Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 7

**Тема «Решение алгебраической проблемы собственных значений итерационными методами»**

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Тишковец С. Е.

Преподаватель: Фролов А. С.

Санкт-Петербург

2023

1. **Постановка задачи**

Задача:

Исследовать метод со сдвигом для нахождения собственных значений матрицы .

1. **Описание метода**

Основная идея метода:

Пусть дана произвольная матрица , собственные числа которой обозначены . Тогда можно построить следующий итерационный процесс. Пусть , тогда шаг алгоритма выглядит следующим образом:

где – ортогональная матрица, – верхняя треугольная матрица.

На каждом шаге алгоритма с помощью метода Грама-Шмидта строится разложение текущей матрицы в произведение ортогональной и верхней треугольной , которые затем перемножаются в обратном порядке.

Сходимость – алгоритма зависит от отношений модулей собственных значений и, в случае их плохого разделения, может быть медленной. Сходимость процесса можно ускорить использованием сдвигов матрицы на каждом шаге. Покажем новый алгоритм со сдвигом для нахождения всего спектра матрицы :

Где - сдвиг, – ортогональная матрица, – верхняя треугольная матрица.

Все матрицы подобны исходной матрице . Покажем это

Если все собственные значения матрицы различны по модулю, то

где в качестве \* обозначены ненулевые элементы.

В общем случае последовательность сходится по форме к правой квазитреугольной матрице.

Мы будем рассматривать вариант с различными собственными значениями, поэтому результатом алгоритма будет являться верхняя треугольная матрица, а в качестве критерия остановки итерационного процесса будем использовать сравнение поддиагональных элементов матрицы с заданным числом **ε**.

Одно из достоинств QR - алгоритма состоит в том, что он не меняет правую почти треугольную форму исходной матрицы, то есть матрицу Хессенберга. Поэтому матрицу, для которой определяются собственные значения, мы предварительно приведем к матрице Хессенберга. Тогда и все матрицы  будут иметь тот же вид. Это предварительное преобразование очень эффективно, так как один шаг QR - алгоритма для почти треугольной матрицы выполняется примерно в раз быстрее, чем для полной матрицы.

На практике, в качестве сдвига удобнее брать последний диагональный элемент матрицы , то есть . Однако в этой работе будут исследованы, помимо данного варианта, еще несколько статичных значений сдвига.

Условия применимости метода:

Для применения метода со сдвигом подходит любая квадратная матрица .

1. **Результаты исследования метода**

Для исследования зависимости абсолютной погрешности решения и количества итераций от точности решения **ε**, а также зависимости абсолютной погрешности от числа итераций, будем строить квадратную симметричную матрицу  при помощи ортогональной матрицы и диагональной матрицы с собственными числами на диагонали. Тогда матрица .

Столбец точных собственных значений задается как последовательность целых чисел от 1 до 10.

Исследование будет проводиться для метода с различными сдвигами: первые три будут статичными, а последний будет зависеть от номера итерации.

1. В качестве сдвига берется нулевой сдвиг, то есть .
2. В качестве сдвига берется максимальное по модулю собственное число, то есть .
3. В качестве сдвига берется максимальное по модулю собственное число с противоположным знаком, то есть .
4. В качестве сдвига берется последний диагональный элемент матрицы , то есть .

Точность решения **ε** будем менять в промежутке .

График будем строить в логарифмических осях.

Изображение выглядит как текст, линия, снимок экрана, График

Автоматически созданное описание

Нетрудно увидеть, что уже при точности решения порядка абсолютная погрешность достигает порядка .

По графику видно, что сдвиг хоть и не сильно, однако влияет на точность решения – анализ графика показывает, что для значения сдвига, равного 10, точность, в среднем, хуже остальных, в то время как для сдвига, равного -10, погрешность нахождения собственных значений наименьшая.

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Из графика видно, что величина сдвига влияет на число итераций, необходимых для нахождения спектра матрицы. Так, менее затратным оказался сдвиг, равный -10, в то время как алгоритм со сдвигом, равным 10, требует наибольшее число итераций.

Изображение выглядит как текст, линия, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание

По графику видно, что величина сдвига влияет на скорость сходимости метода. Алгоритм, в котором применяется сдвиг, равный -10, имеет наилучшую скорость сходимости, в то время как для сдвига, равного 10, необходимо наибольшее число итераций для достижения требуемой точности.

1. **Выводы**

QR метод со сдвигом является универсальным и достаточно простым в реализации алгоритмом для нахождения всего спектра матрицы. Предварительное приведение исходной матрицы к матрице Хессенберга позволяет значительно снизить объем вычислений, что, в совокупности с применением сдвига, дает высокую скорость сходимости алгоритма.

Исследование QR метода с различными сдвигами показывает, что наиболее эффективным является сдвиг, равный по модулю максимальному собственному числу и взятый с противоположным знаком, в то время как сдвиг, равный максимальному собственному значению показывает наихудшие результаты как при исследовании зависимости числа итераций от заданной точности **ε**, так и при исследовании зависимости абсолютной погрешности от числа итераций.