

# 1. Глава Множества и Отображения

## 1.1. Множества

### 1.1.1. п. Понятие множества

Множества – это совокупность различных объектов произвольной природы, рассматриваемая как единое целое. Сами объекты называются элементами множества.

Для обозначения множеств будем использовать прописные буквы латинского алфавита ( $A, B, C, \dots$ ), а для элементов строчные ( $a, b, c, \dots$ ).

Тот факт, что некоторый объект  $x$  является элементом множества  $A$ , записывают  $x \in A$ . Если же  $x$  не является элементом  $A$ , записывают  $x \notin A$ .

В качестве синонимов термина "множество" будем использовать термины "класс", "семейство", "система", "набор" и др.

**Способы задания множества:**

1. Если множества  $A$  состоят из конечного числа элементов, то можно просто все эти элементы перечислить, записав их в фигурных скобках через запятую. Например, если  $A$  есть множество букв, составляющих слово "математика" то  $A = \{м, а, т, е, и, к\}$
2. Пусть  $P$  – какое-либо свойство, и запись  $P(x)$ , означает, что объект  $x$  обладает свойством  $P$ . Тот факт, что  $A$  есть множество объектов, обладающих свойством  $P$ , записывают  $A = \{x | P(x)\}$  – это обозначение слов, „которые“ или „такие что“

Если мы дополнительно потребуем, чтобы эти объекты выбирались из некоторого другого множества  $B$ , то запишем  $A = \{x \in B | P(x)\}$

Читается это так: множество  $A$  состоит из тех (и только тех) элементов множества  $B$ , которые обладают свойством  $P$ .

Пример. Пусть  $A$  – множество букв русского алфавита. Тогда множество гласных букв  $B = \{x \in A | x \text{ — гласная}\}$ . Запишем, что здесь можно воспользоваться способом 1):  $B = \{а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я\}$ .

Множества  $A$  и  $B$  равны (обозначение:  $A = B$ ), если они состоят из одних и тех же элементов. Выражение  $A \neq B$  означает, что множества  $A$  и  $B$  не равны, т.е. не все элементы одного множества являются элементами другого.

Равенство есть отношение эквивалентности между множествами, т.к. оно обладает следующими свойствами:

1. рефлексивностью ( $A = A$ )
2. симметричностью (если  $A = B$ , то  $B = A$ )
3. транзитивностью (если  $A = B$  и  $B = C$ , то  $A = C$ )

Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то говорят, что  $A$  является подмножеством множества  $B$  (или  $A$  содержится в  $B$ ). Обозначим:  $A \subset B$

**Свойства:**

1.  $A \subset A$ ;

2. если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то  $A = B$ ;

3. если  $A \subset B$  и  $B \subset C$ , то  $A \subset C$

Удобно ввести множество, совсем не имеющие элементов и называемое пустым множеством. Обозначение:  $\emptyset$

Пустое множество является подмножеством любого множества.

### 1.1.2. п. Логическая символика

Утверждение – это высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным. Пусть  $A$  и  $B$  утверждения, Тогда

1. Утверждение  $\neg A$  (не  $A$ ) истинно тогда и только тогда, когда  $A$  ложно;
2. Утверждение  $A \wedge B$  ( $A$  и  $B$ ) истинно тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  истинны;
3. Утверждение  $A \vee B$  ( $A$  или  $B$ ) истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из утверждений  $A$  и  $B$  истинно;
4. Утверждение  $A \Rightarrow B$  (из  $A$  следует  $B$ ) означает, что если  $A$  истинно, то и  $B$  – истинно;
5. Утверждение  $A \Leftrightarrow B$  ( $A$  равносильно  $B$ ) означает, что из истинности  $A$  следует истинности  $B$  и из истинности  $B$  следует истинности  $A$ ;

В формулировках утверждений часто используется следующее: „если  $A$ , то  $B$ “, „для того, чтобы  $A$ , необходимо, что  $B$ “, „для того, чтобы  $B$ , достаточно, чтобы  $A$ “, что означает  $A \Rightarrow B$