хорошо отделимые собственные числа (отношение первого и второго собственных чисел равно 0,1).

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 10 до 2, начиная со второго – первое собственное число равно 100.

B) Хорошо отделимые собственные числа (отношение первого и второго собственных чисел равно 0,5).

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 10 до 2, начиная со второго – первое собственное число равно 100. Число 10 заменяется на 50.

C) Плохо отделимые собственные числа (отношение первого и второго собственных чисел равно 0,9).

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 10 до 2, начиная со второго – первое собственное число равно 100. Число 10 заменяется на 90.

Точность решения **ε** будем менять в промежутке .

График будем строить в логарифмических осях – за счет этого аппроксимирующий график будет являться линейным.

Изображение выглядит как текст, линия, снимок экрана, График

Автоматически созданное описание

По графику наглядно видно, что отделимость собственных чисел влияет на точность решения – чем больше отношение первого собственного значения ко второму, тем меньше точность решения. Также видно, что зависимость вычислительной ошибки от точности решения имеет линейный характер для каждого из трех случаев.

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Из графика видно, что отделимость собственных чисел влияет на число итераций – чем больше отношение первого собственного значения ко второму, тем больше итераций необходимо для нахождения наибольшего собственного числа.

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

По графику видно, что отделимость собственных чисел влияет на скорость сходимости метода – чем больше отношение первого собственного значения ко второму, тем больше итераций необходимо для достижения требуемой точности.

1. **Выводы**

Степенной метод с оптимальным сдвигом является достаточно простым в реализации алгоритмом для нахождения максимального собственного числа матрицы. Сдвиг позволяет увеличить скорость сходимости метода, однако накладывает на матрицу дополнительные требования. В отличие от стандартного степенного метода недостаточно лишь матрицы простой структуры – вдобавок необходима положительная определенность, что делает степенной метод с оптимальным сдвигом менее универсальным.

При исследовании степенного метода с оптимальным сдвигом на матрицах с различной отделимостью собственных чисел была выявлена закономерная неустойчивость алгоритма для матриц с большим отношением первого собственного значения ко второму, а также заметный рост количества итераций при ухудшении отделимости.